

博士学位論文

ヘリコプタ 前進飛行時の ロータ・ワール安定性

平成27年3月

名古屋大学大学院
工学研究科航空宇宙工学専攻
中山 周一

目次

第1章 緒論	
1.1 はじめに	1
1.2 ヘリコプタ開発の歴史	
1.2.1 固定翼機との相違点	2
1.2.2 オートジャイロからヘリコプタへ	6
1.3 ヘリコプタ・ロータの動力学問題	
1.3.1 ブレードの固有振動数	10
1.3.2 ブレード・フラッタ	12
1.3.3 フラッピング不安定	12
1.3.4 フラップ・ラグ不安定	12
1.3.5 地上共振および空中共振	12
1.3.6 ワール・フラッタ	13
1.4 本研究の目的	13
1.5 本論文の構成	16
第2章 支持系を含むヘリコプタ・ロータの力学的特性	
2.1 はじめに	17
2.2 運動方程式	17
2.3 構造振動モード解析	19
2.4 地上共振	26
2.5 まとめ	27
第3章 前進飛行時のヘリコプタ・ロータのワール不安定	
3.1 はじめに	29
3.2 ブレード空気力モデル	29
3.3 ハブ運動によるブレード・ピッチ角変化	32
3.4 ワール不安定現象のシミュレーション	
3.4.1 釣り合い状態	33
3.4.2 線形化モデル	35
3.4.3 Floquetの定理による安定判別	39
3.4.4 安定判別結果	40
3.5 まとめ	41
第4章 ヘリコプタ・ロータのワール不安定に関するパラメータ共振解析	
4.1 はじめに	43
4.2 空気力を介した不安定現象	
4.2.1 定数変化法	43
4.2.2 空気力の変換	46
4.2.3 パラメータ共振の組合せ	51
4.3 ワールモードとシザーモードのパラメータ共振解析	
4.3.1 フラップ項の省略	52
4.3.2 定数変化法の適用	53
4.3.3 解析結果	58
4.3.4 ほかのパラメータ共振条件	60
4.3.5 安定性に関する考察	62
4.3.6 パラメータ共振の回避方法	65
4.4 まとめ	65
第5章 結論	67
付録 運動方程式の導出	68
参考文献	71
謝辞	73
論文目録	74

記 号

$\mathbf{A}(t)$ \mathbf{c} の微分方程式 $\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{c}$ の係数行列

$\mathbf{A}_n(t)$ \mathbf{c}_n の微分方程式 $\dot{\mathbf{c}}_n = \mathbf{A}_n(t)\mathbf{c}_n$ の係数行列

\mathbf{A}'_n \mathbf{c}'_n の微分方程式 $\dot{\mathbf{c}}'_n = \mathbf{A}'_n\mathbf{c}'_n$ の係数行列

$a_{i,j}$ 行列 $\mathbf{A}(t)$ の (i, j) 成分

$a'_{3,2n-1}, a'_{3,2n}, a'_{2n-1,3}, a'_{2n-1,4}$ 行列 \mathbf{A}'_n の成分

Δa_n $\Delta a_n = a_{3,3} - a_{2n-1,2n-1}$ ($n = 5, 6$)

A_l 横サイクリックピッチ角

A_R 固定翼機のアスペクト比

B_l 縦サイクリックピッチ角

\mathbf{b} 運動法方程式 $\mathbf{M}'\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{b} = \mathbf{f}_A + \mathbf{f}_D$ の左辺第2項ベクトル

b_i ベクトル \mathbf{b} の成分 ($i = 1, 2, \dots, 10$)

b_W 固定翼の主翼幅

C_D ヘリコプタ抗力係数 $C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho V^2 V S_h}$

C_L ロータ揚力係数 $C_L = \frac{W}{\rho\pi R^2(\Omega R)^2}$

$\frac{C_L}{\sigma}$ ブレード翼面荷重 $\frac{C_L}{\sigma} = \frac{W}{\rho\pi R^2(\Omega R)^2} \frac{\pi R}{4c}$

c 翼弦長

c_l, c_d 2次元の揚力／抗力係数

c_{lM}, c_{dM} マッハ数 M での揚力／抗力係数

\mathbf{c} $\mathbf{c} = \{c_{R1}, c_{I1}, c_{R2}, c_{I2}, c_{R3}, c_{I3}, c_{R4}, c_{I4}, c_{R5}, c_{I5}, c_{R6}, c_{I6}, c_{R7}, c_{I7}, c_{R8}, c_{I8}, c_{R9}, c_{I9}, c_{R10}, c_{I10}\}^T$

c_{Ri}, c_{Ii} 定数変化法における i 番モード解の係数, 例えば $x_1 = \sum_{i=1}^4 m_2 \omega_i^2 (c_{Ri} \cos \omega_i t - c_{Ii} \sin \omega_i t)$

$\tilde{\mathbf{c}}$ \mathbf{c} から最初の12つの成分を取り出したベクトル

\mathbf{c}_n $\mathbf{c}_n = \{c_{R2}, c_{I2}, c_{Rn}, c_{In}\}^T$

\mathbf{c}'_n $\mathbf{c}'_n = \{c'_{R2}, c'_{I2}, c'_{Rn}, c'_{In}\}^T$

c_i ベクトル \mathbf{c} の i ($i = 1, 2, \dots, 20$) 成分

c_{Zi} $c_{Zi} = c_{Ri} + i c_{Ii}$

$c'_{Z2}, c'_{R2}, c'_{I2}$ $c'_{Z2} = c'_{R2} + i c'_{I2} = c_{Z2} e^{i\epsilon_n t}$

$$c'_{Zn}, c'_{Rn}, c'_{In} \quad c'_{Zn} = c'_{Rn} + \mathbf{i}c'_{In} = c_{Zn} \quad (n = 5 \text{ or } 6)$$

$$c_{n,2}, c_{2,n} \quad a'_{3,2n-1} = c_{2,n} \cos \varphi_{2,n}, a'_{3,2n} = c_{2,n} \sin \varphi_{2,n}, a'_{2n-1,3} = c_{n,2} \cos \varphi_{n,2}, a'_{2n-1,4} = c_{n,2} \sin \varphi_{n,2} \text{ の係数}$$

$$[c_i, c_j] \quad \text{Lagrangeの括弧式}$$

$$c_{ijkl} \quad c_{ijkl} = (-1)^{i+1} \cos(n\pi/2) + (-1)^{j+1} \cos(n\pi) + (-1)^{k+1} \cos(3n\pi/2) + (-1)^{l+1}$$

$$cs_{ijk} \quad cs_{ijk} = (-1)^{i+1} \cos(n\pi/2) + (-1)^{j+1} \sin(n\pi) + (-1)^{k+1} \cos(3n\pi/2)$$

$$\mathbf{c}_T \quad \text{操舵入力 } \mathbf{c}_T = \{\theta_0, B_1, A_1\}^T$$

$$\mathbf{D}_0 \quad \text{運動方程式 } \mathbf{M}_0 \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_0 \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_0 \mathbf{x} = 0 \text{ の減衰係数}$$

$$D_{0i,j} \quad \text{行列 } \mathbf{D}_0 \text{ の } (i, j) \text{ 成分}$$

$$\mathbf{D}'_0 \quad \mathbf{D}'_0 = \mathbf{U} \mathbf{D}_0 \mathbf{U}^T + 2 \mathbf{U} \mathbf{M}_0 \dot{\mathbf{U}}^T \text{ にて定義される変数 } \mathbf{y}, \Delta \mathbf{y} \text{ での減衰行列}$$

$$\tilde{\mathbf{D}}'_0 \quad \mathbf{D}'_0 \text{ の左上の } 6 \times 6 \text{ を取り出した行列}$$

$$D'_{0i,j} \quad \text{行列 } \mathbf{D}'_0 \text{ の } (i, j) \text{ 成分}$$

$$D_{0i,j} \quad \text{行列 } \mathbf{D}_0 \text{ の } (i, j) \text{ 成分}$$

$$\mathbf{D}''_0 \quad \mathbf{D}''_0 = \mathbf{U}' \mathbf{D}_0 \mathbf{U}'^T + 2 \mathbf{U}' \mathbf{M}_0 \dot{\mathbf{U}}'^T \text{ にて定義される変数 } \mathbf{y}' \text{ での減衰行列}$$

$$D''_{0i,j} \quad \text{行列 } \mathbf{D}''_0 \text{ の } (i, j) \text{ 成分}$$

$$\mathbf{D}_A \quad \text{線形化空気力 } \Delta \mathbf{f} = \mathbf{D}_A \Delta \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_A \Delta \mathbf{x} - \mathbf{D}_D \Delta \dot{\mathbf{x}} \text{ の係数行列}$$

$$D_{Aij} \quad D_{Aij}(t) = \left(\frac{\partial \Delta f_j}{\partial \Delta \dot{x}_i} \right) = \frac{f_{A_j}(\mathbf{x}_p(t), \dot{\mathbf{x}}_p(t) + \delta \dot{\mathbf{x}}_i) - f_{A_j}(\mathbf{x}_p(t), \dot{\mathbf{x}}_p(t))}{\Delta_0} \text{ にて計算される } \mathbf{D}_A \text{ の } (i, j) \text{ 成分}$$

$$\mathbf{D}'_f \quad \mathbf{D}'_f = \mathbf{U}(\mathbf{D}_A - \mathbf{D}_p) \mathbf{U}^T - 2 \mathbf{U} \mathbf{M}_p \dot{\mathbf{U}}^T + \mathbf{U} \mathbf{M}_p \mathbf{U}^T \mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{D}'_0 \text{ にて定義される変数 } \Delta \mathbf{y} \text{ の線形空力行列}$$

$$\tilde{\mathbf{D}}'_f \quad \text{行列 } \mathbf{D}'_f \text{ から左上の } 6 \times 6 \text{ を抜き出した行列}$$

$$\hat{\mathbf{D}}'_f \quad \text{行列 } \mathbf{D}'_f \text{ において, 定常成分とパラメータ共振の対象となる周波数成分だけを抜き出した行列}$$

$$\hat{D}'_{fij} \quad \text{行列 } \hat{\mathbf{D}}'_f \text{ の } (i, j) \text{ 成分}$$

$$\mathbf{D}_{\zeta x}, \mathbf{D}_{\beta x}, \mathbf{D}_{\zeta \zeta}, \mathbf{D}_{\beta \zeta}, \mathbf{D}_{\zeta \beta}, \mathbf{D}_{\beta \beta}$$

$$\mathbf{D}_A - \mathbf{D}_p \text{ の部分行列}$$

$$\mathbf{D}'_{x\zeta_1}, \mathbf{D}'_{x\zeta_3}, \mathbf{D}'_{\zeta_1 x}, \mathbf{D}'_{\zeta_1 \zeta_1}, \mathbf{D}'_{\zeta_1 \zeta_3}, \mathbf{D}'_{\zeta_1 \beta}, \mathbf{D}'_{\zeta_3 x}, \mathbf{D}'_{\zeta_3 \zeta_1}, \mathbf{D}'_{\zeta_3 \zeta_3}, \mathbf{D}'_{\zeta_3 \beta}, \mathbf{D}'_{\beta \zeta_1}, \mathbf{D}'_{\beta \zeta_3} \quad \mathbf{D}'_f \text{ の部分行列}$$

$$\mathbf{D}_p \quad \text{釣り合い状態 } \{\mathbf{x}_p, \dot{\mathbf{x}}_p, \ddot{\mathbf{x}}_p\}^T \text{ に起因する減衰行列}$$

$$\mathbf{D}_D \quad \text{減衰力 } \mathbf{f}_D = \mathbf{D}_D \Delta \dot{\mathbf{x}} \text{ を構成する減衰行列}$$

$$\mathbf{D}'_D \quad \mathbf{D}'_D = \mathbf{U} \mathbf{D}_D \mathbf{U}^T = \mathbf{D}_D \text{ にて定義される変数 } \Delta \mathbf{y} \text{ での減衰行列}$$

d_x	ハブ構造減衰
d_ζ	ブレード・ラグ減衰
$\mathbf{D}_s(t)$	$\mathbf{D}_s(t) = \mathbf{D}_0 + \mathbf{D}_D + \mathbf{D}_p - \mathbf{D}_A$
$D(\Omega)$	判別式
d_8, d_6, d_4, d_2, d_0	4次判別式 $D(\Omega) = d_8\Omega^8 + d_6\Omega^6 + d_4\Omega^4 + d_2\Omega^2 + d_0$ の係数
D_h	ヘリコプタ抗力
d_j	ブレード抗力 ($j=1,2,3,4$)
d_{ij}	\hat{D}'_{fij} のゲイン
e	ハブ中心～ヒンジ間距離
e_{PL}	ピッチリンクオフセット
$\Delta \mathbf{f}$	$\Delta \mathbf{f} = \mathbf{D}_A \Delta \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_A \Delta \mathbf{x} - \mathbf{D}_D \Delta \dot{\mathbf{x}}$ で表される運動方程式 $\mathbf{M}_0 \Delta \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_0 \Delta \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_0 \Delta \mathbf{x} = \Delta \mathbf{f}$ の外力
$\Delta \mathbf{f}'$	$\Delta \mathbf{f}' = (\mathbf{D}'_f - \mathbf{D}'_D) \Delta \dot{\mathbf{y}} + (\mathbf{K}'_f - \mathbf{K}'_D) \Delta \mathbf{y}$ で表される運動方程式 $\mathbf{M}'_0 \Delta \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{D}'_0 \Delta \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}'_0 \Delta \mathbf{y} = \Delta \mathbf{f}'$ の外力
$\Delta \tilde{\mathbf{f}}'$	$\Delta \mathbf{f}'$ から最初の6つの成分を取り出したベクトル
\mathbf{f}_A	運動方程式 $\mathbf{M}'\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{b} = \mathbf{f}_A + \mathbf{f}_D$ の右辺空気力
f_{Ai}	\mathbf{f}_A の i ($i=1,2,\dots,10$) 成分
f_{AZ}	機体座標系の-Z方向ハブ空気力
\mathbf{f}_D	運動方程式 $\mathbf{M}'\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{b} = \mathbf{f}_A - \mathbf{f}_D$ の右辺減衰力
f_{Di}	\mathbf{f}_D の i ($i=1,2,\dots,6$) 成分
\mathbf{f}_T	ロータの縦3分力 $\mathbf{f}_T = \{F_{XF}, F_{YF}, F_{ZF}\}^T$
$\mathbf{f}_T^{(k)}$	釣り合い状態の収束計算における k 回目のロータの縦3分力
$\hat{\mathbf{f}}_T$	釣り合い状態での $\hat{\mathbf{f}}_T = \{\hat{F}_{XF}, \hat{F}_{YF}, \hat{F}_{ZF}\}^T$
F_{XF}, F_{YF}, F_{ZF}	ロータ縦3分力 $F_{XF} = \frac{1}{T} \int_0^T f_{A1} dt$, $F_{YF} = \frac{1}{T} \int_0^T f_{A2} dt$, $F_{ZF} = \frac{1}{T} \int_0^T f_{Az} dt$
$\hat{F}_{XF}, \hat{F}_{YF}, \hat{F}_{ZF}$	釣り合い状態でのロータ縦3分力 $\hat{F}_{XF} = \hat{F}_{YF} = 0$, $\hat{F}_{ZF} = -\sqrt{W^2 + \left(\frac{1}{2}\rho V^2 C_D S_h\right)^2}$
\mathbf{f}_{bj}	ブレード空気力ベクトル (ブレードスパン座標系) ($j=1,2,3,4$)
\mathbf{g}	定数変化法における外力 $\mathbf{g} = [\mathbf{M}'_0]^{-1} \Delta \mathbf{f}$
$\tilde{\mathbf{g}}$	\mathbf{g} から最初の6つの成分を取り出したベクトル
g_k	\mathbf{g} の k ($k=1,2,\dots,10$) 成分

$$g_{y_{i0}}, g_{u_{i0}}, g_{y_{in}}, g_{u_{in}} \quad g_k = \sum_{i=1}^{10} \left[\left(g_{y_{i0}} + \left[\sum_{n=1}^{10} g_{y_{in}} \cos(n\Omega t + \phi_{y_{in}}) \right] \right) y_i \right] + \sum_{i=1}^{10} \left[\left(g_{u_{i0}} + \left[\sum_{n=1}^{10} g_{u_{in}} \cos(n\Omega t + \phi_{u_{in}}) \right] \right) u_i \right] \text{ の係数}$$

\mathbf{h} 運動方程式 $\Delta \ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{h}$ の右辺

h_i \mathbf{h} の i ($i = 1, 2, \dots, 10$) 成分

\mathbf{i} 虚数単位

$\mathbf{I}_2, \mathbf{I}_4$ 単位行列

\mathbf{K}_0 運動方程式 $\mathbf{M}_0 \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_0 \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_0 \mathbf{x} = 0$ の剛性行列

$K_{0i,j}$ 行列 \mathbf{K}_0 の (i, j) 成分

\mathbf{K}'_0 $\mathbf{K}'_0 = \mathbf{U} \mathbf{K}_0 \mathbf{U}^T + \mathbf{U} \mathbf{D}_0 \dot{\mathbf{U}}^T + \mathbf{U} \mathbf{M}_0 \ddot{\mathbf{U}}^T$ にて定義される変数 $\mathbf{y}, \Delta \mathbf{y}$ での剛性行列

$K'_{0i,j}$ 行列 \mathbf{K}'_0 の (i, j) 成分

$\tilde{\mathbf{K}}'_0$ \mathbf{K}'_0 の左上の 6×6 を取り出した行列

\mathbf{K}''_0 $\mathbf{K}''_0 = \mathbf{U}' \mathbf{K}_0 \mathbf{U}'^T + \mathbf{U}' \mathbf{D}_0 \dot{\mathbf{U}}'^T + \mathbf{U}' \mathbf{M}_0 \ddot{\mathbf{U}}'^T$ にて定義される変数 $\mathbf{y}', \Delta \mathbf{y}'$ での剛性行列

$K''_{0i,j}$ 行列 \mathbf{K}''_0 の (i, j) 成分

\mathbf{K}_p 釣り合い状態 $\{\mathbf{x}_p, \dot{\mathbf{x}}_p, \ddot{\mathbf{x}}_p\}^T$ に起因する剛性行列

\mathbf{K}_A 変数 $\Delta \mathbf{x}$ について線形化された外力 $\Delta \mathbf{f} = \mathbf{D}_A \Delta \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_A \Delta \mathbf{x} - \mathbf{D}_D \Delta \dot{\mathbf{x}}$ を構成する剛性係数

$$K_{Aij} \quad K_{Aij}(t) = \left(\frac{\partial \Delta f_j}{\partial \Delta x_i} \right) = \frac{f_{Aj}(\mathbf{x}_p(t) + \delta \mathbf{x}_i, \dot{\mathbf{x}}_p(t)) - f_{Aj}(\mathbf{x}_p(t), \dot{\mathbf{x}}_p(t))}{\Delta_0} \text{ から算出される } \mathbf{K}_A \text{ の } (i, j) \text{ 成分}$$

\mathbf{K}'_D $\mathbf{K}'_D = \mathbf{U} \mathbf{D}_D \dot{\mathbf{U}}^T$ にて定義される変数 $\Delta \mathbf{y}$ での剛性行列

\mathbf{K}'_f $\mathbf{K}'_f = \mathbf{U}(\mathbf{K}_A - \mathbf{K}_p) \mathbf{U}^T + \mathbf{U}(\mathbf{D}_A - \mathbf{D}_p) \dot{\mathbf{U}}^T - \mathbf{U} \mathbf{M}_p \ddot{\mathbf{U}}^T + \mathbf{U} \mathbf{M}_p \mathbf{U}^T \mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{K}'_0$ にて定義される $\Delta \mathbf{y}$ の空力係数行列

$\tilde{\mathbf{K}}'_f$ \mathbf{K}'_f の左上の 6×6 を取り出した行列

$\hat{\mathbf{K}}'_f$ $\tilde{\mathbf{K}}'_f$ から, 定常値とパラメータ共振の可能性のある周波数成分のみを抜き出した行列

\hat{K}_{fij} 行列 \mathbf{K}'_f の (i, j) 成分

$$\mathbf{K}_{xx}, \mathbf{K}_{\zeta x}, \mathbf{K}_{\beta x}, \mathbf{K}_{x\zeta}, \mathbf{K}_{\zeta\zeta}, \mathbf{K}_{\beta\zeta}, \mathbf{K}_{x\beta}, \mathbf{K}_{\zeta\beta}, \mathbf{K}_{\beta\beta} \quad \mathbf{K}_A - \mathbf{K}_p \text{ の部分行列}$$

$$\mathbf{K}'_{x\zeta 1}, \mathbf{K}'_{x\zeta 3}, \mathbf{K}'_{\zeta 1x}, \mathbf{K}'_{\zeta 1\zeta 1}, \mathbf{K}'_{\zeta 1\zeta 3}, \mathbf{K}'_{\zeta 1\beta}, \mathbf{K}'_{\zeta 3x}, \mathbf{K}'_{\zeta 3\zeta 1}, \mathbf{K}'_{\zeta 3\zeta 3}, \mathbf{K}'_{\zeta 3\beta}, \mathbf{K}'_{\beta\zeta 1}, \mathbf{K}'_{\beta\zeta 3} \quad \mathbf{K}'_f \text{ の部分行列}$$

$$\mathbf{K}_{Axx}, \mathbf{K}_{A\zeta}, \mathbf{K}_{A\beta}, \mathbf{K}_{A\zeta x}, \mathbf{K}_{A\zeta\zeta}, \mathbf{K}_{A\zeta\beta}, \mathbf{K}_{A\beta x}, \mathbf{K}_{A\beta\zeta}, \mathbf{K}_{A\beta\beta} \quad \mathbf{K}_A \text{ の部分行列}$$

$$\mathbf{K}'_{A\zeta}, \mathbf{K}'_{A\zeta x}, \mathbf{K}'_{A\zeta\zeta}, \mathbf{K}'_{A\zeta\beta}, \mathbf{K}'_{A\beta\zeta} \quad \mathbf{U} \mathbf{K}_A \mathbf{U}^T \text{ の部分行列}$$

$$\mathbf{K}'_{A\zeta 1\zeta 1}, \mathbf{K}'_{A\zeta 3\zeta 1}, \mathbf{K}'_{A\zeta 1\zeta 3}, \mathbf{K}'_{A\zeta 3\zeta 3} \quad \mathbf{K}'_{A\zeta\zeta} \text{ の部分行列}$$

$\mathbf{K}_s(t)$	$\mathbf{K}_s(t) = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_p - \mathbf{K}_A$
k_x	ハブ支持剛性
k_{ij}	\hat{K}'_{fij} のゲイン
\mathbf{L}	L_{ij} を (i, j) 成分とする行列
L_{ij}	$L_{ij} = (\omega_i + \omega_j) [(k_x - m_1 \omega_i^2)(k_{xy} - m_1 \omega_j^2) + m_2^2 \omega_i^2 \omega_j^2]$
l_j	ブレード揚力 ($j=1,2,3,4$)
l_x	ハブのピッチ／ロール運動の基準長
\mathbf{M}	運動方程式 $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{d} = \mathbf{f}_A + \mathbf{f}_D$ の質量行列
$M_{i,j}$	行列 \mathbf{M} の (i, j) 成分
\mathbf{M}_0	線形化運動方程式 $\mathbf{M}_0\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_0\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_0\mathbf{x} = 0$ の質量行列
$M_{0,i,j}$	行列 \mathbf{M}_0 の (i, j) 成分
\mathbf{M}'_0	$\mathbf{M}'_0 = \mathbf{U}\mathbf{M}_0\mathbf{U}^T$ で定義される変数 $\mathbf{y}, \Delta\mathbf{y}$ での質量行列
$M'_{0,i,j}$	行列 \mathbf{M}'_0 の (i, j) 成分
\mathbf{M}''_0	$\mathbf{M}''_0 = \mathbf{U}'\mathbf{M}_0\mathbf{U}'^T$ で定義される変数 \mathbf{y}' での質量行列
$M''_{0,i,j}$	行列 \mathbf{M}''_0 の (i, j) 成分
$\tilde{\mathbf{M}}'_0$	\mathbf{M}'_0 の左上の 6×6 を取り出した行列
\mathbf{M}_p	釣り合い状態 $\{\mathbf{x}_p, \dot{\mathbf{x}}_p, \ddot{\mathbf{x}}_p\}^T$ に起因する質量行列
$\mathbf{M}_s(t)$	$\mathbf{M}_s(t) = \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_p$
M	マッハ数
m_b	ブレード質量
m_h	ハブ質量
m_1	$m_1 = m_h + 4m_b$
m_2	$m_2 = \sqrt{2}m_b r$
m_3	$m_3 = m_b r^2$
m_4	$m_4 = m_b r(r - e)$
m_5	$m_5 = m_b r(r + e)$
\dot{m}	マスフロー
\dot{m}_F	固定翼機のマフフロー
\dot{m}_H	ホバリングするヘリコプタのマスフロー
\mathbf{N}	$\mathbf{N} = \mathbf{L}^{-1}$

N_{ij}	行列 \mathbf{N} の (i, j) 成分
NR	ロータ回転数
P	重力に抗して飛ぶための仕事率 (パワー)
P_F	固定翼機が重力に抗して飛ぶための仕事率 (パワー)
P_H	ホバリングするヘリコプタが重力に抗して飛ぶための仕事率 (パワー)
\mathbf{p}_h	機体回転座標系でのハブ位置
\mathbf{p}_{bj}	機体回転座標系でのブレード位置 ($j=1,2,3,4$)
p_3, p_2, p_1, p_0	多項式 $\lambda^4 + p_3\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_1\lambda + p_0 = 0$ の係数
p_i	$p_i = \frac{m_2}{4(m_1m_3 - m_2^2)} \sum_{j=1}^4 N_{ij} \left((m_1 + m_3)\omega_j^2 - k_x \right)$
q_i	$q_i = \frac{1}{4(m_1m_3 - m_2^2)} \sum_{j=1}^4 N_{ij} \left((m_1^2 + m_2^2)\omega_j^2 - m_1k_x \right)$
R	ブレード翼端半径
r	ヒンジ～ブレード重心間距離
r_a	ヒンジ～ブレード空力中心間距離
r_M	ホバリング時に翼素マッハ数 M となるブレード半径位置
r_j	$r_j = \frac{m_2\omega_i^2}{4m_3(\omega_5 - \omega_6)}$
S_b	ブレード翼面積
S_h	ヘリコプタ機体正面積
S_W	固定翼の主翼面積
s_i	$s_i = \frac{m_1\omega_i^2 - k_x}{4m_3(\omega_5 - \omega_6)} \quad (i=5, 6)$
s_{ijk}	$s_{ijk} = (-1)^{i+1} \sin(n\pi/2) + (-1)^{j+1} \sin(n\pi) + (-1)^{k+1} \sin(3n\pi/2)$
sc_{ijkl}	$sc_{ijkl} = (-1)^{i+1} \sin(n\pi/2) + (-1)^{j+1} \cos(n\pi) + (-1)^{k+1} \sin(3n\pi/2) + (-1)^{l+1}$
T	ロータ 1 回転の周期 $T = 2\pi/\Omega$
t	時刻
\mathbf{u}	$\Delta \mathbf{y}$ の 1 階微分 $\mathbf{u} = \Delta \dot{\mathbf{y}}$
$\tilde{\mathbf{u}}$	\mathbf{u} から最初の6つの成分を取り出したベクトル
u_i	\mathbf{u} の i ($i=1, 2, \dots, 10$) 成分
$u_{t_j}, u_{r_j}, u_{p_j}$	ブレード速度 (ブレードスパン座標系) ($j=1,2,3,4$)
\mathbf{U}	\mathbf{y} と \mathbf{x} , または, $\Delta \mathbf{y}$ と $\Delta \mathbf{x}$ とを関連付ける変換行列 $\mathbf{y} = \mathbf{U}\mathbf{x}$

\mathbf{U}'	\mathbf{y}' と \mathbf{x} とを関連付ける変換行列 $\mathbf{y}' = \mathbf{U}'\mathbf{x}$
$\mathbf{U}_\zeta, \mathbf{U}'_\zeta$	\mathbf{U} 行列の部分成分 $\mathbf{U}_\zeta^{-1} = \mathbf{U}_\zeta^T$
V	ヘリコプタ飛行速度
v_i	誘導速度
v_{iF}	固定翼機の誘導速度
v_{iH}	ホバリングするヘリコプタの誘導速度
v_∞	下流の速度
W	ヘリコプタの重量
w_M	$w_M = r_M^2 / \sum_M r_M^2$ で定義される重み係数
\mathbf{x}	$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}^T$
x_1, x_2	ハブ位置 (機体座標系)
$\Delta x_1, \Delta x_2$	x_1, x_2 の釣り合い状態からの変動
\mathbf{x}_p	釣り合い状態の変数
$\Delta \mathbf{x}$	釣り合い状態からの変動 $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_p$
\mathbf{y}	変数 $\mathbf{y} = \{x_1, x_2, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}^T$
\mathbf{y}'	変数 $\mathbf{y}' = \{x_1, x_2, \zeta'_1, \zeta'_2, \zeta'_3, \zeta'_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}^T$
$\tilde{\mathbf{y}}$	$\tilde{\mathbf{y}}$ から最初の6つの成分を取り出したベクトル
$\Delta \mathbf{y}$	変数 $\Delta \mathbf{y} = \{\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta \zeta_1, \Delta \zeta_2, \Delta \zeta_3, \Delta \zeta_4, \Delta \beta_1, \Delta \beta_2, \Delta \beta_3, \Delta \beta_4\}^T$
$\Delta \tilde{\mathbf{y}}$	$\Delta \tilde{\mathbf{y}}$ から最初の6つの成分を取り出したベクトル
y_i	$\Delta \mathbf{y}$ の i ($i = 1, 2, \dots, 10$) 成分
\mathbf{z}	$\mathbf{z} = \{\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}\}^T$
$\mathbf{z}_s^{(k)}$	釣り合い状態の収束計算における k 回目の初期値
$\mathbf{z}_e^{(k)}$	釣り合い状態の収束計算における k 回目の終端値
z_{e_i}	終端値 \mathbf{z}_e の第 i 成分
z	ハブ位置の複素表現 $z = x_1 - \mathbf{i}x_2 = z_0 e^{\mathbf{i}\alpha t}$
z_1, z_2	$\begin{aligned} z_1 &= z_{10} - \varepsilon_n'^2 + \Delta a_n^2 \\ z_2 &= z_{20} - 2\varepsilon_n' \Delta a_n \end{aligned} \quad (n = 5 \text{ or } 6)$

z_{10}, z_{20}	$z_{10} = \begin{cases} 4(a'_{3,2n-1}a'_{2n-1,3} - a'_{3,2n-1}a'_{2n-1,4}) & ; \Omega = -\omega_2 + \omega_5, \Omega = -\omega_2 + \omega_6, 3\Omega = -\omega_2 + \omega_5, 3\Omega = -\omega_2 + \omega_6 \\ 4(a'_{3,2n-1}a'_{2n-1,3} + a'_{3,2n-1}a'_{2n-1,4}) & ; 3\Omega = -\omega_2 - \omega_5, 3\Omega = -\omega_2 - \omega_6 \end{cases}$ $z_{20} = \begin{cases} 4(a'_{3,2n-1}a'_{2n-1,4} + a'_{2n-1,3}a'_{3,2n}) & ; \Omega = -\omega_2 + \omega_5, \Omega = -\omega_2 + \omega_6, 3\Omega = -\omega_2 + \omega_5, 3\Omega = -\omega_2 + \omega_6 \\ 4(a'_{3,2n-1}a'_{2n-1,4} - a'_{2n-1,3}a'_{3,2n}) & ; 3\Omega = -\omega_2 - \omega_5, 3\Omega = -\omega_2 - \omega_6 \end{cases}$
α_h	ヘリコプタ迎角
α_j	ブレード迎角 ($j=1,2,3,4$)
β_j	ブレード・フラップ角 (ハブ回転座標系) ($j=1,2,3,4$)
$\Delta\beta_j$	β_j の釣り合い状態からの変動 ($j=1,2,3,4$)
Γ	$[c_i, c_j]$ の逆行列
$\gamma_{i,j}$	行列 Γ の (i,j) 成分
Δ_0	微小量
$\delta\mathbf{x}_i, \delta\ddot{\mathbf{x}}_i$	i 番目が Δ_0 , それ以外はゼロのベクトル ($i=1,2,\dots,10$)
$\delta\mathbf{x}_j$	j 番目が Δ_0 , それ以外はゼロのベクトル ($j=1,2,3$)
δ_3	ブレードのフラッピングとピッチングのカップリング係数
γ_j	$\tan \gamma_j = \frac{u_{r_j}}{u_{t_j}} \quad (j=1,2,3,4)$
$\varepsilon_n (n=5 \text{ or } 6)$	$\varepsilon_5 = \Omega + \omega_2 - \omega_5, \quad \varepsilon_6 = 3\Omega + \omega_2 + \omega_6$
ε'_n	$\varepsilon'_n = \varepsilon_n - a_{3,4}$
$\boldsymbol{\varepsilon}_p^{(k)}$	$\boldsymbol{\varepsilon}_p^{(k)} = \mathbf{z}_e^{(k)} - \mathbf{z}_s^{(k)}$, 釣り合い状態の収束計算における k 回目の初期値と終端値の残差
$\boldsymbol{\varepsilon}_T^{(k)}$	$\boldsymbol{\varepsilon}_T^{(k)} = \hat{\mathbf{f}}_T - \mathbf{f}_T^{(k)}$, 釣り合い状態の収束計算における k 回目のロータ縦3分力の残差
ζ_j	ブレード・ラグ角 (ハブ回転座標系) ($j=1,2,3,4$)
$\Delta\zeta_j$	ζ_j の釣り合い状態からの変動 (ハブ回転座標系) ($j=1,2,3,4$)
ζ'_j	ブレード・ラグ角 (ハブ非回転座標系) ($j=1,2,3,4$)
η_1, η_2	$\eta_1 = \xi_1 + \mathbf{i}\xi_2 = \eta_{10}e^{\mathbf{i}\omega t}, \eta_2 = \xi_3 + \mathbf{i}\xi_4 = \eta_{20}e^{\mathbf{i}\omega t}$, ラグ角 (ハブ非回転座標系) の複素表現
θ_j	ブレード・ピッチ角 ($j=1,2,3,4$)
θ_0	コレクティブピッチ角
θ_M	ホバリング時にマッハ数 M となる半径位置のブレード・ピッチ角

λ_R \mathbf{A}'_n の固有値

λ_k モノドロミ行列 Φ の固有値 $\lambda_k (k=1, 2, \dots, 20)$

λ_{\max} 絶対値が最大となる λ_k

$\hat{\lambda}_{\max}$ $\hat{\lambda}_{\max} = \lambda_0 + \lambda_d \frac{d_x}{2\sqrt{(m_h + 4m_n)}} + \lambda_L \left(\frac{C_L}{\sigma} \right) + \lambda_\mu \mu + \lambda_{\mu_2} \mu^2$ で表される λ_{\max} の推算値

$\lambda_0, \lambda_d, \lambda_L, \lambda_\mu, \lambda_{\mu_2}$ $\hat{\lambda}_{\max}$ の推算式の係数

μ アドバンス比 $\mu = \frac{V}{\Omega R}$

ξ_j ブレード・ラグ角（ハブ非回転座標系における対角和または対角差）（ $j=1, 2, 3, 4$ ）

$\Delta \xi_j$ ξ_j の釣り合い状態からの変動（ $j=1, 2, 3, 4$ ）

ρ 空気密度

σ $\sigma = 4c/\pi R$ で定義されるソリディティと呼ばれるロータ面積に占めるブレード面積の比率

Φ 状態遷移行列, モノドロミ一行列 $\Phi_{ij}^{(k)} = \frac{z_{ei}^{(k)}(\mathbf{z}_s^{(k)} + \delta \mathbf{z}_j) - z_{ei}^{(k)}(\mathbf{z}_s^{(k)})}{\Delta_0}$

ϕ_{nkij}, ϕ_{ndij} $\hat{K}'_{fij}, \hat{D}'_{fij}$ の位相

ϕ_{yin}, ϕ_{uin} $g_k = \sum_{i=1}^{10} \left[\left(g_{yi0} + \left[\sum_{n=1} g_{yin} \cos(n\Omega t + \phi_{yin}) \right] \right) y_i \right] + \sum_{i=1}^{10} \left[\left(g_{ui0} + \left[\sum_{n=1} g_{uin} \cos(n\Omega t + \phi_{uin}) \right] \right) u_i \right]$ の位相

χ_{jj} $\mathbf{K}_{A\zeta\zeta}$ の成分 $\chi_{jj} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[c_n \cos \left(n \left(\Omega t + \frac{j-1}{2} \pi \right) \right) + s_n \sin \left(n \left(\Omega t + \frac{j-1}{2} \pi \right) \right) \right]$

χ_{ij} $\mathbf{K}_{A\zeta\zeta}$ の成分 $\chi_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[c_{nj} \cos \left(n \left(\Omega t + \frac{i-1}{2} \pi \right) \right) + s_{nj} \sin \left(n \left(\Omega t + \frac{i-1}{2} \pi \right) \right) \right]$

$\varphi_{2,n}, \varphi_{n,2}$ $a'_{3,2n-1} = c_{2,n} \cos \varphi_{2,n}, a'_{3,2n} = c_{2,n} \sin \varphi_{2,n}, a'_{2n-1,3} = c_{n,2} \cos \varphi_{n,2}, a'_{2n-1,4} = c_{n,2} \sin \varphi_{n,2}$ の位相,

φ^+, φ^- $\varphi^+ = \frac{\pi}{2}(i+j), \varphi^- = \frac{\pi}{2}(j-i)$

ϕ_j $\tan \phi_j = \frac{u_{pj}}{\sqrt{u_{tj}^2 + u_{rj}^2}} \quad (j=1, 2, 3, 4)$

$\Psi_{ij}^{(k)}$ $\Psi_{ij}^{(k)} = \frac{\mathbf{f}_{Ti}^{(k)}(\mathbf{c}_T^{(k)} + \delta \mathbf{c}_j) - \mathbf{f}_{Ti}^{(k)}(\mathbf{c}_T^{(k)})}{\Delta_0}$

Ω ロータ回転周波数

ω_i 固有振動数. ハブ・ラグ連成系は ($i=1, 2, 3, 4$), ラグ独立系は ($i=5, 6$), フラップ系は ($i=7, 8, 9, 10$)

1. 緒論

1.1 はじめに

本研究は、SH-60Kで発生したトランスミッションピッチモードの不安定化¹⁾の発生原因を解明することを目的とする。トランスミッションピッチモードとは、ヘリコプタのメインロータを支持するトランスミッション部の弾性変形モードを指し、SH-60KのほかにもAH-64において、同様なメインロータの支持系の弾性変形モードが不安定化したとの報告²⁾がある。SH-60Kは我が国で開発された海上自衛隊の哨戒ヘリコプタ³⁾、AH-64は陸上自衛隊にも導入されている戦闘ヘリコプタである。それぞれを図1-1, 1-2に示す。



図1-1 海上自衛隊SH-60K

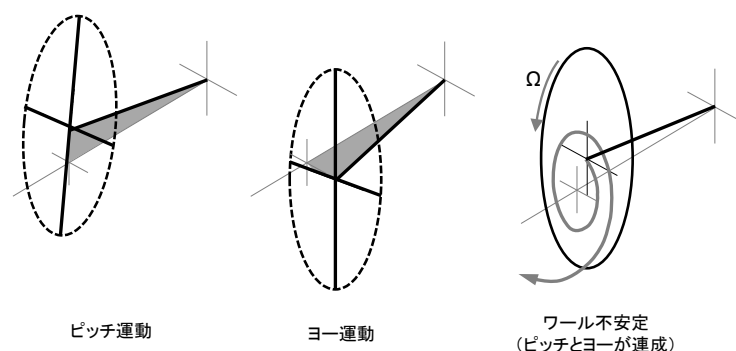
(2012.9.16, 岩国航空基地祭にて白石勝彦氏撮影)



図1-2 陸上自衛隊AH-64D

(2014.9.28, 立川防災航空祭にて筆者撮影)

AH-64の事例²⁾では、ワールモードの安定性という言葉を使っている。ワール(whirl)運動とは、回転体一般に見られるふれまわり運動であり、運動方程式を線形化し行列形式で表現したときに、質量行列と剛性行列は一般的に対称となるのに対し、減衰行列に歪対称項として現れるジャイロ項(gyroscopic term)の作用により発生する⁴⁾。航空分野では、プロペラのワール・フラッタが一般的に知られており⁵⁾、プロペラを支持するナセル部分の弾性変形によりプロペラが回転軸まわりにふれまわる運動が不安定化する。プロペラのワール運動を図1-3に示す。ヘリコプタ・ロータについても、ジャイロ項は存在するので、ワール運動を行う固有モードがある筈である。本研究は、SH-60Kで発生したトランスミッションピッチモードの不安定化を題材に、ヘリコプタ・ロータにおいてワール運動をとまなうモードが不安定化するメカニズムを検討する。

図1-3 プロペラのワール運動⁶⁾

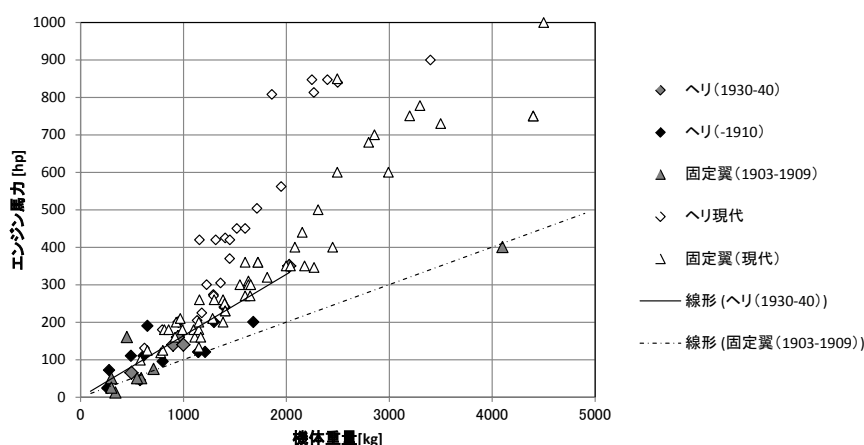
ヘリコプタ・ロータは次節に述べるようにプロペラと異なり、プロペラのワール・フラッタを扱うモデルをそのままヘリコプタ・ロータに適用することはできない。本章では、SH-60Kのトランスミッションピッチモードの不安定化を検討するための準備として、ヘリコプタ開発の歴史を振り返り、ヘリコプタおよびそのロータについて述べる。特に、プロペラとは異なるとの観点でのヘリコプタ・ロータの特徴を整理する。

1.2 ヘリコプタ開発の歴史

1.2.1 固定翼機との相違点

世界初の有人動力飛行は1903年のWright兄弟によるものであることは衆目の一致するところであるが、ヘリコプタの初飛行については諸説ある⁷⁾。1907年のPaul CornuやLouis Breguetによるものだとする説もあるが、1930年代のBreguet, Igor Sikorsky, Henrich Fockeに至って初めて実用に供することのできる段階に至ったとする見解が有力のようである⁸⁾。ヘリコプタの飛行に際しての技術的課題は、垂直離陸可能な動力を有しているかという点と、離陸したのちに安定した飛行が可能で自由自在に思う方向へ移動が可能かの2点が最も本質的な課題であろう。前者については出力重量比の優れたエンジン、後者についてはフラッピングおよびリード・ラグを可能とするハブとブレードのヒンジ結合様式、および、ブレード・ピッチ角のサイクリック操舵が、現代のヘリコプタに通じる解決方法となっている。1907年のCornuやBreguetでは、ヒンジ結合やサイクリック操舵が採用されておらず、1930年代のBreguet, Sikorsky, Fockeではこれらが採用されるようになったのが、ヘリコプタの実用的な初飛行年代は1930年代とする根拠であろう。特にハブとブレードのヒンジ結合様式、および、ブレード・ピッチ角のサイクリック操舵は、ヘリコプタ・ロータがプロペラと異なる点であり、本研究での検討を進める上で必要不可欠な要素となっている。

ヘリコプタの初飛行、実用化が固定翼に先を越された理由について、Leishmanは垂直離着陸するために必要となる出力を持つエンジンの必要性をあげている⁸⁾。Wright兄弟に始まる黎明期の固定翼機と、CornuやBreguetを含む同時期のヘリコプタの機体重量とエンジン出力の関係を図1-4に示す。

図1-4 機体重量—エンジン出力の関係^{9,10,11)}

本図において、原点を通る直線はパワーローディング（単位馬力あたりの機体重量）一定を意味する。傾きが立っているほど、パワーローディングが低く、機体重量に対してエンジンが高出力であることを示す。本図から次のことがわかる。黎明期の固定翼機と同時期のヘリコプタのパワーローディングはほぼ同じである。黎明期のパワーローディングで、Wright兄弟を始めとする固定翼機は飛行に成功しているが、CornuやBreguetの初飛行は怪しいとされている^{12,13}。実用的と評価されるヘリコプタのパワーローディングは、現代の固定翼機とほぼ同じレベルであり、黎明期の固定翼機よりも低い。現代のヘリコプタと固定翼機の比較では、ヘリコプタのパワーローディングが低い。

以上から、1900年代初頭のエンジンは、固定翼機の飛行には十分な能力を有していたが、ヘリコプタの飛行には能力不足であり、現在の固定翼機とほぼ同じパワーローディングを達成できるエンジンが出てきた1930年代に入って、ヘリコプタは実用段階になったと言えるだろう。

