別紙４

報告番号	※　　　　　　　　　　第　　　号

主　論　文　の　要　旨

論文題目　Some properties of numbers and functions in analytic number theory
（数と解析的整数論にあらわれる関数のいくつかの性質）

氏　　名　池田　創一

論　文　内　容　の　要　旨

解析的整数論では

- 数論的関数とゼータ関数の理論
- 無理数論および超越数論

は重要な二つの分野である。本論文ではこれらについて申請者が得た結果を述べる。本論文は 1 章が序文であり、他の 2, 3, 4 章が申請者の得た結果について述べたものである。具体的には各章は以下のような内容である。

1. Introduction　この章ではまず論文の全体的な流れを述べ、その後、上記の解析的整数論における重要な二つの分野 (1, 2) それぞれについての簡単な説明を行った。その後、申請者が得た結果の要約を述べた。

2. Double analogue of Hamburger's theorem　リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ には関数等式

$$\zeta(s)=\chi(s)\zeta(1-s), \tag{1}$$

がある。ここで $\chi(s)=2(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\sin(\frac{\pi s}{2})$ である。Hamburger の定理とは、$\zeta(s)$ を関数等式 (1) により特徴づける定理である。もう少し詳しく書けば、$f(s)$, $g(s)$ を未知関数とするとき、$\zeta(s)$ を関数方程式 $f(s)=\chi(s)g(1-s)$ のディリクレ級数解として特徴づける定理である。

近年、オイラーの二重ゼータ関数

$$\zeta_2(s_1,s_2)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{s_1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(m+n)^{s_2}} \tag{2}$$

を含む、いくらかの二重ゼータ関数について関数等式が発見されている (ただし、リーマンゼータ関数のそれとは少し異なる等式である)。本研究は、松本によって発見された関数等式と古くから知られている調和積と呼ばれる関係式

$$\zeta_2(s_1,s_2)+\zeta_2(s_2,s_1)=\zeta(s_1)\zeta(s_2)-\zeta(s_1+s_2) \tag{3}$$

を用いて、オイラーの二重ゼータ関数を特徴づけることを試みたものである。なお実際には、オイラーの二重ゼータ関数とリーマンゼータ関数の両方を同時に特徴づけることができている。

3. On the lcm-sum function gcd-sum 関数

$$g(n)=\sum_{j=1}^{n}\gcd(j,n)$$

は Pillai によりはじめて定義されたものである。その後、Broughan はこの関数を再び定義し、

$$G_\alpha(x)=\sum_{n\le x}n^{-\alpha}g(n)$$

の漸近公式を得た。ここで $\alpha\in\mathbb{R}$, $x\geq 1$ である。その後、gcd-sum 関数とその一般化について様々な研究がなされた。こういった研究は最大公約数の漸近的な挙動を知ろうという試みである。

それに対して、本研究は Bordellès や Alladi によって漸近公式の研究がなされた

$$L_a(n):=\sum_{j=1}^{n}(\mathrm{lcm}(j,n))^a$$
$$T_a(x):=\sum_{n\le x}L_a(n)$$

のような最小公倍数についての和を考察し、$T_a(x)$ について漸近公式を得た。ここで $a\in\mathbb{Z}$, $x\geq 1$ である。また $L_1(n)$ を lcm-sum 関数という。我々の研究手法は Bordellès のそれに似たものであるが、結果はより一般的になっている。また、Alladi の結果の一部を改良したものにもなっている。

4. A new construction of the real numbers by alternating series A. Knopfmacher と J. Knopfmacher は実数の交代シルベスター級数展開を定義した。交代シルベスター級数展開とは、10 進小数展開のように全ての実数を一意的に級数表示することができるアルゴリズムである。また、その際、各実数は交代級数で表示される。彼らは交代シルベスター級数展開の性質を考察することにより、交代シルベスター級数表示から、逆に、有理数体 $\mathbb{Q}$ から実数体 $\mathbb{R}$ を構成できることを示した。

本研究は、交代シルベスター級数展開を一般化した実数の級数展開を定義し、その性質を考察し、実数の構成に利用できることを証明した。実数の構成法は A. Knopfmacher と J. Knopfmacher の方法に似ているが、より一般的なものとなっており、彼らの手法の代替として利用可能と思われるものである。また、それらの研究の応用として、ある種の実数の無理性を証明した。