論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

報告番号	※　甲　　第　　　号

氏　　　　名　　永 田　　義 一

論 文 題 目

On a characterization of unbounded homogeneous domains with boundaries of light cone type
(光錐を境界にもつ非有界等質領域の特徴づけについて)

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
小 林　　亮 一

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
大 沢　　健 夫

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（理学）．
伊 師　　英 之

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（理学）
糸　　健 太 郎

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

結論：本学位申請論文は学位に値する．

本学位申請論文の主結果 (以下の定理 1,2,3) は

$$D^{n,1} := \{(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid -|z_0|^2 + |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 > 0\}$$

という $\mathbb{C}^{n+1}$ の等質非有界領域（有界な実現をもたない）の，その双正則自己同型群による特徴づけである：

定理 1. $\mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}(D^{n,1}) = GU(n,1)$ ここで $GU(n,1) := \{M \in GL(n+1, \mathbb{C}) \mid M^*JM = \nu(M)J \text{ for } \nu(M) \in \mathbb{R}_{>0}\}$, $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix}$ である．

定理 2. M^{n+1} を連結な複素多様体で正則分離性を満たし，非特異な正則包をもつものとする．もし M の双正則自己同型群が位相群として $\mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}(D^{n,1})$ と同型ならば，M は $D^{n,1}$ と双正則同型である．

定理 3. 正則同型ではないが自己同型群は同型であるような，$\mathbb{C}^n$ $(n \geq 5)$ の等質非有界領域が存在する（という意味で $D^{n,1}$ は特別である）．

H.Cartan の基本定理により等質有界領域の双正則自己同型群は Lie 群である．Piatetski-Shapiro の j 代数の理論により，等質有界領域に推移的に働く連結 Lie 群の Lie 環は j 代数とよばれる構造をもち，逆に j 代数はある等質有界領域に推移的に働く Lie 群の Lie 環である．雑に言えば，等質有界領域は，j 代数の研究に帰着させることによって組織的な研究が可能な対象である．

これに対して，有界実現をもたない等質領域（以下，等質非有界領域とよぶ）の場合にはこのような一般論は知られていない．したがってどの等質非有界領域も面白い研究対象のはずだ，という考え方が本論文の出発点である．この方向の研究で本論文のもとになったのは次の児玉秋雄と清水悟による線形化定理 (2008, Complex Var. Elliptic Equ. 53, 215-220) である：“M^n を連結な複素多様体で正則分離性を満たし，非特異な正則包をもつものとする．K を階数 n の連結コンパクト Lie 群とし，$\rho : K \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}(M)$ を連続単射準同型とする．このとき，$\mathbb{C}^n$ のある Reinhardt 領域 Ω と双正則写像 $F : M \to \Omega$ で $F\rho(K)F^{-1} = U(n_1) \times \cdots \times U(n_s) \subset \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}(\Omega)$ $(\sum_{j=1}^{s} n_j = n)$ となるものが存在する”．

本論文の目的は児玉・清水の方法を使って双正則自己同型群によって特徴づけられる等質非有界領域の例を増やすことである．主定理 2 の証明は，以下の手順で Reinhardt 領域 Ω の可能性をしぼっていき，最終的に Ω が $D^{n,1}$ でなければならないことを示すことによってなされる：

(1) [児玉清水線形化] 主定理 1 の結果 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}(D^{n,1}) = GU(1,n)$ のもとで，M と階数 $n+1$ のコンパクト Lie 群 $K = U(1) \times U(n)$ の組に児玉・清水の線形化定理を適用して $D^{n,1}$ と双正則同型であると期待される $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の Reinhardt 領域 Ω (M と双正則同型) を見つける．

(2) [申請者の工夫] $GU(n,1)$ の中心 $\mathbb{C}^*$ の像 $\rho(\mathbb{C}^*)$ の Ω への作用が線形で対角行列で表されることを示して，$f \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}(M) \setminus \rho(U(1) \times U(n))$ を $\Omega \subset \mathbb{C}^{n+1}$ から $\mathbb{C}^{n+1}$

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

への正則写像と見たときの Laurent 展開の係数に関係式 $\rho(\mathbb{C}^*) \circ f = f \circ \rho(\mathbb{C}^*)$ がどのような影響をもたらすかを，単純 Lie 群 $SU(n,1)$ の表現論を用いて考察する．

(3) [境界の決定] $K \times \mathbb{C}^*$ の軌道を調べることによって，$\mathbb{C}^*$ または $\mathbb{C}$ を因子にもつ領域の自己同型群はリー群にならないことを利用しながら M の境界を決める．

定理 3 は $D^{n,1}$ という等質非有界領域が双正則自己同型群の観点から特別であることを意味する．$p, q > 1, p+q = n$ のとき $D^{p,q} = \{(z_1, \ldots, z_p, w_1, \ldots, w_q) \in \mathbb{C}^n \mid |z_1|^2 + \cdots + |z_p|^2 - |w_1|^2 - \cdots - |w_q|^2 > 0\}$ とその外側 $C^{p,q} = \{(z_1, \ldots, z_p, w_1, \ldots, w_q) \in \mathbb{C}^n \mid |z_1|^2 + \cdots + |z_p|^2 - |w_1|^2 - \cdots - |w_q|^2 < 0\}$ は $p \neq q$ ならば双正則同型ではない．しかし $\mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}(D^{p,q}) = \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}(C^{p,q})$ だから定理 3 の例になっている．双正則自己同型群の観点から $D^{n,1}$ が特別である原因は，このときに限ってその外側 $C^{n,1}$ が正則凸な領域であることに起因する．

有界実現を持たない等質領域という一般論がない研究領域で，$D^{n,1}$ の自己同型群による特徴づけという問題を見出し，複素解析と単純 Lie 群の表現論を使いこなして問題を解いたというのが本論文の成果である．これには学位論文に値するだけの独創性があると学位審査委員会は認める．また，2 月 9 日の学位審査セミナーで申請者は主定理の背景とその証明のロジックを明瞭に述べ，委員からの種々の質問に的確に答えた．以上により，審査委員会は本論文が学位に値するという結論に達した．