なぜ、ヘリコプタの飛行には固定翼よりも高いエンジン出力が必要なのかを以下に説明する。ありていに言えば、ヘリコプタも固定翼機も空気を掻いて揚力を発生する。空気を掻くということは、揚力と反対の鉛直下方に空気を翼の作用で押しやることであるから、翼が空気の塊に与えた運動量の変化が揚力となる。運動量則を空気にあてはめる場合、単位時間あたりに翼を通過する空気の質量として、マスフロー \dot{m} を用いる¹⁴。マスフローに発生する速度変化を v とすれば、揚力は L 、運動量の観点から次の式で表される。

$$L = -\frac{d}{dt}(mv) = -\dot{m} \cdot v \quad (1-1)$$

マスフロー \dot{m} は、ホバリング（空中停止）するヘリコプタの場合、ロータ面を通過する空気の質量とし、次のように表される¹⁵。

$$\dot{m}_H = \rho \pi R^2 v_i \quad (1-2)$$

ここで、 ρ は空気密度、 R はロータ半径、 v_i はロータ面に発生する鉛直方向の誘導速度である。

空気のマスフローに対して、運動量則を適用する際には、空間に固定された検査体積(Control Volume)を想定し、検査体積に流入する運動量と、検査体積から流出する運動量の総和をとり、検査体積の運動量変化とする¹⁴。ロータを囲むように検査体積をとることで、検査体積が受ける外力にロータが発生する揚力の反作用が含まれるようになるが、それ以外に検査体積表面の圧力の効果もある¹⁴。ロータ近傍で検査体積(control volume)を取り出した場合、揚力発生により検査体積表面の圧力は、上流では大気圧よりも小さく、下流では大気圧よりも高くなる。このため、式(1-1)が成り立たない。上流および下流で検査体積表面の圧力が大気圧になるよう、ロータを囲む検査体積を鉛直方向に長くとれば、検査体積内の運動量変化はロータ揚力に等しくなり式(1-1)が成り立つ。式(1-2)はロータ面を単位時間あたりに通過する空気のマスフローであるが、検査体積の上流面と下流面だけに空気の出入りがあり、側面は空気の流れに沿うようにすることで側面から空気の出入りが無いように検査体積をとると、質量保存則により検査体積の上流面から流入するマスフローと、下流面から流出するマスフローも、式(1-2)で表される。圧力が大気圧と同じになる程度に離れた上流は空気が静止しているので速度は0、圧力が大気圧と同じになる程度に離れた下流での速度を v_∞ とした場合、揚力 L は、

$$L = -\{\dot{m}v\}_{\text{上流}} - \{\dot{m}v\}_{\text{下流}} = -\{\dot{m}0 - \dot{m}v_\infty\} = \dot{m}v_\infty \quad (1-3)$$

となる。ロータが行った仕事率 P は、力に速度を乗じたものであるので、揚力方向である鉛直方向成分の積をとると、

$$P = Lv_i = \dot{m}v_\infty v_i \quad (1-4)$$

となる。一方、エネルギー保存則の観点から、上流と下流との単位時間当たりのエネルギー差 ΔE は、

$$\Delta E = \frac{1}{2} \dot{m}v_\infty^2 - \frac{1}{2} \dot{m}0^2 = \frac{1}{2} \dot{m}v_\infty^2 \quad (1-5)$$

である。マスフローのエネルギー増 ΔE はロータが行った仕事率 P に等しいので、

$$\dot{m}v_\infty v_i = \frac{1}{2} \dot{m}v_\infty^2 \Rightarrow v_i = \frac{1}{2} v_\infty \quad (1-6)$$

が成り立つ^{8,15}。以上から、機体重量 W と揚力 L が釣り合うとし、 v_∞ と v_i の関係式(1-6)と式(1-2)で示されるホバリング時のヘリコプタのマスフローを式(1-4)に代入し、ヘリコプタのホバリング時の誘導速度 v_{iH} と、重力に抗してホバリングするための仕事率 P_H を求めると次式となる¹⁵。

$$v_{iH} = \sqrt{\frac{W}{2\rho\pi R^2}}, \quad P_H = W \sqrt{\frac{W}{2\rho\pi R^2}} \quad (1-7)$$

つぎに比較のため固定翼に対して同様な検討を行う．固定翼の誘導抗力係数 C_{Di} は，翼端渦による誘導速度からアスペクト比 A_R により、次式で表される¹⁴⁾．これを機体重量 W ，飛行速度 V ，空気密度 ρ ，主翼の全幅 b_W ，翼面積 S_W により有次元化し，誘導抗力を算出すると次のようになる．

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi A_R} \Rightarrow D_i = \frac{W^2}{\frac{1}{2}\rho V^2 S_W} \frac{S_W}{\pi b_W^2} = \frac{W^2}{\frac{1}{2}\rho V^2 \pi b_W^2} \quad (1-8)$$

図1-5に示すように固定翼の誘導抗力は，固定翼近傍では誘導速度により下向きに偏向した速度 V' に対し垂直に発生する揚力の上流速度方向成分である．固定翼機を水平飛行させるための仕事率として，力ベクトルと速度ベクトルの積をとる際に，座標系を上流の速度ベクトルを基準にとるか，翼近傍での速度ベクトルを基準にとるかの2つの表現方法がある．

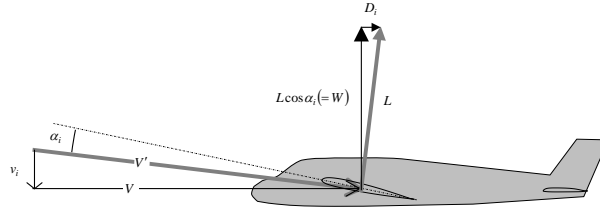


図1-5 固定翼機の誘導抗力

上流の速度ベクトルを基準にした場合の速度と固定翼機が発生する推進力（抗力と逆向き）と揚力（重力と逆向き）は，航空機の速度ベクトル \mathbf{V} （図1-5とは逆向き）と固定翼機が発生する力のベクトル \mathbf{F} から，つぎのように表され，固定翼機が重力に抗して飛ぶための仕事率 P_F は次式のようにになる．

$$\mathbf{V} = \{V, 0, 0\}^T, \mathbf{F} = \{D_i, 0, -W\}^T \Rightarrow P_F = \mathbf{V} \cdot \mathbf{F} = VD_i \quad (1-9)$$

次に翼近傍の速度ベクトルを基準に取った場合は，つぎのように表される．

$$\mathbf{V} = \{V \cos \alpha_i, 0, -v_i\}^T \cong \{V, 0, -v_i\}^T, \mathbf{F} = \{0, 0, -W/\cos \alpha_i\}^T \cong \{0, 0, -W\}^T \Rightarrow P_F = \mathbf{V} \cdot \mathbf{F} = Wv_i \quad (1-10)$$

式(1-9)と式(1-10)の仕事率 P_F は等しいので，そこから誘導速度を算出し，式(1-8)の誘導抗力を代入すると次式となり，誘導抗力に抗するため，つまり重力に抗して飛行するための仕事率は次式のようにになる．

$$v_{iF} = \frac{VD_i}{W} = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho V \pi b_W^2}, \quad P_F = Wv_i = \frac{W^2}{\frac{1}{2}\rho V \pi b_W^2} \quad (1-11)$$

式(1-3), (1-4), (1-5), (1-6)はヘリコプタか固定翼かに関わらず成り立つ運動量およびエネルギー変化に関する法則なので，式(1-11)の固定翼の誘導速度から，逆に固定翼のマスフローを求めると次式のようにになる．

$$\dot{m}_F = \frac{W}{v_\infty} = \frac{W}{2v_i} = \rho V \pi \left(\frac{b_W}{2} \right)^2 \quad (1-12)$$

ヘリコプタの式(1-2)と固定翼の式(1-12)との比較から，つぎのことがわかる．固定翼機の主翼の全幅とヘリコプタのロータの直径が同じ $b_W = 2R$ で，機体重量，空気密度も同じだと仮定すると，固定翼機とヘリコプタの誘導速度および重力に抗して飛行するための仕事率は次のようになり，固定翼機は飛行速度または滑走速度に反比例して仕事率を減少させることができることがわかる．

$$\frac{P_F}{P_H} = \frac{v_{iF}}{v_{iH}} = \frac{1}{V} \sqrt{\frac{W}{2\rho\pi R^2}} = \frac{1}{V} \sqrt{\frac{W}{2\rho\pi (b_W/2)^2}} \quad (1-13)$$

固定翼機が離陸するため滑走を行うのは動圧をかせぐためであるが，運動量的見地からは単位時間あたりに固定翼が掻くことができる空気の質量を大きくするためであり，空気のマスフローを大きくすることで誘導速度を小さくすることができる．これに対し，図1-6に示すように，垂直離陸するヘリコプタは，空気のマスフローを大きくとることができないので，誘導速度を大きくとる必要があり，より強く空気を掻く必要があると言えるだろう．なお，式(1-7)はホバリングまたは垂直離陸する際のヘリコプタについてであり，ヘリコプタが前進飛行する場合は，固定翼と同じ式(1-11), (1-12)が適用されることを述べておく．

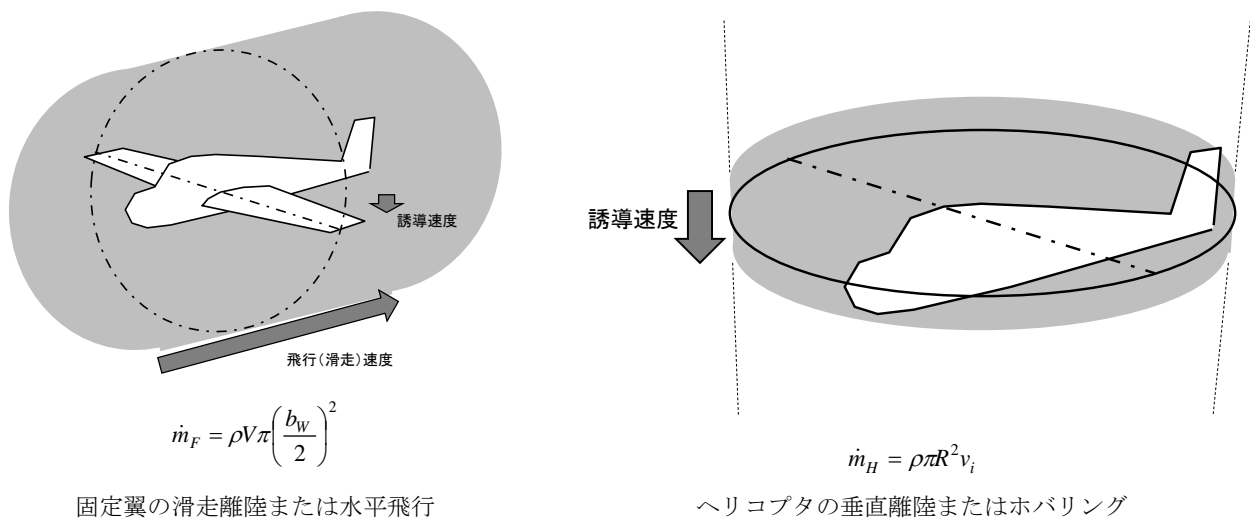


図1-6 固定翼とヘリコプタの単位時間あたりに搔くことができる空気マスフローの違い

式(1-7)の理論馬力と実際の馬力の関係を図1-6に示す。およそ、理論馬力の2倍以上の出力を可能とするエンジンの出現をもってして、実用的な観点での垂直離陸が可能となったことがわかる。

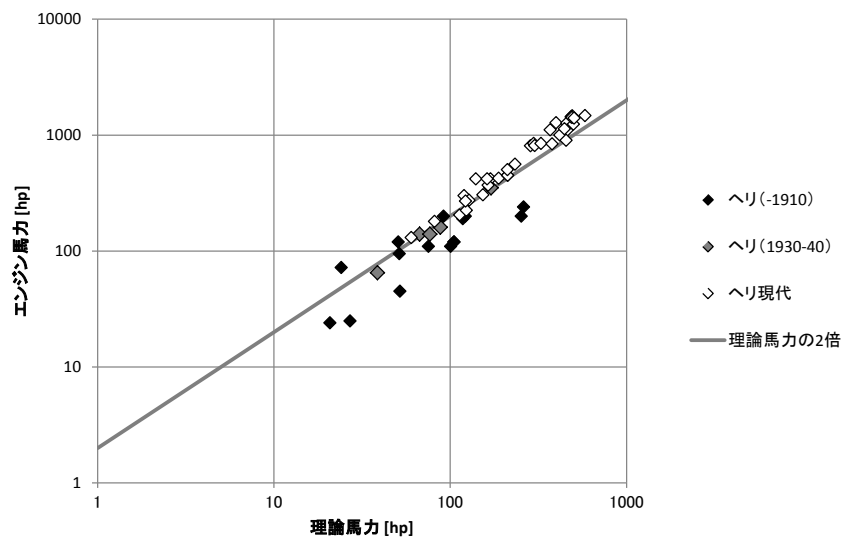


図1-7 ヘリコプタのエンジン出力と理論馬力の比較^{9,11)}

ヘリコプタの垂直離着およびホバリングのためには、固定翼機の滑走離陸および水平飛行よりも大きな仕事率が必要となるのであるが、このホバリングできることがヘリコプタの能力の真価を発揮する機会である。東日本大震災時に、道路などの地上の交通手段が途絶した被災地に対して、救難、物資輸送などを行ったのは自衛隊や消防、警察などのヘリコプタである。学校の校庭程の広さがあれば、離発着が可能だけでなく、着陸する場所が確保できない条件でも、人員や物資を吊り上げ下げすることが可能な機器を自衛隊、消防、警察などのヘリコプタは装備している（図1-8）。また、軍事的な観点からも、例えば、SH-60Kは護衛艦の飛行甲板から垂直離発着し、海上でホバリングし機体からソナー（音波探知機）を海中に吊下して敵潜水艦を捜索する対潜戦などを行う³⁾。これらは、ヘリコプタ以外の手段では不可能である。



図1-8 ホバリング（空中停止）能力によって可能となる人員救助（訓練展示）
（H26.9.28, 立川防災航空祭にて筆者撮影）

1.2.2 オートジャイロからヘリコプタへ

前述のとおり実用的なヘリコプタの出現は1930年代に入ってからとするひとつの根拠として、オートジャイロが1920年代にヘリコプタが実用化されるまでのつかの間の成功をおさめたことがある。オートジャイロはヘリコプタと異なりロータが動力駆動されておらず、風車のように自転するロータで揚力を得る航空機で、米国で郵便輸送に使われるなど数百機が製造された¹⁶⁾。1920年代から1930年代におけるオートジャイロは、ブレード・フラッピング機構と、ブレード・ピッチ角のサイクリック操舵という後のヘリコプタが受け継ぐ必要不可欠な技術の開発機会となっている。

固定翼機の開発を行っていたJuan de la Ciervaは、自身が開発した固定翼機が失速事故を起こしたことを契機に低速でも失速しない飛行機を目指した結果として、翼を回転させることで動圧を稼ぐことを発想した¹⁶⁾。Cirevaのオートジャイロは通常の固定翼にロータが追加された形態となっており、エンジンは機首のプロペラを駆動する。プロペラ駆動により地上滑走を始めるとロータが自転を始め、それにより揚力を発生するとの発想である。彼は、風車に対して回転面に鉛直ではなく平行な方向からの風が吹いている場合でも風車が回転することの観察に基づいて、ロータを回転させて揚力を得られると考えた¹⁷⁾。初期の試みは、機体がロールして転覆する失敗を繰り返した¹⁷⁾。機体が滑走する際に、機体の左右で、機体の進行方向とブレードの回転方向が同じ方向となる側と、逆向きになる反対側では動圧が異なり、前者のほうが動圧が高くなる。このため、動圧が高い側の揚力が大きくなり、動圧が低い側へロールしてしまうのである。

この揚力の不均衡問題に対する対策として、Cirevaはブレードが羽ばたき（フラッピング）可能となる機構を設けた^{8,16,17)}。これにより、前進飛行時、機体の飛行速度とブレード回転速度が同じ方向をとる側では動圧が高くなるため、ブレードが上方にフラップ・アップし、反対側では動圧が低くなるため下方にフラップ・ダウンし始める。図1-9に示すように、上方にフラップ・アップすると、迎角が小さくなり、下方にフラップ・ダウンすると迎角が大きくなる効果があるため、結果的に動圧の変化に即した釣り合い状態に至り、左右で揚力をバランスさせる仕組みとなっている。

結果として、図1-10に示すように、ロータ面が回転軸に対して垂直ではなく、後方に傾く。Cirevaはこの機構の採用により、1923年にオートジャイロの初飛行に成功している^{8,16)}。フラップ機構の導入後、ブレードに加わる空気力に応じてブレードがフラッピング（上下）運動する際に発生する回転面内方向のコリオリ力がブレード根本の集中荷重として入らないようにするため、回転面内方向にもブレードが運動可能とする機構が設けられ^{8,16)}、これがブレードのリード・ラグ運動である（図1-11）。

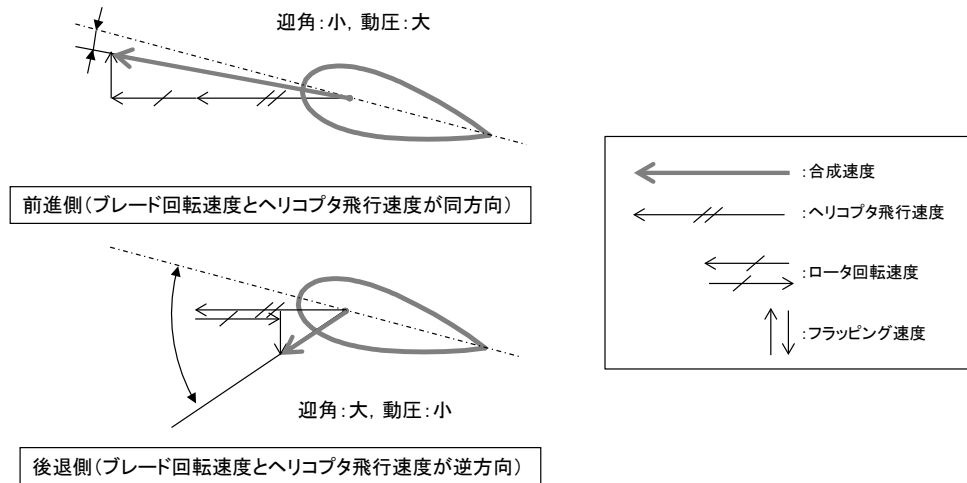


図1-9 ブレード・フラッピングによる迎角などの変化

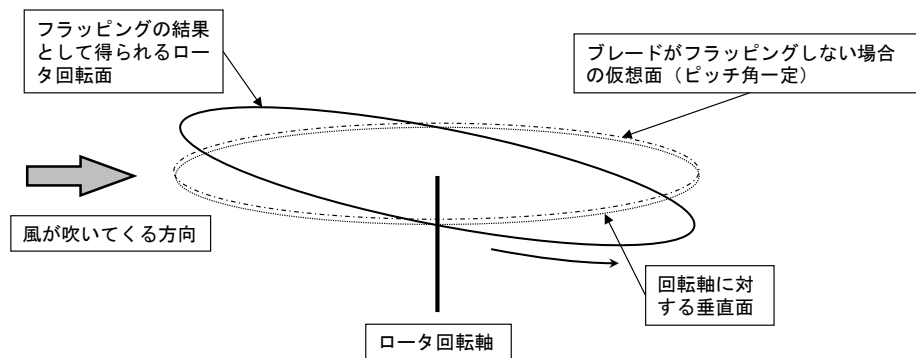


図1-10 ブレード・フラッピングによる左右の揚力バランス (オートジャイロ)

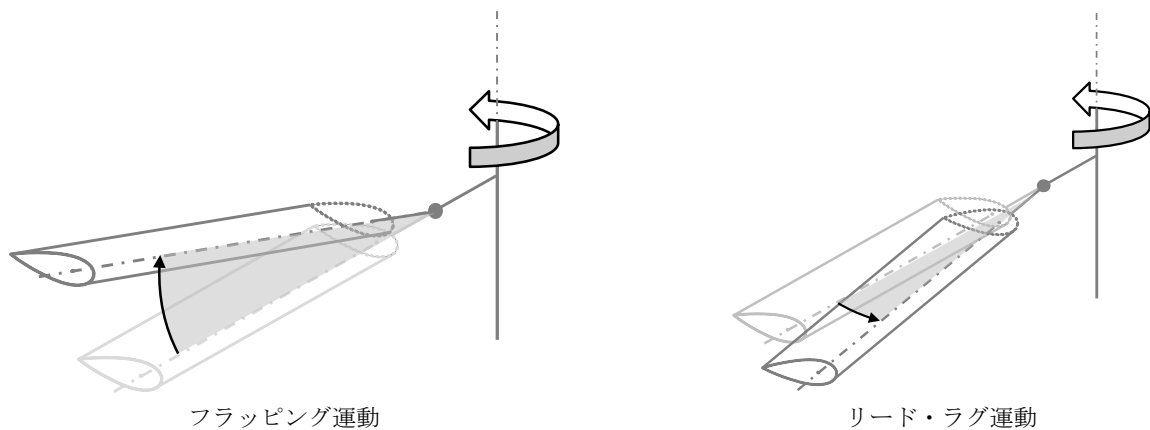


図1-11 フラッピングとリード・ラグ運動

Cirevaのオートジャイロは固定翼を元にしていたので、その操縦方法は固定翼を踏襲しており、エルロン、ラダー、エレベータから構成されていた¹⁸⁾。ただし、低速では舵の効きが悪くなるので、ロータのダイレクトコントロールとして、ロータをジンバルの上に載せ、操縦によりジンバルを傾ける方法を途中から採用した¹⁸⁾。これにより、エルロンを含む固定翼は取り除かれ、水平尾翼からエレベータも取り除かれた¹⁸⁾。

これに対し、1934年にRaoul Hafnerがロータ・ブレードのピッチ角をサイクリックに変化させる機構を有するオートジャイロA.R.IIIを開発した^{8,16)}。ロータ・ハブは機体に対し固定されているが、ブレード方位角に応じロータ回転周波数 Ω の周期でブレード・ピッチ角を変化させるのである。これにより、ホバリング状態において、前方でブレード・ピッチ角を大

きく、後方でブレード・ピッチ角を小さくすると、後方でブレードがフラップ・ダウンし始め、前方ではフラップ・アップし始め、ロータは右に傾く。この結果、機体はロールする。左右方向にブレード・ピッチ角の大小を設けると、ピッチ角一定の場合に比べてロータが前傾、または、後傾することでエレベータと同じ機能を発揮する。Hafnerのサイクリック操舵方式は、Cirevaのダイレクト操舵よりも優れていた¹⁶⁾のであろう。後のヘリコプタではサイクリック操舵方式がほぼ全面的に踏襲されている。

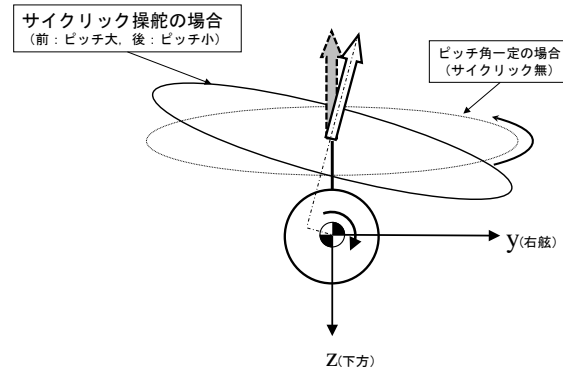


図1-12 サイクリック操舵による操縦（オートジャイロ）

1930年代から1940年代にかけてオートジャイロは米国の一部で郵便輸送に供されるなど数百機が製造された^{8,16)}が、1940年代以降ヘリコプタに駆逐されることになる。ヘリコプタは、垂直離陸するための出力を可能とする出力重量比に優れたエンジンの出現に加え、オートジャイロで実用化されたフラッピング、サイクリック操舵を取り込み、ホバリングから自在に前後左右に進む能力を身につけた。ホバリングできるヘリコプタにより、基本的には垂直離陸とホバリングできないオートジャイロは駆逐されることになったのである。現在のヘリコプタのほとんどは、Hafnerのスパイダー機構ではなく、スウォッシュプレート機構によりサイクリック操舵を行っている。スウォッシュプレート機構を図1-14に示す。

ヘリコプタが前へ進むための操作手順はつぎのようになる。スウォッシュプレートを前に傾けることで、前方でブレード・ピッチ角が小さくなり、後方でブレード・ピッチ角が大きくなる。この結果、後方でブレードがフラップ・アップし始め、前方ではフラップ・ダウンし始め、スウォッシュプレートに平行な面を目指して、ロータは前傾する。ただし、前述のとおり、前進速度が出てくると、左右の動圧差が発生するので、ロータ面はスウォッシュプレート面よりも後ろに傾く（図1-13）。横に進む場合も同様であり、スウォッシュプレートによりブレード・ピッチ角を方位角に応じて変化させることで、ブレードをフラッピングさせ任意の方向にロータ面を傾けることが可能となり、これがヘリコプタ操縦の基本原理である。図1-12に示すオートジャイロの旋回方法は、ヘリコプタにもそのまま適用されるが、オートジャイロとは異なりホバリングしたヘリコプタに適用すれば、図1-12は右へ進むための操縦手順となる。

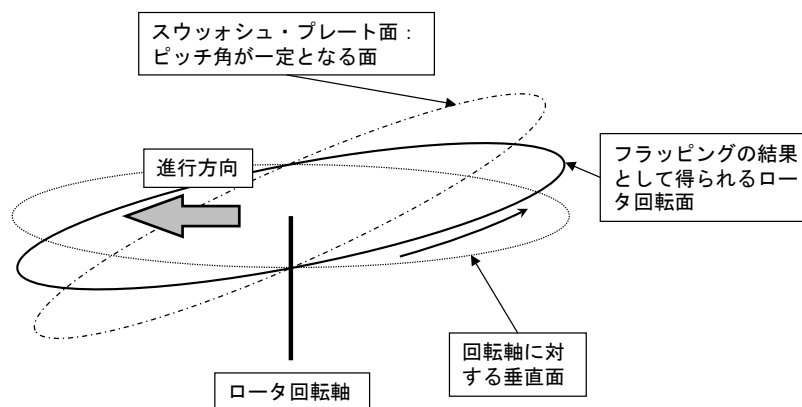
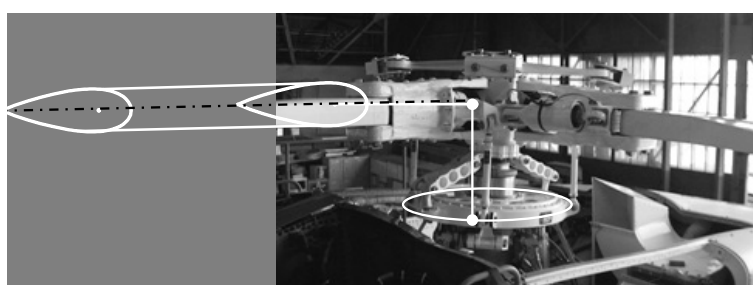
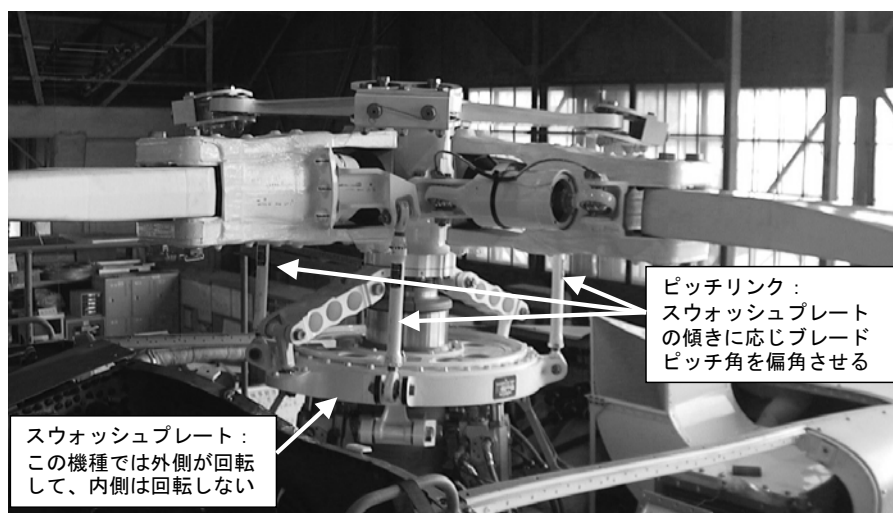
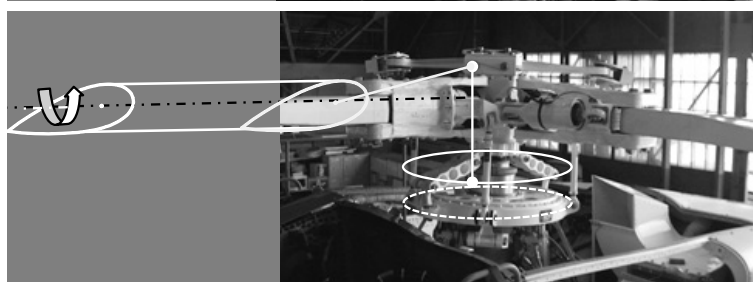


図1-13 前進飛行におけるブレードのフラッピング



コレクティブ操舵：

スウォッシュプレートを上下に
平行移動させることで、4本の
ブレード・ピッチ角が同じ変化



サイクリック操舵：

スウォッシュプレートを傾ける
ことで、図中右側のブレードは
ピッチ角増，反対側のブレード
はピッチ角減

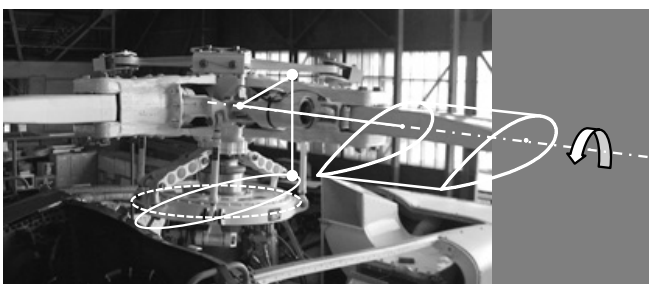


図1-14 スウォッシュ・プレートによるブレード・ピッチ偏角機構¹⁹⁾

1.3 ヘリコプタ・ロータの動力学問題

以上から、ヘリコプタ・ロータの力学的問題は、剛体としてのブレード運動だけでブレード1本当たりフラップとリード・ラグの2自由度を有するので、4枚ブレードのロータでは $2 \times 4 = 8$ の自由度を有することになる。上記は、弾性変形を考慮しない場合であるが、ヘリコプタ・ブレードはアスペクト比の大きな梁であるため、実際には曲げおよびねじり変形が発生する。加えて、支持系の弾性変形によりハブ運動の自由度も有する。このような特徴に応じたヘリコプタ・ロータの各種不安定振動について、Bialwa²⁰⁾は次の観点で分類している。

- A 空力には準定常の仮定が適用可能か、高周波の空気力モデルが必要か
- B 空力は線形か、非線形か
- C 弾性変形の有無
- D ブレードどうしの連成の有無
- E 支持系と連成するか

ヘリコプタ・ロータの不安定振動を本分類で整理して、表1-1に示す。

1.3.1 ブレードの固有振動数

ロータの不安定現象を整理するための準備として、ブレードの固有振動数の具体例を図1-15に示す。本図から、フラップやリード・ラグの1次曲げはロータ回転周波数とほぼ同じオーダーであるのに対して、高次曲げはロータ回転周波数 Ω の数倍の固有振動数を持つことがわかる。ねじり変形は $4\Omega - 6\Omega$ とされている。一般的な、ヒンジ形式を持つロータの場合、エッジ曲げの固有振動数は 1Ω よりも小さくなり、soft in-planeと呼ばれる。ラグ方向の曲げをエッジ曲げと呼ぶ。これに対し、H-60のテールロータ(TR)など、ラグ方向の剛性が高く、エッジ曲げの固有振動数が 1Ω よりも高くなる形式をstiff in-planeと呼ぶ。

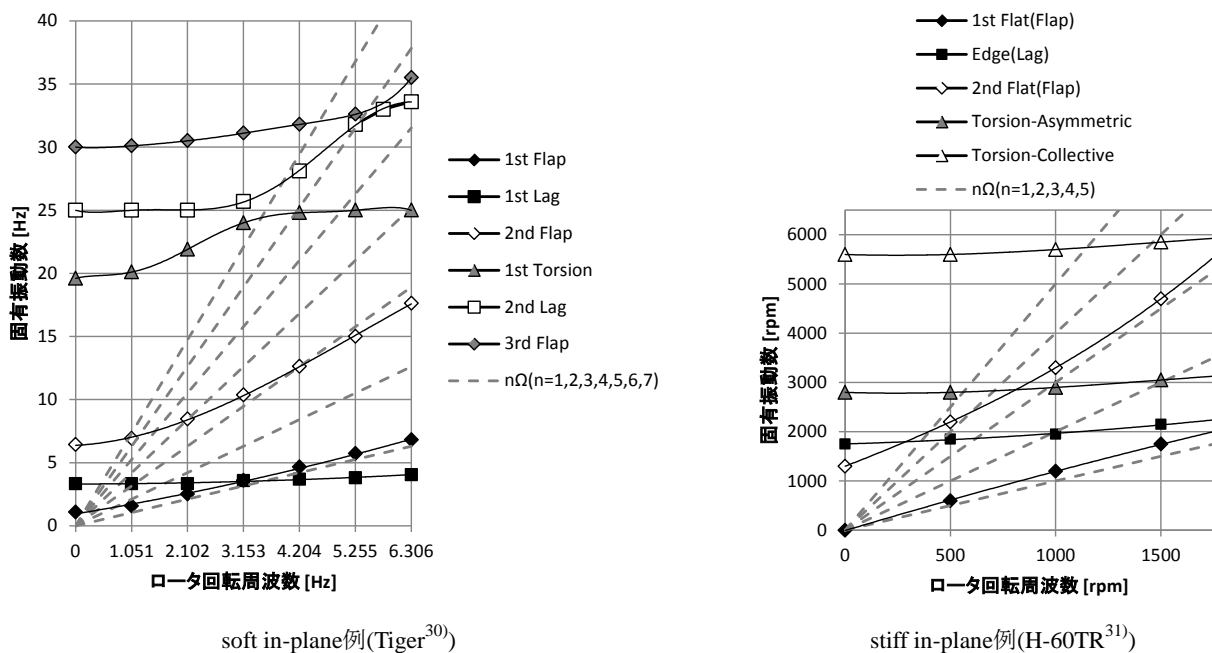


図1-15 ブレード固有振動数

表1-1 ヘリコプタ・ロータの不安定現象

	ブレード・フラッタ	フラッピング不安定	フラップ・ラグ不安定	地上共振・空中共振	ワール・フラッタ
変数	● ねじり変位 ● 上下曲げ変位	● フラップ角	● フラップ角 ● リード・ラグ角	● ハブ変位 ● リード・ラグ角	● ハブ変位 ● リード・ラグ角
A 準定常空力か、非定常空力か	非定常 ^{23,24)}	準定常 ^{21,22)}	準定常 ^{25,26)}	空気力無 ⁴¹⁾ 準定常 ^{27,28)}	準定常 ^{6,29)}
B 空力は線形か、非線形か	非線形 ²⁴⁾ 線形 ²³⁾	非線形 ^{21,22)}	線形 ^{25,26)}	空気力無 ⁴¹⁾ 線形 ^{27,28)}	線形 ⁶⁾ 非線形 ²⁹⁾
C 弾性変形の有無	有 (ブレード) ^{23,24)}	無 ²²⁾ 有 (ブレード) ²¹⁾	無 ³⁹⁾	有 (支持系) ^{27,28,41)}	有 (支持系) ⁶⁾
D ブレードどうしの連成の有無	基本的に無 ²⁰⁾ 誘導速度による干渉 ²³⁾	無 ²¹⁾	無	有 ^{27,28,41)}	有 ⁶⁾
E 支持系と連成するか	無 ²⁰⁾	無 ^{21,22)}	無	有 ^{27,28,41)}	有 ⁶⁾
検討事例	AH-56 ²³⁾ CH-47 ²⁴⁾	NH-3A ²¹⁾	H-21 ²⁵⁾ BO-105 ²⁶⁾	XH-51A ²⁷⁾ , BO-105 ²⁸⁾	V-22 ²⁹⁾ AH-64 ²⁾ SH-60K ¹⁾

1.3.2 ブレード・フラッタ

ヘリコプタ・ブレードについても固定翼のフラッタと同様に、ねじりとフラップ曲げが連成したモードが不安定化する可能性がある。図1-15に示したように一般的にヘリコプタ・ブレードのねじりモード固有振動数はロータ回転周波数 Ω の3～6倍の大きさとなるので、空気力モデルは、Theodorsen関数などによる振動翼理論が適用される。

固定翼機や前進飛行しているヘリコプタでは翼端渦は後方に流れ去るのに対し、ヘリコプタがホバリング時、翼端渦はロータ面の下方に滞留する。この翼端渦から誘導される誘導速度の影響を考慮した検討もある²³⁾。曲げねじりフラッタは固定翼も含めて一般的に動圧が高いほど減衰が弱くなるので、フラッタの抑制、具体的にはフラッタ速度の向上には、翼のねじり剛性増、翼弦方向の重心位置の前方移動が有効とされている³²⁾。

ヘリコプタが前進飛行時、飛行速度とブレード回転速度が逆方向となる後退側では迎角が大きくなり失速に近づくので、固定翼でも知られている失速フラッタが発生する場合がある。ブレードが1回転のうち失速域となるのは後退側のみであるので、リミットサイクルとなり破壊に至ることはない²⁰⁾。ただし、ピッチリンク（操縦系統）に加わる飛行荷重の増大が論点となる。CH-47実機の飛行試験で計測されたピッチリンク荷重と解析結果との比較検討をTarzaninが行っている²⁴⁾。

ヘリコプタの前進飛行時には、1.2.2項に述べたとおりブレードのピッチ角／迎角が周期的に変化するため、ダイナミックストール現象が失速フラッタに関与する。ダイナミックストールの空力モデルについては、数多くの研究事例がある^{33,34,35)}。

1.3.3 フラッピング不安定

1.2.2項に示したとおり、前進飛行時にヘリコプタ・ブレードは絶えずフラッピングしている。このフラッピング運動が、ヘリコプタの高速化により不安定化するかもしれないについていくつかの研究事例がある^{21,22)}。フラッピング不安定は、ハブ運動とは連成しないブレード1本についてフラッピングの1自由度方程式により評価される。フラッピングの運動方程式における空気力は、ロータ回転に伴い周期的に変化するので、安定性評価はFloquetの理論が用いられている³⁶⁾。実機の飛行においてフラッピング不安定が発生したと報告されているSikorskyの高速実験機NH-3AについてのPaulによる検討結果では、マッハ数によるピッチングモーメントの非線形性を考慮することで、現象をとらえたとしており、空力モデルは非線形となっている²¹⁾。

1.3.4 フラップ・ラグ不安定

ブレードがフラッピング、または、ラグ運動すると、ピッチリンクやヒンジの幾何学的関係から、ブレード・ピッチ角が変化するカップリングが発生する。古くはVertol社のH-21用に開発されたブレードにおいて、ラグ運動とピッチ運動の連成による不安定振動が発生した²⁵⁾。これらの不安定は、フラップ・ラグ不安定と呼ばれ、フラッピングとリード・ラグ運動も含めた2自由度系として検討され、ヒンジ部分より外側のブレードは剛体として扱われる。サイクリック操舵のないテール・ロータにおいては、フラップ・アップするとピッチ下げとなるマイナスの δ_3 角（図1-16）が設けられることがよくあるが、この δ_3 角によるフラッピングによるピッチカップリングの効果について検討した事例³⁷⁾もある。フラッピングやリード・ラグ運動を機械的なヒンジではなく、梁の弾性変形により行うヒンジレスロータやベアリングレスロータでは、ブレードのピッチ角、フラップ角、リード・ラグ角が梁の弾性変形により連成するので、それらの問題を扱った事例³⁹⁾がある。ホバリング時のフラップ・ラグ不安定は、線形空気力では定係数化される³⁹⁾が、前進飛行時には周期的空気力となるためFloquetの理論が適用されている⁴⁰⁾。BO-105を模擬した風洞試験により各種の効果が確認されている²⁶⁾。

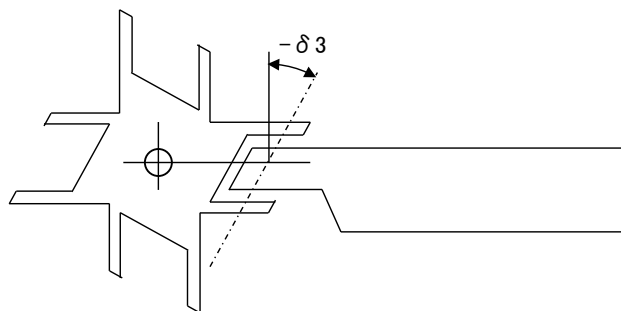


図1-16 δ_3 角³⁸⁾

1.3.5 地上共振・空中共振

ヘリコプタにおいては、脚を含む機体全体とロータが連成した不安定現象として地上共振が広く知られている¹⁵⁾。地上共振はヘリコプタの脚も含む機体全体の動きとロータが連成しワール運動を行う不安定振動であり、Coleman⁴¹⁾などによる研究が著名である。ロータ回転面内のリード・ラグ運動とハブの運動を模擬したモデルが地上共振問題では使われる⁴¹⁾。地上共振問題ではハブ運動を固定系、ブレード・ラグ運動を回転系で定義すると、系の運動方程式に周期項が現れる。これは、固定系で定義されるハブ変数と回転系で定義されるブレード変数の間の座標変換に起因するもので、ハブ運動とブレード・ラグ運動を同じ座標系で記述することで定数化が可能である。具体的には、ブレード・ラグ角を固定系で定義するか、等方支持の場合はハブ運動を回転系で定義することにより、運動方程式は定係数となり固有値解析が可能となる²⁰⁾。

地上共振は、空気力を考慮しないモデルで説明可能な特定のロータ回転周波数範囲で発生する機械的自励振動である。ヘリコプタ史上、初期においては地上共振で破壊された事例が相応にあったが、ブレードのラグ運動に対してダンパーを設置することが有効とされるようになって地上共振が問題になる事例は少なくなった。一方、ロッキード社が1960年代に開発した試験機XH-51Aなど、リード・ラグ・ダンパーを削除したヒンジレスロータを採用する事例では地上共振が懸念事項の一つとなった²⁷⁾。特に、ヒンジレスロータの場合は、ブレード・ラグ剛性が高くなるため、地上静止に脚を含む場合のモードだけでなく、脚が地面から離れた場合のモードについての同様な不安定振動が発生する可能性があり、これを空中共振と呼んでいる²⁷⁾。

1.3.6 ワール・フラッタ

ワール・フラッタという用語は、通常は固定翼のプロペラのワール・フラッタを指す⁵⁾。プロペラのワール・フラッタは、固定翼機の主翼にナセルを介して取り付けられたプロペラにおいて、プロペラとその支持系（ナセル）の弾性変形が不安定化する現象で、Reedらによる研究が著名である^{6,42)}。プロペラ回転軸の縦揺れ（ピッチング）と横揺れ（ヨーイング）の2自由度運動で説明され、線形化運動方程式の剛性行列と質量行列は対称行列となるが、減衰行列がプロペラ回転に伴うジャイロ項により歪対称となる。このため、空気力なしでの固有モードとしてピッチとロールの位相差は90度となり、プロペラはワール運動を行う。一般的なプロペラではブレードがハブに剛結合されているので、プロペラのピッチングとヨーイングは、ブレード迎角の変化となり、線形化されたブレード空気力モデルにより説明される自励振動である^{6,42)}。プロペラのワール・フラッタは、一般的にナセルの剛性を高めることで安定領域を広げることができる。

H26(2014)年度からの中期防衛力整備計画において、我が国でも導入が決まったV-22ティルトロータ（図1-17）についてもワール・フラッタが検討されている²⁹⁾。ティルトロータにおいて、プロップ・ロータと呼ばれる回転翼は、固定翼モードでは通常のプロペラと同じ機能を有するが、ヘリコプタモードでは、1.2.2項にて述べたようにフラッピングすることで機体を前後、左右へ進ませる機能を担う。このため、プロップ・ロータのワール・フラッタ検討では、通常のプロペラとは異なり、ブレードがフラッピングするモデルとする必要がある。一般の固定翼機の場合に比べ、ティルトロータは1.2.1項にて述べたように垂直離陸するための馬力が高いため、エンジンが重くワール・フラッタとしては不利な条件になっていると思われる。V-22のプロップ・ロータのワール・フラッタを抑制するためのブレード翼形状⁴³⁾や、固定翼のテラリング^{44,45)}などが検討されている。



図1-17 V-22ティルトロータ

(2013.9.20, 日本防衛装備工業会の調査団としてベル社訪問時⁴⁶⁾)

ヘリコプタのロータにおいても、ロータを支持するトランスミッション部分とロータが連成した不安定現象が発生したとの報告がSH-60KとAH-64の2機種についてある。

SH-60K開発では、試作機XSH-60Kの飛行試験において、ある速度を超えると6.7[Hz]振動と呼ばれる振動（以下、6.7[Hz]振動と呼称）が発生することが判明した¹⁾。SH-60Kは、1997年度から2004年度にかけて防衛省にてSH-60Jを母機に改造開発が行われたものである³⁾。XSH-60Kの‘X’は、試作機であることを表す。SH-60KのSH-60Jからの変更点は、対潜任務装備の新規開発、最大重量の増加、キャビンのストレッチ、メインロータブレードの換装などである。特にメインロータブレードについては、翼端部分が上方に曲がってから翼端にかけて下方に曲がる上下反角を有する特徴がある³⁾。

SH-60Kの6.7[Hz]振動の発生は、10.5[Hz]のトランスミッションピッチモードが不安定化することにより発生する。6.7[Hz]は全機縦曲げ1次モード、10.5[Hz]はトランスミッションピッチモードの固有振動数とされている^{1,47)}。SH-60Kで、トランスミッション支持系とのロータが連成した不安定現象が発生したのは、SH-60Kの新ロータによる重量増がトランスミッションピッチモードの特性を変えたことだとされている⁴⁷⁾。10.5[Hz]の固有振動数をもつトランスミッションピッチモードの不安定化が、4P変調により6.7[Hz]振動の発散につながるとされている^{1,47)}。4P変調とは、XSH-60Kのロータ回転周波数4.3[Hz]の4倍である17.2[Hz]と、トランスミッションピッチモードの固有振動数10.5[Hz]と全機縦曲げ1次の固有振動数6.7[Hz]の和が一致していることにより、一方が励起するとロータを介して別の周波数である他方に対し加振となることを指す^{1,47)}。

SH-60K開発では、トランスミッションピッチモードの固有振動数を高くするなどの安定化対策は見合わせられ、振動発生を搭乗員に認知させる警報機能と、6.7[Hz]振動の増大を抑制するディセンシタイザが導入された¹⁾。ディセンシタイザは、6.7[Hz]振動の発散過程で、機体が6.7[Hz]で振動することにより6.7[Hz]の操縦入力が操縦系統を介してメイン・ロータに伝達するのを緩和する機能である^{1,47)}。本機能は、スティック位置信号を元に操縦系統6.7[Hz]振動を打ち消すような信号をAFCC(Automatic Flight Control Computer:自動操縦装置)にて計算し、その信号をSAS(Stability Augmentation System:安定増強装置)アクチュエーターより出力することで、操縦系統からメイン・ロータへ伝達する6.7[Hz]振動を低減するものである^{1,47)}。

