

2 振動子系の同期による対人格闘競技の理解

Understanding interpersonal competition as synchronization of a two coupled oscillator system

山 本 裕 二*
木 島 章 文***

横 山 慶 子**
奥 村 基 生****

Yuji YAMAMOTO*
Akifumi KIJIMA***

Keiko YOKOYAMA**
Motoki OKUMURA****

Synchronization is a ubiquitous phenomenon not only in the physical and chemical domains but also in the natural and biological domains. This study briefly reviewed a coupled-oscillator model for synchronization and applied this model to interpersonal competitions such as martial arts. We presented theoretical considerations concerning the two coupled oscillator and Kuramoto models to explain synchronization. We also applied our model to interpersonal competition during sporting activities. We assumed that the coupling strength in the model would be depicted by the interpersonal distance between two players and that the phase could be regarded as stepping-toward and stepping-away movements for both players. This simulation was able to partially explain the interpersonal competition. However, we found both harmonic and non-harmonic oscillation, including abrupt switching, in a real setting. This suggests that an alternative model is needed to understand forms of interpersonal competition such as martial arts.

1 序

我々は、タグ鬼ごっこや剣道に見られる二者間の攻防では、二者間距離に依存して位相同期の様式が切り替わることを明らかにしてきた。タグ鬼ごっこを反復練習することによって、二者間距離がより近いところで同相同期から逆相同期に切り替わる (Kijima et al., 2012)。また剣道の上級者においては、わずか10cmの二者間距離の違いによって、同相同期と逆相同期を切り替え、その距離は静的に測定した打突可能距離にほぼ一致する (Okumura et al., 2012)。

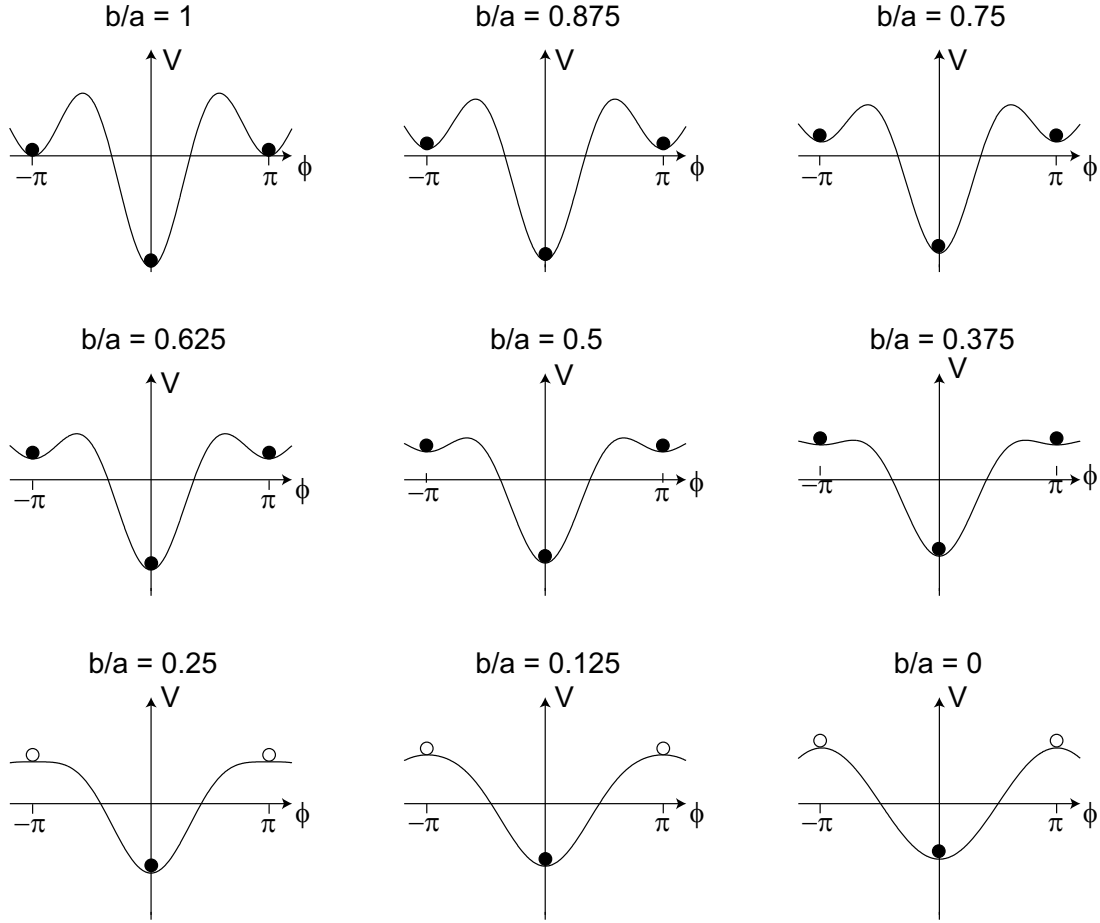
これらの研究では、相手に対する詰め引き速度を秩序変数 (order parameter) とし、二者間距離を制御変数 (control parameter) とすることによって、HKB モデル

