

論文審査の結果の要旨および担当者

|      |         |
|------|---------|
| 報告番号 | ※ 甲 第 号 |
|------|---------|

氏 名 池 田 創 一

論 文 題 目

Some properties of numbers and functions in analytic  
number theory  
(数と解析的整数論にあらわれる関数のいくつかの性質)

論文審査担当者

|     |                                 |
|-----|---------------------------------|
| 主 査 | 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 博士 (理学)    |
|     | 吉 田 伸 生                         |
| 委 員 | 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 理学博士       |
|     | 松 本 耕 二                         |
| 委 員 | 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士 (理学) . |
|     | 南 和 彦                           |
| 委 員 | 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士 (理学)   |
|     | 古 庄 英 和                         |

## 論文審査の結果の要旨

池田氏の学位論文は、数の性質に密接に関係する関数、あるいは数そのものについての氏の研究をまとめたものであり、独立した三つの主題からなる。論文の第一章で問題の背景と第二章以降の内容の要約を述べた後、第二章以降の三つの章でそれら三つの主題が順に論じられる。

第二章の主題は二重ゼータ関数の特徴付けの問題である。Riemann ゼータ関数  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$  のもっとも基本的な性質のひとつとして関数等式

$$\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s)$$

があるが、ある種の Dirichlet 級数がこの形の関数等式を満たせば、それは  $\zeta(s)$  の定数倍に限る、という Hamburger の定理がある。これは 1921 年に証明された古典的な定理であり、しかも Hecke 理論への契機ともなった重要な結果である。従ってその種々の類似や一般化を探るのは重要な研究テーマであると考えられる。

池田氏は二重ゼータ関数に対する Hamburger の定理の類似を証明した。もう少し正確に言えば、二重ゼータ関数

$$\zeta_2(s_1, s_2) = \sum_{1 \leq m < n} m^{-s_1} n^{-s_2}$$

は Matsumoto によって証明されたある種の関数等式を満たす。他方、 $\zeta(s)$  と  $\zeta_2(s_1, s_2)$  の間に調和積公式

$$\zeta_2(s_1, s_2) + \zeta_2(s_2, s_1) = \zeta(s_1)\zeta(s_2) - \zeta(s_1 + s_2)$$

が成り立つことは昔から知られていた。池田氏は、ある種の有理型関数がこの二つの関係式（と若干の技術的な付帯条件）を満たせば、それは二重ゼータ関数に限られることを示した。これは多重ゼータ関数にこの種の特徴付けを与えた初めての結果であり、その証明も巧みな工夫に富むもので、この分野への顕著な貢献である。

第三章は最小公倍数の和によって定義された数論的関数  $L_a(n)$  の挙動の研究で、特に緻密な計算によって  $L_a(n)$  の  $n \leq x$  までの和の  $x$  に関する漸近式を与えているが、それは  $a < 0$  に対しては先行研究では扱われていなかった場合の結果であり、 $a > 0$  に対しては先行研究の誤差評価の改良になっている。証明に使われるテクニックは標準的なものであるが、池田氏がこうした解析的整数論の技法に十分に習熟していることがわかる。

第四章では実数の構成方法という話題を論じている。これは交代 Sylvester 級数というものをを用いて順序体としての実数の新しい構成法を述べた A. & J. Knopfmacher の先行結果に示唆されて、一般化された交代 Sylvester 級数というものを導入し、それによる実数の構成法を提示したものである。その手法は Knopfmacher たちの手法を踏襲したものであるが、より一般的な状況に適用できるように工夫されている。また、その応用としてある種の無限級数で定義された数が無理数である、という数論的に興味深い事実の証明が導けることを池田氏は発見している。

以上のように、池田氏の学位論文は整数論への意義のある貢献であり、学位論文として十分な内容を持つ。これら各章の内容はそれぞれ個別に学術雑誌に投稿され、すべて掲載済み、または掲載予定である。第二章、第三章の内容は共同研究であるが、そのどちらにおいても池田氏は主導的な役割を果たしている。

## 論文審査の結果の要旨

審査委員会は、2015年2月23日に公開審査会を行った。この場において申請者はそれぞれの問題の背景や意義、また証明の基本的なアイデアについて明快な説明を行ない、この分野における申請者の十分な学識が確認された。従って審査委員会は、申請者が博士（数理学）の学位が授与される資格を有すると判断する。