AH-64では、試作機YAH-64の地上ロータ回転において、ロータマスト（ロータの支持系）の曲げモーメントが発散傾向を示した²⁾。AH-64は、1970年代に米国で開発された攻撃ヘリコプタで、2社による機体の競争試作を行うフェーズ1と、機体メーカーを選定後の試作機の開発であるフェーズ2の2段階で開発が行われた⁴⁸⁾。YAH-64はヒューズ社（当時）の試作機の型式であり、量産段階では試作を表す‘Y’が取れてAH-64Aとの名称になっている。

フェーズ1に行われた地上試験で、108%NR試験時にロータマスト（支持系）の曲げモーメントが発散傾向を示し、ロータ駆動馬力を下げるまで、発散傾向が持続したとのことである²⁾。YAH-64開発のフェーズ2ではフェーズ1に対し、ロータとコクピット部の間隔を広げるためロータ高を高くする、高速飛行時のブレード荷重低減のためブレード翼端に後退角を付与する変更が行われた²⁾。ワール不安定を避ける観点からは、ロータ高が高くなるのは、ハブのピッチ/ロールの固有振動数が低下し、ロータ支持剛性が低くなることと等価であるため、マスト、支持桁の部材寸法増などによりフェーズ1形態よりも支持剛性を高めた²⁾。フェーズ1と同じ条件で行われたフェーズ2の地上振動試験では、ハブ運動が発散することにはなかった²⁾。

1.4 本研究の目的

本研究ではSH-60Kのトランスミッションピッチモードの不安定化メカニズムを明らかにすることを目標とする。ヘリコプタ・ロータの支持系であるトランスミッションの弾性変形モードでは、プロペラのワール・フラッタと同様、ロータ回転に伴うジャイロ項は歪対称の減衰項となるので、回転軸がワール運動するモードだと考えられる。

プロペラのワール・フラッタは、プロペラ・ハブのピッチおよびヨー（機体軸基準）の2変数でモデル化されるので、2種類のモードがある。プロペラ回転と同じ回転のワールモードと、プロペラ回転とは逆回転のワールモードであり、Reedによると不安定化するのは逆回転モードである⁴²⁾。Reedが図示している例を図1-18に示す。

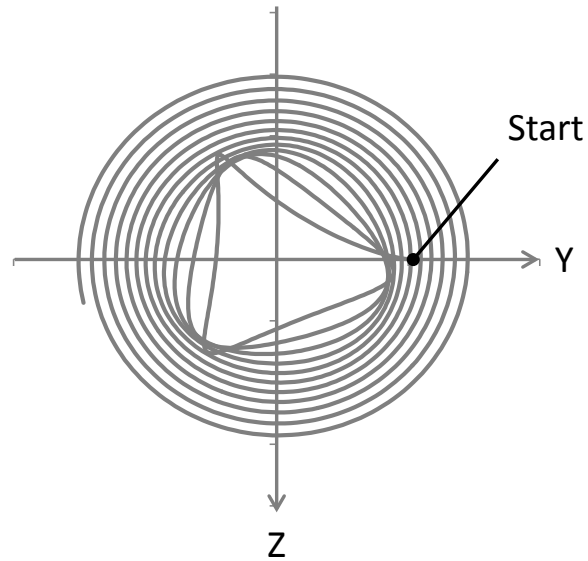


図1-18 プロペラのワール・フラッタでのハブの動き⁴²⁾

ヘリコプタ・ロータの地上共振では、ハブの運動はプロペラと同様な2変数で表されるが、前述のとおり、それ以外に、ブレードのラグ角の自由度がある。4枚ブレードの場合の地上共振のモードを図1-19, 20に示す。

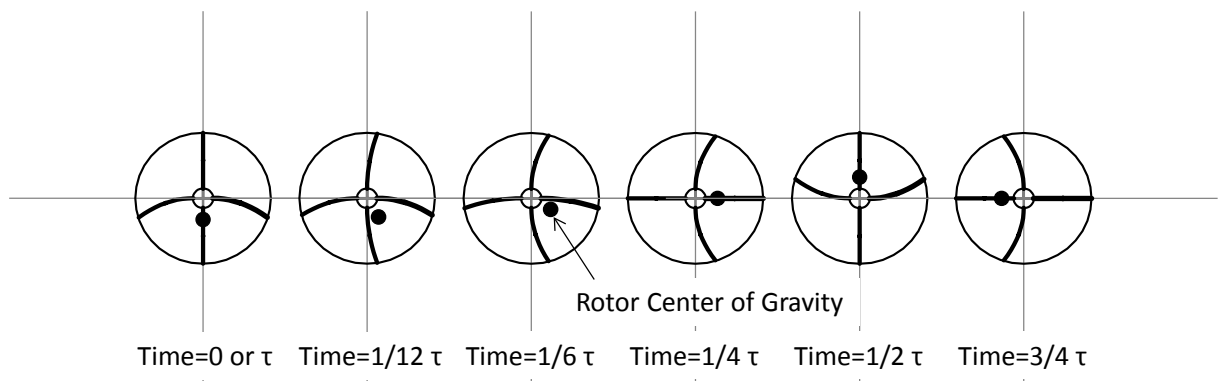


図1-19 地上共振の不安定モード（固定系）²⁷⁾

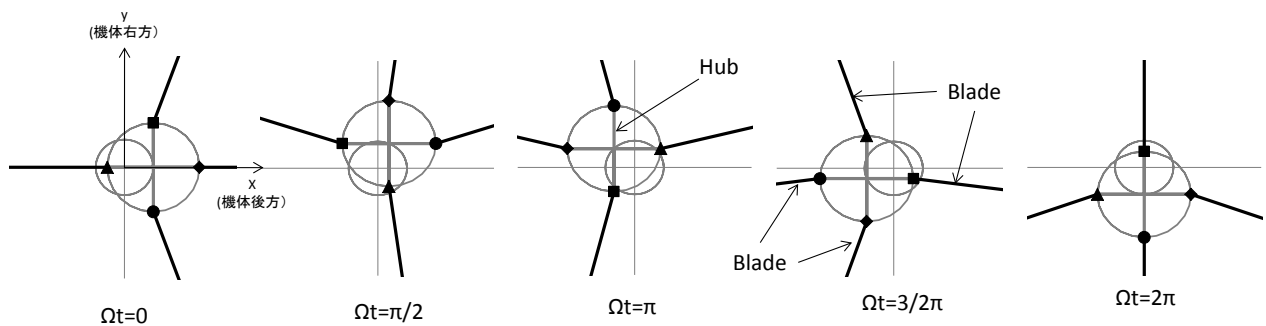


図1-20 地上共振の不安定モード（等方支持、回転系）⁴⁹⁾

4枚ブレード・ロータの場合、フラップ角を除いてもハブ運動の2変数に加えてブレード・ラグ角が4変数となるので、合

わせて6つのモードが存在するはずである。Dohamが示し加藤が参照している地上共振モードは、そのうちの一つである。2章にて具体的に示すが、SH-60Kのトランスミッションピッチモードは、この6つのモードのうちの一つであり、地上共振のモードとは異なる。

栗城の報告では、トランスミッションピッチモードの安定性に関するシミュレーションの結果から、同モード固有振動数10.5[Hz]を11.0[Hz]まで高めれば、トランスミッションピッチモードの不安定化速度を4[m/s]程高速域に広げることができ、11.5[Hz]まで上げれば全飛行速度領域で安定化させることが可能と推定されるとしている¹⁾。ただし、栗城の報告では、トランスミッションピッチモードの不安定化のメカニズムについては「速度が速くなると不安定領域に近づく」とあるだけである。シミュレーションの結果について言及があるものの、シミュレーションモデルについては具体的な説明はない。そこで本研究では、トランスミッションなどの支持系を含んだヘリコプタ・ロータのパネ・マス系の線形化モデルを導出し、空気力を含まない状態でのモード解析から、空気力なしで不安定化する可能性について整理する。

一方、AH-64に関するSilverthornの報告によると、製造メーカ所有の解析プログラムDART(Dynamic Analysis Research Tool)による検討から、このワール不安定現象には不安定化の主要因としてハブのピッチ/ロール運動によりブレード・ピッチ角が変動するカップリングが関係しているとのことである²⁾。ハブのピッチ/ロール運動によるブレード・ピッチ角とのカップリングは、ヘリコプタに一般的なスウォッシュ・プレート機構がハブの周辺に取り囲む形式において、ハブ運動による幾何学的関係により説明されるものであり、Silverthorn以外にLoewy⁵⁰⁾なども図示している。ピッチ角変動が効くということはブレード空気力が関与した不安定現象と考えられる。SH-60Kの6.7[Hz]振動は、特定の速度以上の高速域で発生することから、ロータ空気力が関与している可能性が高い。このロータ空気力による不安定化作用に関しては、AH-64のワール不安定報告に提示されているハブのピッチ/ロール運動によるブレード・ピッチ角入力のモデル式を参考にする。6.7[Hz]振動は高速飛行時に発生することから、ロータ空気力の状態変数は周期的に変化するはずである。この周期性については、フラッピング不安定やリード・ラグ不安定に関するPeters³⁶⁾の検討と同様、Floquetの定理を適用する。

SH-60Kの改造母機となったSH-60Jにて、同様な不安定現象が報告されていないことについて、SH-60Jのトランスミッションピッチモードの固有振動数は11.0[Hz]よりも高いことが理由と考えられるとしている⁴⁷⁾。また、原因調査の一環として行われたロータ回転周波数を97%に減らした飛行試験では、トランスミッションピッチモードが励起することではなく、6.7[Hz]振動が発散することもなかったとのことである⁴⁷⁾。SH-60Kの6.7[Hz]振動は特定の高速域で発生することが確認されているので、本研究にて構築する数値計算モデルについては、これら栗城の報告、具体的には飛行速度、トランスミッションピッチモードの固有振動数、ロータ回転周波数の変化による安定性変化について比較検証を行う。

1.5 本論文の構成

第1章では、「緒論」として、本研究の目的について述べた。加えて、本研究を行った背景として、ヘリコプタにおけるワール不安定の事例、類似の回転翼の不安定現象であるプロペラのワール・フラッタとの違いを述べた。特に、ヘリコプタ開発の歴史的経緯からヘリコプタ・ロータが、なぜプロペラと異なるかについて述べた。

第2章では、「支持系を含むヘリコプタ・ロータの力学的特性」として、トランスミッションなどの支持系を含むヘリコプタ・ロータについて、パネ・マス系の線形運動方程式を導出する。導出された線形運動方程式を元に、モード解析を行い、系が不安定となる条件について導出する。

第3章では、「前進飛行時のヘリコプタ・ロータのワール不安定現象」として、前章で導出したパネ・マス系の線形化運動方程式と非線形空気力モデルを組み合わせた数値計算を行う。前進飛行時のブレード・ハブ運動の周期的定常状態を算出し、次に、この釣り合い条件からの擾乱を想定し、線形化空気力モデルを構築する。この線形化モデルの係数は周期係数となるので、Floquetの定理により安定性を評価する。この結果と、SH-60K飛行試験における振動発生状況と比較検証を行う。

第4章では、「ヘリコプタ・ロータのワール不安定に関するパラメータ共振解析」として、前章の数値計算によって捉えられた不安定現象の不安定化原因を検討する。第2章のモード解析の結果から、系の一般解を固有モードの重ね合わせで表現し、空気力の付加により一般解を構成する係数が時間の関数とみなす定数変化法を適用する。空気力は、第3章で得られた空気力を用いる。加えて、同解析手法から、不安定を抑制する方法についても検討する。

最後に第5章では、「結論」として、本研究で得られた成果を総括する。

2. 支持系を含むヘリコプタ・ロータの力学的特性

2.1 はじめに

航空機の分野において、回転翼とその支持系が連成した不安定振動としてプロペラのワール・フラッタが一般的に知られている⁵⁾。プロペラのワール・フラッタ問題は、プロペラを支持するナセル部の弾性変形により、プロペラが機体軸に対しピッチとヨーの2つ方向に動く想定で定式化される。線形化運動方程式においてジャイロ項は、歪対称の減衰項となるため、モード解析の結果得られるモードは、ふれまわり（ワール）運動となり、ワール運動がプロペラ回転と同じ回転方向のモードと、逆回転方向の2つのモードがモード解析の結果得られる。不安定化するのは、逆回転モードである^{6,42)}。

プロペラのワール・フラッタと同様な不安定現象が、ヘリコプタでも発生するとの報告がSH-60K¹⁾とAH-64²⁾の2機種についてある。SH-60Kでは「トランスミッションピッチモードの不安定化」と呼ばれており、ヘリコプタのトランスミッション部分は、プロペラのナセルに対応するので、プロペラのワール・フラッタに類似な不安定モードと思われる。AH-64の事例では「ワールモードの安定性」という言葉を使っている、ヘリコプタ・ロータは通常のプロペラとは異なり、ハブに対しブレードの角度変位が許容されており、ロータ回転面内のリード・ラグ角と、回転面外のフラップ角の自由度を持つ。SH-60KやAH-64の4枚ブレードのロータのワール運動について考える場合、プロペラのワール・フラッタと同様なハブ運動の2自由度に加えて、ブレード1本当たりリード・ラグとフラップの2自由度があるので、合計10自由度となる。これに対し、栗城¹⁾、Silverthorn²⁾らの報告ではモード形状などの基本的な構造系の特性が明らかにされていない。

一方、ヘリコプタ・ロータの不安定振動として、地上共振が広く知られており、地上共振はハブ運動とブレードのリード・ラグ運動により定式化される⁴¹⁾。4枚ブレードのロータの場合、自由度は6となる。地上共振の不安定モードは、ハブの運動はハブのワール運動を含むものとなっており、プロペラの場合と同様、線形化運動方程式においてジャイロ項が歪対称となるためである。

以上を踏まえ、本章ではトランスミッション部などに対応するロータ支持系を含むヘリコプタ・ロータについて、運動方程式を導出し、モード解析を行う。この結果から、地上共振に対応するモードも含め、プロペラのワール・フラッタに相当するモードを導出し、それらが不安定化する可能性について検討する。

2.2 運動方程式

支持系を含む4枚ブレードのヘリコプタ・ロータのモデルとして、図2-1に示す系を考える。

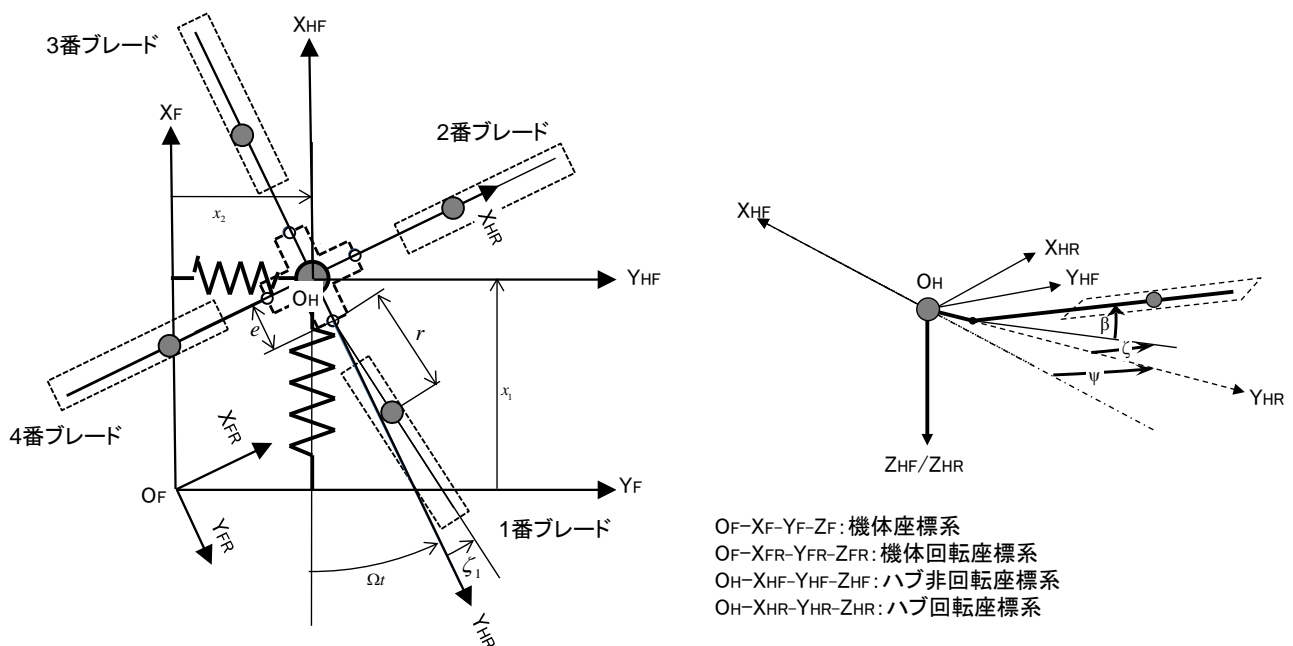


図 2-1 支持系を含むヘリコプタ・ロータのモデル

ハブと4本のブレードを大きさのない集中質量とし、その質量をそれぞれ m_h , m_b とする。ハブはバネ要素により機体座標系 $O_F - X_F - Y_F - Z_F$ に固定されており並進運動が可能である。ハブ中心の X_F 方向への変位を x_1 , Y_F 方向への変位を x_2 と定義する。ロータは、ハブを中心にロータ回転周波数 Ω にて、上方 ($-Z$ 方向) からみて反時計回りに回転する。ブレードの方位角は、ヘリコプタでの慣例に合わせ1番ブレードについて真後方を0とする¹⁵⁾。ブレードはハブに対してヒンジを介して連結されており、回転可能である。回転面内にロータ回転方向と同じ向きにラグ角 $\zeta_j (j=1, 2, 3, 4)$ を、回転面に垂直方向の上向きにフラップ角 $\beta_j (j=1, 2, 3, 4)$ を定義する。ヒンジはハブの回転中心から e だけオフセットされており、ブレードの重心はヒンジから r だけ外側に位置する。角速度 $\{0, 0, -\Omega\}^T$ で回転する機体回転座標系 $O_F - X_{FR} - Y_{FR} - Z_{FR}$ でのハブ位置 \mathbf{p}_h およびブレード位置 $\mathbf{p}_{bj} (j=1, 2, 3, 4)$ はつぎのように記述される。

$$\mathbf{p}_h = \begin{Bmatrix} x_1 \sin(\Omega t) + x_2 \cos(\Omega t) \\ -x_1 \cos(\Omega t) + x_2 \sin(\Omega t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_{bj} = \mathbf{p}_h + e \begin{Bmatrix} -\cos\left(\frac{\pi}{2} j\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} j\right) \\ 0 \end{Bmatrix} + r \begin{Bmatrix} -\cos \beta_j \cos\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2} j\right) \\ \cos \beta_j \sin\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2} j\right) \\ -\sin \beta_j \end{Bmatrix} \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (2-1)$$

支持系反力、空気力、減衰を想定するが、重力は無視する。支持反力 $k_x x_i$ は左辺のベクトル \mathbf{b} に含め、空気力 \mathbf{f}_A と減衰 \mathbf{f}_D を右辺におき、運動方程式を導出する。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{b} = \mathbf{f}_A - \mathbf{f}_D \quad (2-2)$$

ここで、

$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}^T \quad (2-3)$$

であり、行列 \mathbf{M} の非零要素とベクトル \mathbf{b} の要素は以下のようなになる ($i=1, 2, j=1, 2, 3, 4$)。

$$\begin{aligned} M_{i,i} &= m_h + 4m_b \\ M_{j+2,j+2} &= m_b r^2 \cos^2 \beta_j \\ M_{j+6,j+6} &= m_b r^2 \\ M_{i,j+2} &= -m_b r \cos \beta_j \sin\left(\Omega t + \zeta_j + \frac{\pi}{2}(i+j)\right) \\ M_{j+2,i} &= M_{i,j+2} \\ M_{i,j+6} &= -m_b r \sin \beta_j \cos\left(\Omega t + \zeta_j + \frac{\pi}{2}(i+j)\right) \\ M_{j+6,i} &= M_{i,j+6} \\ b_i &= k_x x_i + m_b r \sum_{j=1}^4 \left\{ -\dot{\beta}_j^2 \cos \beta_j \cos\left(\Omega t + \zeta_j + \frac{\pi}{2}(i+j)\right) \right. \\ &\quad \left. - (\Omega + \dot{\zeta}_j)^2 \cos \beta_j \cos\left(\Omega t + \zeta_j + \frac{\pi}{2}(i+j)\right) + 2(\Omega + \dot{\zeta}_j) \dot{\beta}_j \sin \beta_j \sin\left(\Omega t + \zeta_j + \frac{\pi}{2}(i+j)\right) \right\} \\ b_{j+2} &= m_b r \cos \beta_j \left\{ e \Omega^2 \sin \zeta_j - 2r(\Omega + \dot{\zeta}_j) \dot{\beta}_j \sin \beta_j \right\} \\ b_{j+6} &= m_b r \sin \beta_j \left\{ r(\Omega + \dot{\zeta}_j)^2 \cos \beta_j + e \Omega^2 \cos \zeta_j \right\} \end{aligned} \quad (2-4)$$

右辺の \mathbf{f}_D は、次式に示すハブ運動に関する構造減衰、ブレード・ラグ運動に対するラグ・ダンパーの減衰とし、フラップ運動については減衰を考慮しない。空気力 \mathbf{f}_A は3章で述べる。

$$\mathbf{f}_D = \mathbf{D}_D \dot{\mathbf{x}} \quad (2-5)$$

減衰行列の \mathbf{D}_D の非零要素は以下のようなになる。

$$\begin{aligned} D_{Di,i} &= d_x \quad (i=1, 2) \\ D_{Dj+2,j+2} &= d_\zeta \quad (j=1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

2.3 構造振動モード解析

式(2-2)の基本的な特性を把握するために、空気力と減衰を無視して、構造振動系の固有モード解析を行う。

$$\cos \beta_i \cong 1, \quad \sin \beta_i \cong \beta_i, \quad \cos \zeta_i \cong 1, \quad \sin \zeta_i \cong \zeta_i$$

と近似して、変数どうしの積を省略すると、線形化方程式が得られる。

$$\mathbf{M}_0 \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_0 \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_0 \mathbf{x} = 0 \quad (2-6)$$

係数行列の非零要素は以下のようになる ($i=1, 2, j=1, 2, 3, 4$)。

$$\begin{aligned} M_{0ii} &= m_h + 4m_b \\ M_{0j+2,j+2} &= M_{0j+6,j+6} = m_b r^2 \\ M_{0i,j+2} &= M_{0j+2,i} = -m_b r \sin\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}(i+j)\right) \\ D_{0i,j+2} &= -2m_b r \Omega \cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}(i+j)\right) \\ K_{0ii} &= k_x \\ K_{0j+2,j+2} &= m_b e r \Omega^2 \\ K_{0j+6,j+6} &= m_b r(r+e)\Omega^2 \\ K_{0i,j+2} &= m_b r \Omega^2 \sin\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}(i+j)\right) \end{aligned} \quad (2-7)$$

式(2-7)の係数行列は周期的に変化するので、これを定数行列とするために、つぎの変数変換を行う。

$$\mathbf{y}' = \{x_1, x_2, \zeta'_1, \zeta'_2, \zeta'_3, \zeta'_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}^T = \mathbf{U}' \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & & \\ & \mathbf{U}'_{\zeta} & \\ & & \mathbf{I}_4 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (2-8)$$

\mathbf{I}_2 と \mathbf{I}_4 は 2×2 および 4×4 の単位行列、 \mathbf{U}'_{ζ} は式(2-9)で表される回転座標系から固定座標系への変換行列であり、 $\mathbf{U}'_{\zeta}{}^{-1} = \mathbf{U}'_{\zeta}{}^T$ を満たす。

$$\mathbf{U}'_{\zeta} = \begin{bmatrix} \sin(\Omega t) & 0 & 0 & -\cos(\Omega t) \\ 0 & \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) & 0 \\ 0 & -\cos(\Omega t) & \sin(\Omega t) & 0 \\ \cos(\Omega t) & 0 & 0 & \sin(\Omega t) \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

この変換により、機体座標系での右側が ζ'_1 、前方が ζ'_2 、左側が ζ'_3 、後方が ζ'_4 となる。

式(2-9)の変数変換は時間項を含むので、 \mathbf{x} と \mathbf{y}' の時間微分は以下のように関係付けられる。

$$\mathbf{x} = \mathbf{U}'^T \mathbf{y}', \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{U}}'^T \mathbf{y}' + \mathbf{U}'^T \dot{\mathbf{y}}', \quad \ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{U}}'^T \mathbf{y}' + 2\dot{\mathbf{U}}'^T \dot{\mathbf{y}}' + \mathbf{U}'^T \ddot{\mathbf{y}}'$$

式(2-6)はつぎのように変換され、係数行列は定数となる。

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0'' \ddot{\mathbf{y}}' + \mathbf{D}_0'' \dot{\mathbf{y}}' + \mathbf{K}_0'' \mathbf{y}' &= 0 \\ \mathbf{M}_0'' &= \mathbf{U}' \mathbf{M}_0 \mathbf{U}'^T \\ \mathbf{D}_0'' &= \mathbf{U}' \mathbf{D}_0 \mathbf{U}'^T + 2\mathbf{U}' \mathbf{M}_0 \dot{\mathbf{U}}'^T \\ \mathbf{K}_0'' &= \mathbf{U}' \mathbf{K}_0 \mathbf{U}'^T + \mathbf{U}' \mathbf{D}_0 \ddot{\mathbf{U}}'^T + \mathbf{U}' \mathbf{M}_0 \ddot{\mathbf{U}}'^T \end{aligned} \quad (2-10)$$

行列 \mathbf{M}_0'' , \mathbf{D}_0'' , \mathbf{K}_0'' の非零要素は以下である ($i=1, 2, j=1, 2, 3, 4$)。

$$\begin{aligned}
M''_{0ii} &= m_h + 4m_b \\
M''_{0j+2,j+2} &= M''_{0j+6,j+6} = m_b r^2 \\
M''_{01,3} &= M''_{03,1} = M''_{02,6} = M''_{06,2} = m_b r \\
M''_{01,5} &= M''_{05,1} = M''_{02,4} = M''_{04,2} = -m_b r \\
D''_{03,6} &= D''_{05,4} = -2m_b r \Omega \\
D''_{04,5} &= D''_{06,3} = 2m_b r \Omega \\
K''_{0ii} &= k_x \\
K''_{0j+2,j+2} &= -m_b e(r-e)\Omega^2 \\
K''_{0j+6,j+6} &= m_b r(r+e)\Omega^2
\end{aligned}$$

式(2-10)からフラップ系は、次式のように分離される。

$$m_b r^2 \ddot{\beta}_j + m_b r(r+e)\Omega^2 \beta_j = 0 \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (2-11)$$

上式から、フラップの固有振動数は次式となり、ロータ回転周波数に比例する。

$$\omega_i = \Omega \sqrt{\frac{r+e}{r}} \quad (i=7, 8, 9, 10) \quad (2-12)$$

式(2-10)について、表2-1に示す物性条件でモード解析を実施し、固有振動数を求めた結果を図2-2に示す。ロータ回転周波数がSH-60Kのロータ回転周波数4.3[Hz]時にワールモード固有振動数が10.5[Hz]¹⁾となるようにハブの支持剛性を設定した。

表2-1 物性条件

ブレード質量 m_b	150[kg]
ハブ質量 m_h	400[kg]
ハブ中心－ヒンジ間距離 e	0.4[m]
ヒンジブレード重心間距離 r	2.6[m]
ハブ支持剛性 k_x	3650000[N/m]

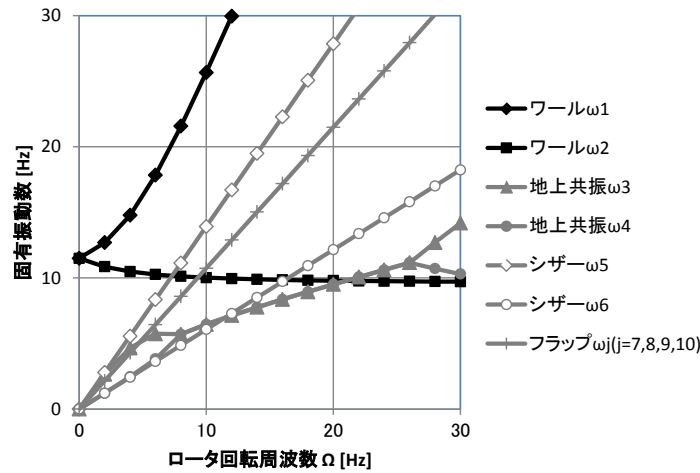
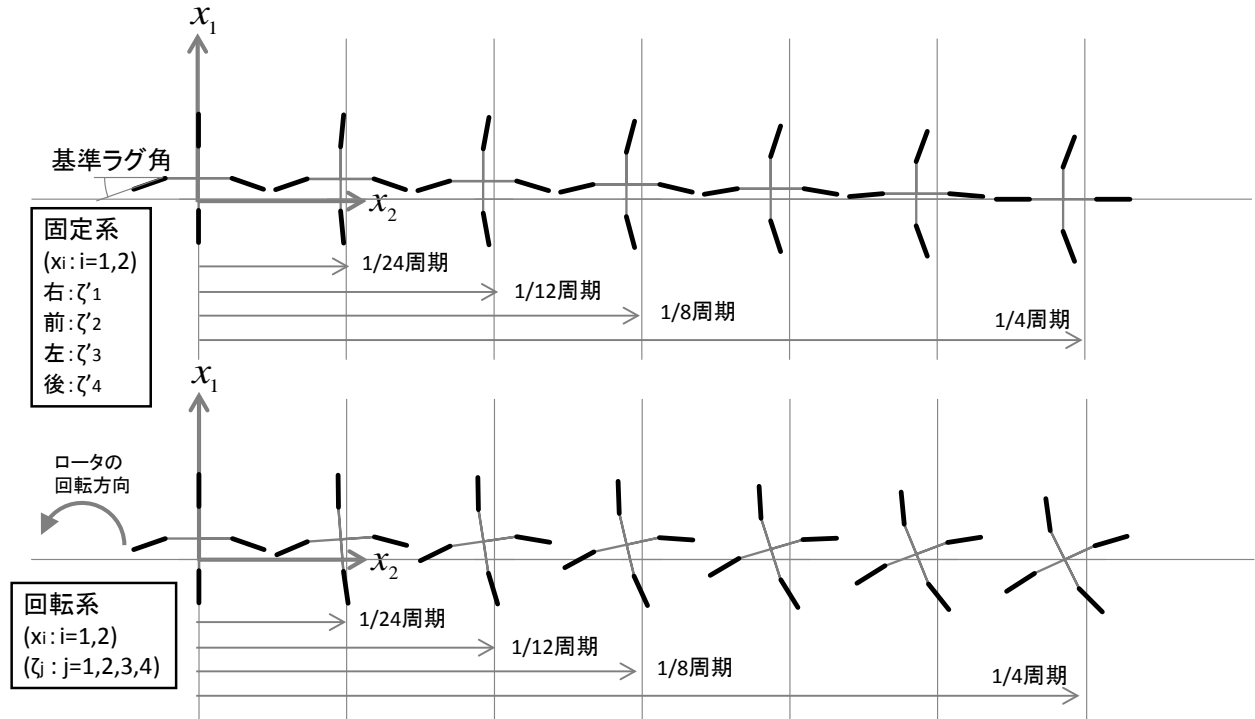
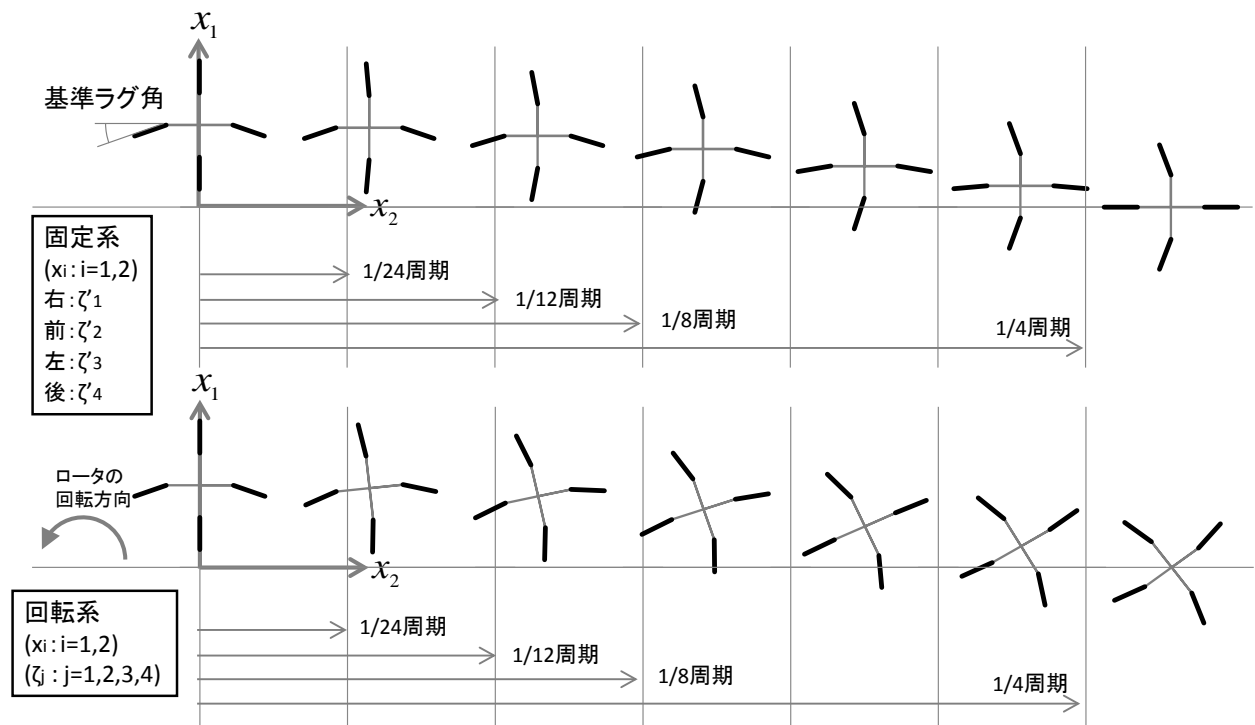


図2-2 固有振動数

フラップ系以外のモード形状を図2-3に示す。図2-3のロータ回転周波数はSH-60Kのロータ回転周波数4.3[Hz]であり、全てのモードについてラグ角の大きさを一致させてモード形状を示している。6つのモードのうち、4つではハブが動くが、残りの2つではハブが動かずブレードだけが動く。

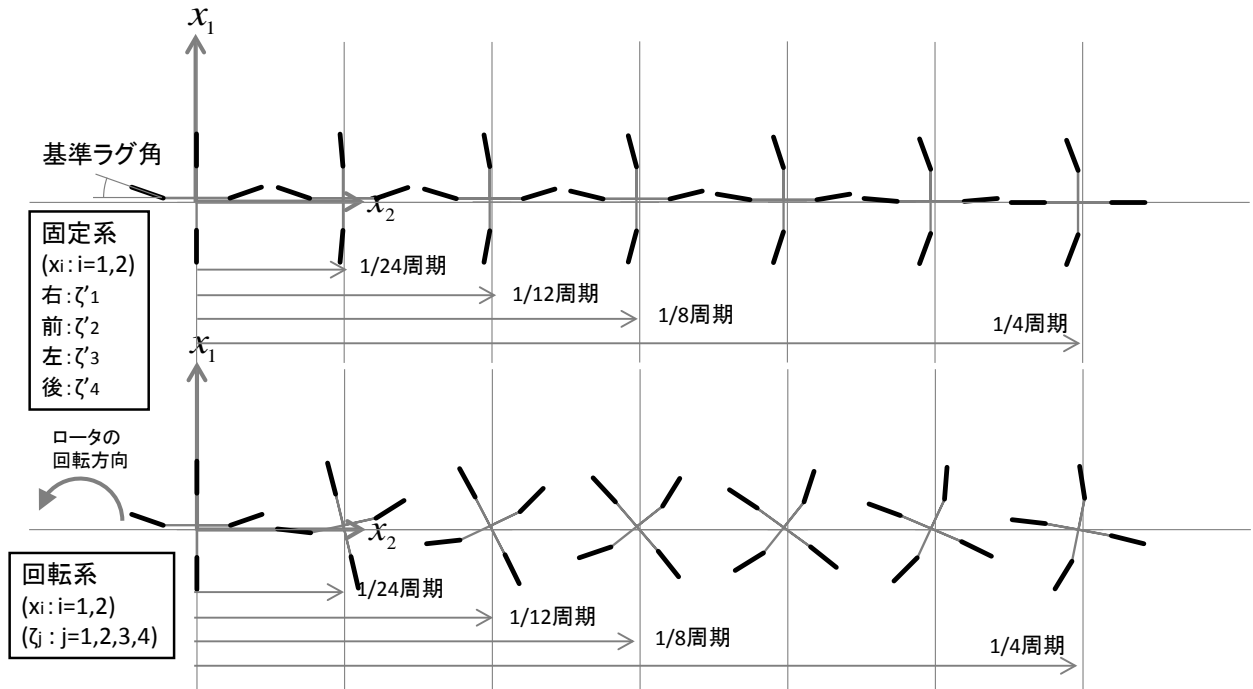


順回転ワールモード ($\omega=15.2[\text{Hz}]$, アドバンスング・ラグ)

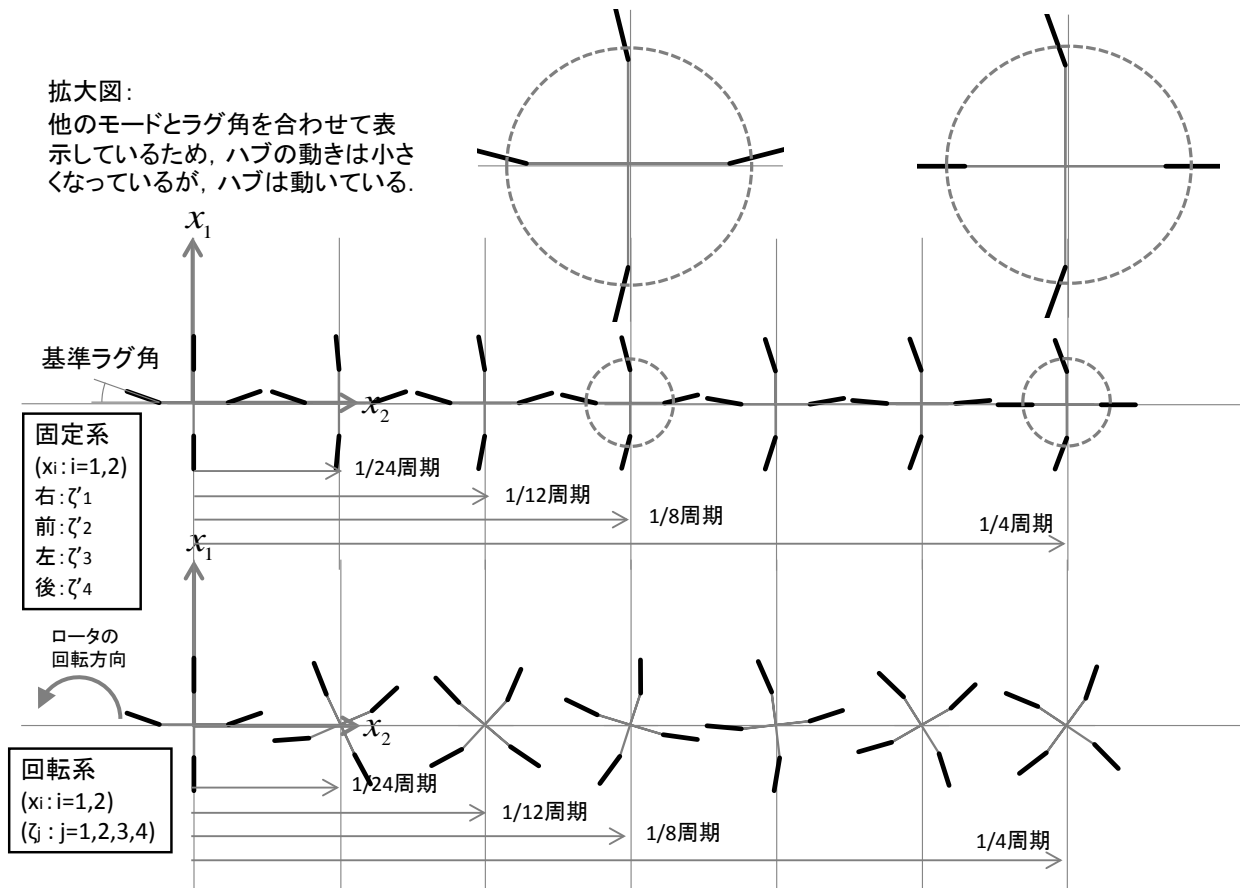


逆回転ワールモード ($\omega=10.5[\text{Hz}]$, レグレッシブ・ラグ)

図 2-3 モード形状(1/3)



地上共振モード ($\omega=4.89[\text{Hz}]$, 順回転, アドバンシング・ラグ)



地上共振モード ($\omega=2.67[\text{Hz}]$, 順回転, アドバンシング・ラグ)

図 2-3 モード形状(2/3)

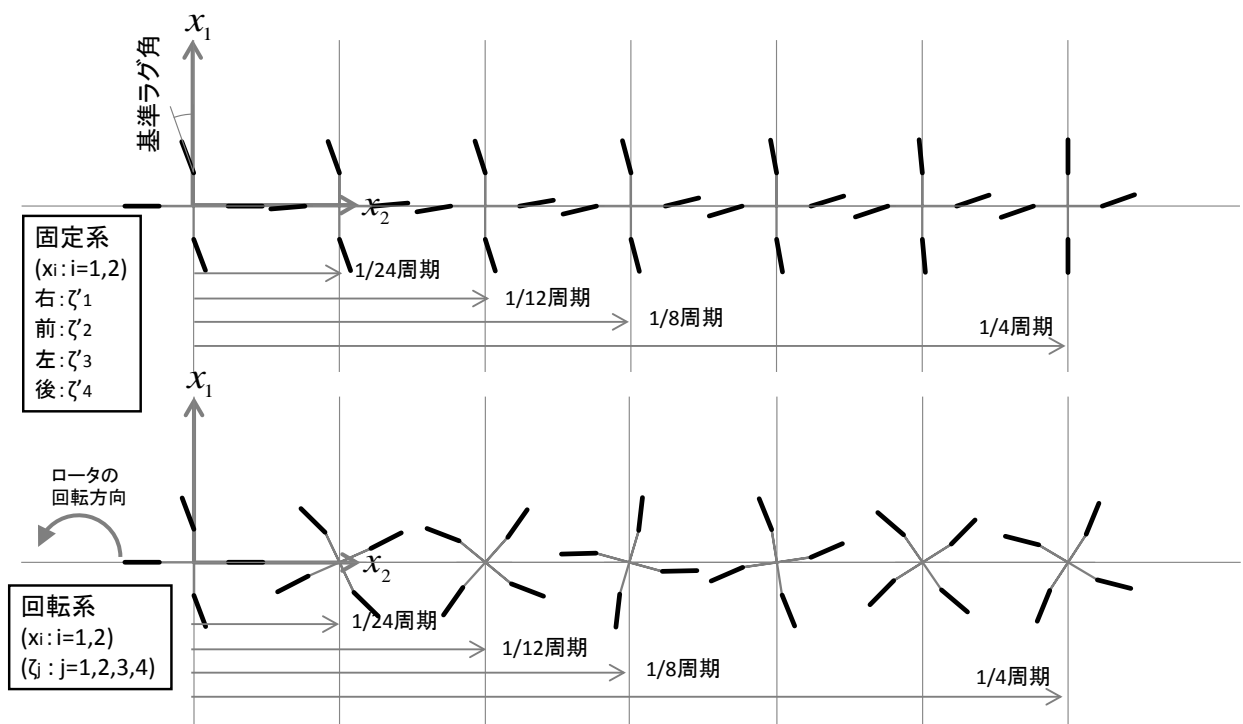
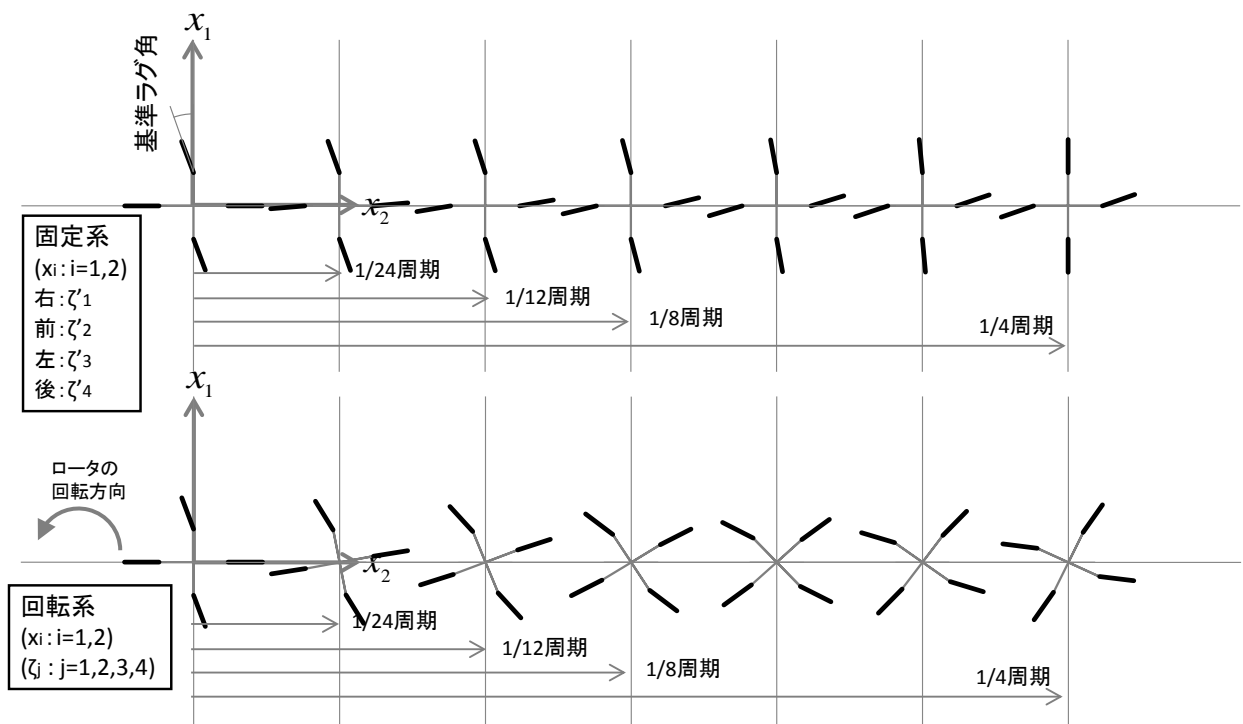


図 2-3 モード形状(3/3)

固有振動数4.89[Hz]と2.67[Hz]のモードは、図1-20と同じ動きとなっているので地上共振モードであり、ロータ回転周波数0では、固有振動数も0となる。固有振動数が10.5[Hz]と15.2[Hz]のモードは、ロータ回転周波数0での固有振動数はある値を持ち、支持系剛性に対応したモードである点で、プロペラのワール・フラッタと同じなので、ワールモードと呼ぶ。このうち10.5[Hz]のモードが、SH-60Kのトランスミッションピッチモードに対応する。ハブが動かないモードは、ブレードがはさみのような動きとなっているのでシザーモードと呼ぶ。

図2-3ではワールモードは、図紙面上にて反時計回りであるロータ回転方向とハブのワール運動の方向が同じ回転方向である場合を順回転、もう一方が逆回転となっており、プロペラのワール・フラッタと同じ特徴を有する。

ハブが動かないモードでは、対角ブレードの動きは同相となっており、4本のブレードの重心位置は常にハブ位置にある。これに対し、ハブが動くモードでは、対角ブレードの動きは逆相となっており、4本のブレードの重心位置はハブ位置からずれる。この重心位置のずれが、ハブの運動を誘起していると考えられる。ワールモードと地上共振モードの違いは、ワールモードでは、ハブ位置から見てブレード4本の重心位置とハブ中立位置が同じ方向であるのに対し、地上共振モードではハブ位置から見てブレード4本の重心位置とハブ中立位置が逆方向になっている。

ハブが動くワールモード、地上共振モードでは、対角ブレードが逆相になるが、この際に ζ'_1, ζ'_3 の組と ζ'_2, ζ'_4 の組の位相差は90度である。逆相となる ζ'_1, ζ'_3 のうち、 ζ'_1 が正の最大で ζ'_3 が負の最大の場合、 ζ'_2, ζ'_4 は0であるが、当該モードの1/4周期進んだ状態では ζ'_1, ζ'_3 が0となり ζ'_2, ζ'_4 が正か負の最大値になるが、 ζ'_2 が正となるか、 ζ'_4 が正となるかの区別がある。この違いを、伝播方向が $\zeta'_1 \rightarrow \zeta'_2 \rightarrow \zeta'_3 \rightarrow \zeta'_4$ とロータの回転方向と同じ場合をアドバンシングと呼び、 $\zeta'_4 \rightarrow \zeta'_3 \rightarrow \zeta'_2 \rightarrow \zeta'_1$ の場合をレグレッシブと呼んでいる⁵¹⁾。シザーモードでは、常に ζ'_1, ζ'_3 は同一、 ζ'_2, ζ'_4 も同一なので、この違いを見分けない（ただし、アドバンシングかレグレッシブかは、回転系と固定系で、異なる場合がある）。

以上から、ラグ角については、対角ブレードの和と差になるよう変換行列を次のように変更する。

$$\mathbf{U}_\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t) & -\cos(\Omega t) \\ -\cos(\Omega t) & \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t) \\ \sin(\Omega t) & -\cos(\Omega t) & \sin(\Omega t) & -\cos(\Omega t) \\ \cos(\Omega t) & \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) & \sin(\Omega t) \end{bmatrix} \quad (2-13)$$

これにより、

$$\mathbf{y} = \{x_1, x_2, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}^T = \mathbf{U}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & & \\ & \mathbf{U}_\zeta & \\ & & \mathbf{I}_4 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (2-14)$$

式(2-10)は、つぎとなる。

$$\mathbf{M}'_0 \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{D}'_0 \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}'_0 \mathbf{y} = 0 \quad (2-15)$$

$$\mathbf{M}'_0 = \mathbf{U}\mathbf{M}_0\mathbf{U}^T$$

$$\mathbf{D}'_0 = \mathbf{U}\mathbf{D}_0\mathbf{U}^T + 2\mathbf{U}\mathbf{M}_0\dot{\mathbf{U}}^T$$

$$\mathbf{K}'_0 = \mathbf{U}\mathbf{K}_0\mathbf{U}^T + \mathbf{U}\mathbf{D}_0\dot{\mathbf{U}}^T + \mathbf{U}\mathbf{M}_0\ddot{\mathbf{U}}^T$$

行列 $\mathbf{M}'_0, \mathbf{D}'_0, \mathbf{K}'_0$ の非零要素は以下であり、以下のような定数となる。

$$M'_{0ii} = m_h + 4m_b$$

$$M'_{0j+2, j+2} = M_{0j+6, j+6} = m_b r^2$$

$$M'_{01,3} = M'_{03,1} = -M'_{04,2} = -M'_{02,4} = \sqrt{2}m_b r$$

$$D'_{03,4} = -D'_{04,3} = -D'_{05,6} = D'_{06,5} = -2m_b r \Omega$$

$$K'_{0ii} = k_x$$

$$K'_{0j+2, j+2} = -m_b e(r-e)\Omega^2$$

$$K'_{0j+6, j+6} = m_b r(r+e)\Omega^2$$

これにより、式(2-11)のフラップ系以外に、 $\{x_1, x_2, \xi_1, \xi_2\}^T$ の4変数による式(2-16)と、 $\{\xi_3, \xi_4\}^T$ の2変数による式(2-17)に分離される。本研究では、式(2-16)で表される系をハブ・ラグ連成系、式(2-17)で表される系をラグ独立系と呼び、ラグ独立系はハブが動かないモードに対応する。

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{\xi}_1 + k_x x_1 = 0 \\ m_1\ddot{x}_2 - m_2\ddot{\xi}_2 + k_x x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_1 + m_3\ddot{\xi}_1 + 2m_3\Omega\dot{\xi}_2 - m_4\Omega^2\xi_1 = 0 \\ -m_2\ddot{x}_2 + m_3\ddot{\xi}_2 - 2m_3\Omega\dot{\xi}_1 - m_4\Omega^2\xi_2 = 0 \end{cases} \quad (2-16)$$

$$\begin{cases} m_3\ddot{\xi}_3 - 2m_3\Omega\dot{\xi}_4 - m_4\Omega^2\xi_3 = 0 \\ m_3\ddot{\xi}_4 + 2m_3\Omega\dot{\xi}_3 - m_4\Omega^2\xi_4 = 0 \end{cases} \quad (2-17)$$

なお,

$$m_1 = m_h + 4m_b, \quad m_2 = \sqrt{2}m_b r, \quad m_3 = m_b r^2, \quad m_4 = m_b r(r - e), \quad m_5 = m_b r(r + e)$$

である.