(Haken et al., 1985)に基づく、相対位相領域分析 (relative phase region analysis) (Schmidt & O'Brien, 1997; Coey et al., 2011) を適用している。

この出発点となる式 (1) に示す HKB モデルは、一種の振動子モデルで、2つの振動子の相対位相、あるいは位相差 (ϕ) を変数とし、アトラクタの停留 (dwell) の深さを示す地形ダイナミクス (landscape dynamics)、あるいはポテンシャルダイナミクス (potential dynamics) である。そして b/a をパラメータとして、その地形が変化し、分岐 (bifurcation) が生じることを示すものである (図1)。

$$V = -a \cos \phi - b \sin 2\phi \quad (1)$$

* 名古屋大学
** 工学院大学
*** 山梨大学
**** 東京学芸大学
* Nagoya University
* Kogakuin University
* University of Yamanashi
* Tokyo Gakugei University


 図1 HKB モデルにおけるパラメータ (b/a) の変化に伴う地形の変化

本稿では、対人格闘競技における二者間同期現象を、一般的な局所結合系（蔵本、2003）から位相同期の実験結果の説明を試みる。

2 振動子モデル

本節では、局所結合系である振動子モデル（coupled oscillator model）について概説する。

2.1 振動子

図2、一つの振動子の角速度と位相を表したものである。単位円上を角速度 ω で等速円運動する物体と考えると、 x 軸方向（実線）から、あるいは y 軸方向（点線）から観測した時には一直線上の往復運動になる。つまり、角度 θ を時間微分したものが、角速度 ω となる。

こういう動作をするものを振動子（oscillator）と呼び、 $\theta = \theta(t)$ を振動子の位相（phase）と呼ぶ。 ω は時間に依存しない定数で、位相 θ の値は、 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ で定義され

る。

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad \text{or} \quad \dot{\theta} = \omega$$

2.2 同期

同期（synchronization あるいは entrainment）とは、そもそも異なる周期をもつ複数のリズムが、何らかの相互作用（あるいは一方的な相互作用）の結果、完全に（あるいはほぼ）一致した振動周期をもつ現象である（郡、2012、p. 80）。ここでは心筋細胞や神経細胞の電氣的興奮を記述する数理モデルである次の FitzHugh-Nagumo model (FitzHugh, 1961; Nagumo et al., 1962) を用いる。

