論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号	※　甲　第　号

氏　名　高橋　良輔

論文題目

On the existence problem of Kähler-Ricci solitons
（ケーラー・リッチソリトンの存在問題について）

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
菅野　浩明

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
小林　亮一

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士(数理科学).
伊藤　由佳理

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　理学博士
内藤　久資

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

コンパクト複素多様体 M 上の Kähler 計量 ω が Kähler-Einstein (KE) 計量であるとは ω の Ricci 曲率に対して $\mathrm{Ric}(\omega) = c\,\omega$ が成り立つことである．計量を適当に正規化することで $c = -1, 0, 1$ の 3 つの場合に分類できるが，以下では $c = 1$ の場合を考える．このとき，KE 計量が存在するためには $c_1(M) > 0$ すなわち M はファノ多様体でなければならない．ファノ多様体上の KE 計量の存在に対しては，正則ベクトル場のなす Lie 環を用いて定式化される松嶋障害 (1954) と二木障害 (1983) が知られていたが，1990 年代に入って Ding-Tian と Donaldson は非自明な正則ベクトル場が存在しないファノ多様体にも，テスト配位とよばれる $\mathbb{C}^*$ 同変な退化の中心ファイバーに現れる正則ベクトル場を使うことで，二木不変量が定義されることを見いだし K-polystability と呼ばれる幾何学的不変式論的な安定性の概念を確立した．その後，最終的に 2012 年 Chen-Donaldson-Sun, Tian によって K-polystability がファノ多様体上に KE 計量の存在するための必要十分条件であることが示された．本申請論文では，このような背景の下，上に述べた問題の一般化と見なされる Kähler-Ricci ソリトンの存在問題について 2 つの結果が証明されている．ここで Kähler-Ricci ソリトンとは方程式

$$\mathrm{Ric}(\omega) - \omega = L_V \omega$$

を満たす Kähler 計量 ω と正則ベクトル場 V の組 (ω, V) のことであり，$V = 0$ の場合が KE 計量に他ならない．また Kähler-Ricci ソリトン は Kähler-Ricci 流と呼ばれる時間発展方程式

$$\frac{\partial \omega_t}{\partial t} = -\mathrm{Ric}(\omega_t) + \omega_t, \qquad \omega_0 \in c_1(M)$$

の自己相似解 $\omega_t = \exp(-\mathrm{Re}(V)t)^*\omega_0$ となっているという点からも重要な研究対象となっている．

本論文の 1 つめの主結果は admissible 束と呼ばれるある種の射影束 $M = \mathbb{P}(E_0 \oplus E_\infty) \to S$ 上での Kähler-Ricci ソリトン (KS) の存在定理である．KS の存在に関する先行研究としては $\mathbb{C}P^n$ $(n \geq 2)$ の 1 点ブローアップ上での存在 (Tian-Zhu,2002) およびトーリック・ファノ多様体上での存在 (Wang-Zhu, 2004) などがあるが，申請者の結果は Tian-Zhu の結果の拡張となっている．Admissible 束上には admissible 標準計量とそれに付随する admissible Kähler 計量が定義できる．ここで admissible Kähler 計量は複素構造を変形する 1 つの未知関数 $\Theta(z)$ のみを含むため，これに制限すれば KS 方程式を $\Theta(z)$ に関する境界値付き常微分方程式に帰着させることができる．このとき KS の存在は Generalized Quasi Einstein (GQE) 計量 $(\mathrm{Ric}(\omega) - \mathbf{H}\,\mathrm{Ric}(\omega) = L_V\omega)$ の存在に関する Maschler-Tønnesen (2011) の結果を用いることにより示される．すなわち申請者は GQE 計量の存在に関する障害である MT 不変量と KS の存在に関する障害である二木型の不変量 (modified 二木不変量) の関係を見いだすことで KS の存在を導いている．

上に述べたように KE 計量の存在に関する必要十分条件として幾何学的不変式論的な安定性条件が与えられたが，最近まで KS に対してはこのような安定性条件は知られていなかった．2014 年になって Berman-Nyström は modified 二木不変量を（高々）対数端末特異点をもつファノ多様体に拡張し，KS に対する K 安定性の概念を導入した．この意味で KS に対する幾何学的不変式論的な安定性の研究は，まだ緒に就いたばかりであり，具体的な計算手法や計算例が求められる状況にある．申請者は射影空間内の一般のファノ完全交叉に対して modified 二木不変量を代数的に計算する公式を与えた．すなわち modified 二木不変量は多様体上の積分を用いて定義されるが申請者の公式はそれをいくつかの代数的データのみを用いて表すものとなっている．これが申請論文の 2 つめの主結果である．これまで二木不変量に関する同様の公式は知られているが modified 二木不変量に関する公式は申請者の結果が始めてである．また計算には幾何学的データが不要であるため，特異点の種類によらず計算可能な点で優れている．

本論文の結果はファノ多様体上の Kähler-Ricci ソリトンの存在に関する新たな具体例を与えると共に，modified 二木不変量を計算する公式は，今後 Kähler-Ricci ソリトンの存在に

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

対する幾何学的不変式論的安定性条件を議論するうえで有用であると期待される．したがって本論文は当該分野における新たな知見を与え，今後の研究の進展に寄与するものである．また，本論文に関する公開審査会を 2015 年 2 月 9 日に行った．公開審査会では申請論文の 2 つの結果だけでなく，関連する先行研究について幅広くかつ適切な言及がなされ，研究の背景や位置づけが明快に説明された．また質問に対する受け答えも説得力のあるものであり，申請者が博士の学位を取得するに足る高い学識を有することを確認した．

以上により，学位審査委員会は，申請者には博士（数理学）の学位が授与される資格があるものと判断する．