さらに, 複素変数を導入し式(2-16), (2-17)の次元を下げることを考える. 図2-3に示すモード形状から, x_1 と x_2 の位相差は90度となり, ハブの動きはワール運動となっているところ, $\{x_1, \xi_1, \xi_3\}$ すなわち $\{x_1, \xi_1, \xi_3\}$ は互いに同相か逆相, 同様に $\{x_2, \xi_2, \xi_4\}$ すなわち $\{x_2, \xi_2, \xi_4\}$ も互いに同相か逆相であるから, $\{x_1, \xi_1, \xi_3\}$ と $\{x_2, \xi_2, \xi_4\}$ は ± 90 度位相がずれていることになる. これに対応するように, $\{x_1, \xi_1, \xi_3\}$ を実部, $\{x_2, \xi_2, \xi_4\}$ を虚部とする以下の複素変数と解の候補を導入する. ハブ位置 $\{x_1, x_2\}$ は, 図2-1に示すロータの回転方向が z 軸について逆まわりとなっているので, $x_1 + ix_2$ ではなく $x_1 - ix_2$ とすることで, 解の候補 $z_0 e^{i\omega t}$ について, ハブのワール運動の向きがロータ回転の方向と一致するときに $\omega > 0$ となるようにする. なお, i は虚数単位を表す.

$$\begin{cases} z = x_1 - ix_2 = z_0 e^{i\omega t} \\ \eta_1 = \xi_1 + i\xi_2 = \eta_{10} e^{i\omega t} \\ \eta_2 = \xi_3 + i\xi_4 = \eta_{20} e^{i\omega t} \end{cases} \quad (2-18)$$

このとき式(2-16), (2-17)はつぎのように変換される.

$$\begin{cases} m_1\ddot{z} + m_2\ddot{\eta}_1 + k_x z = 0 \\ m_2\ddot{z} + m_3\ddot{\eta}_1 - i2m_3\Omega\dot{\eta}_1 - m_4\Omega^2\eta_1 = 0 \\ m_3\ddot{\eta}_2 + i2m_3\Omega\dot{\eta}_2 - m_4\Omega^2\eta_2 = 0 \end{cases} \quad (2-19)$$

式(2-19)に式(2-18)の右辺第二項を代入すると次式が得られる.

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + k_x & -m_2\omega^2 \\ -m_2\omega^2 & -m_3\omega^2 + 2m_3\Omega\omega - m_4\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_0 \\ \eta_{10} \end{Bmatrix} = 0 \quad (2-20)$$

$$(m_3\omega^2 + 2m_3\Omega\omega + m_4\Omega^2)\eta_{20} = 0$$

ハブ・ラグ連成系の特性方程式は以下のように得られ,

$$(m_1\omega^2 - k_x)(m_3\omega^2 - 2m_3\Omega\omega + m_4\Omega^2) - m_2^2\omega^4 = 0 \quad (2-21)$$

ラグ独立系の特性方程式は以下のように得られる.

$$m_3\omega^2 + 2m_3\Omega\omega + m_4\Omega^2 = 0 \quad (2-22)$$

ラグ独立系の固有振動数はつぎのように表される.

$$\omega = \Omega \left(-1 \pm \sqrt{\frac{e}{r}} \right)$$

ハブ・ラグ連成系について $\Omega = 0$ とすると,

$$((m_1m_3 - m_2^2)\omega^2 - k_x m_3)\omega^2 = 0 \Rightarrow \omega = 0, \pm \sqrt{\frac{k_x}{m_h + 2m_b}} \quad (2-23)$$

となり, 固有振動数は0と, ハブ支持剛性で決まる値となる. 前者が地上共振モードであり, 後者がワールモードである. ワールモードが非回転時に支持系の弾性変形モードに対応する点は, プロペラのワール・フラッタと同じである.

2.4 地上共振

地上共振モードの固有振動数が一致する(すなわち図2-2で $\omega_3 = \omega_4$ を満たす)ロータ回転周波数において、同モードは不安定化することが知られている^{41,49)}。不安定現象の発生は後述するように式(2-21)の解が共役複素数になっていることに相当する。式(2-21)は ω に関する4次方程式であることに着目し、4次式の判別式を用いて不安定化条件を導出する。

4次方程式 $\lambda^4 + p_3\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_1\lambda + p_0 = 0$ の判別式は

$$256p_0^3 + (-192p_1p_3 - 128p_2^2 + 144p_2p_3^2 - 27p_3^4)p_0^2 + (144p_1^2p_2 - 6p_1^2p_3^2 - 80p_1p_2^2p_3 + 18p_1p_2p_3^3 + 16p_2^4 - 4p_2^3p_3^2)p_0 - 27p_1^4 + 18p_1^3p_2p_3 - 4p_1^3p_3^2 - 4p_1^2p_2^2 + p_1^2p_2^2p_3^2 \quad (2-24)$$

で与えられる⁵²⁾。式(2-24)に式(2-21)の係数を代入し、式の整理をすると判別式はつぎのように Ω に関する8次式になる。

$$D(\Omega) = d_8\Omega^8 + d_6\Omega^6 + d_4\Omega^4 + d_2\Omega^2 + d_0 \quad (2-25)$$

ここで

$$\begin{aligned} d_8 &= (m_h + 4m_b)^4 (r - e)^4 [2m_b r + (m_h + 2m_b)e] \\ d_6 &= -2k_x (m_h + 4m_b)^2 (r - e)^2 [m_b(3m_h + 28m_b)r^2 + (2m_h^2 + 25m_h m_b + 36m_b^2)re + 2m_h(m_h + 2m_b)e^2] \\ d_4 &= 2k_x^2 r^2 [m_b(3m_h^2 - 16m_h m_b - 48m_b^2)r^3 + (3m_h^3 + 20m_h^2 m_b + 160m_h m_b^2 + 320m_b^3)r^2 e \\ &\quad + (2m_b^3 + 59m_h^2 m_b + 208m_h m_b^2 + 208m_b^3)re^2 + (3m_h^3 + 14m_h^2 m_b + 32m_h m_b^2 + 32m_b^3)e^3] \\ d_2 &= -2k_x^3 r^3 [m_b(m_h + 2m_b)r^2 + (2m_h^2 - 9m_h m_b - 28m_b^2)re + (m_h + 2m_b)e^2] \\ d_0 &= k_x^4 r^4 e(m_h + 2m_b) \end{aligned}$$

$D(\Omega) = 0$ となるとき式(2-21)は ω に関して重解をもつ。 Ω が $D(\Omega) = 0$ の前後で変化し、式(2-21)が ω に関して共役複素解をもつとすると、虚部が負となる解において $e^{i\omega t}$ は正の実部を有するので対応するモードは不安定となる。このとき ω の実部は等しいので固有振動数が一致するモードが不安定になる。これが地上共振モードの不安定である。なお、回転体一般の運動について、回転軸が偏平している場合や、回転体が軸対称ではない場合には、固有振動数が一致するときに不安定化することが知られている⁴⁾。

$\Omega = 0$ において $D(0) = d_0 > 0$ であり式(2-21)は4実解をもつが、 $D(\Omega)$ が Ω の増加にしたがって符号を変える場合には、 $D(\Omega) < 0$ となる Ω において地上共振が発生するとみなすことができる。一方、 $e \ll r$ において、 $d_8, d_4, d_0 > 0$ 、 $d_6, d_2 < 0$ となるので、この場合には $D(\Omega) = 0$ は Ω^2 に関する正の解を2個もつと考えられ、これらは低ロータ回転周波数側で $\Omega^2 = -d_0/d_2$ 、高ロータ回転周波数側で $\Omega^2 = -d_6/d_8$ と近似できる。この解を e/r の1次までで展開すると、地上共振モードが不安定化するロータ回転周波数 Ω はつぎのように近似される。

$$\sqrt{\frac{k_x}{2m_b}} \frac{e}{r} \leq \Omega \leq \frac{\sqrt{k_x(3m_h + 28m_b)}}{m_h + 4m_b} \sqrt{1 + \frac{(m_h^2 + 28m_h m_b + 128m_b^2)e}{2m_h(3m_h + 28m_b)}} \frac{e}{r} \quad (2-26)$$

表2-1の物性条件から地上共振が発生するロータ回転周波数の範囲を求めて図2-4に示す。この図では、式(2-21)において ω が共役複素解をもち地上共振モードが不安定化するロータ回転周波数の範囲(数値解)と、式(2-26)により近似的に求まるロータ回転周波数の範囲(近似解)をあわせて示す。図2-4より式(2-26)はよい近似を与えることがわかる。

なお、図2-2の例では、8[Hz]から26[Hz]のロータ回転周波数において地上共振モードが不安定化しており、SH-60Kのロータ回転周波数4.3[Hz]よりも高い領域となっている。実際に地上共振が問題になるのは、通常のロータ回転周波数より低いロータ回転周波数であることが知られており¹⁵⁾、一見すると矛盾するように思われる。この食い違いは、地上共振モードの不安定化状況の違いに起因しており、一般的に知られている地上共振では支持系に降着装置も含めた機体全体を含める必要がある。したがって、本研究では支持系にトランスミッション部分のみを想定しているが、支持系を機体全体に置き換え、ブレードを除く機体全体を質点とみなした重量を m_h にとり、脚も含む地面に対する機体質点の支持剛性を k_x にとることにより、本節の解析結果をいわゆる地上共振の解析に適用可能となる。

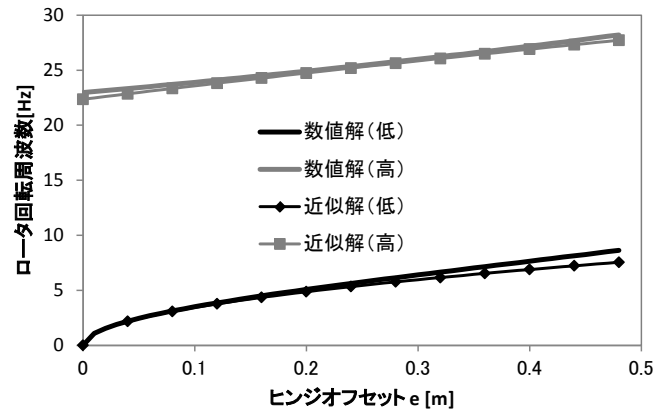


図2-4 地上共振モードが不安定化するロータ回転周波数 Ω の範囲

2.5 まとめ

4枚ブレードのヘリコプタ・ロータについて、トランスミッション部などに対応するロータ支持系を含む10自由度の運動方程式を導出した。空気力を考慮しない場合、この運動方程式はハブ運動とブレードのラグ運動から構成される系と、ブレードのフラップ運動の系に分離される。前者については、ブレードのラグ角について、対角どうしの和と差に変数を取り直すことにより、ラグの対角差に関する系はハブ運動から独立となる。ハブ運動と連成するのはブレード・ラグ角の対角和であり、この系は4自由度となる。このハブ・ラグ連成系の4つのモードは、いずれもハブがワール運動するが、ロータ回転周波数が0の時に固有振動数が0となる2つのモードと、ロータ回転周波数が0の時に支持系の剛性により決まる0ではない固有振動数を持つ2つのモードに分かれる。前者が地上共振のモードであり、後者がSH-60Kのトランスミッションピッチモードに対応し、プロペラ・ナセル・ワール・フラッタと類似のモードである。本研究では、以降、SH-60Kの場合についても、トランスミッションピッチモードではなくワールモードと呼ぶことにする。

ハブ・ラグ連成系の特性方程式は4次式で表され、固有振動数が一致する場合に不安定化することが、特性方程式から導かれる。これが地上共振の不安定である。これに対し、ワールモードは空気力なしの条件下では、不安定化することはない中立である。

3. 前進飛行時のヘリコプタ・ロータのワール不安定

3.1 はじめに

前進飛行時のSH-60Kのワールモード（トランスミッションピッチモード）の不安定化事例¹⁾や、AH-64に関するワール不安定報告²⁾は、いずれも空気力を含む数値計算により、実機の不安定現象を再現したとしているが、その数値計算の方法について具体的な記述はない。第2章では、空気力の作用がない条件では、ワールモードは不安定化することはないことを示した。したがって、SH-60KやAH-64に関するワール不安定は、いずれも空気力の寄与によりワールモードが不安定化したものだと考えられる。

本章では、前章にて空気力なしの条件でモード解析に用いた運動方程式に対して、SH-60Kの前進飛行を想定した空気力項を付加することで数値計算を行い、SH-60Kのワールモード（トランスミッションピッチモード）の不安定化の再現を試みる。不安定現象を再現できた場合は、SH-60Kの振動発生状況との比較を行う。空気力の計算方法は、SH-60Kと同系列機であるUH-60Aの飛行特性計算手法に関する文献⁵³⁾を参考にしつつ、UH-60AとSH-60Kの違いを反映する。ヘリコプタが前進飛行時、ブレード運動はロータ回転に応じた周期的な運動となるので、その周期的な釣り合い状態からの変動を想定し安定性をFloquetの定理により評価する。

3.2 ブレード空気力モデル

ヘリコプタは、経路角0、飛行速度 V で定常飛行しているとし、機体に加わる抗力 D_h に釣り合う水平方向成分のロータ空気力を発生させるため機体を前傾させ、その迎角 α_h は、機体に加わる重力 W と抗力 D_h と次式の関係にあるとする。

$$\tan \alpha_h = -\frac{D_h}{W} = -\frac{1}{2W} \rho V^2 C_D S_h \quad (3-1)$$

ρ は空気密度、 C_D はヘリコプタ機体の抗力係数で、 S_h はその基準面積である。

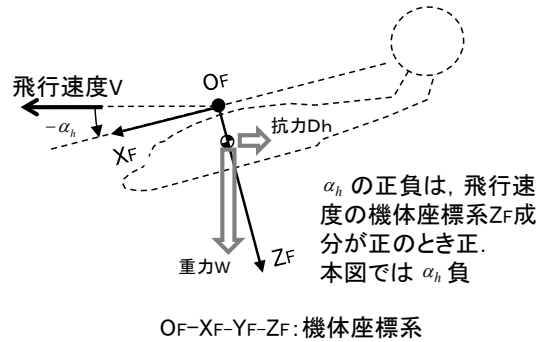


図3-1 前進飛行

運動方程式(2-2)における空気力 \mathbf{f}_A は、ハブ空気力 f_{Ai} ($i=1,2$)、ラグ空気力モーメント f_{Aj+2} ($j=1,2,3,4$)、フラップ空気力モーメント f_{Aj+6} ($j=1,2,3,4$)から構成され、これらはブレードに発生する空気力を源とする。ブレードに発生する空気力は、分布力であるが、空力代表点に集中的に作用する力としてモデル化する。ブレードのねじり下げも考慮した等価ピッチ角として75%半径での値が一般的に用いられる¹⁵⁾ので、ブレード質点位置 r とは別に75%半径位置を空力代表点 r_a とする。

回転ハブ座標系 $O_H - X_{HR} - Y_{HR} - Z_{HR}$ を Z_{HR} 軸周りに $-(\zeta_j + (j-1)\pi/2)$ に回転させ、その座標系の X 軸周りに $-\beta_j$ 回転し、 Y 軸を j 番ブレードのスパン方向に一致させ原点をブレードの空力代表点としたブレードスパン座標系 $O_B - X_{Bj} - Y_{Bj} - Z_{Bj}$ を定義する ($j=1,2,3,4$)。

OH-XHF-YHF-ZHF: ハブ非回転座標系
 OBj-XBj-YBj-ZBj: ブレードスパン座標系
 OBj-XWj-YWj-ZWj: ブレード速度座標系

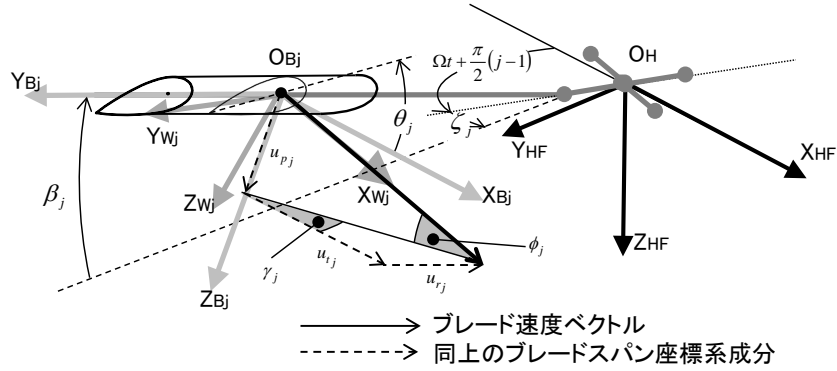


図3-2 対象とする系と座標系

ブレードスパン座標系でのブレード速度成分 u_{ij}, u_{rj}, u_{pj} は、次式により表される⁵³⁾。

$$\begin{Bmatrix} u_{ij} \\ -u_{rj} \\ u_{pj} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (e + r_a)\Omega + r_a\dot{\zeta}_j \\ e\Omega\zeta_j \\ -r_a\dot{\beta}_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -V \cos \alpha_h \cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}j\right) + \zeta_j V \cos \alpha_h \sin\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}j\right) \\ -V \cos \alpha_h \sin\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}j\right) - \zeta_j V \cos \alpha_h \cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}j\right) + V \sin \alpha_h \beta_j \\ -\beta_j V \cos \alpha_h \sin\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}j\right) + V \sin \alpha_h \end{Bmatrix} \quad (3-2)$$

誘導速度 v_i を考慮し $V \sin \alpha_h$ を $V \sin \alpha_h - v_i$ とする¹⁵⁾のが一般的であるが、誘導速度 v_i の有無は迎角 α_h の違いと同じ作用であり、釣り合い状態周りの安定性には影響を与えないので、誘導速度を省略する。

γ_j と ϕ_j を次式のとおき定義する⁵³⁾。

$$\tan \gamma_j = \frac{u_{rj}}{u_{ij}}, \quad \tan \phi_j = \frac{u_{pj}}{\sqrt{u_{ij}^2 + u_{rj}^2}}$$

ブレードスパン座標系を Z_{Wj} 軸周りに $-\gamma_j$ に回転させ、その座標系の Y 軸周りに $-\phi_j$ に回転させた座標系は、 X 軸がブレード速度ベクトルに一致する。この座標系をブレード速度座標系 $OBj-XWj-YWj-ZWj$ とする。ブレード速度座標系でのブレード空気力 $\{-d_j, 0, -l_j\}^T$ ($j=1, 2, 3, 4$) は、次式により求められる。

$$\begin{Bmatrix} -d_j \\ 0 \\ -l_j \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2} \rho (u_{ij}^2 + u_{rj}^2 + u_{pj}^2) S_b \begin{Bmatrix} c_{dj} \\ 0 \\ c_{lj} \end{Bmatrix} \quad (3-3)$$

ρ は空気密度、 c_{lj}, c_{dj} は空力代表点 r_a での空力係数、 S_b はブレード翼面積である。

空力係数 c_{lj}, c_{dj} は、後述する方法で作成した迎角ごとの数表から、ブレード迎角 α_j ($j=1, 2, 3, 4$) に一致する係数を読み取る。ブレード迎角 α_j は次式により求められる⁵³⁾。

$$\tan \alpha_j = \frac{u_{ij} \tan \theta_j + u_{tj}}{\sqrt{u_{ij}^2 + u_{pj}^2} - \frac{u_{pj} u_{tj}}{\sqrt{u_{ij}^2 + u_{pj}^2}} \tan \theta_j} \quad (3-4)$$

θ_j は、次節で述べるブレード・ピッチ角である。

迎角ごとの空力係数表を作成する方法は以下のとおりである。SC1095翼型について、迎角 ± 180 度、翼素マッハ数 0.3 ~ 1.0 の範囲の揚力・抗力の係数表が公開されている⁵³⁾。このSC1095係数表に対し、図3-3に示すSH-60K翼型とSC1095の違いを反映し、SH-60K翼型の係数表を推定する。

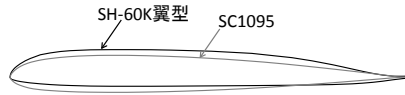
図3-3 SC1095とSH-60K翼型の違い³⁾

図3-3からSH-60K翼型はSC1095に比べキャンバーが大きくなっている。キャンバーは、正の失速迎角を大きくして最大揚力を増やし、負の失速迎角を小さくする効果があるので、迎角-抗力係数の関係を迎角-16°～+14°の範囲で抗力係数はそのまま迎角の正方向に2度平行移動させ、迎角-揚力係数の関係は、迎角-10°～+12°の範囲で揚力係数を0.2増やす。以上により、SH-60K翼型の翼素マッハ数、迎角ごとの空力係数とする。図3-4にマッハ数0.6でのSC1095とSH-60K翼型推定の比較を示す。

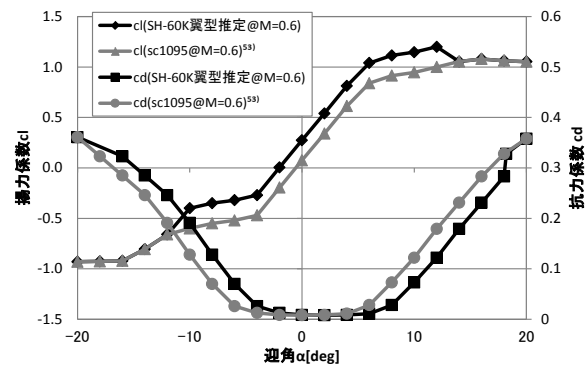


図3-4 空力係数（M=0.6でのSC1095とSH-60K推定比較）

ヘリコプタ・ブレードは、翼根に比べて翼端のピッチ角が小さくなる「ねじり下げ」を有しているため、空力代表点における空力係数にはスパン方向のねじり下げの効果を反映させる。空力代表点がある迎角 α_j となっているとき、ねじり下げにより翼根側では空力代表点よりも迎角が大きく、翼端側では迎角が小さくなっているため、翼根から翼端にかけての迎角変化に対応した空力係数の和をとり、その平均を空力代表点の空力係数とする。和を取る際に、元の係数表は翼素マッハ数ごとに表されているので、翼素マッハ数ごとの和とし、翼根と翼端では回転速度による動圧が違うのでその違いを表す重みを含め次式とする。

$$c_l(\alpha_j) = \sum_M (w_M c_{lM}(\alpha_j + \theta_M))$$

$$c_d(\alpha_j) = \sum_M (w_M c_{dM}(\alpha_j + \theta_M))$$

$$w_M = \frac{r_M^2}{\sum_M r_M^2}$$

上式で、 M を翼素マッハ数とし、 r_M はホバリング時に翼素マッハ数 M となるブレード半径位置、 θ_M は r_M でのブレードねじり角、 w_M は動圧比による重みである。代表空力係数算出に用いた諸量を表3-1にまとめる。

推定したSH-60K代表空力係数をSC1095翼型と比較して図3-5に示す。図3-5に示されていない迎角範囲は、失速領域となるのでSC1095とSH-60K翼型の差は無視しうるとして、SC1095数表⁵³⁾を用いることにする。

表3-1 代表空力係数算出に用いる諸量（ $\Omega = 4.3$ [Hz] $R = 8.2$ [m]）

翼素マッハ数 M	半径 r_M	重み w_M	ねじり角 θ_M ³⁾ [deg]
0.2	31%	4%	7.84
0.3	47%	10%	5.00
0.4	63%	18%	2.17
0.5	79%	28%	-0.66
0.6	94%	40%	-3.49

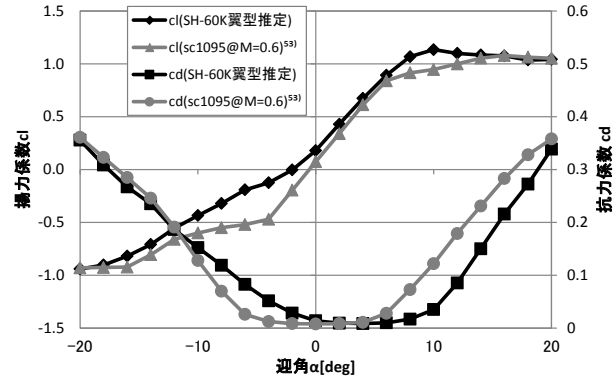


図3-5 SH-60K代表空力係数

ブレードスパン座標系での空気力 \mathbf{f}_{bj} は、次式のようにになる⁵³⁾。

$$\mathbf{f}_{bj} = \frac{1}{\sqrt{u_{tj}^2 + u_{rj}^2 + u_{pj}^2} \sqrt{u_{tj}^2 + u_{rj}^2}} \begin{bmatrix} u_{tj}u_{trj} & u_{rj}u_{0j} & -u_{tj}u_{pj} \\ -u_{rj}u_{trj} & u_{tj}u_{0j} & u_{rj}u_{pj} \\ u_{pj}u_{trj} & 0 & u_{tj}^2 + u_{rj}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -d_j \\ 0 \\ -l_j \end{Bmatrix} \quad (3-5)$$

機体座標系のハブ空気力 f_{Ai} ($i=1,2$) は、次式のようにになる。

$$f_{Ai} = \sum_{j=1}^4 \begin{Bmatrix} -\sin\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}(i+j) + \zeta_j\right) \\ \cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}(i+j) + \zeta_j\right) \cos\beta_j \\ \cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}(i+j) + \zeta_j\right) \sin\beta_j \end{Bmatrix}^T \mathbf{f}_{bj} \quad (3-6)$$

機体座標系 Z_F 方向のハブ空気力 f_{Az} は次式のようにになる。

$$f_{Az} = \sum_{j=1}^4 \{0, -\sin\beta_j, \cos\beta_j\} \mathbf{f}_{bj} \quad (3-7)$$

ラグ空気力モーメント f_{Aj+2} ($j=1,2,3,4$)，フラップ空気力モーメント f_{Aj+6} ($j=1,2,3,4$) は， \mathbf{f}_{bj} のラグ角方向およびフラップ角方向成分に対し，モーメント長 r_a を乗じてつぎのように求められる。

$$f_{Aj+2} = \frac{r_a}{u_{0j}} \left(\frac{u_{tj}u_{pj}}{u_{rj}} l_j - u_{tj} d_j \right) \quad (3-8)$$

$$f_{Aj+6} = \frac{r_a}{u_{0j}} \left(u_{trj} l_j + u_{pj} d_j \right)$$

3.3 ハブ運動によるブレード・ピッチ角変化

一般的なヘリコプタ・ロータでは，ブレードのピッチ角を偏角させるスウォッシュ・プレート機構とハブの幾何学的関係から，ハブがピッチ，ロール運動するとブレードのピッチ角が変動する効果がある．この効果をSilverthorn²⁾を参考に次式で表す．

$$\theta_j = \theta_0 - \left(A_1 + \frac{e}{e_{PL}} \frac{-x_1}{l_x} \right) \cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{2} j\right) - \left(B_1 + \frac{e}{e_{PL}} \frac{x_2}{l_x} \right) \sin\left(\Omega t + \frac{\pi}{2} j\right) \quad (3-9)$$

θ_0 はコレクティブピッチ角， A_1, B_1 はサイクリックピッチ角， e_{PL} はブレードのピッチ角変化軸のハブ回転中心からのオフセット量， l_x はハブのピッチ／ロール運動の基準長である．

3.4 ワール不安定現象のシミュレーション

3.4.1 釣り合い状態

ヘリコプタの定常前進飛行時、式(3-2)で表されるブレード速度のうちヘリコプタの飛行速度 V に関わる成分は、ブレードの方位角に依存し、ロータ回転周期と同じ周期性を有するので、ロータ・ブレードの運動はロータ1回転で元に戻る¹⁵⁾。シミュレーションを初期値 \mathbf{x}_s から開始し、ロータ1回転後の値を終端値 \mathbf{x}_e とすると、初期値 \mathbf{x}_s と終端値 \mathbf{x}_e が一致するだけでなく、初期値 \mathbf{x}_s と終端値 \mathbf{x}_e の連続性が保たれるよう $\dot{\mathbf{x}}_s$ と $\dot{\mathbf{x}}_e$ が一致する必要がある。この条件が成り立つと、式(2-2)の運動方程式で表される系においては、そのふるまいが周期的になり定常状態が実現される。

ロータ1回転で元に戻る定常状態において、 $\{f_{A1}, f_{A2}, f_{Az}\}^T$ についてロータ1回転の周期 $T = 2\pi/\Omega$ で平均をとったロータ3分力 $\{F_{XF}, F_{YF}, F_{ZF}\}^T$ を次式のように定義する。

$$F_{XF} = \frac{1}{T} \int_0^T f_{A1} dt, \quad F_{YF} = \frac{1}{T} \int_0^T f_{A2} dt, \quad F_{ZF} = \frac{1}{T} \int_0^T f_{Az} dt \quad (3-10)$$

定常飛行状態においてヘリコプタに加わる重力 W と抗力 $\rho V^2 C_D S_h / 2$ に釣り合う力をロータが発生するようロータ操縦入力 $\{\theta_0, B_1, A_1\}^T$ を設定する必要がある。この釣り合い時のロータ3分力を $\{\hat{F}_{XF}, \hat{F}_{YF}, \hat{F}_{ZF}\}^T$ と表し、機体は左右対称で横滑りしていないとすると、 $\{\hat{F}_{XF}, \hat{F}_{YF}, \hat{F}_{ZF}\}^T$ は式(3-1)から次式のようになる。

$$\hat{F}_{XF} = \hat{F}_{YF} = 0, \quad \hat{F}_{ZF} = -\sqrt{W^2 + \left(\frac{1}{2} \rho V^2 C_D S_h\right)^2} \quad (3-11)$$

上記のように、釣り合い状態として、状態 $\{\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}\}^T$ がロータ1回転で元に戻るとともに、ロータ3分力 $\{F_{XF}, F_{YF}, F_{ZF}\}^T$ が釣り合い状態での値 $\{\hat{F}_{XF}, \hat{F}_{YF}, \hat{F}_{ZF}\}^T$ に等しくなる条件を求める必要がある。

振動問題一般において定常振動解（周期解）を得るための初期値を計算する方法として、ねらいうち法(shooting method)があり、系が不安定な場合についても繰り返し計算により初期値を求めることが可能である⁵⁴⁾。ヘリコプタのトリム飛行についても同様な事例⁵⁵⁾がある。これらを参考に、 $\mathbf{z} = \{\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}\}^T$ について、 $\mathbf{z}_s = \mathbf{z}_e$ を満足する \mathbf{z}_s を繰り返し計算により求める。初期値の k 回目の推定値を $\mathbf{z}_s^{(k)}$ として、 k 回目の推定の段階では1回転後の値（終端値） $\mathbf{z}_e^{(k)}$ との一致が得られておらず周期解になっていないとする。初期値の k 回目の推定値ベクトルを $\mathbf{z}_s^{(k+1)} = \mathbf{z}_s^{(k)} + \delta \mathbf{z}_s^{(k)}$ と修正した結果得られる終端値ベクトルを $\mathbf{z}_e^{(k+1)} = \mathbf{z}_e^{(k)} + \delta \mathbf{z}_e^{(k)}$ とし、次式のように k 回目の推定値近傍で1次近似する。

$$\delta \mathbf{z}_e^{(k)} = \Phi^{(k)} \delta \mathbf{z}_s^{(k)} \quad (3-12)$$

$\Phi^{(k)}$ の (i, j) 成分は次式により数値的に求める。

$$\Phi_{ij}^{(k)} = \frac{z_{ei}^{(k)}(\mathbf{z}_s^{(k)} + \delta \mathbf{z}_j) - z_{ei}^{(k)}(\mathbf{z}_s^{(k)})}{\Delta_0} \quad (3-13)$$

$z_{ei}(\mathbf{z}_s)$ は初期値 \mathbf{z}_s から式(2-2)の積分により計算される終端値 \mathbf{z}_e の第 i 成分で、 $\delta \mathbf{z}_j$ は j 番目が Δ_0 でそれ以外はゼロのベクトルである。 k 回目の推定値の段階での初期値 $\mathbf{z}_s^{(k)}$ と終端値 $\mathbf{z}_e^{(k)}$ との残差を $\boldsymbol{\varepsilon}_p^{(k)}$ とし、 $\mathbf{z}_s^{(k)}$ を $\delta \mathbf{z}_s$ により修正することで $(k+1)$ 回目の推定値では初期値と終端値を一致させることを考える。

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_e^{(k+1)} &= \mathbf{z}_s^{(k+1)} \\ \mathbf{z}_e^{(k)} + \Phi^{(k)} \delta \mathbf{z}_s^{(k)} &= \mathbf{z}_s^{(k)} + \delta \mathbf{z}_s^{(k)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_p^{(k)} &= \mathbf{z}_e^{(k)} - \mathbf{z}_s^{(k)} = [\mathbf{I} - \Phi^{(k)}] \delta \mathbf{z}_s^{(k)} \\ \delta \mathbf{z}_s^{(k)} &= [\mathbf{I} - \Phi^{(k)}]^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_p^{(k)} \end{aligned}$$

上式による $\delta \mathbf{z}_s^{(k)}$ が、 k 回目の推定から $(k+1)$ 回目の推定への初期値の修正量となる。行列 $\Phi^{(k)}$ は初期値条件 $\mathbf{z}_s^{(k)}$ に依存しているため $(k+1)$ 回目の推定値で初期値と終端値の一致は必ずしも得られないが、 $\boldsymbol{\varepsilon}_p^{(k)} \approx 0$ と見なせる時点まで繰り返し計算を行う。式(3-13)により $\Phi_{ij}^{(k)}$ を計算する際の Δ_0 は対応する変数の初期値と終端値の残差 $\Delta_{0j}^{(k)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{pj}^{(k)} = z_{ej}^{(k)} - z_{sj}^{(k)}$ を用い、収束判定は、 $\mathbf{z}^{(k)}$ の j 番目の要素を $z_j^{(k)}$ と表したとき、1回転中の最大値 $\max(z_j^{(k)})$ と最小値 $\min(z_j^{(k)})$ の差分に対する比率が0.0001以下とした。

$$\max \left| \frac{z_{ej}^{(k)} - z_{sj}^{(k)}}{\max(z_j^{(k)}) - \min(z_j^{(k)})} \right| < 0.0001 \quad (j=1, \dots, 20)$$

初期値 $\mathbf{z}_s^{(k)}$ が真値から離れていると、繰り返し計算が収束しない場合があるので、収束判定の比率が0.5以上のときは修正

量を半分の $\delta \mathbf{z}_s^{(k)} = 0.5 [\mathbf{I} - \Phi^{(k)}]^{-1} \mathbf{\varepsilon}_p^{(k)}$ とすることで、繰り返し計算を収束させるようにした。

ロータ3分力 $\mathbf{f}_T = \{F_{XF}, F_{YF}, F_{ZF}\}^T$ が、ヘリコプタの釣り合いを表す式(3-11)の $\hat{\mathbf{f}}_T = \{\hat{F}_{XF}, \hat{F}_{YF}, \hat{F}_{ZF}\}^T$ となる操縦入力 $\mathbf{c}_T = \{\theta_0, B_1, A_1\}^T$ も同様な繰り返し計算により求める。操縦入力の k 回目の推定値を $\mathbf{c}_T^{(k)}$ として、 k 回目の推定の段階では $\mathbf{f}_T^{(k)} = \hat{\mathbf{f}}_T$ が得られておらずヘリコプタの釣り合い飛行になっていないとする。操縦入力の k 回目の推定値を $\mathbf{c}_T^{(k+1)} = \mathbf{c}_T^{(k)} + \delta \mathbf{c}_T^{(k)}$ と修正した結果得られるロータトリム3分力を $\mathbf{f}_T^{(k+1)} = \mathbf{f}_T^{(k)} + \delta \mathbf{f}_T^{(k)}$ とし、次式のとおり k 回目の推定値近傍で1次近似する。

$$\delta \mathbf{f}_T^{(k)} = \Psi^{(k)} \delta \mathbf{c}_T^{(k)} \quad (3-14)$$

$\Psi^{(k)}$ の (i, j) 成分は次式により数値的に求める。

$$\Psi_{ij}^{(k)} = \frac{\mathbf{f}_{Ti}^{(k)}(\mathbf{c}_T^{(k)} + \delta \mathbf{c}_j) - \mathbf{f}_{Ti}^{(k)}(\mathbf{c}_T^{(k)})}{\Delta_0} \quad (3-15)$$

$\mathbf{f}_{Ti}^{(k)}(\mathbf{c}_T^{(k)})$ は操縦入力 $\mathbf{c}_T^{(k)}$ から計算されるロータ3分力 $\mathbf{f}_T^{(k)}$ の第 i 成分で、 $\delta \mathbf{c}_j$ は j 番目が Δ_0 でそれ以外はゼロのベクトルである。 k 回目の推定値の段階での $\mathbf{f}_T^{(k)}$ と $\hat{\mathbf{f}}_T$ の残差を $\mathbf{\varepsilon}_T^{(k)}$ とし、 $\mathbf{c}_T^{(k)}$ を $\delta \mathbf{c}_T^{(k)}$ により修正することで $\mathbf{f}_T = \hat{\mathbf{f}}_T$ を満足する $(k+1)$ 回目の推定値を得ることを考える。

$$\hat{\mathbf{f}}_T = \mathbf{f}_T^{(k+1)} = \mathbf{f}_T^{(k)} + \Psi^{(k)} \delta \mathbf{c}_T^{(k)}$$

$$\mathbf{\varepsilon}_T^{(k)} = \hat{\mathbf{f}}_T - \mathbf{f}_T^{(k)} = \Psi^{(k)} \delta \mathbf{c}_T^{(k)}$$

$$\delta \mathbf{c}_T^{(k)} = [\Psi^{(k)}]^{-1} \mathbf{\varepsilon}_T^{(k)}$$

上式による $\delta \mathbf{c}_T^{(k)}$ が、 k 回目の推定から $(k+1)$ 回目の推定への操縦入力の修正量となる。 $\Psi^{(k)}$ はロータ制御入力 $\mathbf{c}_T^{(k)}$ に依存しているため $(k+1)$ 回目の推定値で $\mathbf{f}_T = \hat{\mathbf{f}}_T$ は必ずしも成り立たないが、 $\mathbf{\varepsilon}_T^{(k)} \cong 0$ と見なせる時点まで繰り返し計算を行う。式(3-15)を具体的に計算する際の Δ_0 は $0.1[\text{deg}]$ を使い、収束判定は $\mathbf{\varepsilon}_T^{(k)}$ の絶対値の最大値が $10[\text{N}]$ 未満とした。 $\mathbf{f}_T^{(k)}$ が真値 $\hat{\mathbf{f}}_T$ から大きく離れている場合は、繰り返し計算が収束しないので、修正量 $\delta \mathbf{c}_T^{(k)}$ の絶対値の最大値が $2[\text{deg}]$ を超える場合は、修正量が $2[\text{deg}]$ 未満となる処理を行った。

以上の釣り合い状態を求める計算手順を図3-6に示す。

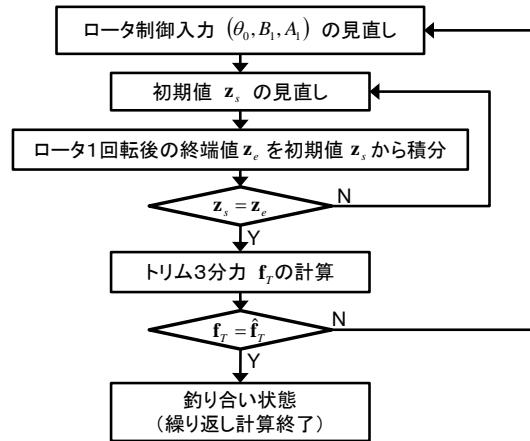


図3-6 釣り合い状態の計算手順

表3-2に示す条件にて得られた収束解を図3-7に示す。図3-7から、ハブ運動の周波数成分は 4Ω 成分が支配的あり、ブレード運動では 1Ω 成分が支配的であることがわかる。