$$\dot{x} = c(y + x - x^3/3 + z) \quad (3)$$

$$\dot{y} = -(x - a + by)/c \quad (4)$$

ここで $1 - 2b/3 < a < 1$ 、 $0 < b < 1$ 、 $b < c^2$

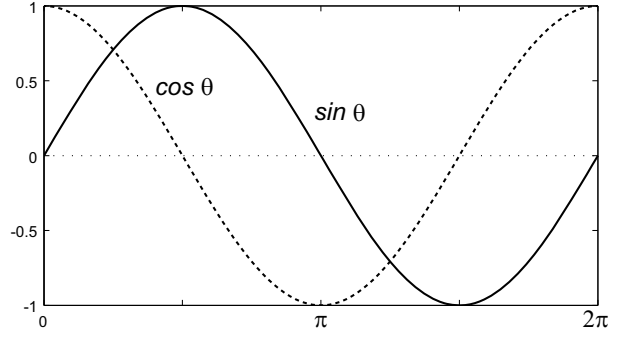
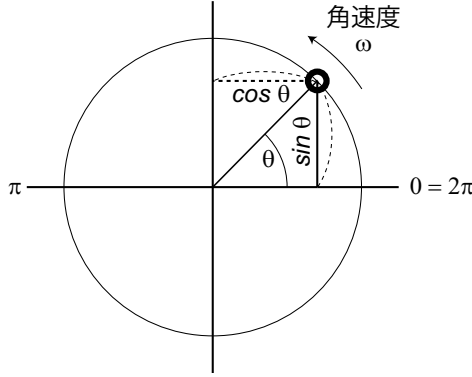


図2 振動子の角速度と位相。

z は外部入力で a, b, c は定数、 $a = b = z = 0$ で van der Pol 振動子 (van der Pol, 1926) と一致する。

2.2.1 周期外部入力がない場合

図3aは周期外部入力がない場合 ($z = 0$) の膜電位 (x) と、図3bは膜電位と不応性 (y) の位相図を示したもので、安定した周期軌道が見て取れる。図3bには、式(4)において $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0$ となる位相平面上のヌルクライン (nullcline) を示してある。このヌルクラインを境に軌道の運動方向が変化している。

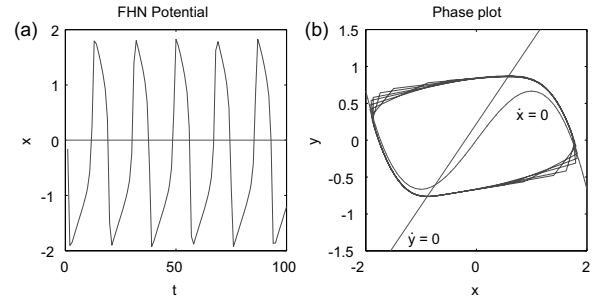


図3 : FitzHugh-Nagumo モデルのシミュレーション。周期外部入力がない場合。パラメータは $a = 0.2, b = 0.9, c = 10$ である。

2.2.2 周期外部入力がある場合

これに外部入力として $z = A \sin \Omega t$ を作用させる。

ここでは $A = 0.5$ に固定して、周期外部入力の振動数 Ω を変更したのが図4である。上段では周期外部入力 (点線) と1対1同期をしており、下段では2対1同期している。一般に外力が m 回振動する間に振動子が平均 n 回振動することを $m : n$ 同期と呼ぶ (ここで m と n は互いに素な整数である)。

図5aの点は、横軸が周期外部入力の振動数 Ω と振動子の振動数 ω の差、縦軸が周期外部入力の振動数 Ω と振動子の平均振動数 $\langle \omega \rangle$ の差で、 $A = 0$ 、つまり周期外部入力がない場合には $\langle \omega \rangle = \omega$ となり線上的になる。 $\Omega - \omega = 0$ のあたりを見ると、 $\Omega = \langle \omega \rangle$ となり、1:1同期であることがわかる。 Ω が ω から離れすぎると、外力の振動数と平均振動数が離れていくが、固有振動数になるわけではない。

また、図5bの点は、横軸を Ω/ω 、縦軸に $\Omega/\langle \omega \rangle$ を取ったものである。すると、 Ω/ω が一定である領域が $m : n$ 同期を、 $\Omega : \langle \omega \rangle$ で起こしているのがわかる。

つまり、1振動子に対して周期外部入力を与える場合には、その外部振動数 Ω と振動子の振動数 ω の差によって、外部入力の振動数と平均振動数 $\langle \omega \rangle$ が $m : n$ 同期