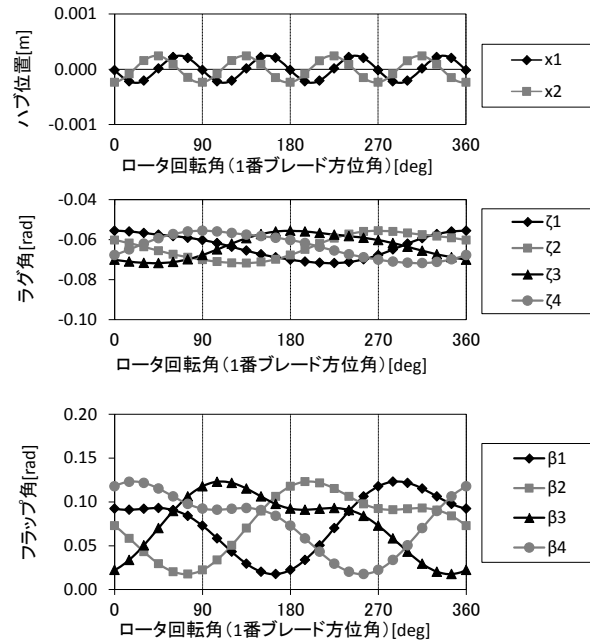


図3-7 ロータ周期解（速度90[m/s],揚力100,000[N]）

表3-2 シミュレーション条件

諸元	値	根拠
ロータ回転周波数 Ω	4.3 [Hz]	栗城 ¹⁾ , Howlett ⁵³⁾
ブレード質量 m_b	150[kg]	ロータ全体で1000[kg]と想定
ハブ質量 m_h	400[kg]	
ハブ支持剛性 k_x	3650000[N/m]	$\Omega = 4.3$ [Hz] 時のワールモード固有振動数が10.5[Hz] ¹⁾
ヒンジオフセット e	0.4[m]	Howlett ⁵³⁾
ヒンジブレード重心間距離 r	2.6[m]	
ブレード翼面積 s_b	3.5 [m ²]	栗城 ¹⁾
ブレード翼端半径 R	8.2 [m]	栗城 ¹⁾
ブレード空力半径 r_a	5.75 [m]	翼端半径 R の75%から e を差し引く
翼弦長 c	0.56 [m]	栗城 ¹⁾
機体抗力面積 ($C_D S_h$)	3 [m ²]	26[ft ²] ⁵⁶⁾ をm ² 単位で切上げ
空気密度 ρ	1.0 [kg/m ³]	気圧高度 2000[m]と想定
構造減衰比 $d_x / \sqrt{(m_h + 4m_b)k_x}$	0.0025	
ラグダンパー減衰比 $d_\zeta / \sqrt{(2m_b r \Omega \sqrt{re})}$	0.05	Howlett ⁵³⁾
ピッチ入力係数 $e / (l_x e_{PL})$	2[rad/m]	Leoni ⁵⁶⁾ から読み取り

3.4.2 線形化モデル

つぎに、上記のようにして得られた周期解の周りで運動方程式を線形化して周期解の安定性を調べる。 \mathbf{x} を周期解 \mathbf{x}_p とそこからの変動 $\Delta \mathbf{x}$ に分けた上で、変動 $\Delta \mathbf{x}$ について2次以上の項を省略する。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} &= \mathbf{x}_p + \Delta \mathbf{x} \\
 \Delta \mathbf{x} &= \mathbf{x} - \mathbf{x}_p \\
 &= \{\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta \zeta_1, \Delta \zeta_2, \Delta \zeta_3, \Delta \zeta_4, \Delta \beta_1, \Delta \beta_2, \Delta \beta_3, \Delta \beta_4\}^T
 \end{aligned} \tag{3-16}$$

式(2-6)に対し空気を追加した線形化方程式が以下のように導出される。

$$(\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_p) \Delta \ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{D}_0 + \mathbf{D}_p) \Delta \dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_p) \Delta \mathbf{x} = \Delta \mathbf{f} \tag{3-17}$$

ここで、 $\mathbf{M}_p, \mathbf{D}_p, \mathbf{K}_p$ は、式(2-2)における変数の積から派生する係数で、例えば次式であれば、下線部に対応する係数であ

る。 \mathbf{x}_p が周期性を有するので、 $\mathbf{M}_p, \mathbf{D}_p, \mathbf{K}_p$ も周期性を有する。

$$(x_1)\ddot{x}_1 = (x_{1p} + \Delta x_1)(\ddot{x}_{1p} + \Delta\ddot{x}_1) = x_{1p}\ddot{x}_{1p} + \underline{x_{1p}}\Delta\ddot{x}_1 + \underline{\ddot{x}_{1p}}\Delta x_1 + \Delta x_1\Delta\ddot{x}_1$$

式(2-2)の右辺も周期解と変動に分け、変動を \mathbf{x}_p 近傍で次式の形に線形化する。 \mathbf{D}_D は式(2-5)で表される減衰行列である。

$$\Delta \mathbf{f} = \mathbf{D}_A \Delta \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_A \Delta \mathbf{x} - \mathbf{D}_D \Delta \dot{\mathbf{x}} \quad (3-18)$$

時変の空力係数 $\mathbf{D}_A, \mathbf{K}_A$ は、ロータが1回転する間の各時刻 t における $\mathbf{D}_A(t), \mathbf{K}_A(t)$ を以下の式で求めることにより、ロータ回転に応じた周期係数項として得られる。

$$\begin{aligned} K_{Aij}(t) &= \left(\frac{\partial \Delta f_j}{\partial \Delta x_i} \right) = \frac{f_{A_j}(\mathbf{x}_p(t) + \delta \mathbf{x}_i, \dot{\mathbf{x}}_p(t)) - f_{A_j}(\mathbf{x}_p(t), \dot{\mathbf{x}}_p(t))}{\Delta_0} \\ D_{Aij}(t) &= \left(\frac{\partial \Delta f_j}{\partial \Delta \dot{x}_i} \right) = \frac{f_{A_j}(\mathbf{x}_p(t), \dot{\mathbf{x}}_p(t) + \delta \dot{\mathbf{x}}_i) - f_{A_j}(\mathbf{x}_p(t), \dot{\mathbf{x}}_p(t))}{\Delta_0} \end{aligned} \quad (3-19)$$

ここで $f_{A_j}(\mathbf{x}_p(t), \dot{\mathbf{x}}_p(t))$ は、 $(\mathbf{x}_p(t), \dot{\mathbf{x}}_p(t))$ から算出される空気力ベクトルの第 j 成分を指す。 $\delta \mathbf{x}_i$ と $\delta \dot{\mathbf{x}}_i$ は i 番目が Δ_0 、それ以外はゼロのベクトルである。周期解をもとに \mathbf{f}_A を求める手順は次の通りである。ロータ1回転中のある時刻 t における周期解 $(\mathbf{x}_p(t), \dot{\mathbf{x}}_p(t))$ から式(3-2)により同時刻のブレード速度 $u_{tj}(t), u_{rj}(t), u_{pj}(t)$ を求め、同様に、式(3-9)から $\theta_j(t)$ 、式(3-4)から $\alpha_j(t)$ 、式(3-3)から $\{-d_j, 0, -l_j\}^T$ を算出し、式(3-6)、(3-8)により \mathbf{f}_A を求める。

$\mathbf{D}_A, \mathbf{K}_A, \mathbf{D}_p, \mathbf{K}_p$ を合わせて次式のように部分行列に分け、一部を図3-8に示す。

$$\mathbf{K}_A - \mathbf{K}_P = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{xx} & \mathbf{K}_{x\zeta} & \mathbf{K}_{x\beta} \\ \mathbf{K}_{\zeta x} & \mathbf{K}_{\zeta\zeta} & \mathbf{K}_{\zeta\beta} \\ \mathbf{K}_{\beta x} & \mathbf{K}_{\beta\zeta} & \mathbf{K}_{\beta\beta} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_A - \mathbf{D}_P = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D}_{x\zeta} & \mathbf{D}_{x\beta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{\zeta\zeta} & \mathbf{D}_{\zeta\beta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{\beta\zeta} & \mathbf{D}_{\beta\beta} \end{bmatrix} \quad (3-20)$$

図3-8から、 $\mathbf{K}_A(t), \mathbf{D}_A(t)$ は、 $\mathbf{x}_p(t)$ と同様にロータ回転と同じ周期性を有していることがわかる。部分行列ごとに表3-3に示すような特徴を有している。

表3-3 周期空力係数行列

部分行列	サイズ	特徴
\mathbf{K}_{xx}	2×2	主に 4Ω の周波数成分
$\mathbf{K}_{x\zeta}, \mathbf{K}_{x\beta}, \mathbf{D}_{x\zeta}, \mathbf{D}_{x\beta}$	2×4	各行は90度位相差
$\mathbf{K}_{\zeta x}, \mathbf{K}_{\beta x}$	4×2	各列は90度位相差
$\mathbf{K}_{\zeta\zeta}, \mathbf{K}_{\beta\zeta}, \mathbf{K}_{\zeta\beta}, \mathbf{K}_{\beta\beta}, \mathbf{D}_{\zeta\zeta}, \mathbf{D}_{\beta\zeta}, \mathbf{D}_{\zeta\beta}, \mathbf{D}_{\beta\beta}$	4×4	対角行列で対角成分は90度位相差

表3-3に示す特徴の現れる理由を整理して表3-4に示す。 \mathbf{D}_A の一部がゼロとなるのは、ピッチ角を表す式(3-9)がハブ変位 x_i の関数となっているが、ハブ速度 \dot{x}_i の関数ではないからである。

表3-4 周期空力係数の生起理由

$\mathbf{K}_{xx}, \mathbf{K}_{\beta x}, \mathbf{K}_{\zeta x}$	式(3-9)による x_i のピッチ角への影響
$\mathbf{D}_{x\zeta}, \mathbf{D}_{\zeta\zeta}, \mathbf{D}_{\beta\zeta}, \mathbf{D}_{x\beta}, \mathbf{D}_{\zeta\beta}, \mathbf{D}_{\beta\beta}$	式(3-2)による $\dot{\beta}_j$ と $\dot{\zeta}_j$ のブレード速度への影響
$\mathbf{K}_{x\zeta}, \mathbf{K}_{\zeta\zeta}, \mathbf{K}_{\beta\zeta}, \mathbf{K}_{x\beta}, \mathbf{K}_{\zeta\beta}, \mathbf{K}_{\beta\beta}$	式(3-2)による β_j と ζ_j のブレード速度への影響

以上により、運動方程式は次式のように線形化され、係数行列はロータ回転に応じた周期性を有する。

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_s(t) \Delta \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_s(t) \Delta \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_s(t) \Delta \mathbf{x} &= 0 \\ \mathbf{M}_s(t) &= \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_p = \mathbf{M}_s(t+T) \\ \mathbf{D}_s(t) &= \mathbf{D}_0 + \mathbf{D}_D + \mathbf{D}_p - \mathbf{D}_A = \mathbf{D}_s(t+T) \\ \mathbf{K}_s(t) &= \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_p - \mathbf{K}_A = \mathbf{K}_s(t+T) \end{aligned} \quad (3-21)$$

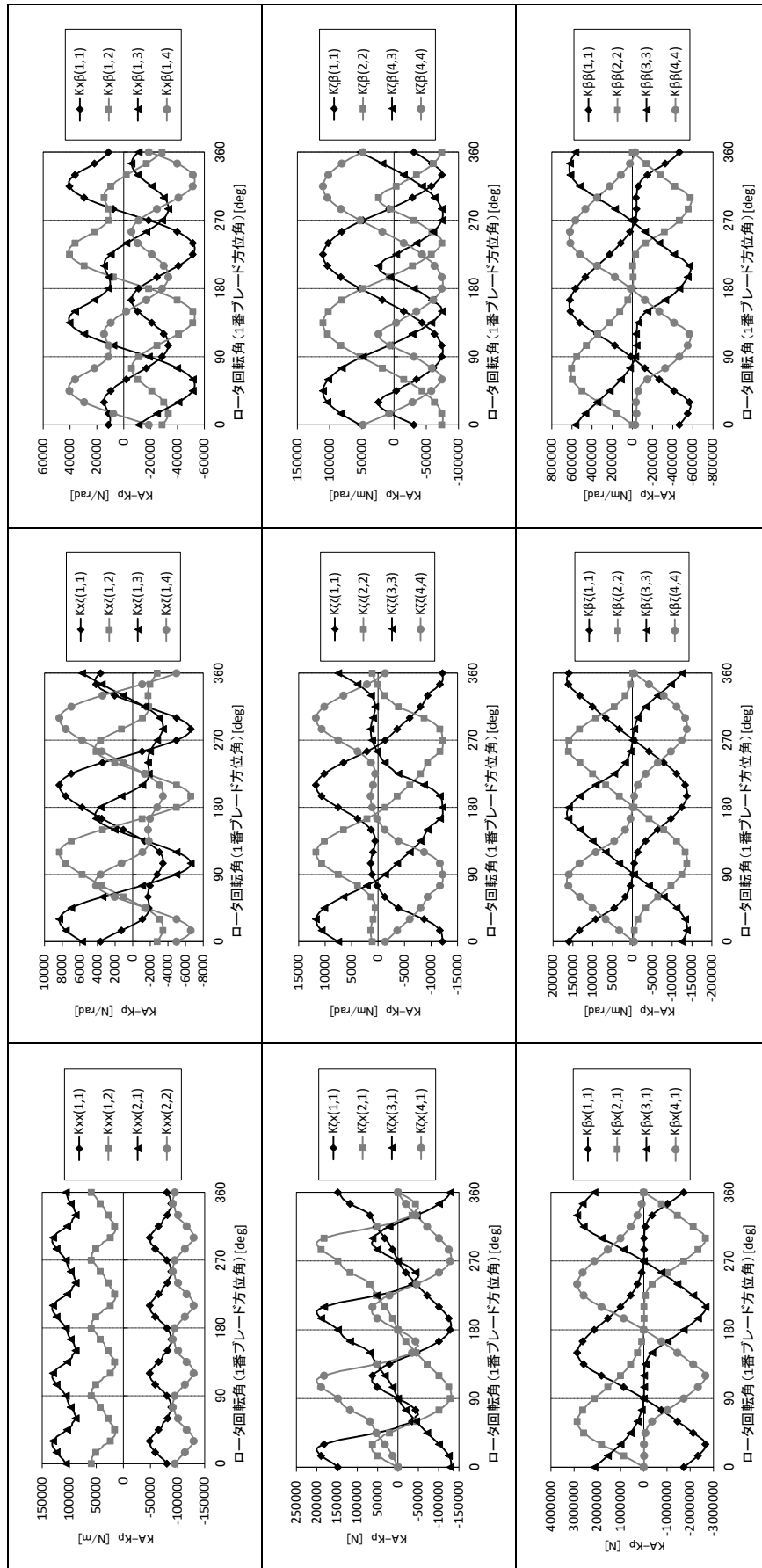


図3-8(1/2) 周期空力係数 $\begin{bmatrix} K_{xx} & K_{x\zeta} & K_{x\beta} \\ K_{\zeta x} & K_{\zeta\zeta} & K_{\zeta\beta} \\ K_{\beta x} & K_{\beta\zeta} & K_{\beta\beta} \end{bmatrix}$ (速度90[m/s],揚力100,000[N])

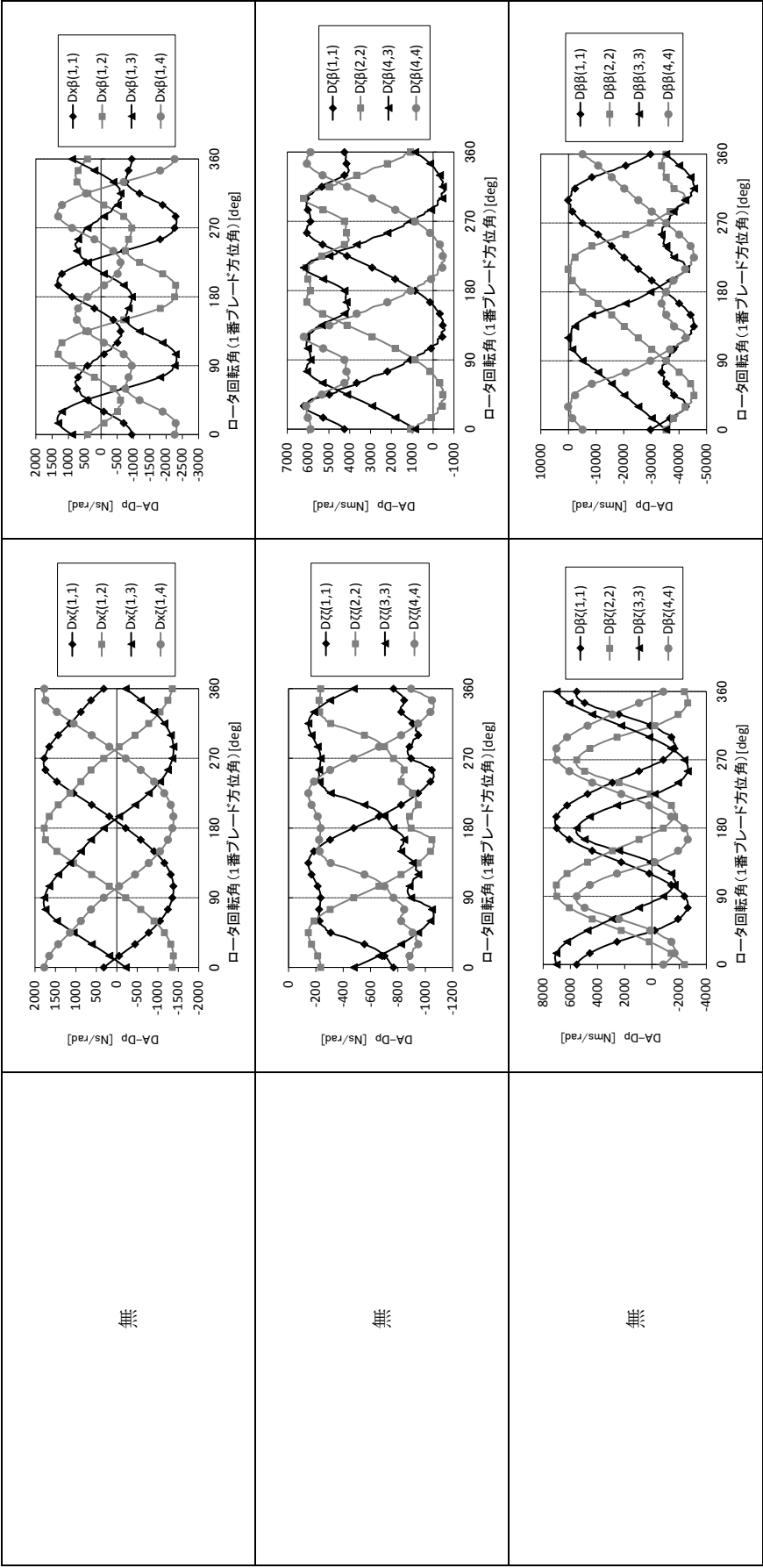


図3-8(2/2) 周期空力係数 $\begin{bmatrix} 0 & D_{x\zeta} & D_{x\beta} \\ 0 & D_{\zeta\zeta} & D_{\zeta\beta} \\ 0 & D_{\beta\zeta} & D_{\beta\beta} \end{bmatrix}$ (速度90[m/s],揚力100,000[N])

3.4.3 Floquetの定理⁵⁷⁾による安定判別

初期値を $\Delta x_1 = 0.001[m]$ ，それ以外はゼロとして行った非線形モデル(式(2-2))と線形化モデル(式(3-21))のシミュレーション結果を図3-9および図3-10に示す。

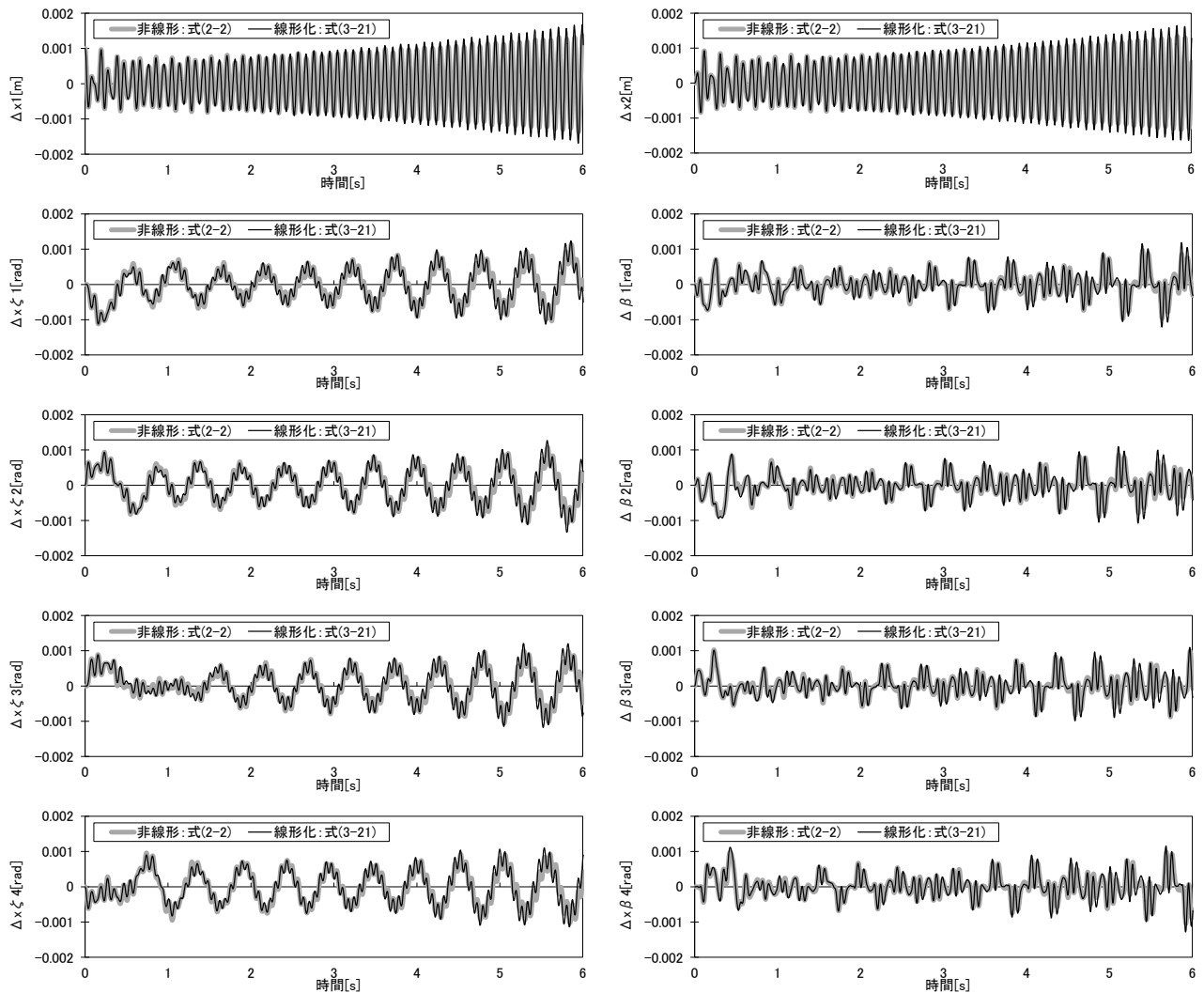


図3-9 時系列計算結果（速度90[m/s],揚力100,000[N],構造減衰比0）

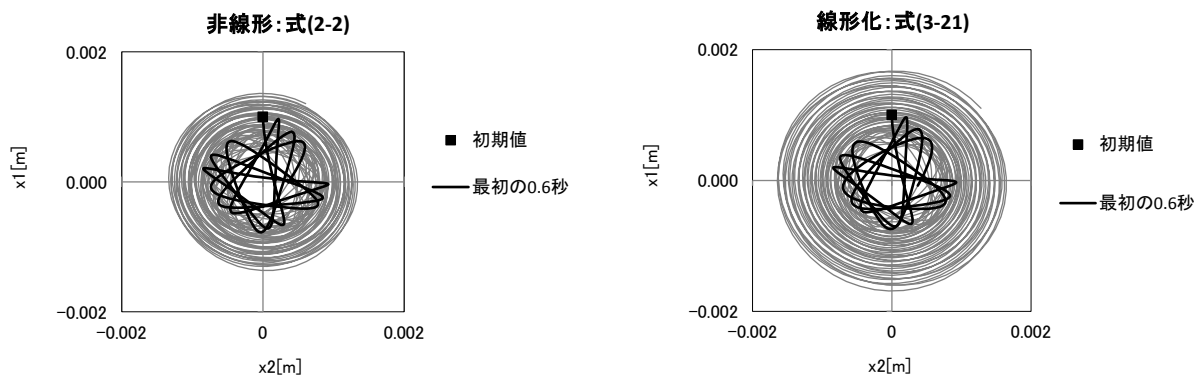


図3-10 ハブ運動計算結果（速度90[m/s],揚力100,000[N],構造減衰比0）

ハブ位置 $\Delta x_i (i=1,2)$ は、図3-9から約10[Hz]の周期で発散傾向を示しており、その周波数はロータ回転に対し逆回転のワールモードの固有振動数にほぼ一致している。ラグ角 $\Delta \zeta_j (j=1,2,3,4)$ については、対角に位置するブレードの $\Delta \zeta_1$ と $\Delta \zeta_3$ はほぼ同じ動きを示しており、 $\Delta \zeta_2$ と $\Delta \zeta_4$ も同様である。図3-10からも、ハブの動きは時計回りの回転運動となっており、ロータ回転と逆回転のワール運動となっていることがわかる。

このワールモードの不安定現象をFloquetの定理を使って評価する。式(3-21)は次のように書き直すことができる。係数行列は周期性である。

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \dot{\mathbf{x}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}_s(t)^{-1} \mathbf{K}_s(t) & -\mathbf{M}_s(t)^{-1} \mathbf{D}_s(t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \dot{\mathbf{x}} \end{Bmatrix} \quad (3-22)$$

このような周期性を有する線形系の安定性は、時刻 t と時刻 $(t+T)$ の変数ベクトルを結びつけるモノドロミー行列の固有値により安定判別を行うことができる⁵⁷⁾。このモノドロミー行列は、周期解を求める際に用いた式(3-13)の Φ と等しい。モノドロミー行列 Φ の固有値を $\lambda_k (k=1,2,\dots,20)$ とした場合、ある k に対して $|\lambda_k| > 1$ なら不安定、すべての k に対して $|\lambda_k| < 1$ なら安定と評価できる⁵⁷⁾。

3.4.4 安定判別結果

飛行速度によるモノドロミー行列 Φ の絶対値が最大となる固有値 λ_k の変化を図3-11に示す。式(3-9)に示すハブ運動によるブレード・ピッチ角変動ありの場合は、飛行速度の増加に伴い不安定化する一方、ハブ運動によるブレード・ピッチ角変動がない $e/(e_{PL}l_x)=0$ の場合は、速度によらず安定となっている。ピッチ角変動なしの場合は、表3-4に示される \mathbf{K}_{xx} 、 $\mathbf{K}_{x\zeta}$ 、 $\mathbf{K}_{x\beta}$ がゼロとなるので、ピッチ角変動ありの場合に系が不安定化するの \mathbf{K}_{xx} 、 $\mathbf{K}_{x\zeta}$ 、 $\mathbf{K}_{x\beta}$ の影響と考えられる。

モノドロミー行列 Φ の固有値 λ_k の実部と虚部の動きを図3-12に示す。図3-12の固有値（特性乗数）の分布から、不安定なモードはロータ1回転周期で観測すると振動的になりながら徐々に発散するものと推察される。

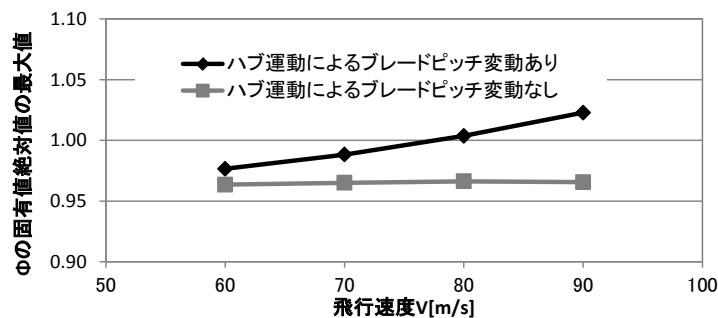


図3-11 ピッチ角変動の効果（揚力100,000[N],構造減衰比0.0025）

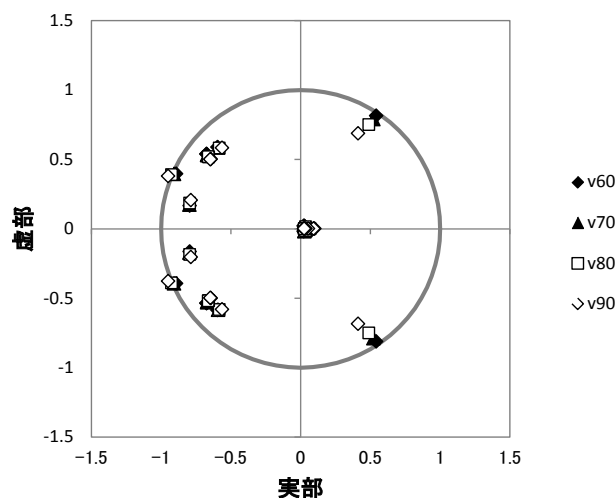


図3-12 特性乗数の動き（揚力100,000[N],構造減衰比0.0025）

モノドロミー行列 Φ による安定判別の結果として、不安定化現象の発生領域を求めた結果を図3-13に示す。図3-13の横軸のアドバンス比 μ は飛行速度に対応し、縦軸の C_L/σ は翼面荷重であり、次式に示されるようにロータ揚力（機体重量）に対応する。なお、 $C_L = L/(\rho\pi R^2(\Omega R)^2)$ は揚力係数、 $\sigma = 4c/\pi R$ はソリディティと呼ばれるロータ面積に占めるブレード面積の比率である¹⁵⁾。

$$\mu = \frac{V}{\Omega R}, \quad \frac{C_L}{\sigma} = \frac{L}{\rho\pi R^2(\Omega R)^2} \frac{\pi R}{4c} \quad (3-23)$$

図3-13の数値計算ラインは、以下の手順により計算した。モノドロミー行列 Φ の絶対値が最大となる固有値 λ_{\max} を、構造減衰比 $d_x/2\sqrt{(m_h+4m_b)k_x}$ 、アドバンス比 μ 、ロータ翼面荷重 C_L/σ により最小2乗近似する。

$$\hat{\lambda}_{\max} = \lambda_0 + \lambda_d \frac{d_x}{2\sqrt{(m_h+4m_b)k_x}} + \lambda_L \left(\frac{C_L}{\sigma} \right) + \lambda_\mu \mu + \lambda_{\mu^2} \mu^2 \quad (3-24)$$

これから、 $\hat{\lambda}_{\max}$ が1となるロータ翼面荷重を、アドバンス比 μ ごとに算出した。

$$\left(\frac{C_L}{\sigma} \right) = \frac{1}{\lambda_L} \left(1 - \lambda_0 - \lambda_d \frac{d_x}{2\sqrt{(m_h+4m_b)k_x}} - \lambda_\mu \mu - \lambda_{\mu^2} \mu^2 \right)$$

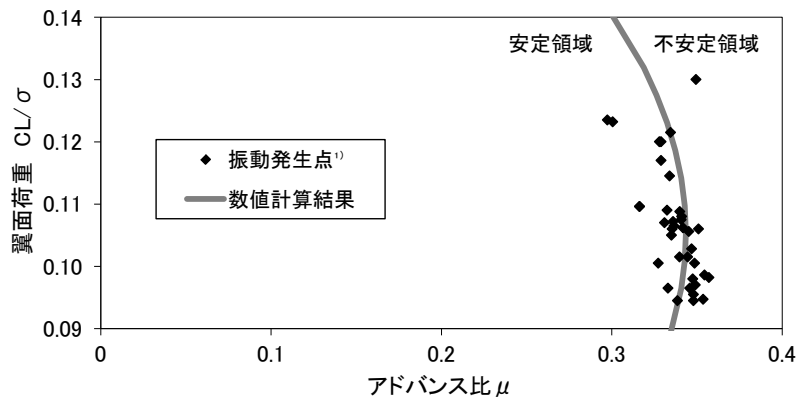


図3-13 ワール不安定現象の発生領域（構造減衰比0.0025）

図3-13に示すように、数値計算結果は分布するSH-60K実機飛行試験での振動発生点¹⁾のほぼ真ん中を通っており、定性的な傾向は実機飛行試験結果に合っている。

3.5 まとめ

SH-60Kを想定した前進飛行時のブレード空気力を算出し、2章の結果得られた運動方程式に付加し、前進飛行の数値計算を行った。ヘリコプタが前進飛行時、ブレードの運動はロータ回転周波数に応じた周期的な運動となるので、その周期解周りの変動について線形化運動方程式を導出した。この線形化運動方程式の空力係数はロータ回転に伴う周期性を有する。AH-64のワール不安定検討事例を参考に、ロータ・ハブの運動によりブレード・ピッチ角の変動が発生するモデルを採用した。周期係数を有する系の安定性評価としてFloquetの定理を適用した結果、特定の速度以上にて、逆回転のワールモードが不安定化する結果が得られた。さらに、飛行条件を変化させて不安定化する条件を探ったところ、SH-60K実機での振動発生条件とほぼ一致する結果が得られた。

4. ヘリコプタ・ロータのワール不安定に関するパラメータ共振解析

4.1 はじめに

トランスミッションピッチモードとされるSH-60Kの不安定モードは、式(2-23)で示されるようにプロペラのワール・フラッタと同様なモードである。3章では、SH-60Kの前進飛行を模擬した数値計算の結果、特定の速度以上にてこのワールモードが不安定化することが確かめられ、数値計算にて不安定化する条件はSH-60K実機での振動発生条件とほぼ同じ条件であった。一方、2章の空気力なしでのモード解析の結果からは、地上共振モードは2つのモードの固有振動数が一致する条件では不安定化するのに対し、ワールモードは中立であり、不安定化する理由は見当たらない。以上から、SH-60Kのトランスミッションピッチモードの不安定化は、空気力の影響によりワールモードが不安定化したものだと考えられる。

本章では、空気力によりワールモードが不安定化した理由を検討する。2章でモード解析に用いた空気力なしでの定係数の線形運動方程式の一般解は、固有モードの重ね合わせにより表現される。この一般解の係数が、空気力の付与により時間の関数となるとして定数変化法を適用する。3章の数値計算に用いた空気力を、2章の定係数の運動方程式に整合するよう変換し右辺に付加し、解の係数に関する微分方程式を導出する。この線形時不変微分方程式の係数行列の固有値から、安定性を評価する。

4.2 空気力を介した不安定現象

4.2.1 定数変化法

2章に示したように、空気力なしの場合については、式(2-13), (2-14)により変数変換することで定係数の運動方程式(2-15)を導出することが可能である。この運動方程式の一般解は、式(2-11), (2-19)から、固有モードの重ね合わせによりつぎのように表すことができる。 x_1, x_2, ξ_1, ξ_2 の係数に現れる $m_2\omega_i^2(k_x - m_1\omega_i^2)$ は、式(2-19)の第1式から、固有モードにおける $z(=x_1 - ix_2)$ と $\eta_1(=\xi_1 + i\xi_2)$ の大きさの比を表している。

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \sum_{i=1}^4 m_2\omega_i^2 (c_{Ri} \cos \omega_i t - c_{Li} \sin \omega_i t) \\
 x_2 &= -\sum_{i=1}^4 m_2\omega_i^2 (c_{Ri} \sin \omega_i t + c_{Li} \cos \omega_i t) \\
 \xi_1 &= \sum_{i=1}^4 (k_x - m_1\omega_i^2) (c_{Ri} \cos \omega_i t - c_{Li} \sin \omega_i t) \\
 \xi_2 &= \sum_{i=1}^4 (k_x - m_1\omega_i^2) (c_{Ri} \sin \omega_i t + c_{Li} \cos \omega_i t) \\
 \xi_3 &= \sum_{i=5}^6 c_{Ri} \cos \omega_i t - c_{Li} \sin \omega_i t \\
 \xi_4 &= \sum_{i=5}^6 c_{Ri} \sin \omega_i t + c_{Li} \cos \omega_i t \\
 \beta_j &= c_{Rj+6} \cos \omega_{j+6} t - c_{Lj+6} \sin \omega_{j+6} t \quad (j = 1, 2, 3, 4)
 \end{aligned} \tag{4-1}$$

空気力により式(4-1)で示される解の係数が時間変化するとみなす定数変化法を適用する。空気力込みの運動方程式は、式(3-17), (3-18)に示されるように周期解周りの変動 $\Delta \mathbf{x}$ についての線形化運動方程式となっているので、変動 $\Delta \mathbf{x}$ を式(2-13), (2-14)により変換し $\Delta \mathbf{y}$ とする。

$$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{U} \Delta \mathbf{x} = \{\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta \xi_1, \Delta \xi_2, \Delta \xi_3, \Delta \xi_4, \Delta \beta_1, \Delta \beta_2, \Delta \beta_3, \Delta \beta_4\}^T$$

これにより、式(3-17), (3-18)は次式となる。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}'_0 (\mathbf{I} + \mathbf{M}'_0{}^{-1} \mathbf{U} \mathbf{M}_p \mathbf{U}^T) \Delta \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{D}'_0 \Delta \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}'_0 \Delta \mathbf{y} \\
 = [\mathbf{U}(\mathbf{D}_A - \mathbf{D}_p) \mathbf{U}^T - 2\mathbf{U} \mathbf{M}_p \dot{\mathbf{U}}^T - \mathbf{D}'_p] \Delta \dot{\mathbf{y}} + [\mathbf{U}(\mathbf{K}_A - \mathbf{K}_p) \mathbf{U}^T + \mathbf{U}(\mathbf{D}_A - \mathbf{D}_p) \dot{\mathbf{U}}^T - \mathbf{U} \mathbf{M}_p \ddot{\mathbf{U}}^T - \mathbf{K}'_p] \Delta \mathbf{y}
 \end{aligned} \tag{4-2}$$

行列 $\mathbf{M}'_0, \mathbf{D}'_0, \mathbf{K}'_0$ は式(2-15)と同じであり定数である。 \mathbf{K}'_p は、次式に示されるように減衰行列 \mathbf{D}_p (式(2-5)) に起因する剛性行列である。

$$\mathbf{D}'_D = \mathbf{U}\mathbf{D}_D\mathbf{U}^T = \mathbf{D}_D, \quad \mathbf{K}'_D = \mathbf{U}\mathbf{D}_D\dot{\mathbf{U}}^T$$

$\mathbf{M}_0^{-1}\mathbf{U}\mathbf{M}_p\mathbf{U}^T$ の最大固有値は1より小さいので、つぎの近似が成り立つ⁵⁸⁾.

$$\mathbf{M}_0' [\mathbf{I} + \mathbf{M}_0^{-1}\mathbf{U}\mathbf{M}_p\mathbf{U}^T]^{-1} \cong \mathbf{M}_0' (\mathbf{I} - \mathbf{M}_0^{-1}\mathbf{U}\mathbf{M}_p\mathbf{U}^T) \mathbf{M}_0^{-1}$$

式(4-2)に上式を左から乗じて、 \mathbf{M}_p に関する項を右辺に整理すると次式を得る。右辺が0の場合の解は式(4-1)となる。

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0'\Delta\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{D}_0'\Delta\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}_0'\Delta\mathbf{y} &= \Delta\mathbf{f}' \\ \Delta\mathbf{f}' &= (\mathbf{D}'_f - \mathbf{D}'_D)\Delta\dot{\mathbf{y}} + (\mathbf{K}'_f - \mathbf{K}'_D)\Delta\mathbf{y} \end{aligned} \quad (4-3)$$

右辺の $\mathbf{D}'_f, \mathbf{K}'_f$ は、空気力に関する $\mathbf{D}_A, \mathbf{K}_A$ だけでなく、釣り合い状態 \mathbf{x}_p に関する係数 $\mathbf{M}_p, \mathbf{D}_p, \mathbf{K}_p$ も含むが、以降まとめて空力係数と呼ぶ。

$$\begin{aligned} \mathbf{D}'_f &= \mathbf{U}(\mathbf{D}_A - \mathbf{D}_p)\mathbf{U}^T - 2\mathbf{U}\mathbf{M}_p\dot{\mathbf{U}}^T + \mathbf{U}\mathbf{M}_p\mathbf{U}^T\mathbf{M}_0'^{-1}\mathbf{D}'_0 \\ \mathbf{K}'_f &= \mathbf{U}(\mathbf{K}_A - \mathbf{K}_p)\mathbf{U}^T + \mathbf{U}(\mathbf{D}_A - \mathbf{D}_p)\dot{\mathbf{U}}^T - \mathbf{U}\mathbf{M}_p\ddot{\mathbf{U}}^T + \mathbf{U}\mathbf{M}_p\mathbf{U}^T\mathbf{M}_0'^{-1}\mathbf{K}'_0 \end{aligned} \quad (4-4)$$

空気力なしの場合について、 $\Delta\ddot{\mathbf{y}}$ 以外の項を \mathbf{h} とし右辺に移項すると次式となる。

$$\Delta\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{h} \quad (4-5)$$

つぎに、空気力の作用を考え、式(4-5)の右辺に空気力 \mathbf{g} を追加して次式とする。

$$\Delta\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{h} + \mathbf{g} \quad (4-6)$$

空気力 \mathbf{g} は、式(4-3)の右辺に対応する空気力 $\Delta\mathbf{f}'$ を式(4-5)の形に合わせた次式で表される。

$$\mathbf{g} = \mathbf{M}_0'^{-1}\Delta\mathbf{f}' \quad (4-7)$$

空気力の追加により、式(4-1)の係数が時刻 t に依存するとみなし、これらをまとめて \mathbf{c} とおき、その第 i 成分を c_i ($i=1,2,\dots,20$) と表す。

$$\mathbf{c} = \{c_{R1}, c_{I1}, c_{R2}, c_{I2}, c_{R3}, c_{I3}, c_{R4}, c_{I4}, c_{R5}, c_{I5}, c_{R6}, c_{I6}, c_{R7}, c_{I7}, c_{R8}, c_{I8}, c_{R9}, c_{I9}, c_{R10}, c_{I10}\}^T$$

さらに $\Delta\mathbf{y}$ の第 i 成分を y_i ($i=1,2,\dots,10$)、次式で表される \mathbf{u} の第 i 成分を u_i ($i=1,2,\dots,10$) と表す。

$$\mathbf{u} = \Delta\dot{\mathbf{y}} = \{\Delta\dot{x}_1, \Delta\dot{x}_2, \Delta\dot{\xi}_1, \Delta\dot{\xi}_2, \Delta\dot{\xi}_3, \Delta\dot{\xi}_4, \Delta\dot{\beta}_1, \Delta\dot{\beta}_2, \Delta\dot{\beta}_3, \Delta\dot{\beta}_4\}^T \quad (4-8)$$

これにより $\Delta\mathbf{y}, \mathbf{u}$ の時間微分は以下のように得られる。

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= \frac{\partial y_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{20} \frac{\partial y_i}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} \quad (i=1,\dots,10) \\ \dot{u}_i &= \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{20} \frac{\partial u_i}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} \quad (i=1,\dots,10) \end{aligned} \quad (4-9)$$

式(4-6)は以下の連立微分方程式に変換される。

$$\begin{cases} \frac{\partial y_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{20} \frac{\partial y_i}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} = u_i \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{20} \frac{\partial u_i}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} = h_i + g_i \end{cases} \quad (i=1,\dots,10) \quad (4-10)$$

y_i, u_i は空気力が働かない場合の解なので次式が成り立つ。

$$\begin{cases} \frac{\partial y_i}{\partial t} = u_i \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} = h_i \end{cases} \quad (i=1,\dots,10) \quad (4-11)$$

式(4-10)と(4-11)を引き算することで、次式が得られる。

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{20} \frac{\partial y_i}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} = 0 \\ \sum_{j=1}^{20} \frac{\partial u_i}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} = g_i \end{cases} \quad (i=1,\dots,10)$$

上式はつぎのように整理される⁵⁹⁾.

$$\sum_{j=1}^{20} [c_i, c_j] \frac{dc_j}{dt} = \sum_{k=1}^{10} g_k \frac{\partial y_k}{\partial c_i} \quad (i=1, \dots, 20) \quad (4-12)$$

ここで、左辺の $[c_i, c_j]$ は次式のLagrange の括弧式である.

$$[c_i, c_j] = \sum_{k=1}^{10} \left[\frac{\partial y_k}{\partial c_i} \frac{\partial u_k}{\partial c_j} - \frac{\partial y_k}{\partial c_j} \frac{\partial u_k}{\partial c_i} \right]$$

$[c_i, c_j]$ を (i, j) 成分とする 20×20 行列は式(4-12)の左辺の係数行列となっている. この係数行列の逆行列を Γ と表記して, その (i, j) 成分を $\gamma_{i,j}$ と表すと非零要素は以下のように表される.

$$\begin{aligned} \gamma_{2i-1, 2j-1} &= \gamma_{2i, 2j} = -N_{ij} \sin((\omega_i - \omega_j)t) \\ \gamma_{2i, 2j-1} &= -\gamma_{2i-1, 2j} = -N_{ij} \cos((\omega_i - \omega_j)t) \end{aligned} \quad (i=1, 2, 3, 4; j=1, 2, 3, 4)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{2i-1, 2j-1} &= \gamma_{2i, 2j} = -\frac{\omega_i + \omega_j}{(\omega_5 - \omega_6)^2} \sin((\omega_i - \omega_j)t) \\ \gamma_{2i, 2j-1} &= -\gamma_{2i-1, 2j} = -\frac{\omega_i + \omega_j}{(\omega_5 - \omega_6)^2} \cos((\omega_i - \omega_j)t) \end{aligned} \quad (i=5, 6; j=5, 6)$$

$$\gamma_{2i, 2i+1} = -\gamma_{2i+1, 2i} = -\frac{1}{\omega_i} \quad (i=7, 8, 9, 10)$$

ここで, N_{ij} は, 4×4 行列 \mathbf{L} の (i, j) 成分 L_{ij} を

$$L_{ij} = (\omega_i + \omega_j) \left[(k_x - m_1 \omega_i^2)(k_x - m_1 \omega_j^2) + m_2^2 \omega_i^2 \omega_j^2 \right]$$

と定義するとき, $\mathbf{N} = \mathbf{L}^{-1}$ として定義される行列 \mathbf{N} の (i, j) 成分を表す.

式(4-3)に示されるように空気力 $\Delta \mathbf{f}'$ は $\Delta \mathbf{y}, \Delta \dot{\mathbf{y}}$ の線形関数で表されるので, 同様に空気力 \mathbf{g} も $\Delta \mathbf{y}, \Delta \dot{\mathbf{y}}$ の線形関数で表される. 式(4-12)両辺に左から行列 Γ をかけると, 式(4-12)はつぎのように式変形される.

$$\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{A}(t) \mathbf{c} \quad (4-14)$$

式(4-14)は20次の線形連立微分方程式である. 式(4-14)を解き, 得られた \mathbf{c} を式(4-1)に代入することにより, 空気力が作用する状況での運動が解析できる. 式(4-14)で表される系が不安定ならば, 式(4-1)は発散し, 不安定化すると判定できる.

式(4-14)の係数行列 $\mathbf{A}(t)$ は, Γ と空気力 g_k と $\partial y_k / \partial c_i$ の積である. 空気力 \mathbf{g} は, 式(3-18)の線形化空気力 $\Delta \mathbf{f}$ を式(2-13), (2-14)により変換した $\Delta \mathbf{f}'$ を式(4-7)に代入することで求められる. 式(3-18)に示される $\Delta \mathbf{f}$ を構成する係数は, ロータ回転周波数とその高調波から構成される. したがって, \mathbf{g} を構成する係数も $\Delta \mathbf{f}$ と同様にロータ回転周波数の整数倍で構成されるはずである. そこで, 空気力 g_k を, 次式のように y_i, u_i の線形で, その係数は定数項 $g_{y_{i0}}, g_{u_{i0}}$ と $n\Omega$ の周波数成分を持つ周期係数 $g_{y_{in}} \cos(n\Omega t + \phi_{y_{in}}), g_{u_{in}} \cos(n\Omega t + \phi_{u_{in}})$ により表現する.

$$g_k = \sum_{i=1}^{10} \left[\left(g_{y_{i0}} + \left[\sum_{n=1} g_{y_{in}} \cos(n\Omega t + \phi_{y_{in}}) \right] \right) y_i \right] + \sum_{i=1}^{10} \left[\left(g_{u_{i0}} + \left[\sum_{n=1} g_{u_{in}} \cos(n\Omega t + \phi_{u_{in}}) \right] \right) u_i \right] \quad (k=1, \dots, 10)$$

上式に基づいて係数行列 $\mathbf{A}(t)$ を導出し, $\mathbf{A}(t)$ の構成要素を $a_{n,m} (n=1, \dots, 20; m=1, \dots, 20)$ とした場合, 次式で表される $\mathbf{A}(t)$ の部分行列,

$$\begin{bmatrix} a_{2i-1, 2j-1} & a_{2i-1, 2j} \\ a_{2i, 2j-1} & a_{2i, 2j} \end{bmatrix} \quad (i=1, \dots, 10; j=1, \dots, 10)$$

の周波数成分は, $n\Omega \pm \omega_i \pm \omega_j (n=1, 2, 3, \dots)$ と $\omega_i \pm \omega_j$ から構成される. $\mathbf{A}(t)$ の時変項のうち, $n\Omega \pm \omega_i \pm \omega_j (n=1, 2, 3, \dots)$ や $\omega_i \pm \omega_j$ がある程度の大きさをもてば一周期にわたる平均は0となるが, $n\Omega \pm \omega_i \pm \omega_j (n=1, 2, 3, \dots)$ や $\omega_i \pm \omega_j$ が0に近ければ平均が0とならず, 安定性に影響する.

3章の数値計算結果から, 不安定化するのは逆回転のワールモードである. 図2-2から, SH-60K実機のロータ回転周波数 $\Omega = 4.3[\text{Hz}]$ では, 逆回転のワールモードの固有振動数 ω_2 を含む $\omega_i \pm \omega_j$ が0に近づくことはないことがわかるので, 残る可能性は $n\Omega \pm \omega_i \pm \omega_j (n=1, 2, 3, \dots)$ が0に近づく場合である. $n\Omega \pm \omega_i \pm \omega_j (n=1, 2, 3, \dots)$ が0に近づくような周波数成分 $n\Omega (n=1, 2, 3, \dots)$ を空気力 $g_k (k=1, \dots, 10)$ が有する場合, 式(4-14)の安定性に空気力が影響することになる.

$n\Omega \pm \omega_i \pm \omega_j (n=1, 2, 3, \dots)$ が0に近づいて不安定化作用を持つ場合, 運動方程式の係数 (空力係数) が周期的に変化するこ

とに起因する不安定なので、この不安定現象はパラメータ共振（係数励振振動, parametric resonance）に分類される。 $n\Omega \pm \omega_i \pm \omega_j (n=1,2,3,\dots)$ が0に近づくことがあるかを調べるため、次項では、式(4-3)右辺の空力係数の周波数成分を検討する。

4.2.2 空気力の変換

本項では、式(4-4)の空力係数 $\mathbf{K}'_f, \mathbf{D}'_f$ の周波数成分について述べる。3章の数値計算に用いた空力係数 $\mathbf{K}_A, \mathbf{D}_A$ などを式(2-13), (2-14)により変換した結果が式(4-4)に示される $\mathbf{K}'_f, \mathbf{D}'_f$ である。 \mathbf{K}_A を次式に示す部分行列に分けると、部分行列は表3-3に示す特徴を有している。

$$\mathbf{K}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{Axx} & \mathbf{K}_{Ax\zeta} & \mathbf{K}_{Ax\beta} \\ \mathbf{K}_{A\zeta x} & \mathbf{K}_{A\zeta\zeta} & \mathbf{K}_{A\zeta\beta} \\ \mathbf{K}_{A\beta x} & \mathbf{K}_{A\beta\zeta} & \mathbf{K}_{A\beta\beta} \end{bmatrix}$$

変換後の $\mathbf{U}\mathbf{K}_A\mathbf{U}^T$ を同様の部分行列に分割したつぎの結果について、周波数成分を調べる。

$$\begin{aligned} \mathbf{U}\mathbf{K}_A\mathbf{U}^T &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{Axx} & \mathbf{K}_{Ax\zeta}\mathbf{U}_\zeta^T & \mathbf{K}_{Ax\beta} \\ \mathbf{U}_\zeta\mathbf{K}_{A\zeta x} & \mathbf{U}_\zeta\mathbf{K}_{A\zeta\zeta}\mathbf{U}_\zeta^T & \mathbf{U}_\zeta\mathbf{K}_{A\zeta\beta} \\ \mathbf{K}_{A\beta x} & \mathbf{K}_{A\beta\zeta}\mathbf{U}_\zeta^T & \mathbf{K}_{A\beta\beta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{Axx} & \mathbf{K}'_{Ax\zeta} & \mathbf{K}_{Ax\beta} \\ \mathbf{K}'_{A\zeta x} & \mathbf{K}'_{A\zeta\zeta} & \mathbf{K}'_{A\zeta\beta} \\ \mathbf{K}_{A\beta x} & \mathbf{K}'_{A\beta\zeta} & \mathbf{K}_{A\beta\beta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-15)$$

$\mathbf{U}_\zeta\mathbf{K}_{A\zeta\zeta}\mathbf{U}_\zeta^T$ を調べる。対角行列 $\mathbf{K}_{A\zeta\zeta}$ の対角要素の時間変化は、順番に位相差が90度となっているので、それらを $\chi_{jj} (j=1,2,3,4)$ とおくと、

$$\mathbf{U}_\zeta\mathbf{K}_{A\zeta\zeta}\mathbf{U}_\zeta^T = \mathbf{U}_\zeta \begin{bmatrix} \chi_{11} & & & \\ & \chi_{22} & & \\ & & \chi_{33} & \\ & & & \chi_{44} \end{bmatrix} \mathbf{U}_\zeta^T, \quad \chi_{jj} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[c_n \cos\left(n\left(\Omega t + \frac{j-1}{2}\pi\right)\right) + s_n \sin\left(n\left(\Omega t + \frac{j-1}{2}\pi\right)\right) \right]$$

χ_{ij} の第 n 成分 $c_n \cos(n(\Omega t + (j-1)\pi/2)) + s_n \sin(n(\Omega t + (j-1)\pi/2))$ から出てくる変換後の $\mathbf{K}'_{A\zeta\zeta}$ の (i, j) 成分 χ'_{ij} は、次のように表される。

$$\begin{aligned}
\chi'_{11} &= \frac{s_{101}s_n + c_{1010}c_n}{4} (\cos[(n-2)\Omega t] + \cos[(n+2)\Omega t]) + \frac{c_{1010}s_n - s_{101}c_n}{4} (\sin[(n-2)\Omega t] + \sin[(n+2)\Omega t]) \\
&\quad + \frac{c_{1111}c_n + s_{111}s_n}{2} \cos[n\Omega t] + \frac{c_{1111}s_n - s_{111}c_n}{2} \sin[n\Omega t] \\
&= \chi'_{33} \\
\chi'_{22} &= -\frac{s_{101}s_n + c_{1010}c_n}{4} (\cos[(n-2)\Omega t] + \cos[(n+2)\Omega t]) + \frac{s_{101}c_n - c_{1010}s_n}{4} (\sin[(n-2)\Omega t] + \sin[(n+2)\Omega t]) \\
&\quad + \frac{c_{1111}c_n + s_{111}s_n}{2} \cos[n\Omega t] + \frac{c_{1111}s_n - s_{111}c_n}{2} \sin[n\Omega t] \\
&= \chi'_{44} \\
\chi'_{12} &= \frac{c_{1010}s_n - s_{101}c_n}{4} (\cos[(n-2)\Omega t] - \cos[(n+2)\Omega t]) - \frac{c_{1010}c_n + s_{101}s_n}{4} (\sin[(n-2)\Omega t] - \sin[(n+2)\Omega t]) \\
&= \chi'_{21} = -\chi'_{34} = -\chi'_{43} \\
\chi'_{13} &= -\frac{c_{1001}c_n + s_{100}s_n}{4} (\cos[(n-2)\Omega t] + \cos[(n+2)\Omega t]) + \frac{s_{101}c_n - c_{1001}s_n}{4} (\sin[(n-2)\Omega t] + \sin[(n+2)\Omega t]) \\
&\quad - \frac{c_{1100}c_n + s_{110}s_n}{2} \cos[n\Omega t] + \frac{s_{110}c_n - c_{1100}s_n}{2} \sin[n\Omega t] \\
&= \chi'_{31} \\
\chi'_{14} &= \frac{c_{1001}s_n + s_{100}c_n}{4} (\cos[(n-2)\Omega t] - \cos[(n+2)\Omega t]) - \frac{s_{100}s_n + c_{1001}c_n}{4} (\sin[(n-2)\Omega t] - \sin[(n+2)\Omega t]) \\
&= \chi'_{41} = -\chi'_{23} = -\chi'_{32} \\
\chi'_{24} &= -\frac{c_{1001}c_n + s_{100}s_n}{4} (\cos[(n-2)\Omega t] + \cos[(n+2)\Omega t]) + \frac{s_{100}c_n - c_{1001}s_n}{4} (\sin[(n-2)\Omega t] + \sin[(n+2)\Omega t]) \\
&\quad + \frac{c_{1100}c_n + s_{110}s_n}{2} \cos[n\Omega t] + \frac{c_{1100}s_n - s_{110}c_n}{2} \sin[n\Omega t] \\
&= \chi'_{42}
\end{aligned}$$

次に $\mathbf{U}_\zeta \mathbf{K}_{A\zeta\chi}$ を調べる．対角行列 $\mathbf{K}_{A\zeta\chi}$ の各列の時間変化は，順番に位相差が90度となっているので，その要素を $\chi_{ij} (i=1, 2, 3, 4; j=1, 2)$ とおくと，

$$\mathbf{U}_\zeta \mathbf{K}_{A\zeta\chi} = \mathbf{U}_\zeta \begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{21} \\ \chi_{21} & \chi_{22} \\ \chi_{31} & \chi_{23} \\ \chi_{41} & \chi_{24} \end{bmatrix}, \quad \chi_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[c_{nj} \cos \left(n \left(\Omega t + \frac{i-1}{2} \pi \right) \right) + s_{nj} \sin \left(n \left(\Omega t + \frac{i-1}{2} \pi \right) \right) \right]$$

χ_{ij} の第 n 成分 $c_{nj} \cos(n(\Omega t + (i-1)\pi/2)) + s_{nj} \sin(n(\Omega t + (i-1)\pi/2))$ から出てくる変換後の $\mathbf{K}'_{A\zeta\chi}$ の (i, j) 成分 χ'_{ij} は，次のように表される．

$$\begin{aligned}
\chi'_{1j} &= \frac{cs_{110}c_{nj} + sc_{1001}s_{nj}}{4} \cos[(n-1)\Omega t] + \frac{cs_{110}s_{nj} + sc_{1001}c_{nj}}{4} \sin[(n-1)\Omega t] \\
&\quad + \frac{cs_{100}c_{nj} + sc_{1100}s_{nj}}{4} \cos[(n+1)\Omega t] + \frac{cs_{100}s_{nj} - sc_{1100}c_{nj}}{4} \sin[(n+1)\Omega t] \\
\chi'_{2j} &= \frac{cs_{110}s_{nj} - sc_{1001}c_{nj}}{4} \cos[(n-1)\Omega t] - \frac{cs_{110}c_{nj} + sc_{1001}s_{nj}}{4} \sin[(n-1)\Omega t] \\
&\quad - \frac{cs_{100}s_{nj} - sc_{1100}c_{nj}}{4} \cos[(n+1)\Omega t] + \frac{cs_{100}c_{nj} + sc_{1100}s_{nj}}{4} \sin[(n+1)\Omega t] \\
\chi'_{3j} &= -\frac{cs_{111}c_n + sc_{1010}s_{nj}}{4} \cos[(n-1)\Omega t] - \frac{cs_{111}s_{nj} - sc_{1010}c_{nj}}{4} \sin[(n-1)\Omega t] \\
&\quad - \frac{cs_{101}c_{nj} + sc_{1111}s_{nj}}{4} \cos[(n+1)\Omega t] - \frac{cs_{101}s_{nj} + sc_{1111}c_{nj}}{4} \sin[(n+1)\Omega t] \\
\chi'_{4j} &= \frac{cs_{111}s_{nj} - sc_{1010}c_{nj}}{4} \cos[(n-1)\Omega t] - \frac{cs_{111}c_{nj} + sc_{1010}s_{nj}}{4} \sin[(n-1)\Omega t] \\
&\quad - \frac{cs_{101}s_{nj} + sc_{1111}c_{nj}}{4} \cos[(n+1)\Omega t] + \frac{cs_{101}c_{nj} + sc_{1111}s_{nj}}{4} \sin[(n+1)\Omega t]
\end{aligned}$$

ここで， $s_{111}, s_{101}, s_{110}, s_{100}, c_{1111}, c_{1100}, c_{1010}, c_{1000}, cs_{110}, cs_{111}, cs_{100}, cs_{101}, sc_{1001}, sc_{1010}, sc_{1100}, sc_{1111}$ は以下のように表され， n の

値に応じて表4-1のように変化する。

表4-1 $s_{ijm}, c_{ijmn}, cs_{ijm}, sc_{ijmn}$ の定義 (✓が値を持つ n , それ以外は0となる)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$s_{111} = \sin(n\pi/2) + \sin(n\pi) + \sin(3n\pi/2)$													
$s_{101} = \sin(n\pi/2) - \sin(n\pi) + \sin(3n\pi/2)$...
$cs_{110} = \cos(n\pi/2) + \sin(n\pi) - \cos(3n\pi/2)$													
$c_{1111} = \cos(n\pi/2) + \cos(n\pi) + \cos(3n\pi/2) + 1$				✓				✓				✓	...
$c_{1010} = \cos(n\pi/2) - \cos(n\pi) + \cos(3n\pi/2) - 1$													
$sc_{1111} = \sin(n\pi/2) + \cos(n\pi) + \sin(3n\pi/2) + 1$													
$sc_{1010} = \sin(n\pi/2) - \cos(n\pi) + \sin(3n\pi/2) - 1$		✓				✓				✓			...
$cs_{111} = \cos(n\pi/2) + \sin(n\pi) + \cos(3n\pi/2)$													
$cs_{101} = \cos(n\pi/2) - \sin(n\pi) + \cos(3n\pi/2)$													
$s_{100} = \sin(n\pi/2) - \sin(n\pi) - \sin(3n\pi/2)$													
$s_{110} = \sin(n\pi/2) + \sin(n\pi) - \sin(3n\pi/2)$	✓		✓		✓		✓		✓		✓		...
$c_{1001} = \cos(n\pi/2) - \cos(n\pi) - \cos(3n\pi/2) + 1$													
$c_{1100} = \cos(n\pi/2) + \cos(n\pi) - \cos(3n\pi/2) - 1$													
$sc_{1001} = \sin(n\pi/2) - \cos(n\pi) - \sin(3n\pi/2) + 1$	✓				✓				✓				...
$sc_{1100} = \sin(n\pi/2) + \cos(n\pi) - \sin(3n\pi/2) - 1$			✓				✓				✓		...

このため、変換後の空力係数は、要素により特定の周波数成分のみを持つこととなる。 $\mathbf{U}_\zeta \mathbf{K}_{A\zeta\zeta} \mathbf{U}_\zeta^T$, $\mathbf{U}_\zeta \mathbf{K}_{A\zeta\alpha}$ 以外の他の部分行列についても、同様に周波数成分を導出することができる。結果として、 $\mathbf{D}'_f, \mathbf{K}'_f$ をつぎの部分行列に分割すると、表4-2に示す周波数成分から構成される。空力係数の一部を図4-1に示す。

$$\mathbf{K}'_f = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{xx} & \mathbf{K}'_{x\zeta_1} & \mathbf{K}'_{x\zeta_3} & \mathbf{K}_{x\beta} \\ \mathbf{K}'_{\zeta_1 x} & \mathbf{K}'_{\zeta_1 \zeta_1} & \mathbf{K}'_{\zeta_1 \zeta_3} & \mathbf{K}'_{\zeta_1 \beta} \\ \mathbf{K}'_{\zeta_3 x} & \mathbf{K}'_{\zeta_3 \zeta_1} & \mathbf{K}'_{\zeta_3 \zeta_3} & \mathbf{K}'_{\zeta_3 \beta} \\ \mathbf{K}_{\beta x} & \mathbf{K}'_{\beta \zeta_1} & \mathbf{K}'_{\beta \zeta_3} & \mathbf{K}_{\beta \beta} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}'_f = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D}'_{x\zeta_1} & \mathbf{D}'_{x\zeta_3} & \mathbf{D}_{x\beta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}'_{\zeta_1 \zeta_1} & \mathbf{D}'_{\zeta_1 \zeta_3} & \mathbf{D}'_{\zeta_1 \beta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}'_{\zeta_3 \zeta_1} & \mathbf{D}'_{\zeta_3 \zeta_3} & \mathbf{D}'_{\zeta_3 \beta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}'_{\beta \zeta_1} & \mathbf{D}'_{\beta \zeta_3} & \mathbf{D}_{\beta \beta} \end{bmatrix}$$

表4-2 変換後の空力係数行列

部分行列	サイズ	周波数成分
$\mathbf{K}_{xx},$ $\mathbf{K}'_{x\zeta_1}, \mathbf{K}'_{\zeta_1 x}, \mathbf{K}'_{\zeta_1 \zeta_1}, \mathbf{K}'_{\zeta_3 \zeta_3}$ $\mathbf{D}'_{x\zeta_1}, \mathbf{D}'_{\zeta_1 \zeta_1}, \mathbf{D}'_{\zeta_3 \zeta_3}$	2×2	定常 + $4\Omega, 8\Omega, \dots$
$\mathbf{K}'_{\zeta_3 x}, \mathbf{K}'_{\zeta_3 \zeta_1}, \mathbf{K}'_{x\zeta_3}, \mathbf{K}'_{\zeta_1 \zeta_3}$ $\mathbf{D}'_{\zeta_3 \zeta_1}, \mathbf{D}'_{x\zeta_3}, \mathbf{D}'_{\zeta_1 \zeta_3}$	2×2	$1\Omega, 3\Omega, 5\Omega, \dots$
$\mathbf{K}_{x\beta}, \mathbf{D}_{x\beta}, \mathbf{K}'_{\zeta_1 \beta}, \mathbf{K}'_{\zeta_3 \beta}, \mathbf{D}'_{\zeta_1 \beta}, \mathbf{D}'_{\zeta_3 \beta}$ $\mathbf{K}_{\beta x}, \mathbf{K}'_{\beta \zeta_1}, \mathbf{K}'_{\beta \zeta_3}, \mathbf{D}'_{\beta \zeta_1}, \mathbf{D}'_{\beta \zeta_3}$ $\mathbf{K}_{\beta \beta}, \mathbf{D}_{\beta \beta}$	4×2 2×4 4×4	定常 + $1\Omega, 2\Omega, 3\Omega, \dots$

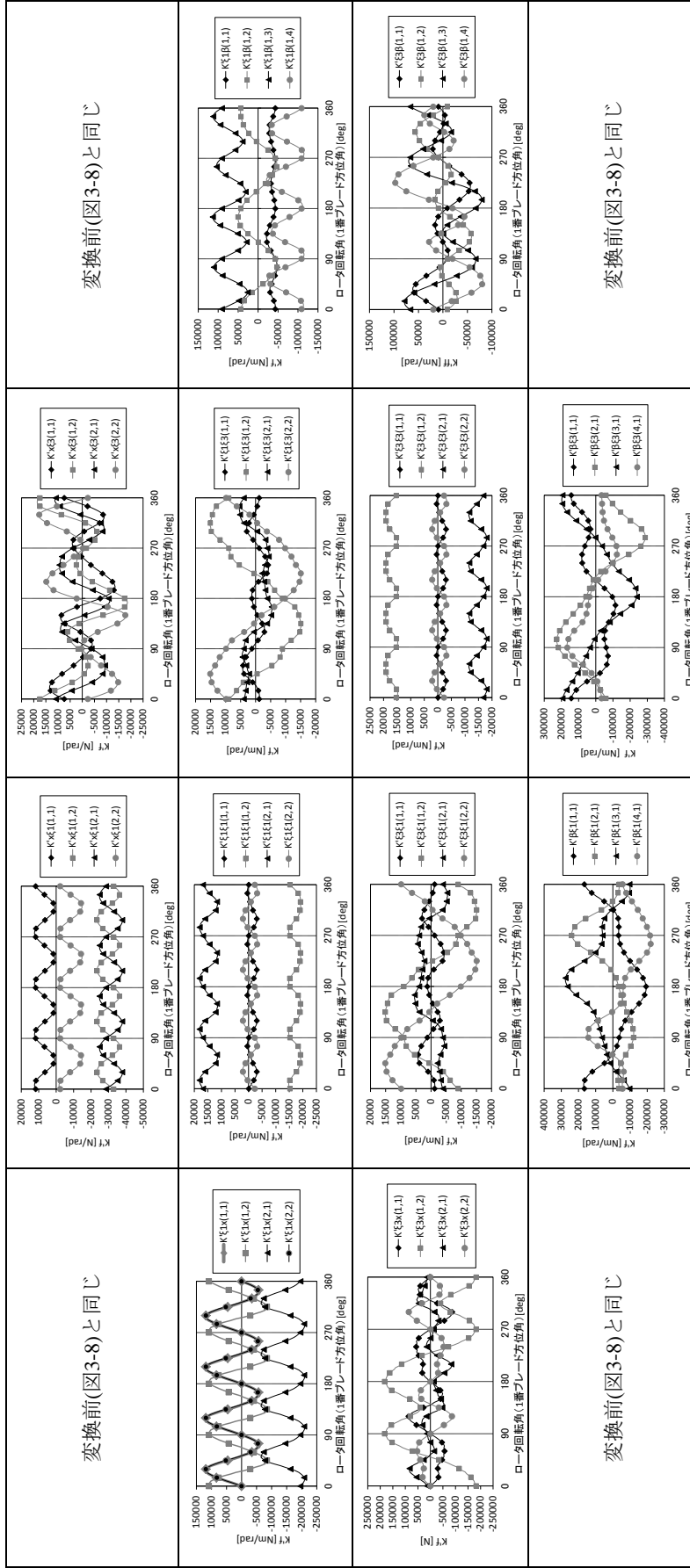


図 4-1(1/2) 変換後の空力係数 $\mathbf{K}'_f =$ (速度 90[m/s], 揚力 100,000[N])

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{xx} & \mathbf{K}'_{x\zeta_1} & \mathbf{K}'_{x\zeta_3} & \mathbf{K}_{x\beta} \\ \mathbf{K}'_{\zeta_1 x} & \mathbf{K}'_{\zeta_1 \zeta_1} & \mathbf{K}'_{\zeta_1 \zeta_3} & \mathbf{K}'_{\zeta_1 \beta} \\ \mathbf{K}'_{\zeta_3 x} & \mathbf{K}'_{\zeta_3 \zeta_1} & \mathbf{K}'_{\zeta_3 \zeta_3} & \mathbf{K}'_{\zeta_3 \beta} \\ \mathbf{K}_{\beta x} & \mathbf{K}'_{\beta \zeta_1} & \mathbf{K}'_{\beta \zeta_3} & \mathbf{K}_{\beta \beta} \end{bmatrix}$$

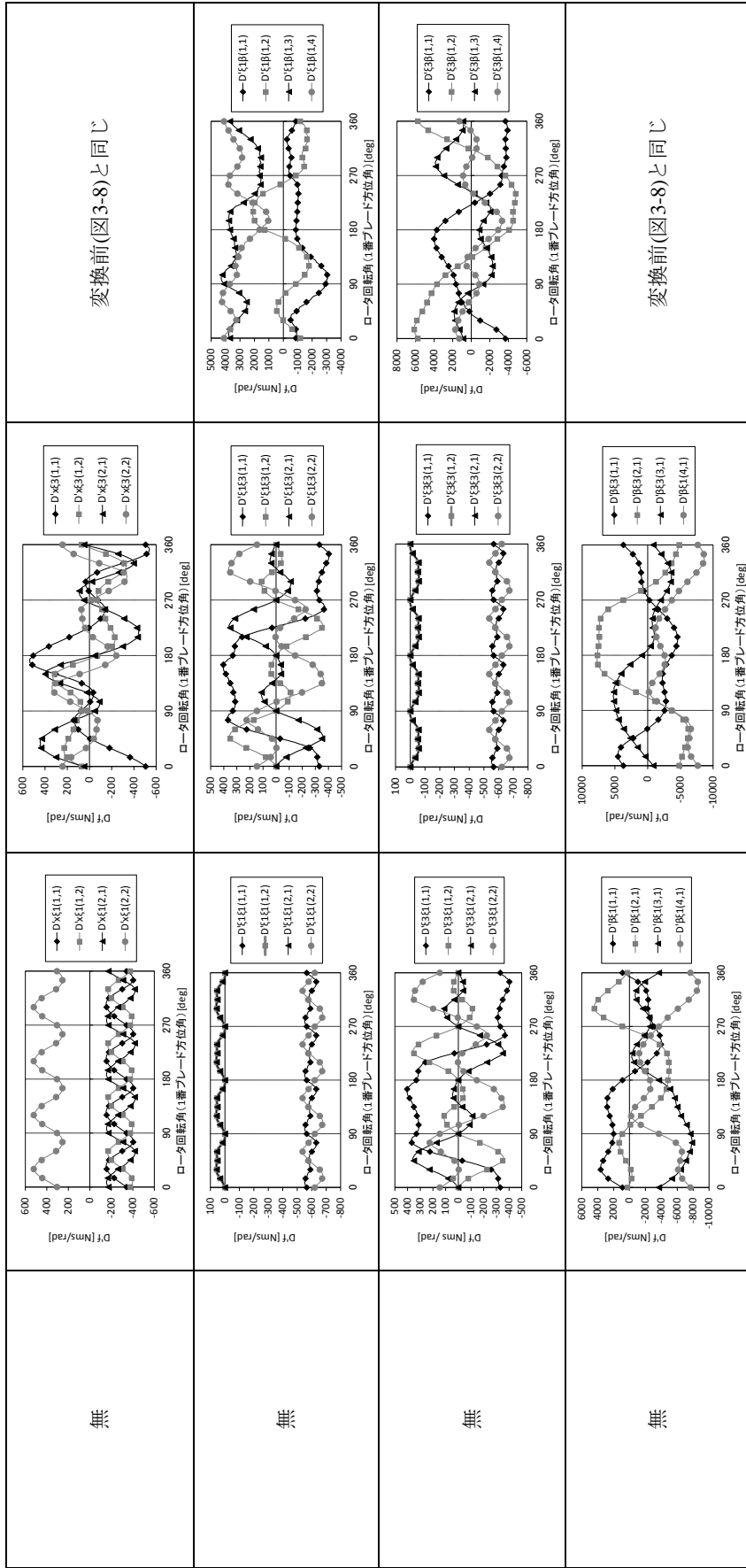


図 4-1(2/2) 変換後の空力係数 $\mathbf{D}'_f = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{D}'_{x\zeta_1} & \mathbf{D}'_{x\zeta_3} & \mathbf{D}_{x\beta} \\ 0 & \mathbf{D}'_{\zeta_1\zeta_1} & \mathbf{D}'_{\zeta_1\zeta_3} & \mathbf{D}'_{\zeta_1\beta} \\ 0 & \mathbf{D}'_{\zeta_3\zeta_1} & \mathbf{D}'_{\zeta_3\zeta_3} & \mathbf{D}'_{\zeta_3\beta} \\ 0 & \mathbf{D}'_{\beta\zeta_1} & \mathbf{D}'_{\beta\zeta_3} & \mathbf{D}_{\beta\beta} \end{bmatrix}$ (速度 90[m/s], 揚力 100,000[N])

4.2.3 パラメータ共振の組み合わせ

本節では、2.2節のモード解析結果と4.2.2項の空力係数の周波数成分から、パラメータ共振が発生しうる固有モードの組み合わせ候補を選ぶ。3章の数値計算の結果、逆回転のワールモードが発散することが分かっているので、逆回転ワールモード ω_2 を含む $n\Omega \pm \omega_i \pm \omega_j$ に注目する。

式(2-11), (2-19)のモード解析の結果から、各モードの固有振動数を図4-2に示す。図4-2における固有振動数の正負は、式(2-18)の解の形に合わせたものである。SH-60Kのロータ回転周波数は $\Omega = 4.3[\text{Hz}]$ で一定となっているので、SH-60Kについて検討する限りにおいては、 $\Omega = 4.3[\text{Hz}]$ のみを考えればよい。このため、図4-2を始めとして、横軸がロータ回転周波数となる図に $\Omega = 4.3[\text{Hz}]$ を図示した。

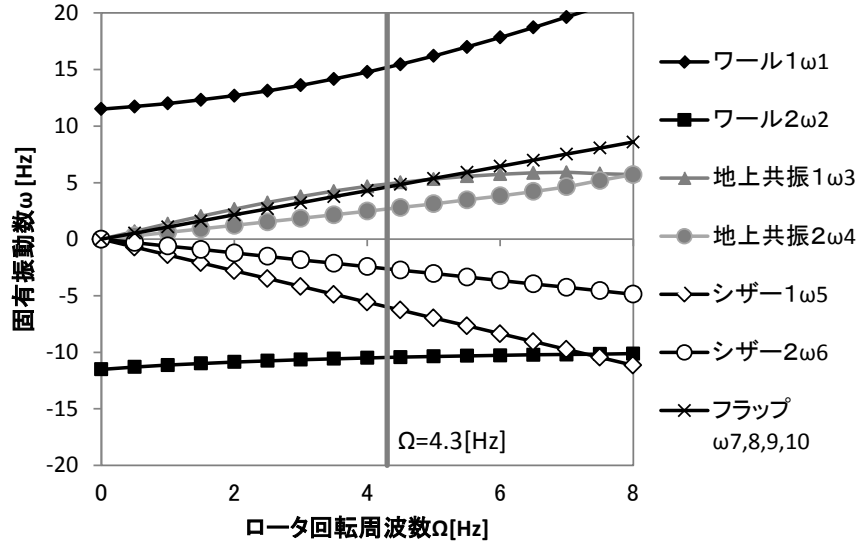


図4-2 各モードの固有振動数

まずハブ・ラグ連成系の中のワールモードと地上共振モードの干渉を調べる。両者の干渉を表す空力係数は、 $\mathbf{K}'_{x\zeta_1}, \mathbf{K}'_{\zeta_1x}$, $\mathbf{D}'_{x\zeta_1}$ と考えられ、それらは表4-2から $4\Omega, 8\Omega, \dots$ の周波数成分を含む。逆回転ワールモード ω_2 と地上共振モード ω_3, ω_4 の和と差のうち正となる組合せは、図4-2から $-\omega_2 + \omega_3$, $-\omega_2 - \omega_3$, $-\omega_2 + \omega_4$, $-\omega_2 - \omega_4$ である。これらと、干渉空力係数の周波数成分とを比較して図4-3に示す。 $\Omega = 4.3[\text{Hz}]$ において固有振動数の和や差と干渉空力係数の周波数が近接しないので、パラメータ共振の可能性がないことがわかる。

次にワールモードを含むハブ・ラグ連成系とシザーモードの干渉を調べる。両者の干渉空力係数は $\mathbf{K}'_{\zeta_3x}, \mathbf{K}'_{x\zeta_3}, \mathbf{K}'_{\zeta_3\zeta_1}, \mathbf{K}'_{\zeta_1\zeta_3}, \mathbf{D}'_{x\zeta_3}, \mathbf{D}'_{\zeta_3x}, \mathbf{D}'_{\zeta_1\zeta_3}, \mathbf{D}'_{\zeta_3\zeta_1}$ と考えられ、それらは表4-2から $1\Omega, 3\Omega, 5\Omega, \dots$ の周波数成分を含む。逆回転ワールモード ω_2 とシザーモード ω_5, ω_6 の和と差の中で正となる組合せと、干渉空力係数の周波数成分との比較を図4-4に示す。干渉空力係数の周波数成分 1Ω 成分と $-\omega_2 + \omega_5$, 3Ω 成分と $-\omega_2 - \omega_6$ が近接しており、逆回転のワールモード ω_2 とシザーモード ω_n ($n=5$ or 6) との干渉によるパラメータ共振の可能性があることがわかる。

最後にワールモードを含むハブ・ラグ連成系とフラップモードの干渉を調べる。両者の干渉空力係数は $\mathbf{K}_{x\beta}, \mathbf{K}_{\beta x}, \mathbf{D}_{x\beta}, \mathbf{D}_{\beta x}, \mathbf{K}'_{\zeta_1\beta}, \mathbf{K}'_{\beta\zeta_1}, \mathbf{D}'_{\zeta_1\beta}, \mathbf{D}'_{\beta\zeta_1}$ と考えられ、それらは表4-2から $1\Omega, 2\Omega, 3\Omega, \dots$ の周波数成分を含む。干渉空力係数の周波数成分と、逆回転ワールモード ω_2 とフラップモード ω_i ($i=7, 8, 9, 10$) の和と差のうち正となる組合せの比較を図4-5に示す。固有振動数の和や差と干渉空力係数の周波数が近接しないので、パラメータ共振の可能性がないことがわかる。

以上から、パラメータ共振が発生する可能性があるのは、ワールモードとシザーモードの干渉で、次式で示される ε_n ($n=5$ or 6) が微小となる2つの場合である。以降ではこれらをそれぞれ $n=5$ または $\Omega = -\omega_2 + \omega_5$ の場合、 $n=6$ または $3\Omega = -\omega_2 - \omega_6$ の場合と表現する。

$$\begin{aligned} \varepsilon_5 &= \Omega + \omega_2 - \omega_5 \\ \varepsilon_6 &= 3\Omega + \omega_2 + \omega_6 \end{aligned} \quad (4-16)$$

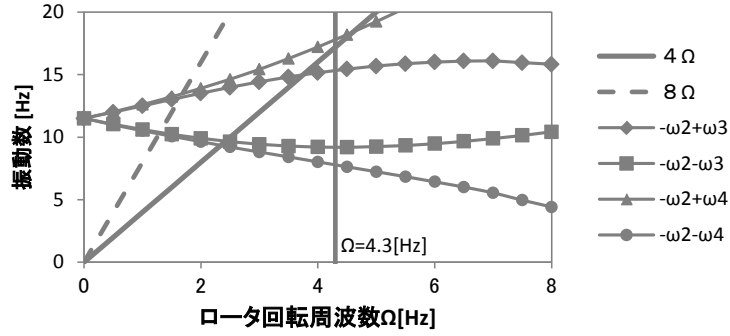


図4-3 ワールモードと地上共振モードの干渉

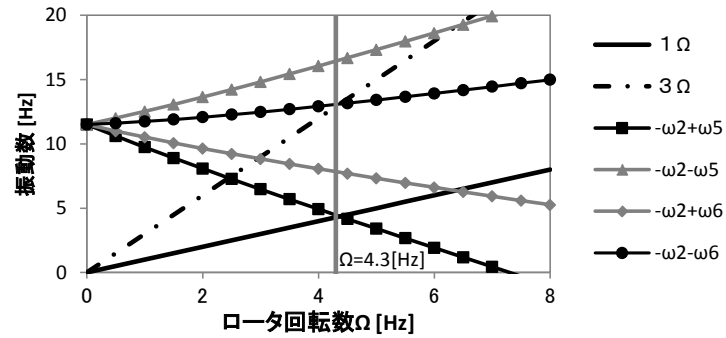


図4-4 ワールモードとシザーモードの干渉

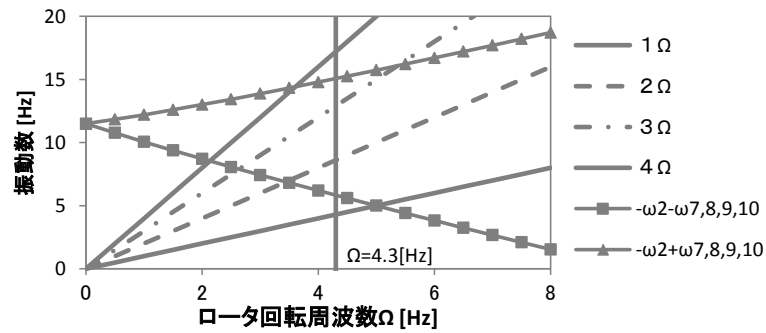


図4-5 ワールモードとフラップモードの干渉

4.3 ワールモードとシザーモードのパラメータ共振解析

4.3.1 フラップ項の省略

前節において逆回転のワールモードについてパラメータ共振が発生する可能性があるのはシザーモードとの干渉であることがわかった。この組み合わせのパラメータ共振を検討対象とする場合、ハブ・ラグ連成系とラグ独立系のみを考慮し、フラップ系は除外される。フラップ系の影響確認のため、つぎの6変数で数値計算を行い10変数の場合と比較する。

$$\Delta \tilde{\mathbf{y}} = \{\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta \xi_1, \Delta \xi_2, \Delta \xi_3, \Delta \xi_4\}^T \quad (4-17)$$

この6変数で運動方程式は、つぎのようになる。

$$\tilde{\mathbf{M}}'_0 \Delta \ddot{\tilde{\mathbf{y}}} + \tilde{\mathbf{D}}'_0 \Delta \dot{\tilde{\mathbf{y}}} + \tilde{\mathbf{K}}'_0 \Delta \tilde{\mathbf{y}} = (\tilde{\mathbf{D}}'_f - \tilde{\mathbf{D}}'_d) \dot{\tilde{\mathbf{y}}} + (\tilde{\mathbf{K}}'_f - \tilde{\mathbf{K}}'_d) \tilde{\mathbf{y}} \quad (4-18)$$

$\tilde{\mathbf{M}}'_0, \tilde{\mathbf{D}}'_0, \tilde{\mathbf{K}}'_0, \tilde{\mathbf{D}}'_f, \tilde{\mathbf{K}}'_f, \tilde{\mathbf{D}}'_d, \tilde{\mathbf{K}}'_d$ は、それぞれ $\mathbf{M}'_0, \mathbf{D}'_0, \mathbf{K}'_0, \mathbf{D}'_f, \mathbf{K}'_f, \mathbf{D}'_d, \mathbf{K}'_d$ の左上の 6×6 部分行列を取り出した行列である。

$\tilde{\mathbf{M}}'_0, \tilde{\mathbf{D}}'_0, \tilde{\mathbf{K}}'_0, \tilde{\mathbf{D}}'_d, \tilde{\mathbf{K}}'_d$ の非零要素は以下のように表される定数となる。

$$\begin{aligned}
\tilde{M}'_{01,1} &= \tilde{M}'_{02,2} = m_h + 4m_b \\
\tilde{M}'_{03,3} &= \tilde{M}'_{04,4} = \tilde{M}'_{05,5} = \tilde{M}'_{06,6} = m_b r^2 \\
\tilde{M}'_{01,3} &= \tilde{M}'_{03,1} = -\tilde{M}'_{04,2} = -\tilde{M}'_{02,4} = \sqrt{2}m_b r \\
\tilde{D}'_{03,4} &= -\tilde{D}'_{04,3} = -\tilde{D}'_{05,6} = \tilde{D}'_{06,5} = -2m_b r \Omega \\
\tilde{K}'_{011} &= \tilde{K}'_{022} = k_x \\
\tilde{K}'_{03,3} &= \tilde{K}'_{04,4} = \tilde{K}'_{05,5} = \tilde{K}'_{06,6} = -m_b e(r-e)\Omega^2 \\
\tilde{K}'_{D2,3} &= -\tilde{K}'_{D3,2} = -\tilde{K}'_{D5,6} = \tilde{K}'_{D6,5} = \Omega d_{lag} \\
\tilde{D}'_{D1,1} &= \tilde{D}'_{D2,2} = d_x \\
\tilde{D}'_{D3,3} &= \tilde{D}'_{D4,4} = \tilde{D}'_{D5,5} = \tilde{D}'_{D6,6} = d_\zeta
\end{aligned}$$

$\tilde{\mathbf{D}}'_f, \tilde{\mathbf{K}}'_f$ は、表4-2および図4-1に示される部分行列から構成される。

$$\tilde{\mathbf{K}}'_f = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{xx} & \mathbf{K}'_{x\zeta_1} & \mathbf{K}'_{x\zeta_3} \\ \mathbf{K}'_{\zeta_1 x} & \mathbf{K}'_{\zeta_1 \zeta_1} & \mathbf{K}'_{\zeta_1 \zeta_3} \\ \mathbf{K}'_{\zeta_3 x} & \mathbf{K}'_{\zeta_3 \zeta_1} & \mathbf{K}'_{\zeta_3 \zeta_3} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{D}}'_f = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D}'_{x\zeta_1} & \mathbf{D}'_{x\zeta_3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}'_{\zeta_1 \zeta_1} & \mathbf{D}'_{\zeta_1 \zeta_3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}'_{\zeta_3 \zeta_1} & \mathbf{D}'_{\zeta_3 \zeta_3} \end{bmatrix}$$

初期値を $x_1 = 0.001[\text{m}]$ ，それ以外は0として，フラップ角を含む10変数の時間応答と，フラップ角を除いた6変数の時間応答の比較を図4-6に示す．図4-6から，6変数は10変数に比べてハブ運動の不安定化の度合いは小さくなるが，逆回転のワールモードが不安定化することが確認できる．

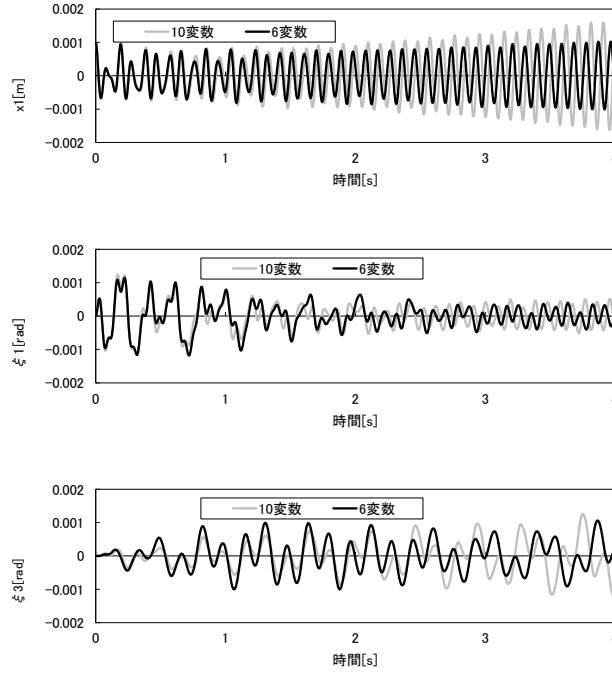


図4-6 10変数と6変数の計算結果比較（速度90[m/s],揚力100,000[N],構造減衰比0）

4.3.2 定数変化法の適用

前項までの結果を受け，ハブ・ラグ連成系とラグ独立系からなる6変数のみを考慮して，逆回転のワールモード ω_2 とシザーモード ω_n ($n=5$ or 6) の干渉を調べる． $\Delta\tilde{\mathbf{y}}$ と同様，6変数に対応する $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{g}}, \tilde{\mathbf{c}}$ をつぎのように定義する．

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{u}} &= \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}^T = \{\dot{\Delta x}_1, \dot{\Delta x}_2, \dot{\Delta \zeta}_1, \dot{\Delta \zeta}_2, \dot{\Delta \zeta}_3, \dot{\Delta \zeta}_4\}^T \\
\tilde{\mathbf{c}} &= \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}, c_{11}, c_{12}\}^T \\
&= \{c_{R1}, c_{I1}, c_{R2}, c_{I2}, c_{R3}, c_{I3}, c_{R4}, c_{I4}, c_{R5}, c_{I5}, c_{R6}, c_{I6}\}^T \\
\tilde{\mathbf{g}} &= \tilde{\mathbf{M}}_0^{-1} \left[(\tilde{\mathbf{D}}'_f - \tilde{\mathbf{D}}'_D) \Delta\tilde{\mathbf{y}} + (\tilde{\mathbf{K}}'_f - \tilde{\mathbf{K}}'_D) \Delta\tilde{\mathbf{y}} \right]
\end{aligned} \tag{4-19}$$

これにより，式(4-12)はつぎのようになる．

$$\sum_{j=1}^{12} [c_i, c_j] \frac{dc_j}{dt} = \sum_{k=1}^6 g_k \frac{\partial y_k}{\partial c_i} \quad (i=1, \dots, 12) \quad (4-20)$$