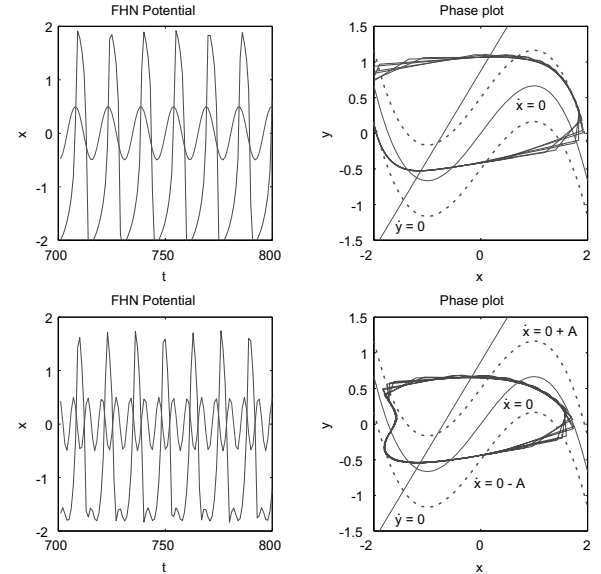


図4 : FitzHugh-Nagumo モデルのシミュレーション。周期外部入力がある場合。パラメータは $a = 0.7, b = 0.8, c = 10$ で、上段は $\Omega = 0.3847$ で1:1同期、下段は $\Omega = 0.16726$ で2:1同期である。

(ここで m と n は互いに素な整数である) を起こす。

2.3 位相モデル

位相モデル (位相振動子モデルとも呼ぶ) は、位相反応曲線 (PRC: Phase response curve)*1を利用した単純な数理モデルのことで、振動子の挙動を位相という1つの変数だけで表すモデルである。以下の2つの式は等価である。

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = 1 + c_1(\psi) p(t)$$

$$\frac{d}{dt} \phi(t) = \omega + Z(\phi) p(t)$$

ここで $\psi(t)$ 、 $\phi(t)$ はある時刻 t における位相で、 $\phi(t) = 2\pi/T\psi(t)$ と 2π で1周期とする。 $c_1(\psi)$ 、 $Z(\phi)$ は位相感受関数と呼ばれるもので、位相反応曲線と同じ形をした関数である。また、 $\omega = 2\pi/T$ で、 ω は自然振動数 (あるいは固有振動数) である。さらに、 $p(t)$ は外部入力である。

この方程式は Winfree (1967) によって導出され、振動子集団に適用し、多振動子の集団同期現象を初めて調べた。

2.3.1 強制同期

強制同期とは、周期的な入力を受けた振動子が、入力と全く同じ振動数で振動する現象で、1振動子への周期外部入力と同じである。

ここでは、 $Z(\phi) = \cos \phi$ と $p(t) = 2K(1 + \sin \Omega t)$ を考える。外部入力の周期が、 $T = 2\pi/\Omega$ で、大きさが K である。

三角関数の加法定理から

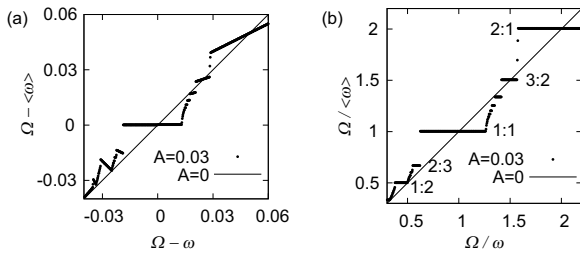


図5: FitzHugh-Nagumo モデルの外部入力振動数 Ω と平均振動数 $\langle \omega \rangle$ の関係。a では外部入力振動数と振動子の振動数の差と平均振動数の差を、b は外部入力振動数と振動数、平均振動数の比を示してある。図中に代表的な $m:n$ 同期を示してある。

*1 ここではこの位相反応曲線に関する説明は割愛する。郡・森田 (2011)、郡 (2012) などを参照。

$$Z(\phi)p(t) = K \sin(\phi + \Omega t) - \sin(\phi - \Omega t) + 2 \cos \phi \quad (7)$$