式(4-19)において $\hat{\mathbf{K}}'_f, \hat{\mathbf{D}}'_f$ は， $\tilde{\mathbf{K}}'_f, \tilde{\mathbf{D}}'_f$ からパラメータ共振を検討するために必要となる周波数成分を抽出した行列である．

$$\hat{\mathbf{K}}'_f = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{xx} & \bar{\mathbf{K}}'_{x\zeta_1} & \hat{\mathbf{K}}'_{x\zeta_3} \\ \bar{\mathbf{K}}'_{\zeta_1 x} & \bar{\mathbf{K}}'_{\zeta_1 \zeta_1} & \hat{\mathbf{K}}'_{\zeta_1 \zeta_3} \\ \hat{\mathbf{K}}'_{\zeta_3 x} & \hat{\mathbf{K}}'_{\zeta_3 \zeta_1} & \bar{\mathbf{K}}'_{\zeta_3 \zeta_3} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{D}}'_f = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \bar{\mathbf{D}}'_{x\zeta_1} & \hat{\mathbf{D}}'_{x\zeta_3} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{D}}'_{\zeta_1 \zeta_1} & \hat{\mathbf{D}}'_{\zeta_1 \zeta_3} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{D}}'_{\zeta_3 \zeta_1} & \bar{\mathbf{D}}'_{\zeta_3 \zeta_3} \end{bmatrix}$$

$\hat{\mathbf{K}}'_f, \hat{\mathbf{D}}'_f$ の (i, j) 成分のうち， $(i=1,2,3,4; j=5,6)$ ， $(i=5,6; j=1,2,3,4)$ は，ワールモード ω_2 を含むハブ・ラグ連成系とシザーモード ω_n ($n=5$ or 6) のラグ独立系の干渉項である．両系の干渉項は $\tilde{\mathbf{K}}'_f, \tilde{\mathbf{D}}'_f$ の対応要素を周波数分解して， $\Omega = -\omega_2 + \omega_5$ の場合は 1Ω 成分を抽出し， $3\Omega = -\omega_2 - \omega_6$ の場合は 3Ω 成分を抽出する．例を図4-7に示す．

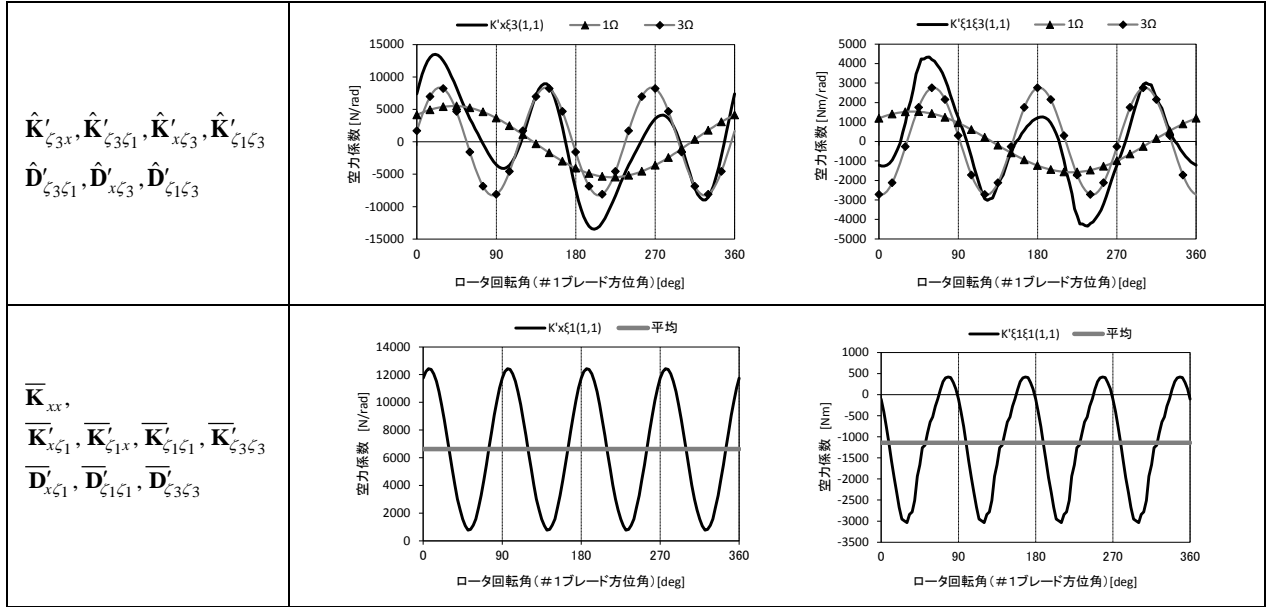


図4-7 パラメータ共振解析に供する空力係数

$\hat{\mathbf{K}}'_f, \hat{\mathbf{D}}'_f$ の (i, j) 成分を $\hat{K}'_{fij}, \hat{D}'_{fij}$ とし，つぎのように表す．

$\Omega = -\omega_2 + \omega_5$ の場合： $(i=1,2,3,4; j=5,6)$ ， $(i=5,6; j=1,2,3,4)$

$$\begin{cases} \hat{K}'_{fij} = k_{5ij} \cos(\Omega t + \phi_{5kij}) \\ \hat{D}'_{fij} = d_{5ij} \cos(\Omega t + \phi_{5dij}) \end{cases} \quad (4-21)$$

$3\Omega = -\omega_2 - \omega_6$ の場合： $(i=1,2,3,4; j=5,6)$ ， $(i=5,6; j=1,2,3,4)$

$$\begin{cases} \hat{K}'_{fij} = k_{6ij} \cos(3\Omega t + \phi_{6kij}) \\ \hat{D}'_{fij} = d_{6ij} \cos(3\Omega t + \phi_{6dij}) \end{cases} \quad (4-22)$$

抽出した $k_{5ij}, \phi_{5kij}, d_{5ij}, \phi_{5dij}, k_{6ij}, \phi_{6kij}, d_{6ij}, \phi_{6dij}$ ($i=1,2,3,4; j=5,6$), ($j=1,2,3,4; i=5,6$) を図4-8に示す．

式(4-21), (4-22)の (i, j) 以外の $(i=1,2,3,4; j=1,2,3,4)$ ， $(i=5,6; j=5,6)$ は，平均値を抽出し， $\Omega = -\omega_2 + \omega_5$ の場合， $3\Omega = -\omega_2 - \omega_6$ の場合ともに次式とする．

$$\hat{K}'_{fij} = k_{ij}, \quad \hat{D}'_{fij} = d_{ij} \quad (4-23)$$

$k_{ij}, d_{ij}, k_{nij}, d_{nij}, \phi_{nkij}, \phi_{ndij}$ ($n=5$ or 6) は定数である．

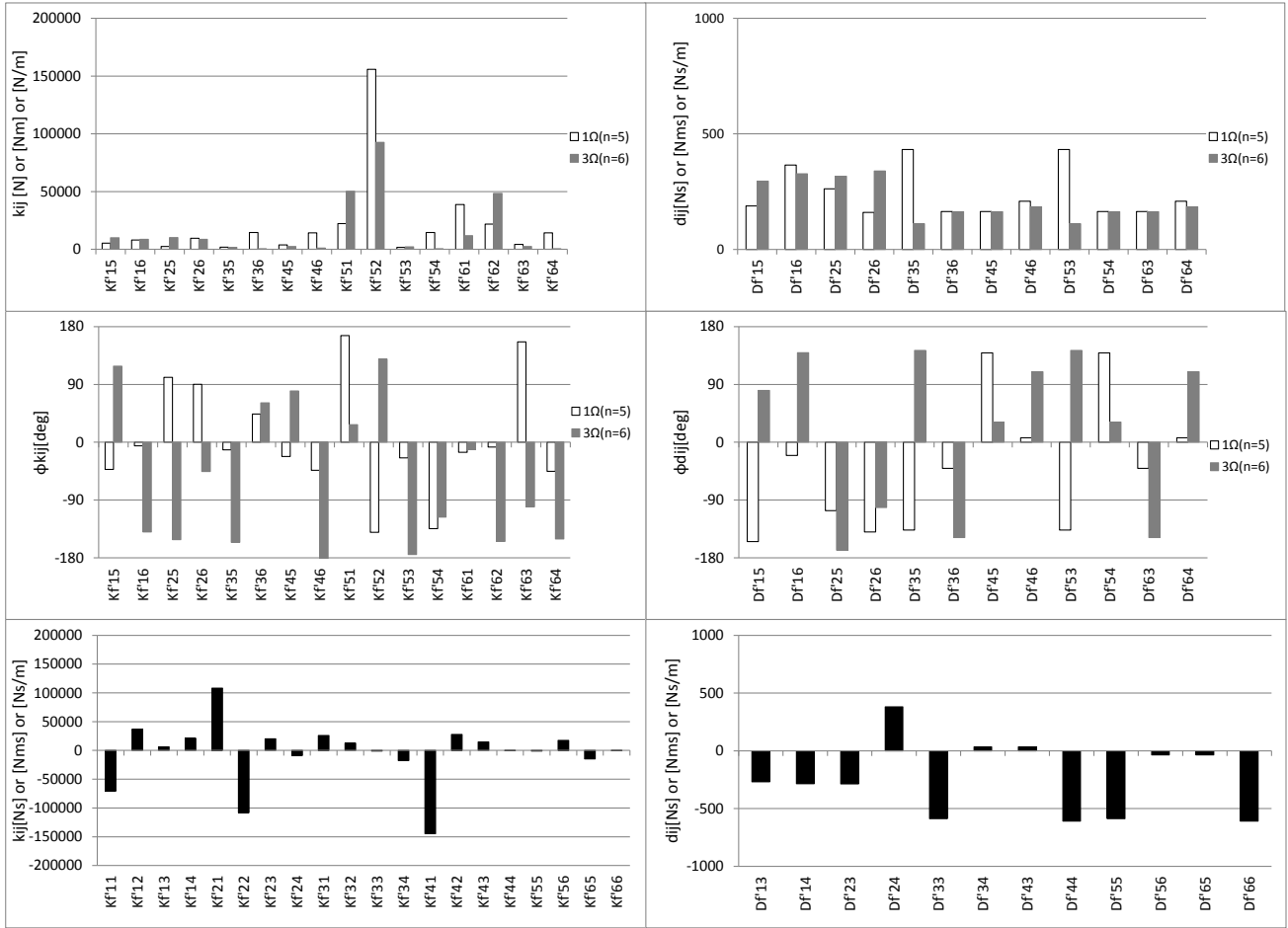


図4-8 パラメータ共振解析に供する空力係数（速度90[m/s],揚力100,000[N]）

式(4-21), (4-22), (4-23)から求められる $g_k (k=1, \dots, 6)$ を式(4-20)に代入し, 係数行列の逆行列を左からかけると, 次の $\tilde{\mathbf{c}}(t)$ に関する微分方程式が求められる.

$$\dot{\tilde{\mathbf{c}}} = \tilde{\mathbf{A}}(t)\tilde{\mathbf{c}} \quad (4-24)$$

この微分方程式の係数行列 $\tilde{\mathbf{A}}(t)$ は時刻 t に依存する周期関数となる. 4.2.1項に示したとおり, $\Omega = 4.3[\text{Hz}]$ にて, 式(4-16)で表される $\varepsilon_n (n=5 \text{ or } 6)$ が0に近づくことにより, パラメータ共振が発生する可能性がある. 式(4-24)から, ε_n が微小となる固有振動数 ω_2 と固有振動数 $\omega_n (n=5 \text{ or } 6)$ に対応する部分を抜き出すと次式となる.

$$\dot{\mathbf{c}}_n = \mathbf{A}_n(t)\mathbf{c}_n \quad (n=5 \text{ or } 6) \quad (4-25)$$

ここで,

$$\mathbf{c}_n = \{c_{R2}, c_{I2}, c_{Rn}, c_{In}\}^T$$

$$\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,2n-1} & a_{3,2n} \\ -a_{3,4} & a_{3,3} & (-1)^n a_{3,2n} & -(-1)^n a_{3,2n-1} \\ a_{2n-1,3} & a_{2n-1,4} & a_{2n-1,2n-1} & 0 \\ (-1)^n a_{2n-1,4} & -(-1)^n a_{2n-1,3} & 0 & a_{2n-1,2n-1} \end{bmatrix}$$

行列の各要素は以下のように表される.

$\varepsilon_5 = \Omega + \omega_2 - \omega_5$ と $\varepsilon_6 = 3\Omega + \omega_2 + \omega_6$ と共通の要素 (k_{11}, k_{12}, k_{13} などは図4-8の値を使う).

$$\begin{aligned}
a_{3,3} &= 2p_2 \left[m_2 \omega_2^2 (k_{12} - k_{21} - 2\omega_2 d_x) - (k_x - m_1 \omega_2^2) (k_{14} + k_{23} - \omega_2 (d_{13} - d_{24})) \right] \\
&\quad + 2q_2 \left[-m_2 \omega_2^2 (k_{32} + k_{41}) + (k_x - m_1 \omega_2^2) (k_{34} - k_{43} - \omega_2 (d_{33} + d_{44})) + 2(\omega_2 - \Omega) d_z \right] \\
a_{3,4} &= 2p_2 \left[m_2 \omega_2^2 (k_{11} + k_{22}) + (k_x - m_1 \omega_2^2) (k_{13} - k_{24} + \omega_2 (d_{14} + d_{23})) \right] \\
&\quad + 2q_2 \left[m_2 \omega_2^2 (k_{42} - k_{31}) - (k_x - m_1 \omega_2^2) (k_{33} + k_{44}) \right]
\end{aligned} \tag{4-26}$$

$\varepsilon_5 = \Omega + \omega_2 - \omega_5$ の場合 (k_{5ij}, ϕ_{5kij} は 図4-8 の「1Ω (n=5)」値を使う) :

$$\begin{aligned}
a_{3,9} &= p_2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=5}^6 \left[k_{5ij} \sin(\varepsilon_5 t + \phi_{5kij} + \varphi^+) - \omega_j d_{5ij} \cos(\varepsilon_5 t + \phi_{5dij} + \varphi^+) \right] \\
&\quad + q_2 \sum_{i=3}^4 \sum_{j=5}^6 \left[-k_{5ij} \sin(\varepsilon_5 t + \phi_{5kij} + \varphi^-) + \omega_j d_{5ij} \cos(\varepsilon_5 t + \phi_{5dij} + \varphi^-) \right] \\
a_{3,10} &= p_2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=5}^6 \left[-k_{5ij} \cos(\varepsilon_5 t + \phi_{5kij} + \varphi^+) - \omega_j d_{5ij} \sin(\varepsilon_5 t + \phi_{5dij} + \varphi^+) \right] \\
&\quad + q_2 \sum_{i=3}^4 \sum_{j=5}^6 \left[k_{5ij} \cos(\varepsilon_5 t + \phi_{5kij} + \varphi^-) + \omega_j d_{5ij} \sin(\varepsilon_5 t + \phi_{5dij} + \varphi^-) \right] \\
a_{4,9} &= -a_{3,10} \\
a_{4,10} &= a_{3,9} \\
a_{9,3} &= r_5 \sum_{i=5}^6 \sum_{j=1}^2 \left[-k_{5ij} \sin(\varepsilon_5 t + \phi_{5kij} + \varphi^+) \right] \\
&\quad + s_5 \sum_{i=5}^6 \sum_{j=3}^4 \left[k_{5ij} \sin(\varepsilon_5 t + \phi_{5kij} - \varphi^-) + \omega_j d_{5ij} \cos(\varepsilon_5 t + \phi_{5dij} - \varphi^-) \right] \\
a_{9,4} &= r_5 \sum_{i=5}^6 \sum_{j=1}^2 \left[-k_{5ij} \cos(\varepsilon_5 t + \phi_{5kij} + \varphi^+) \right] \\
&\quad + s_5 \sum_{i=5}^6 \sum_{j=3}^4 \left[k_{5ij} \cos(\varepsilon_5 t + \phi_{5kij} - \varphi^-) - \omega_j d_{5ij} \sin(\varepsilon_5 t + \phi_{5dij} - \varphi^-) \right] \\
a_{10,3} &= -a_{9,4} \\
a_{10,4} &= a_{9,3}
\end{aligned} \tag{4-27}$$

$$a_{9,9} = \frac{-k_{56} + k_{65} + \omega_5 (d_{55} + d_{66}) - 2(\omega_5 + \Omega) d_z}{2m_3(\omega_5 - \omega_6)} \tag{4-28}$$

$\varepsilon_6 = 3\Omega + \omega_2 + \omega_6$ の場合 (k_{6ij}, ϕ_{6kij} などは図4-8の「 3Ω (n=6)」の値を使う) :

$$\left. \begin{aligned}
 a_{3,11} &= -p_2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=5}^6 \left[k_{6ij} \sin(\varepsilon_6 t + \phi_{6kij} - \varphi^-) + \omega_j d_{6ij} \cos(\varepsilon_6 t + \phi_{6dij} - \varphi^-) \right] \\
 &\quad + q_2 \sum_{i=3}^4 \sum_{j=5}^6 \left[k_{6ij} \sin(\varepsilon_6 t + \phi_{6kij} - \varphi^+) + \omega_j d_{6ij} \cos(\varepsilon_6 t + \phi_{6dij} - \varphi^+) \right] \\
 a_{3,12} &= -p_2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=5}^6 \left[k_{6ij} \cos(\varepsilon_6 t + \phi_{6kij} - \varphi^-) - \omega_j d_{6ij} \sin(\varepsilon_6 t + \phi_{6dij} - \varphi^-) \right] \\
 &\quad + q_2 \sum_{i=3}^4 \sum_{j=5}^6 \left[k_{6ij} \cos(\varepsilon_6 t + \phi_{6kij} - \varphi^+) - \omega_j d_{6ij} \sin(\varepsilon_6 t + \phi_{6dij} - \varphi^+) \right] \\
 a_{4,11} &= a_{3,12} \\
 a_{4,12} &= -a_{3,11} \\
 a_{11,3} &= r_6 \sum_{i=5}^6 \sum_{j=1}^2 \left[k_{6ij} \sin(\varepsilon_5 t + \phi_{6kij} + \varphi^-) \right] \\
 &\quad - s_6 \sum_{i=5}^6 \sum_{j=3}^4 \left[k_{6ij} \sin(\varepsilon_5 t + \phi_{6kij} - \varphi^+) + \omega_j d_{5ij} \cos(\varepsilon_6 t + \phi_{6dij} - \varphi^+) \right] \\
 a_{11,4} &= r_6 \sum_{i=5}^6 \sum_{j=1}^2 \left[k_{6ij} \cos(\varepsilon_6 t + \phi_{6kij} + \varphi^-) \right] \\
 &\quad - s_6 \sum_{i=5}^6 \sum_{j=3}^4 \left[k_{6ij} \cos(\varepsilon_6 t + \phi_{6kij} - \varphi^+) - \omega_j d_{6ij} \sin(\varepsilon_6 t + \phi_{6dij} - \varphi^+) \right] \\
 a_{12,3} &= a_{11,4} \\
 a_{12,4} &= -a_{11,3}
 \end{aligned} \right\} \quad (4-29)$$

$$a_{11,11} = - \frac{-k_{56} + k_{65} + \omega_6(d_{55} + d_{66}) - 2(\omega_6 + \Omega)d_{\zeta}}{2m_3(\omega_5 - \omega_6)} \quad (4-30)$$

なお、上式に用いられる $\varphi^+, \varphi^-, p_i, q_i, r_i, s_i$ は以下のように定義される。

$$\varphi^+ = \frac{\pi}{2}(i+j), \quad \varphi^- = \frac{\pi}{2}(j-i)$$

$$\begin{aligned}
 p_i &= \frac{m_2}{4(m_1 m_3 - m_2^2)} \sum_{j=1}^4 N_{ij} \left((m_1 + m_3) \omega_j^2 - k_x \right) \\
 q_i &= \frac{1}{4(m_1 m_3 - m_2^2)} \sum_{j=1}^4 N_{ij} \left((m_1^2 + m_2^2) \omega_j^2 - m_1 k_x \right) \\
 r_i &= \frac{m_2 \omega_i^2}{4m_3(\omega_5 - \omega_6)}, \quad s_i = \frac{m_1 \omega_i^2 - k_x}{4m_3(\omega_5 - \omega_6)}
 \end{aligned}$$

$\varepsilon_5 = \Omega + \omega_2 - \omega_5$ の場合を例に、時変係数の式(4-25)を定係数化する。 $\mathbf{c}_{i,j}$ の各成分から

$$c_{Z2} = c_{R2} + \mathbf{i}c_{I2}, \quad c_{Z5} = c_{R5} + \mathbf{i}c_{I5}$$

とおくと、式(4-25)はつぎのように変形される。

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} c_{Z2} \\ c_{Z5} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{3,3} - \mathbf{i}a_{3,4} & a_{3,9} - \mathbf{i}a_{3,10} \\ a_{9,3} - \mathbf{i}a_{9,4} & a_{9,9} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_{Z2} \\ c_{Z5} \end{Bmatrix}$$

ここで

$$\begin{aligned}
a_{3,9} - \mathbf{ia}_{3,10} &= \exp(-\mathbf{i}\varepsilon_5 t) \left\{ p_2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=5}^6 \left[\mathbf{ik}_{5ij} \exp\{-\mathbf{i}(\phi_{5kij} + \varphi^+)\} - \omega_j d_{5ij} \exp\{-\mathbf{i}(\phi_{5dij} + \varphi^+)\} \right] \right. \\
&\quad \left. + q_2 \sum_{i=3}^4 \sum_{j=5}^6 \left[-\mathbf{ik}_{5ij} \exp\{-\mathbf{i}(\phi_{5kij} + \varphi^-)\} + \omega_j d_{5ij} \exp\{-\mathbf{i}(\phi_{5dij} + \varphi^-)\} \right] \right\} \\
a_{9,3} - \mathbf{ia}_{9,4} &= \exp(\mathbf{i}\varepsilon_5 t) \left\{ r_5 \sum_{i=5}^6 \sum_{j=1}^2 \left[\mathbf{ik}_{5ij} \exp\{\mathbf{i}(\phi_{5kij} + \varphi^+)\} \right] \right. \\
&\quad \left. + s_5 \sum_{i=5}^6 \sum_{j=3}^4 \left[-\mathbf{ik}_{5ij} \exp\{\mathbf{i}(\phi_{5kij} - \varphi^-)\} + \omega_j d_{5ij} \exp\{\mathbf{i}(\phi_{5dij} - \varphi^-)\} \right] \right\}
\end{aligned}$$

と括れる．さらに $c'_{Zi} = c_{Zi} e^{\mathbf{i}\varepsilon t}$, $c'_{Zj} = c_{Zj}$ とおくと,

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} c'_{Z2} \\ c'_{Z5} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{3,3} - \mathbf{ia}_{3,4} + \mathbf{i}\varepsilon_5 & a'_{3,9} - \mathbf{ia}'_{3,10} \\ a'_{9,3} - \mathbf{ia}'_{9,4} & a_{9,9} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c'_{Z2} \\ c'_{Z5} \end{Bmatrix}$$

となる．ここで,

$$\begin{aligned}
a'_{3,9} &= p_2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=5}^6 \left[k_{5ij} \sin(\phi_{5kij} + \varphi^+) - \omega_j d_{5ij} \cos(\phi_{5kij} + \varphi^+) \right] + q_2 \sum_{i=3}^4 \sum_{j=5}^6 \left[-k_{5ij} \sin(\phi_{5kij} + \varphi^-) + \omega_j d_{5ij} \cos(\phi_{5kij} + \varphi^-) \right] \\
a'_{3,10} &= r_5 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=5}^6 \left[-k_{5ij} \cos(\phi_{5kij} + \varphi^+) - \omega_j d_{5ij} \sin(\phi_{5kij} + \varphi^+) \right] + s_5 \sum_{i=3}^4 \sum_{j=5}^6 \left[k_{5ij} \cos(\phi_{5kij} + \varphi^-) + \omega_j d_{5ij} \sin(\phi_{5kij} + \varphi^-) \right] \\
a'_{4,9} &= -a'_{3,10} \\
a'_{4,10} &= a'_{3,9} \\
a'_{9,3} &= p_2 \sum_{i=5}^6 \sum_{j=1}^2 \left[-k_{5ij} \sin(\phi_{5kij} + \varphi^+) \right] + q_2 \sum_{i=5}^6 \sum_{j=3}^4 \left[k_{5ij} \sin(\phi_{5kij} - \varphi^-) + \omega_j d_{5ij} \cos(\phi_{5kij} - \varphi^-) \right] \\
a'_{9,4} &= r_5 \sum_{i=5}^6 \sum_{j=1}^2 \left[-k_{5ij} \cos(\phi_{5kij} + \varphi^+) \right] + s_5 \sum_{i=5}^6 \sum_{j=3}^4 \left[k_{5ij} \cos(\phi_{5kij} - \varphi^-) - \omega_j d_{5ij} \sin(\phi_{5kij} - \varphi^-) \right] \\
a'_{10,3} &= -a'_{9,4} \\
a'_{10,4} &= a'_{9,3}
\end{aligned} \tag{4-31}$$

複素変数を実変数に戻し $c'_{Z2} = c'_{R2} + \mathbf{i}c'_{I2}$, $c'_{Z5} = c'_{R5} + \mathbf{i}c'_{I5}$ とおくと次式が得られる．

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{c}}'_n &= \mathbf{A}'_n \mathbf{c}'_n \\
\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} c'_{R2} \\ c'_{I2} \\ c'_{R5} \\ c'_{I5} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{3,3} & a_{3,4} - \varepsilon_5 & a'_{3,9} & a'_{3,10} \\ -a_{3,4} + \varepsilon_5 & a_{3,3} & -a'_{3,10} & a'_{3,9} \\ a'_{9,3} & a'_{9,4} & a_{9,9} & 0 \\ -a'_{9,4} & a'_{9,3} & 0 & a_{9,9} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c'_{R2} \\ c'_{I2} \\ c'_{R5} \\ c'_{I5} \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{4-32}$$

式(4-32)の係数行列 \mathbf{A}'_n は定係数となるので，式(4-32)の安定性は行列の固有値を用いて判定できる．

4.3.3 解析結果

定数変化法の妥当性を検証する． $n=5$ の場合について，初期値を $x_1 = 0.001[\text{m}]$, $\dot{x}_2 = -x_1 \omega_2$ ，これら以外は0として数値計算を行う．式(4-18)を積分して $\Delta \tilde{\mathbf{y}}$ を直接的に求めた数値計算結果と，式(4-32)を積分して得られた $\{c_{R2}, c_{I2}, c_{R5}, c_{I5}\}$ を式(4-1)に代入して $y_k (k=1, 5)$ を求めた解析結果を比較して，図4-9に示す．なお， $\Delta \tilde{\mathbf{y}}$ の数値計算では，解析と条件を合わせるため式(4-18)の $\tilde{\mathbf{K}}'_f, \tilde{\mathbf{D}}'_f$ を $\hat{\mathbf{K}}'_f, \hat{\mathbf{D}}'_f$ に置き換えて数値計算を行った．また，数値計算結果から式(4-1)を逆算し定数変化法における係数を導出した結果と，式(4-32)の積分した計算結果を比較して，図4-10に示す．図4-9および図4-10から，数値計算結果と定数変化法の解析結果はおおむね一致しており，定数変化法の妥当性が確認できる．以上から，第3章にて数値計算により再現したSH-60Kのトランスミッションピッチモード（ワールモード）の不安定化を，パラメータ共振解析により評価することが可能と考えられる．

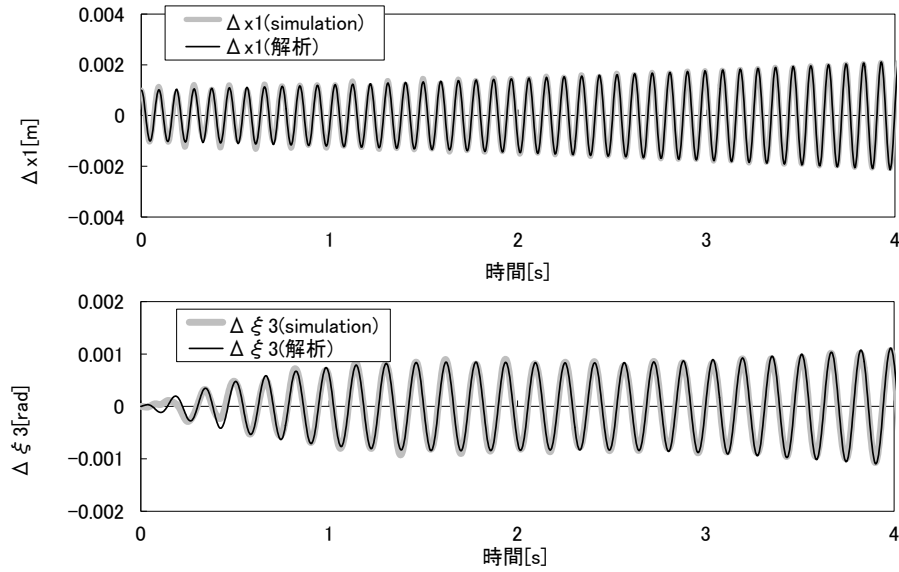


図4-9 時間応答の比較（速度90[m/s],揚力100,000[N],構造減衰比0）

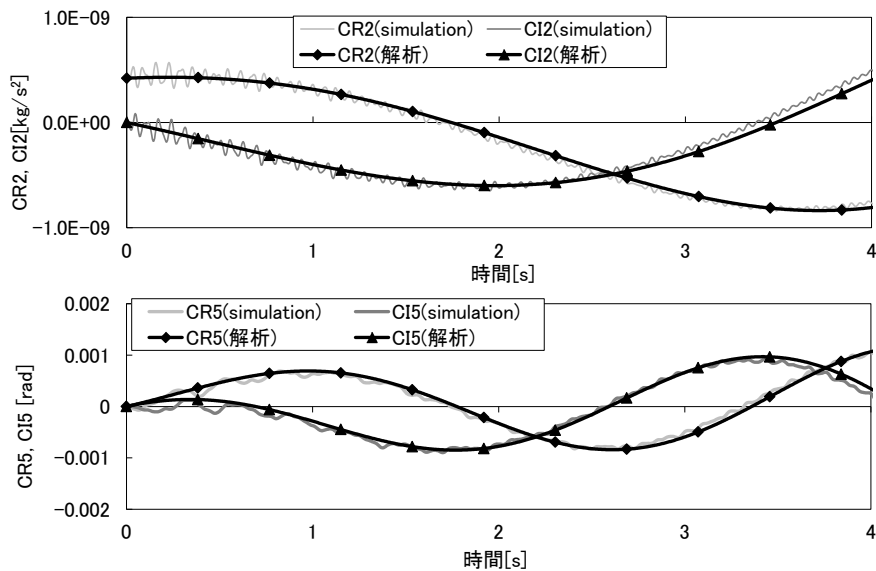


図4-10 定数変化法における係数の比較（速度90[m/s],揚力100,000[N],構造減衰比0）

次に系の安定性について述べる．式(4-32)は線形時不変システムであり，係数行列の固有値の実部により安定性を評価できる．図4-11に，ロータ回転周波数 Ω を変化させたときの固有値実部の最大値の変化を示す．図4-11から， $\Omega = -\omega_2 + \omega_5$ の場合はロータ回転周波数 $\Omega = 4.4[\text{Hz}]$ 付近で不安定側（固有値実部のプラス側）にふくらんでおり， $3\Omega = -\omega_2 - \omega_6$ の場合は反対側の安定側（固有値実部のマイナス側）にふくらんでいることがわかる．この結果から，SH-60Kのトランスミッションピッチモード（ワールモード）の不安定化には，パラメータ共振が関与していたと考えられる．

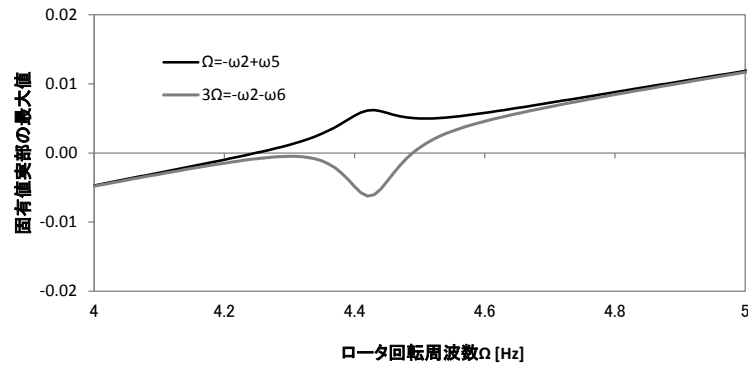


図4-11 ロータ回転周波数効果（速度90[m/s]，揚力100,000[N]，構造減衰比0.0025）

4.3.4 その他のパラメータ共振条件

前項では，SH-60Kのロータ回転周波数4.3[Hz]近くで，固有振動数の和または差が空力係数の周波数に近づくパラメータ共振は， $\Omega = -\omega_2 + \omega_5$ では不安定化作用， $3\Omega = -\omega_2 - \omega_5$ では安定化作用であることを示した．本項では，SH-60K実機のロータ回転周波数4.3[Hz]からは大きく離れるが，他のロータ回転周波数でパラメータ共振が発生する可能性がある条件について検討する．

図4-12から，候補となるのは，ロータ回転周波数6.3[Hz]付近で $\Omega = -\omega_2 + \omega_6$ と $3\Omega = -\omega_2 - \omega_5$ ，2～3[Hz]付近では $3\Omega = -\omega_2 + \omega_5$ と $3\Omega = -\omega_2 + \omega_6$ の4条件である．

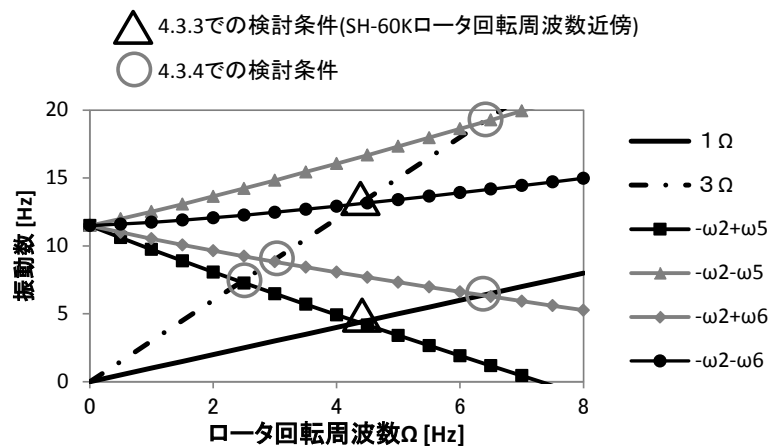


図4-12 ほかのパラメータ共振条件候補

4.3[Hz]以外のロータ回転周波数についてパラメータ共振解析を行うための空力係数は，3章と同様な数値計算をロータ回転周波数2.5[Hz]，3.0[Hz]，6.3[Hz]について実施した結果から導出した．この数値計算の条件は，式(3-23)に示されるアドバンス比 $\mu = V/\Omega R$ と翼面荷重 $C_L/\sigma = W/[\rho(\Omega R)^2(4cR)]$ がロータ回転周波数4.3[Hz]時と同じになるように表4-4のように設定した．

表4-4 ロータ回転周波数変更時の飛行条件

ロータ回転周波数 [Hz]	空気密度 [kg/m³]	飛行速度 [m/s]	ロータ揚力 [N]	備考
2.5	1.0	52.3	33,800	
3.0	1.0	62.8	48,600	
4.3	1.0	90	100,000	SH-60K実機相当
6.3	1.0	131.9	214,700	

図4-11と同様なパラメータ共振解析を行った結果を図4-13，4-14，4-15に示す．表4-4に示すように飛行条件はSH-60K実機

からは大きくずれているので、これらの結果については、共振条件に近づいたときの固有値の値そのものではなく、そのときの固有値の変化に注目する。すなわち、安定か不安定かではなく、安定化作用か、不安定化作用かに注目する。

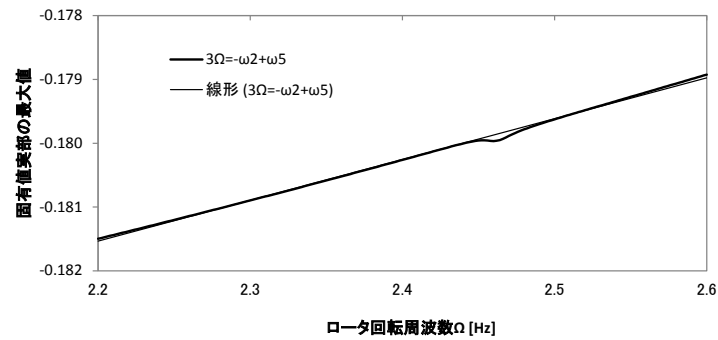


図4-13 $3\Omega = -\omega_2 + \omega_5$ のパラメータ共振解析結果

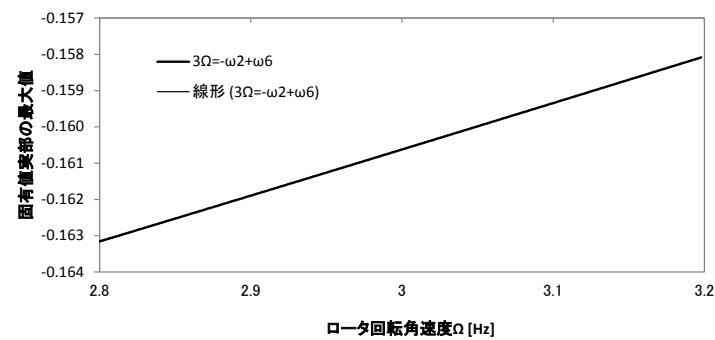


図4-14 $3\Omega = -\omega_2 + \omega_6$ のパラメータ共振解析結果

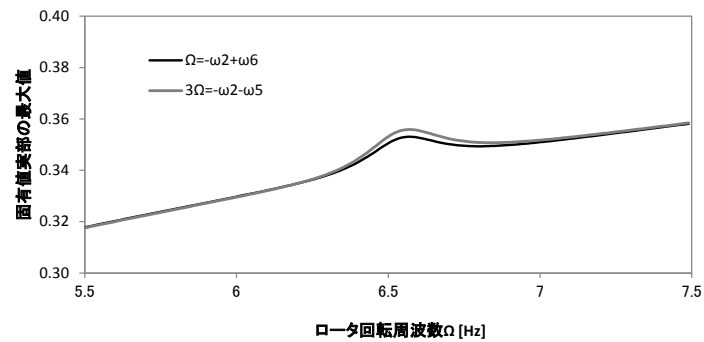


図4-15 $\Omega = -\omega_2 + \omega_6$ と $3\Omega = -\omega_2 - \omega_5$ のパラメータ共振解析結果

前項の図4-11も合わせて、図4-13,14,15から組合せによるパラメータ共振の作用を表4-5にまとめて示す。

表4-5 パラメータ共振の組み合わせによる安定性のちがい

組み合わせ	安定性	図
$\Omega = -\omega_2 + \omega_5$	不安定化作用	図4-11
$3\Omega = -\omega_2 - \omega_6$	安定化作用	
$3\Omega = -\omega_2 + \omega_5$	安定化作用	図4-13
$3\Omega = -\omega_2 + \omega_6$	判別困難	図4-14
$\Omega = -\omega_2 + \omega_6$	不安定化作用	図4-15
$3\Omega = -\omega_2 - \omega_5$	不安定化作用	

表4-5から、パラメータ共振の作用が安定化となるか不安定化となるかの共通した傾向は読み取れない。回転体一般について、回転軸が非線形バネ特性をもつと和差調波振動とよばれる共振現象が発生する。固有振動数の和または差が回転体の回転数に近接する場合についての和差調波振動は、固有振動数の絶対値の和となる組合せの場合に発生し、絶対値の差となる組合せでは発生しない⁴⁾とされているが、それとも異なっている。次項では、この理由を考察する。

4.3.5 安定性に関する考察

式(4-32)の係数行列の固有値実部は、表4-5に示される条件のいずれの場合も同じつぎの形に表される。

$$\lambda_R = \frac{a_{3,3} + a_{2n-1,2n-1}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_1} \quad (4-33)$$

ただし、 z_1, z_2 は以下のように表される。

$$\begin{aligned} z_1 &= z_{10} - \varepsilon_n'^2 + \Delta a_n^2 \\ z_2 &= z_{20} - 2\varepsilon_n' \Delta a_n \end{aligned} \quad (n=5 \text{ or } 6)$$

なお、

$$\begin{aligned} z_{10} &= \begin{cases} 4(a'_{3,2n-1}a'_{2n-1,3} - a'_{3,2n-1}a'_{2n-1,4}) & ; \Omega = -\omega_2 + \omega_5, \Omega = -\omega_2 + \omega_6, 3\Omega = -\omega_2 + \omega_5, 3\Omega = -\omega_2 + \omega_6 \\ 4(a'_{3,2n-1}a'_{2n-1,3} + a'_{3,2n-1}a'_{2n-1,4}) & ; 3\Omega = -\omega_2 - \omega_5, 3\Omega = -\omega_2 - \omega_6 \end{cases} \\ z_{20} &= \begin{cases} 4(a'_{3,2n-1}a'_{2n-1,4} + a'_{2n-1,3}a'_{3,2n}) & ; \Omega = -\omega_2 + \omega_5, \Omega = -\omega_2 + \omega_6, 3\Omega = -\omega_2 + \omega_5, 3\Omega = -\omega_2 + \omega_6 \\ 4(a'_{3,2n-1}a'_{2n-1,4} - a'_{2n-1,3}a'_{3,2n}) & ; 3\Omega = -\omega_2 - \omega_5, 3\Omega = -\omega_2 - \omega_6 \end{cases} \\ \Delta a_n &= a_{3,3} - a_{2n-1,2n-1} \\ \varepsilon_n' &= \varepsilon_n - a_{3,4} \end{aligned}$$

式(4-33)は、 \mathbf{A}'_n の(1,2)成分である ε'_n を含んでいるので、 Ω の変化により ε'_n が大きくなる場合と、小さくなる場合に分けて、固有値の実部を近似展開する。

ε'_n が大きくなる場合は、 $\varepsilon_n'^2$ は $|z_{10}|, |z_{20}|, \Delta a_n^2$ に比べて大きいので、つぎのように近似展開される。

$$\begin{aligned} \sqrt{z_1^2 + z_2^2} &= \sqrt{\varepsilon_n'^4 \left(1 + \frac{2}{\varepsilon_n'^2} (\Delta a_n^2 - z_{10}) + O(l/\varepsilon_n'^3) \right)} \\ &\cong \varepsilon_n'^2 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_n'^2} (\Delta a_n^2 - z_{10}) \right) = \varepsilon_n'^2 + \Delta a_n^2 - z_{10} \end{aligned}$$

よって、

$$\lambda_R \cong \frac{a_{3,3} + a_{2n-1,2n-1}}{2} \pm \frac{\Delta a_n}{2} \quad (n=5 \text{ or } 6) \quad (4-34)$$

表3-2に示すようにラグ減衰は構造減衰よりも大きいので Δa_n は正となるため、固有値実部の最大値はほぼ $a_{3,3}$ と等しくなる。すなわち

$$\max(\lambda_R) \cong a_{3,3} \quad (4-35)$$

これは、図4-11において、 $\Omega < 4.2[\text{Hz}]$, $\Omega > 4.6[\text{Hz}]$ のとき、 $\Omega = -\omega_2 + \omega_5$ の場合と $3\Omega = -\omega_2 - \omega_6$ の場合が一致していることに対応する。

ε'_n が小さくなる場合は、 $\varepsilon'_n = 0$ において Δa_n^2 が $|z_{10}|, |z_{20}|$ に比べて大きくなるので、つぎのように近似展開される。

$$\begin{aligned} \sqrt{z_1^2 + z_2^2} &= \sqrt{\Delta a_n^4 \left(1 + \frac{2z_{10}}{\Delta a_n^2} + O(l/\Delta a_n^3) \right)} \\ &\cong \Delta a_n^2 \left(1 + \frac{z_{10}}{\Delta a_n^2} \right) = \Delta a_n^2 + z_{10} \end{aligned}$$

よって、

$$\lambda_R \cong \frac{a_{3,3} + a_{2n-1,2n-1}}{2} \pm \frac{\Delta a_n}{2} \left(1 + \frac{z_{10}}{2\Delta a_n^2} \right) \quad (n=5 \text{ or } 6) \quad (4-36)$$

$\Delta a_n > 0$ であるから、固有値実部の最大値は次式のように近似される． ε'_n が大きい場合の式(4-35)に比べ、 z_{10} の正負により増減することがわかる．

$$\max(\lambda_R) \cong a_{3,3} + \frac{z_{10}}{4\Delta a_n} \quad (n=5 \text{ or } 6) \quad (4-37)$$

z_{10} の正負を調べるため、式(4-32)の係数行列 \mathbf{A}'_n の要素を適当な $c_{2,n}, c_{n,2}, \varphi_{2,n}, \varphi_{n,2}$ により以下のように表すと、

$$\begin{aligned} a'_{3,2n-1} &= c_{2,n} \cos \varphi_{2,n} \\ a'_{3,2n} &= c_{2,n} \sin \varphi_{2,n} \\ a'_{2n-1,3} &= c_{n,2} \cos \varphi_{n,2} \\ a'_{2n-1,4} &= c_{n,2} \sin \varphi_{n,2} \end{aligned} \quad (4-38)$$

z_{10}, z_{20} は次式となる．

$$\begin{aligned} z_{10} &= \begin{cases} 4c_{2,n}c_{n,2} \cos(\varphi_{2,n} + \varphi_{n,2}) & ; \Omega = -\omega_2 + \omega_5, \Omega = -\omega_2 + \omega_6, 3\Omega = -\omega_2 + \omega_5, 3\Omega = -\omega_2 + \omega_6 \\ 4c_{2,n}c_{n,2} \cos(\varphi_{2,n} - \varphi_{n,2}) & ; 3\Omega = -\omega_2 - \omega_5, 3\Omega = -\omega_2 - \omega_6 \end{cases} \\ z_{20} &= \begin{cases} 4c_{2,n}c_{n,2} \sin(\varphi_{2,n} + \varphi_{n,2}) & ; \Omega = -\omega_2 + \omega_5, \Omega = -\omega_2 + \omega_6, 3\Omega = -\omega_2 + \omega_5, 3\Omega = -\omega_2 + \omega_6 \\ 4c_{2,n}c_{n,2} \sin(\varphi_{2,n} - \varphi_{n,2}) & ; 3\Omega = -\omega_2 - \omega_5, 3\Omega = -\omega_2 - \omega_6 \end{cases} \end{aligned} \quad (4-39)$$