ここで、 $\sin(\phi + \Omega t)$ と $\cos \phi$ は、 $t = 0$ の時の位相を $\phi(0) = \phi_0$ とすると、それぞれ $\sin(\phi + \Omega t) = \sin(\phi + \Omega t + \phi_0) \approx \sin(2\Omega t + \phi_0)$ 、 $\cos \phi = \cos(\phi + \phi_0)$ となり、 \sin 関数も \cos 関数も平均値は0なので、非共鳴項と呼ばれ、振動子のダイナミクスにはどちらもほとんど寄与しない。そこで共鳴項と呼ばれ、振動子のダイナミクスに関係するのは $\sin(\phi - \Omega t)$ だけで、その結果整理すると

$$\frac{d}{dt} \phi(t) = \omega - K \sin(\phi - \Omega t)$$

に近似される。このように非共鳴項を無視するのが平均化と呼ばれる。

ここで $\theta = \Omega t - \phi$ とおくと

$$\frac{d}{dt} \phi(t) = \Delta \omega - K \sin \theta \quad (9)$$

となる。ここで $\Delta \omega = \Omega - \omega$ である。 ω は自然振動数、 Ω は外部入力の振動数。この方程式には $\sin \omega t$ のような時間の関数がない。こうした系が自律系と呼ばれる。

この解析結果は、 K と $\Delta \omega$ の関係によって、2つの状況に分かれる。それが図6である。横軸の矢印が $\theta(t)$ の時間発展の方向で、 $\dot{\theta} > 0$ の場合には正の向き (右向き)、 $\dot{\theta} < 0$ の場合には負の向きとなる。横軸との交点が平衡解で、図6aには一組の平衡解が存在し、左側の解 ($\theta = \theta_1$) は安定解、右側の解 ($\theta = \theta_2$) は不安定解である。 $\theta(t) = \theta_1$ という解は、 $\phi(t) = \Omega t - \theta_1$ に対応するので、位相が振動数 Ω で増加する、すなわち、外部入力の振動数と完全に一致した振動を行っている同期状態であるといえる。位相差 θ である特定の値にロックされているので、これを位相ロッキングという。

他方、図6bのように横軸との交点が存在しない場合には、 $\theta(t)$ は増え続けるか、減り続けるかである。つまり、 $\theta = 0$ を満たす解 θ が存在するかしないかで、同期が生じるか否かがわかる。

$$\dot{\theta} = 0 \Leftrightarrow \sin \theta = \frac{\Delta \omega}{K}$$

なので、 $\sin \theta$ に解が存在すればよい。ここで $-1 \leq \sin(\theta) \leq 1$ なので、

$$|K| \geq |\Delta \omega|$$

が同期が生じる条件といえる。

図7がそれを表したもので、要は振動数と外力の振動数の差が小さい場合には外力は弱くても同期するが、その差が大きくなればなるほど外力が強くないと同期が生じないということを示している。

2.3.2 相互同期 (2振動子同期)

次に、2つの少し異なる自然周波数を有する振動子間の同期を考える。そのモデルは次の通りである。

$$\frac{d}{dt} \phi_1(t) = \omega_1 + Z(\phi_1) p(\phi_2) \quad (10)$$

$$\frac{d}{dt} \phi_2(t) = \omega_2 + Z(\phi_2) p(\phi_1) \quad (11)$$

ここで $\phi_i(t)$ は振動子 i の位相である。このモデルでも強制同期の場合と同様、 $Z(\phi) = \sin(\phi)$ 、 $p(\phi) = K(1 + \cos \phi)$ とする。さらに、 ω_1 と ω_2 が近く、 K が小さいことを仮定すると