表4-5の組み合わせについて、式(4-38), (4-39)の諸元を表4-6に示す．

表4-6 各組み合わせの安定性 (*部は式(4-39)により、和をとるか、差をとるかに分かれる)

組み合わせ	図	安定性	Ω [Hz]	$\varphi_{2,n}$ [deg]	$\varphi_{n,2}$ [deg]	$\varphi_{2,n} + \varphi_{n,2}$ *	$\cos(\varphi_{2,n} + \varphi_{n,2})$
$\Omega = -\omega_2 + \omega_5$	図4-11	不安定化作用	4.4	+50	-43	+7	+0.99
$3\Omega = -\omega_2 + \omega_5$	図4-13	安定化作用	2.5	-122	-86	-208	-0.89
$\Omega = -\omega_2 + \omega_6$	図4-15	不安定化作用	6.5	-150	+138	-13	+0.98
$3\Omega = -\omega_2 + \omega_6$	図4-14	判別困難	3.0	+174	+92	+266	-0.07
						$\varphi_{2,n} - \varphi_{n,2}$ *	$\cos(\varphi_{2,n} - \varphi_{n,2})$
$3\Omega = -\omega_2 - \omega_5$	図4-15	不安定化作用	6.5	-122	-133	+11	+0.98
$3\Omega = -\omega_2 - \omega_6$	図4-11	安定化作用	4.4	-130	+45	-175	-1.00

表4-6から、パラメータ共振の作用は、 $\cos(\varphi_{2,n} \pm \varphi_{n,2})$ が正のときは不安定化作用、負のときは安定化作用となっており、式(4-37)において、 z_{10} の正負でパラメータ共振の作用が安定化か不安定化かを判別できることの妥当性が確認される．式(4-38)の $\varphi_{2,n}, \varphi_{n,2}$ は、式(4-31)に示されるように、式(4-21)の周期性空力係数を組み合わせた $a'_{3,2n-1}, a'_{3,2n}, a'_{2n-1,3}, a'_{2n-1,4}$ によりきまる．ここで、 $a_{3,2n-1}, a_{3,2n}, a_{2n-1,3}, a_{2n-1,4}$ は、 $\Omega = -\omega_2 + \omega_5$ の場合が式(4-27)、 $3\Omega = -\omega_2 - \omega_6$ の場合が式(4-29)と異なっているように、 $a'_{3,2n-1}, a'_{3,2n}, a'_{2n-1,3}, a'_{2n-1,4}$ についても $\Omega = -\omega_2 + \omega_5$ 以外の場合は式(4-31)とは異なった計算式で表される．この $\varphi_{2,n}, \varphi_{n,2}$ の積算の計算式は、固有振動数の組み合わせにより決まる．

表4-4に示すロータ回転周波数を変えた場合の 1Ω 空力係数の諸元を図4-16に示す．表4-4に示されるように空力的条件を合わせているため、位相はほとんど同じとなっていることがわかる．表4-6の組み合わせの中で、空力係数の周波数が同じでも、 $3\Omega = -\omega_2 + \omega_5$ は安定化作用で、 $3\Omega = -\omega_2 - \omega_5$ は不安定化作用とちがいがいるのは、固有振動数の組み合わせが異なるため、 $a'_{3,2n-1}, a'_{3,2n}, a'_{2n-1,3}, a'_{2n-1,4}$ の積算式が異なるためである．逆に、パラメータ共振の組み合わせが同じ場合は、条件により安定性が変化する場合、空力係数の位相が変化することが予想される．第3章にて、飛行速度を変化させた数値計算を行った結果から、 $\varepsilon_5 = \Omega + \omega_2 - \omega_5$ の対象となる 1Ω 空力係数の諸元を図4-17に示す．飛行速度の違いにより、空力係数の位相が変化していることがわかる．この $\varepsilon_5 = \Omega + \omega_2 - \omega_5$ の場合は、 $a'_{3,2n-1}, a'_{3,2n}, a'_{2n-1,3}, a'_{2n-1,4}$ の計算はすべて式(4-31)で同じとなり、得られる $\varphi_{2,n}, \varphi_{n,2}$ の変化を図4-18に示す．飛行速度により $\cos(\varphi_{2,n} + \varphi_{n,2})$ が大きくなっていく様子がわかる．

以上から、パラメータ共振が安定化作用か不安定化作用かをあらわす $\varphi_{2,n}, \varphi_{n,2}$ は、パラメータ共振の組み合わせに応じ

た周期性空力係数の位相と、固有振動数の組み合わせに応じた $a'_{3,2n-1}, a'_{3,2n}, a'_{2n-1,3}, a'_{2n-1,4}$ の積算方法によりきまっている。

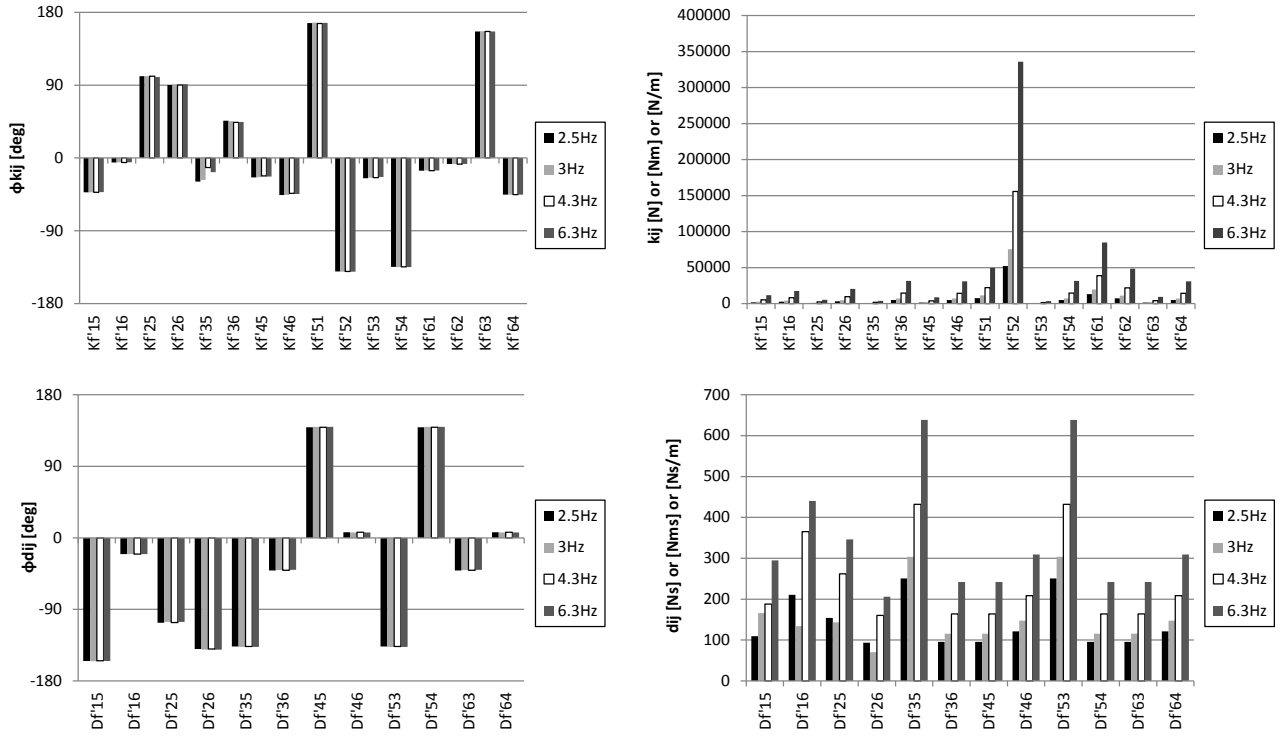


図4-16 ロータ回転周波数を変えた場合の 1Ω 空気係数の諸元

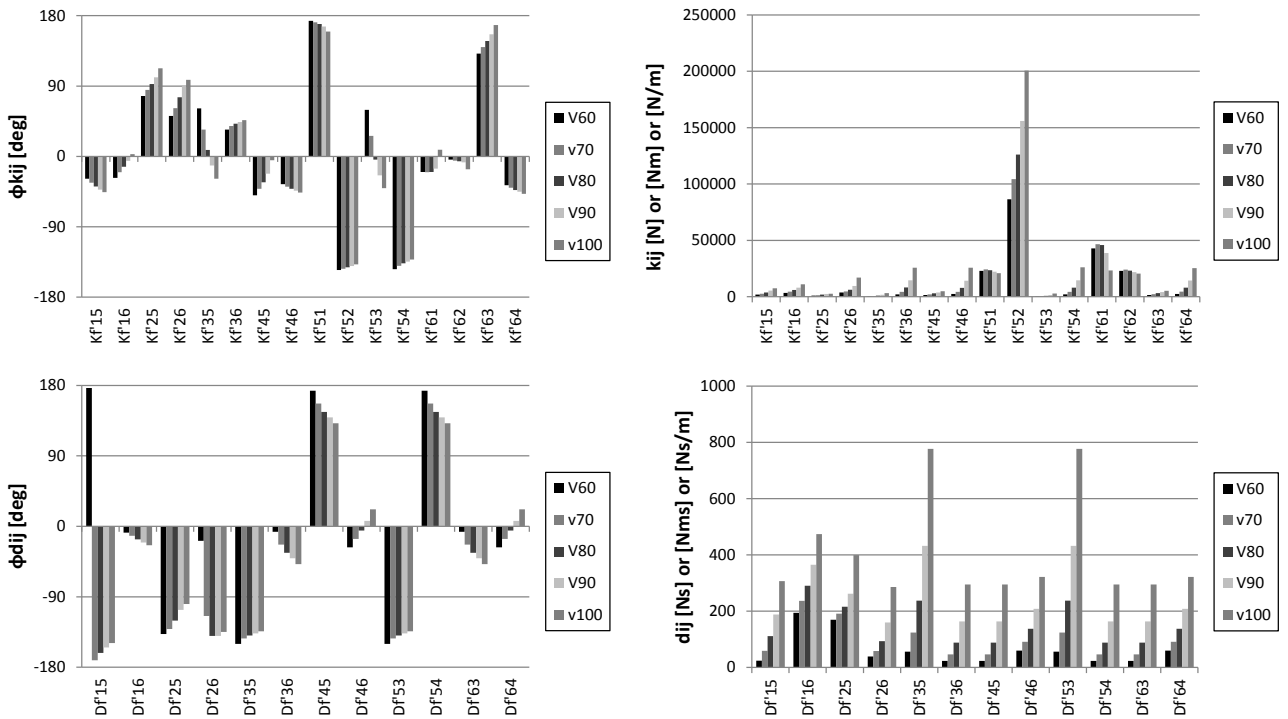


図4-17 飛行速度を変えた場合の 1Ω 空気係数の諸元

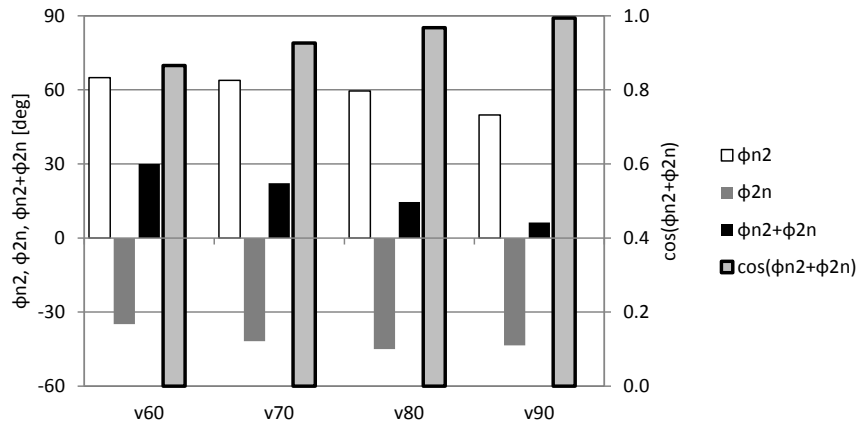


図4-18 飛行速度により $\phi_{2,n}, \phi_{n,2}$ の変化 ($\varepsilon_5 = \Omega + \omega_2 - \omega_5$)

4.3.6 パラメータ共振の回避方法

最後にSH-60Kのパラメータ共振の回避方法について検討する。パラメータ共振は $\Omega \cong -\omega_2 + \omega_5$ 付近で発生することに着目すると、ロータ回転周波数 Ω を変化させる代わりに、 ω_2 を変化させてもパラメータ共振の条件を外れるはずである。ワールモードの固有振動数 ω_2 は、ロータ支持剛性 k_x に依存しているので、ロータ支持剛性 k_x を変化させたときの固有値の実部最大値を、 ω_2 を横軸に図4-19に示す。横軸はロータ回転周波数 $\Omega = 4.3[\text{Hz}]$ のときの ω_2 にとり、 $\Omega \cong -\omega_2 + \omega_5$ の場合と $3\Omega \cong -\omega_2 - \omega_6$ の場合の両者を示す。図4-19から、 $\omega_2 = 10.2[\text{Hz}]$ 付近で、 $\Omega \cong -\omega_2 + \omega_5$ の場合は不安定化作用、 $3\Omega \cong -\omega_2 - \omega_6$ の場合は安定化作用が顕著にあらわれることがわかる。また、図4-2から k_x 変更前の ω_2 は $10.45[\text{Hz}]$ であり、 k_x を増やして ω_2 を大きくすることにより、不安定現象を回避できると考えられる。

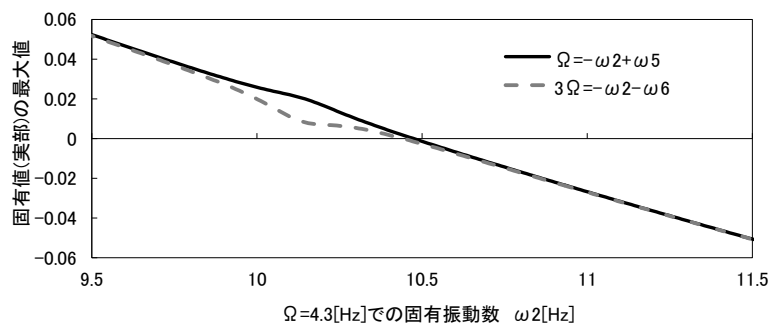


図4-19 ハブ支持剛性効果 (速度90[m/s], 揚力100,000[N], 構造減衰比0.0025, $\Omega = 4.3[\text{Hz}]$)

4.4 まとめ

2章にてモード解析に用いた空気力なしの定係数の運動方程式を左辺におき、3章の数値計算に用いた線形化空気力を変数変換したうえで右辺におき、右辺の空気力付加によりモード解析から導出される一般解の係数が時間変化するとの定数係数法を適用した。解を構成する係数に関する微分方程式における係数行列は、固有振動数と空力加振周波数の和や差で構成され、この値が0に近い場合に係数の安定性に影響する。3章で不安定化した逆回転のワールモードを含む組み合わせの中で、シザーモードと 1Ω または 3Ω の空力加振周波数の組合せが0に近づく。この組み合わせについて係数の安定性を評価したところ、シザーモードと 1Ω 空力加振周波数の組合せは不安定化であることが分かった。この不安定は、運動方程式の係数が周期変化することによる不安定なので、パラメータ共振（または係数励起振動）に分類される。

パラメータ共振を回避する方法として、空力加振周波数をずらすことが想定され、共振が発生する $\Omega = 4.4[\text{Hz}]$ からロータ回転周波数をずらすことでパラメータ共振を回避することが解析的に示された。SH-60K実機においても、 $\Omega = 4.17[\text{Hz}]$ (97%NR)の飛行試験ではワールモード（トランスミッションピッチモード）は不安定化していないとの結果が得られており、SH-60Kのワールモード（トランスミッションピッチモード）は不安定化には、パラメータ共振が寄与していたと考えられる。

SH-60Kを想定したパラメータ共振解析では、共振条件 $\Omega = -\omega_2 + \omega_5$ は不安定化作用、 $3\Omega = -\omega_2 - \omega_6$ は安定化作用であった。SH-60Kのロータ回転周波数4.3[Hz]以外のロータ回転周波数で、パラメータ共振が発生する可能性がある条件についても、同様なパラメータ共振解析を行ったところ、パラメータ共振が安定化作用となる場合と、不安定化作用となる場合の両方の結果が得られた。この結果に対し、定数変化法における係数微分方程式の行列固有値を近似展開したところ、モード間の干渉を表すクロス項の位相関係により、パラメータ共振が安定化作用となるか不安定化作用となるかを整理できることがわかった。クロス項の位相関係は、 $n\Omega = \pm\omega_i \pm \omega_j$ で表されるパラメータ共振条件から、空力係数の周波数 $n\Omega$ に対応した位相情報と、固有振動数の組み合わせ $\pm\omega_i \pm \omega_j$ の両者の組み合わせによって決まる。

最後に、SH-60K実機を想定したロータ回転周波数4.3[Hz]の条件のもとで、ロータ回転周波数を下げる以外のパラメータ共振を回避する方法として、トランスミッション支持剛性を高くする効果について検討としたところ、パラメータ共振を回避し安定化する効果があることがわかった。

5. 結論

SH-60Kで発生した高速飛行時のトランスミッションピッチモードの不安定化について、その発生原因を検討した。このモードはワール（ふれまわり）運動を行うモードであり、ブレード空気を線形化した場合にその係数がもつ周波数成分と、支持系を含むロータ系の固有モードの固有振動数の和または差が近接することによるパラメータ共振（係数励振振動）が発生原因のひとつと考えられる。栗城らのシミュレーション計算によると、トランスミッションピッチモードの固有振動数を高くすることで同モードは安定化が図られる^りとのことであるが、より簡単なパラメータ共振解析により同様の結果を得ることができた。本研究での数値計算と解析により原因は究明されたと考える。また、一般的に、マルチボディ系であるヘリコプタ・ロータは多くの固有モードを有すること、ブレード空気力はロータ回転周波数の高調波成分を有することから、SH-60K検討事例と同様なパラメータ共振が他機種で発生する可能性がある。ヘリコプタ・ロータについてパラメータ共振を適用した類例はなく、本研究を通じそれらの問題に対する新たな知見が得られたと考える。

2章にて、4枚ブレードのヘリコプタ・ロータについて、トランスミッション部などに対応する支持系を含む10自由度の運動方程式を導出した。空気を考慮しない場合、この運動方程式はハブ運動とブレードのラグ運動から構成される系と、ブレードのフラップ運動の系に分離される。前者については、ブレードのラグ角について、対角どうしの和と差に変数を取り直すことにより、ラグの対角差に関する系はハブ運動から独立となり、ハブ運動と連成するのはブレード・ラグ角の対角和であり、この系は4自由度となる。このハブ・ラグ連成系の4つのモードは、いずれもハブがワール運動するが、ロータ回転周波数が0の時に固有振動数が0となる2つのモードと、ロータ回転周波数が0の時に支持系の剛性により決まる0ではない固有振動数を持つ2つのモードに分かれる。前者が地上共振のモードであり、後者がSH-60Kのトランスミッションピッチモードに対応し、プロペラ・ナセル・ワール・フラッタと類似のモードである。

ハブ・ラグ連成系の特性方程式は4次式で表され、固有振動数が一致する場合に不安定化することが、特性方程式から導かれる。これが地上共振の不安定である。これに対し、ワールモードは空気力なしの条件下では、不安定化することはない中立である。

3章にて、SH-60Kを想定した前進飛行時のブレード空気を算出し、2章の結果得られた運動方程式の右辺に付加し、前進飛行の数値計算を行った。空気力については、AH-64のワール不安定検討事例を参考に、ロータ・ハブの運動によりブレード・ピッチ角の変動が発生するモデルを採用した。ヘリコプタが前進飛行時、ブレードの運動はロータ回転周波数に応じた周期的な運動となるので、その周期解周りの変動について線形化運動方程式を導出した。この線形化運動方程式の空力係数はロータ回転にともない周期的に変化する。周期係数を有する系の安定性評価としてFloquetの定理を適用した結果、特定の速度以上にて、逆回転のワールモードが不安定化する結果が得られた。さらに、飛行条件を変化させて不安定化する条件を探ったところ、SH-60K実機での発生条件とほぼ一致する結果が得られた。

4章では、3章の数値計算結果についてワール不安定の発生メカニズムを解析的に検討した。2章にてモード解析に用いた空気力なしの定係数の運動方程式を左辺におき、3章の数値計算に用いた線形化空気力を変数変換したうえで右辺におき、右辺の空気力付加によりモード解析から導出される一般解の係数が時間変化するとの定数係数法を適用した。解を構成する係数に関する微分方程式における係数行列は、固有振動数と空力加振周波数の和や差で構成され、この値が0に近い場合に係数の安定性に影響する。3章で不安定化した逆回転のワールモードを含む組み合わせの中で、シザーモードと、 1Ω または 3Ω の空力加振周波数の組合せが0に近づくので、この組み合わせについて係数の安定性を評価したところ、シザーモードと 1Ω 空力加振周波数の組合せは、不安定化作用であることが分かった。この不安定は、運動方程式の係数が周期変化することによる不安定なので、パラメータ共振（または係数励起振動）に分類される。

パラメータ共振を回避する方法として、空力加振周波数をずらすことが想定され、100%NRから97%程度まで回転数を下げることで、パラメータ共振を回避することが解析的に示された。SH-60K実機においても、97%NRの飛行試験ではワールモード（トランスミッションピッチモード）は不安定化していないとの結果に整合している。この結果から、SH-60Kのワールモード（トランスミッションピッチモード）は不安定化には、パラメータ共振が関与していたと考えられる。

最後に、ロータ回転周波数を下げる以外のパラメータ共振を回避する方法として、トランスミッション支持剛性を高くする効果について検討としたところ、パラメータ共振を回避し安定化する効果があることがわかった。

付録 運動方程式の導出

運動方程式, (2-4)式の導出をまとめる. 変数 $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}^T$ を用いて, 角速度 $\{0, 0, -\Omega\}^T$ で回転する機体回転座標系 $X_{FR} - Y_{FR} - Z_{FR}$ でのハブ位置 \mathbf{p}_h およびブレード位置 $\mathbf{p}_{bj} (j=1,2,3,4)$ はつぎのように記述される.

$$\mathbf{p}_h = \begin{Bmatrix} x_1 \sin(\Omega t) + x_2 \cos(\Omega t) \\ -x_1 \cos(\Omega t) + x_2 \sin(\Omega t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_{bj} = \mathbf{p}_h + e \begin{Bmatrix} -\cos\left(\frac{\pi}{2}j\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}j\right) \\ 0 \end{Bmatrix} + r \begin{Bmatrix} -\cos\beta_j \cos\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2}j\right) \\ \cos\beta_j \sin\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2}j\right) \\ -\sin\beta_j \end{Bmatrix} \quad (j=1,2,3,4) \quad (2-1)$$

運動方程式の導出はKaneの方法を用いる. Kaneの運動方程式は, 系を構成する複数の物体について, 慣性力と部分速度の内積について和をとることで得られる⁶⁰⁾. 部分速度とは, 速度を一般化速度で偏微分したベクトルである. 式(2-1)で表される系については以下になる.

$$x_i (i=1,2) \text{ についての運動方程式: } m_h \ddot{\mathbf{p}}_h \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_h}{\partial \dot{x}_i} + m_b \sum_{k=1}^4 \ddot{\mathbf{p}}_{bk} \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_{bk}}{\partial \dot{x}_i}$$

$$\zeta_j (j=1,2,3,4) \text{ についての運動方程式: } m_h \ddot{\mathbf{p}}_h \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_h}{\partial \dot{\zeta}_j} + m_b \sum_{k=1}^4 \ddot{\mathbf{p}}_{bk} \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_{bk}}{\partial \dot{\zeta}_j}$$

$$\beta_j (j=1,2,3,4) \text{ についての運動方程式: } m_h \ddot{\mathbf{p}}_h \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_h}{\partial \dot{\beta}_j} + m_b \sum_{k=1}^4 \ddot{\mathbf{p}}_{bk} \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_{bk}}{\partial \dot{\beta}_j}$$

上記を得るために, 各物体の位置の2階微分, パーシャル速度を以下に述べる. ハブ位置 \mathbf{p}_h の1階微分と2階微分はつぎのようになる.

$$\dot{\mathbf{p}}_h = \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} x_1 \sin(\Omega t) + x_2 \cos(\Omega t) \\ -x_1 \cos(\Omega t) + x_2 \sin(\Omega t) \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Omega \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} x_1 \sin(\Omega t) + x_2 \cos(\Omega t) \\ -x_1 \cos(\Omega t) + x_2 \sin(\Omega t) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \sin(\Omega t) + \dot{x}_2 \cos(\Omega t) \\ -\dot{x}_1 \cos(\Omega t) + \dot{x}_2 \sin(\Omega t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\ddot{\mathbf{p}}_h = \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \sin(\Omega t) + \dot{x}_2 \cos(\Omega t) \\ -\dot{x}_1 \cos(\Omega t) + \dot{x}_2 \sin(\Omega t) \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Omega \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \sin(\Omega t) + \dot{x}_2 \cos(\Omega t) \\ -\dot{x}_1 \cos(\Omega t) + \dot{x}_2 \sin(\Omega t) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \sin(\Omega t) + \ddot{x}_2 \cos(\Omega t) \\ -\ddot{x}_1 \cos(\Omega t) + \ddot{x}_2 \sin(\Omega t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ブレード位置 $\mathbf{p}_{bj} (j=1,2,3,4)$ の1階微分と2階微分はつぎのようになる.

$$\dot{\mathbf{p}}_{bj} = \dot{\mathbf{p}}_h + e \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} -\cos\left(\frac{\pi}{2}j\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}j\right) \\ 0 \end{Bmatrix} + r \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} -\cos\beta_j \cos\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2}j\right) \\ \cos\beta_j \sin\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2}j\right) \\ -\sin\beta_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Omega \end{Bmatrix} \times \left[e \begin{Bmatrix} -\cos\left(\frac{\pi}{2}j\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}j\right) \\ 0 \end{Bmatrix} + r \begin{Bmatrix} -\cos\beta_j \cos\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2}j\right) \\ \cos\beta_j \sin\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2}j\right) \\ -\sin\beta_j \end{Bmatrix} \right]$$

$$= \dot{\mathbf{p}}_h + e\Omega \begin{Bmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{2}j\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}j\right) \\ 0 \end{Bmatrix} + r\Omega \begin{Bmatrix} \cos\beta_j \sin\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2}j\right) \\ \cos\beta_j \cos\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2}j\right) \\ 0 \end{Bmatrix} + r \begin{Bmatrix} \dot{\beta}_j \sin\beta_j \cos\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2}j\right) + \dot{\zeta}_j \cos\beta_j \sin\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2}j\right) \\ -\dot{\beta}_j \sin\beta_j \sin\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2}j\right) + \dot{\zeta}_j \cos\beta_j \cos\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2}j\right) \\ -\dot{\beta}_j \cos\beta_j \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{p}}_{bj} &= \ddot{\mathbf{p}}_h + e\Omega \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{2}j\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}j\right) \\ 0 \end{bmatrix} + r \frac{d}{dt} \left[\begin{bmatrix} \Omega \cos \beta_j \sin\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2}j\right) \\ \Omega \cos \beta_j \cos\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2}j\right) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\beta}_j \sin \beta_j \cos\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2}j\right) + \dot{\zeta}_j \cos \beta_j \sin\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2}j\right) \\ -\dot{\beta}_j \sin \beta_j \sin\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2}j\right) + \dot{\zeta}_j \cos \beta_j \cos\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2}j\right) \\ -\dot{\beta}_j \cos \beta_j \end{bmatrix} \right] \\
&+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Omega \end{bmatrix} \times \left[e\Omega \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{2}j\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}j\right) \\ 0 \end{bmatrix} + r\Omega \begin{bmatrix} \cos \beta_j \sin\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2}j\right) \\ \cos \beta_j \cos\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2}j\right) \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} \dot{\beta}_j \sin \beta_j \cos\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2}j\right) + \dot{\zeta}_j \cos \beta_j \sin\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2}j\right) \\ -\dot{\beta}_j \sin \beta_j \sin\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2}j\right) + \dot{\zeta}_j \cos \beta_j \cos\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2}j\right) \\ -\dot{\beta}_j \cos \beta_j \end{bmatrix} \right] \\
&= \ddot{\mathbf{p}}_h + e\Omega^2 \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}j\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{2}j\right) \\ 0 \end{bmatrix} + r(\Omega + \dot{\zeta}_j)^2 \begin{bmatrix} \cos \beta_j \cos\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2}j\right) \\ -\cos \beta_j \sin\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2}j\right) \\ 0 \end{bmatrix} - 2r(\Omega + \dot{\zeta}_j) \begin{bmatrix} \dot{\beta}_j \sin \beta_j \sin\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2}j\right) \\ \dot{\beta}_j \sin \beta_j \cos\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2}j\right) \\ 0 \end{bmatrix} \\
&+ r \begin{bmatrix} \ddot{\beta}_j \sin \beta_j \cos\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2}j\right) + \dot{\beta}_j^2 \cos \beta_j \cos\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2}j\right) + \ddot{\zeta}_j \cos \beta_j \sin\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2}j\right) \\ -\ddot{\beta}_j \sin \beta_j \sin\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2}j\right) - \dot{\beta}_j^2 \cos \beta_j \sin\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2}j\right) + \ddot{\zeta}_j \cos \beta_j \cos\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2}j\right) \\ -\ddot{\beta}_j \cos \beta_j + \dot{\beta}_j^2 \sin \beta_j \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

部分速度は以下のように表される.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_h}{\partial \dot{x}_i} &= \begin{bmatrix} -\cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}i\right) \\ -\sin\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}i\right) \\ 0 \end{bmatrix} : (i=1, 2), & \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_{bj}}{\partial \dot{x}_i} &= \begin{bmatrix} -\cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}i\right) \\ -\sin\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}i\right) \\ 0 \end{bmatrix} : (i=1, 2; j=1, 2, 3, 4), \\
\frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_h}{\partial \dot{\beta}_j} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : (j=1, 2, 3, 4), & \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_h}{\partial \dot{\zeta}_j} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : (j=1, 2, 3, 4) \\
\frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_{bj}}{\partial \dot{\beta}_j} &= r \begin{bmatrix} -\sin \beta_j \cos\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2}j\right) \\ \sin \beta_j \sin\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2}j\right) \\ \cos \beta_j \end{bmatrix} : (j=1, 2, 3, 4), & \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_{bj}}{\partial \dot{\beta}_k} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : (j=1, 2, 3, 4; k=1, 2, 3, 4; j \neq k) \\
\frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_{bj}}{\partial \dot{\zeta}_j} &= r \begin{bmatrix} \cos \beta_j \sin\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2}j\right) \\ \cos \beta_j \cos\left(\zeta_j + \frac{\pi}{2}j\right) \\ 0 \end{bmatrix} : (j=1, 2, 3, 4), & \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_{bj}}{\partial \dot{\zeta}_k} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : (j=1, 2, 3, 4; k=1, 2, 3, 4; j \neq k)
\end{aligned}$$

以上から, 運動方程式はつぎのようになる.

$x_i (i=1, 2)$ に関する運動方程式：

$$\begin{aligned}
 m_h \ddot{\mathbf{p}}_h \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_h}{\partial \dot{x}_i} + m_b \sum_{j=1}^4 \ddot{\mathbf{p}}_{bj} \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_{bj}}{\partial \dot{x}_i} = & (m_h + 4m_b) \ddot{x}_i + m_b r \sum_{j=1}^4 \left\{ -\ddot{\zeta}_j \cos \beta_j \sin \left(\Omega t + \zeta_j + \frac{\pi}{2} (i+j) \right) - \ddot{\beta}_j \sin \beta_j \cos \left(\Omega t + \zeta_j + \frac{\pi}{2} (i+j) \right) \right. \\
 & + \left(\Omega + \dot{\zeta}_j \right)^2 \cos \beta_j \cos \left(\Omega t + \zeta_j + \frac{\pi}{2} (i+j) \right) - 2\dot{\beta}_j \left(\Omega + \dot{\zeta}_j \right) \sin \beta_j \sin \left(\Omega t + \zeta_j + \frac{\pi}{2} (i+j) \right) \\
 & \left. + \dot{\beta}_j^2 \cos \beta_j \cos \left(\Omega t + \zeta_j + \frac{\pi}{2} (i+j) \right) \right\}
 \end{aligned}$$

$\zeta_j (j=1, 2, 3, 4)$ に関する運動方程式：

$$\begin{aligned}
 m_h \ddot{\mathbf{p}}_h \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_h}{\partial \dot{\zeta}_j} + m_b \sum_{k=1}^4 \ddot{\mathbf{p}}_{bk} \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_{bk}}{\partial \dot{\zeta}_j} = & m_b r \left\{ -\ddot{x}_1 \cos \beta_j \cos \left(\Omega t + \zeta_j + \frac{\pi}{2} j \right) + \ddot{x}_2 \cos \beta_j \sin \left(\Omega t + \zeta_j + \frac{\pi}{2} j \right) \right. \\
 & \left. + r \ddot{\zeta}_j \cos^2 \beta_j + 2r \left(\Omega + \dot{\zeta}_j \right) \dot{\beta}_j \sin \beta_j \cos \beta_j - e \Omega^2 \cos \beta_j \sin \zeta_j \right\}
 \end{aligned}$$

$\beta_j (j=1, 2, 3, 4)$ に関する運動方程式：

$$\begin{aligned}
 m_h \ddot{\mathbf{p}}_h \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_h}{\partial \dot{\beta}_j} + m_b \sum_{k=1}^4 \ddot{\mathbf{p}}_{bk} \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_{bk}}{\partial \dot{\beta}_j} = & m_b r \left\{ \ddot{x}_1 \sin \beta_j \sin \left(\Omega t + \zeta_j + \frac{\pi}{2} j \right) + \ddot{x}_2 \sin \beta_j \cos \left(\Omega t + \zeta_j + \frac{\pi}{2} j \right) \right. \\
 & \left. + r \ddot{\beta}_j + r \left(\Omega + \dot{\zeta}_j \right)^2 \sin \beta_j \cos \beta_j + e \Omega^2 \sin \beta_j \cos \zeta_j \right\}
 \end{aligned}$$

上記に加え、支持系の反力を加え式(2-2)の形に整理すると、式(2-4)が得られる。

参考文献

- 1) 栗城康弘, 饗庭昌行, 生田雅彦, “哨戒ヘリコプター (艦載型) (XSH-60K) の設計及び試験—低周波振動”, 日本航空宇宙学会第43 回飛行機シンポジウム講演集 (2005), 3A5
- 2) Silverthorn, L.J., “Whirl Mode Stability of the Main Rotor of the YAH-64 Advanced Attack Helicopter”, Proceeding of 38th American Helicopter Society Annual Forum (1982), pp.80-89.
- 3) 上野登, “XSH-60Kの開発について”, 航空技術, No.579 (2003), pp.14-21.
- 4) 山本敏男, 石田幸男, 回転機械の力学 (2001), コロナ社, pp.21-24, 80-99, 113-129
- 5) 日本航空宇宙学会編, 第3版航空宇宙工学便覧 (2005), p.480, 丸善
- 6) Reed, W. H. III, “Propeller-Rotor Whirl Flutter: A State-of-the-art Review”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.4, No.4 (1966), pp. 526-544
- 7) James R. C., 伏見威蕃(翻訳), 機械仕掛けの神—ヘリコプター全史 (2009), pp.75-76, 早川書房
- 8) Leishman, J. G., *Principles of Helicopter Aerodynamics 2nd Edition* (2007), pp.1,23-24, Cambridge University Press
- 9) Hirschberg, M. J., *The American Helicopter – An Overview of Helicopter Development in America 1908-1999* (2000), pp.77-78, Anser Analytic Services
- 10) 別冊航空情報 新名機100 (1993), pp.8-23, 酣燈社
- 11) 航空情報特別編集 世界航空機年鑑2010-2011 (2010), pp.256-375, 酣燈社
- 12) Leishman, J. G., “The Breguet-Richet Quadrotor Helicopter of 1907”, *Vertiflite*, Vol. 47, No. 3 (2001), pp.58-60.
- 13) Leishman, J. G., “The Cornu Helicopter? First in Flight?”, *Vertiflite*, Vol. 47, No. 4 (2001), pp. 54-55.
- 14) 加藤寛一郎, ヘリコプタ入門 (1985), pp.54, 66, 69, 76, 82-83, 116, 131, 192-196 東京大学出版会
- 15) Anderson, J. Jr., *Fundamentals of Aerodynamics 1st edition* (1984), McGraw-Hill, pp.63-70, 246
- 16) Leishman, J. G., “Development of the Autogiro: A Technical Perspective”, *Journal of Aircraft*, Vol.41, No.4(2004), pp.765-781.
- 17) Prouty, R., *Helicopter Aerodynamics Volume I*(2009), pp.515-522, lulu.com
- 18) Prouty, R. W., Curtiss, H. C. Jr., “Helicopter Control Systems: A History”, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol.26, No.1 (2003), pp.12-18.
- 19) 中山周一, “えあろすぺーすABC 入門編 スワッシュプレートとフラッピング”, 日本航空宇宙学会誌, 第53巻, 第622号(2005), p.340.
- 20) Bielawa, R., *Rotary Wing Structural Dynamics and Aeroelasticity first edition* (1992), pp.289, 344, 450, AIAA
- 21) Paul, W. F., “A Self-Excited Rotor Blade Oscillation at High Subsonic Mach Numbers”, *Journal of the American Helicopter Society*, Vol.14, No.1 (1969), pp.38-48.
- 22) Sissingh, G. J., “Dynamics of Rotors Operating at High Advance Ratios”, *Journal of the American Helicopter Society*, Vol.13, No.3 (1968), pp.56-63.
- 23) Anderson, W. D., Watts, G. A., “Rotor Blade Wake Flutter A Comparison of Theory and Experiment”, *Journal of the American Helicopter Society*, Vol.21, No.2 (1976), pp.32-43.
- 24) Tarzanin, F. J., Jr., “Prediction of Control Loads Due to Blade Stall”, *Journal of the American Helicopter Society*, Vol.17, No.2 (1972), pp.33-46.
- 25) Chou, P. C., “Pitch-Lag Instability of Helicopter Rotors”, *Journal of the American Helicopter Society*, Vol.3, No.3 (1958), pp.30-39.
- 26) Burkam, J. E., Miao, W. L., “Exploration of Aeroelastic Stability Boundaries with a Soft-in-Plane Hingeless - Rotor Model”, *Journal of the American Helicopter Society*, Vol.17, No.4 (1972), pp.27-35.
- 27) Donham, R. E., Cardinale, S. V., Sachs, I. B., “Ground and Air Resonance Characteristics of a Soft In - Plane Rigid - Rotor System”, *Journal of the American Helicopter Society*, Vol.14, No.4 (1969), pp.33-41
- 28) Lytwyn, R. T., Miao, W.; Woitsch, W., “Airborne and Ground Resonance of Hingeless Rotors”, *Journal of the American Helicopter Society*, Vol.16, No.2 (1971), pp.2-9.
- 29) Popelka, D., Sheffler, M., Bilger, J., “Correlation of Test and Analysis for the 1/5 - Scale V-22 Aeroelastic Model” , *Journal of the American Helicopter Society*, Vol.32, No.2 (1987), pp.21-33.
- 30) Seitz, G., Krysinski, T., “Overview of Tiger Dynamics Validation Program”, Proceeding of 48th American Helicopter Society International Annual Forum (1992), pp.95-107.
- 31) Fenaughty, R. R., Noehren, W.L., “Composite Bearingless Tail Rotor for UTTAS”, *Journal of the American Helicopter Society*,

- Vol.22, No.3 (1977), pp.19-26.
- 32) 鷺津久一郎, 空力弾性学 (1957), pp.47-48, 共立出版
 - 33) Liiva, J., Davenport, F. J., “Dynamic Stall of Airfoil Section for High-Speed Rotors”, *Journal of the American Helicopter Society*, Vol.14, No.3 (1969), pp.26-33
 - 34) Ericsson, L. E., Reding, J. P., “Dynamic Stall of Helicopter Blades”, *Journal of the American Helicopter Society*, Vol.17, No.1 (1972), pp.11-19
 - 35) McCorsky, W. J., Fischer, R. K. Jr., “Detailed Aerodynamic Measurements on a Model Rotor in the Blade Stall Regime”, *Journal of the American Helicopter Society*, Vol.17, No.1 (1972), pp.20-30
 - 36) Peters, D. A., Hohenemser, K. H., “Application of the Floquet Transition Matrix to Problems of Lifting Rotor Stability”, *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. 16, No. 2 (1971), pp. 25-33.
 - 37) Gaffey, T., “The Effect of Positive Pitch-flap Coupling (Negative δ_3) on Rotor Blade Motion Stability and Flapping”, *Journal of the American Helicopter Society*, Vol.14, No.2 (1969), pp.49-67.
 - 38) Prouty, R., *Helicopter Performance, Stability, and Control* (2001), p.188, Krieger Pub Co
 - 39) Ormiston, R. A., Hodges, D. H., “Linear Flap-Lag Dynamics of Hingeless Helicopter Rotor Blades in Hover”, *Journal of the American Helicopter Society*, Vol.17, No.2 (1972), pp.2-14
 - 40) Peters, D. A., “Flap-Lag Stability of Helicopter Rotor Blades in Forward Flight”, *Journal of the American Helicopter Society*, Vol.20, No.4 (1975), pp.2-13
 - 41) Coleman, R.P., Theory of Self-Excited Mechanical Oscillation of Hinged Rotor Blade, NACA Report No.1351 (1956)
 - 42) Reed, W. H., Bland, S. R., An Analytical Treatment of Aircraft Propeller Precession Stability, NASA Technical Note D-659(1961).
 - 43) Acree, C. W., Peyran, R. J., Johnson, W., “Rotor Design Options for Improving Tiltrotor Whirl-Flutter Stability Margins”, *Journal of the American Helicopter Society*, Vol.46, No.2 (2001), pp.87-95
 - 44) Corso, L. M., Popelka, D. A., Nixon, M. W., “Design, Analysis, and Test of a Composite Tailored Tiltrotor Wing”, *Journal of the American Helicopter Society*, Vol.45, No.3 (2000), pp.207-215
 - 45) Nixon, M. W., Piatak, D. J., Corso, L. M., Popelka, D. A., “Aeroelastic Tailoring for Stability Augmentation and Performance Enhancements of Tiltrotor Aircraft”, *Journal of the American Helicopter Society*, Vol.45, No.4 (2000), pp.270-279
 - 46) 月刊JADI, 平成25年度海外装備品等動向視察特集号(AFA), 日本防衛装備工業会, No.802 (2014), pp.65-69
 - 47) Kuriki, Y. and Ikuta, M., “Flight Test and Evaluation -PART-III Low Frequency Vibration of the Maritime Patrol Helicopter (XSH-60K)”, Proceeding of Heli Japan 2006 International Conference (2006), T221-3
 - 48) Amer, K. B., Prouty, W. R., Korkosz, G., Fouse, D., “Lessons Learned during the Development of the AH-64A Apache Attack Helicopter”, Proceeding of 48th American Helicopter Society International Annual Forum (1992), pp.177-194.
 - 49) 杉澤洸, 森田義郎, “ヘリコプタロータの地上不安定振動に関する研究”, 三菱重工技報, 第10巻, 4号 (1973), pp.515-526.
 - 50) Loewy, R. G., “Helicopter Vibrations: A Technological Perspective”, *Journal of the American Helicopter Society*, Vol.29, No.4 (1984), pp.4-30.
 - 51) 大友満, 斎藤光平, 板東舜一, 柿沼朝雄, 世良直己, “ヘリコプタ用複合材メイン・ロータ・ブレードの固有振動数および飛行荷重”, 日本航空宇宙学会誌, 第32巻, 第361号(1984), pp.82-88.
 - 52) 小林幹雄他編, 数学公式集共立全書 (1959), p.26, 共立出版
 - 53) Howlett, J. J., UH-60A Black Hawk engineering simulation program. Volume 1: Mathematical model, NASA-CR-166309 (1981), pp. 5.1-1 – 5.1-64
 - 54) 田村英之, 松崎健一郎, “定常振動問題の解と安定判別のための数値解法とプログラム”, 日本機械学会論文集(C編), 60巻569号(1994), pp.30-37
 - 55) Peters, D. A., Izapanah, A. P., “Helicopter Trim by Periodic Shooting with Newton-Raphson Iteration”, Proceedings of the 37th Annual Forum of the American Helicopter Society (1981), pp.217-226
 - 56) Leoni, R., *Black Hawk: The Story of a World Class Helicopter* (2003), pp. 81,162-163, AIAA
 - 57) 白岩謙一, 常微分方程式序説 (1975), pp. 118-121, サイエンス社
 - 58) Gentle, J. E., *Matrix Algebra: Theory, Computations, and Applications in Statistics* (2007), p.94, Springer
 - 59) 木下宙, 天体と軌道の力学 (1998), pp.146-147, 東京大学出版会
 - 60) Kane, T. R., Likins, P. W., Levinson, D. A., *Spacecraft Dynamics* (1983), pp.275-277, McGraw Hill

謝辞

本研究は、筆者が名古屋大学大学院（社会人特別選抜）に在学中、指導教員であった航空宇宙工学専攻の山田克彦教授（現大阪大学教授）の的確なご指導に導かれ完成しました。ご指導を賜った山田教授に対し深く感謝申し上げます。航空宇宙工学専攻の軸屋一郎助教には、投稿論文、学位論文の作成にあたり、ご指導を頂きました。感謝申し上げます。

学位論文審査をお引き受けいただき、本論文の内容に関しましてご助言とご教示を頂きました航空宇宙工学専攻の佐宗章弘教授、池田忠繁准教授、坂本登准教授、機械理工学専攻の井上剛志教授に感謝申し上げます。

本研究は、筆者が勤める三菱重工業株式会社が防衛省のSH-60K開発を受注し、筆者もSH-60K開発に参画する機会を得たことがすべての始まりとなりました。この機会を与えていただきました防衛省、ならびに、三菱重工業株式会社に感謝の意を表します。

論文目録

- 中山周一，山田克彦，軸屋一郎，“支持系との連成によるヘリコプタ・ロータの不安定現象”，日本航空宇宙学会誌論文集，第63巻，第2号(2015)（掲載決定）
- 中山周一，山田克彦，軸屋一郎，“前進飛行時のヘリコプタ・ロータのワール不安定現象”，日本航空宇宙学会誌論文集，第63巻，第2号(2015)（掲載決定）
- 中山周一，山田克彦，軸屋一郎，“ヘリコプタ・ロータのワール不安定性に対するパラメータ共振解析”，日本航空宇宙学会誌論文集，第63巻，第3号(2015)（掲載決定）