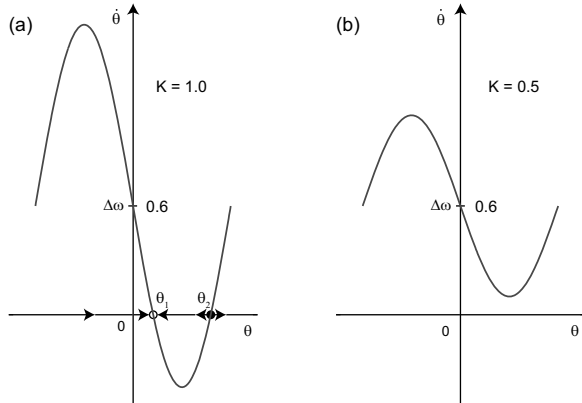


図6: $\theta(t)$ の時間発展方向と K と $\Delta\omega$ の関係によって来る安定解の有無 (phase_lock.m)

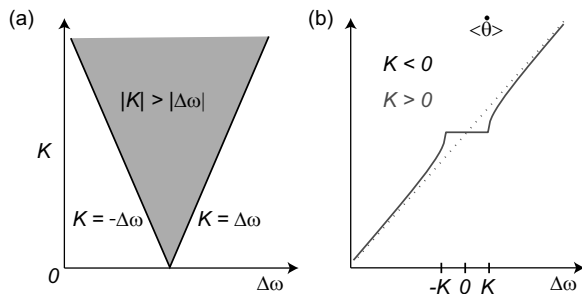


図7: a. パラメータ空間における1:1同期の領域。 K は入力の大さ、 $\Delta\omega$ は自然振動数と外力の振動数の差 $\omega - \Omega$ 。この領域がアーノルドの舌 (Arnold Tongue)。 b. 位相差の平均速度 $\langle \dot{\theta} \rangle$ の $\Delta\omega$ 依存性。 $\langle \dot{\theta} \rangle = 0$ のところが同期している部分。

$$\frac{d}{dt} \phi_1(t) = \omega_1 + \frac{K}{2} \sin(\phi_2 - \phi_1) \quad (12)$$

$$\frac{d}{dt} \phi_2(t) = \omega_2 + \frac{K}{2} \sin(\phi_1 - \phi_2) \quad (13)$$

となる。今度は $\theta = \phi_1 - \phi_2$ とすると式 (9) と同じ式が得られる (ただし、 $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ で、 K は $2K$ に置き換わる)。

$$\frac{d}{dt} \phi(t) = \Delta\omega - 2K \sin \theta \quad (14)$$

よって式 (14) によってあらわされる2つの振動子の運動は図7と同じ振る舞いをする。

つまり、

$$|2K| \geq |\Delta\omega| \quad (15)$$

が同期が生じる条件といえる。同期が収束する位相差 ($\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$) は

$$\Delta\theta = \frac{\Delta\omega}{2K}$$

となる。

2.3.3 集団同期 (蔵本モデル)

N 個の振動子の位相を $\phi_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, N$) とし、これらすべての振動子型の振動子と同様に相互作用している振動子集団を考える。ここで結合関数 $f(\phi) = -\sin(\phi)$ とする。すると、

$$\frac{d}{dt} \phi_i(t) = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\phi_j - \phi_i) \quad (16)$$

という N 個の位相方程式で記述できる。ここで、自然振動数 ω_i は適当な分布関数に従ってランダムに分布する。これが蔵本モデルである。

振動子集団がどのような同期状態にあるかは、蔵本秩序パラメータと呼ばれる次の量が指標となる。

$$R(t) = \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\phi_j} \right| \quad (17)$$

これは、半径1の円上に振動子を並べて、円の中心から各振動子へのベクトルを考え、その集団平均を取ったものの長さである。位相が完全に一致した状態 (完全同期) であれば $R = 1$ となり、完全にばらばらだと $R = 0$ となる。 $R > 0$ であれば、同期が生じる。

結合強度 K がある閾値 (K_{cr}) より小さいときには、 R の値が0であり、 K が閾値を超えると定性的な変化が表れる。分布の平均値 ω_0 に近い固有振動数を持つ振動

子同士の位相がロックし、まったく同じ振動数を持って運動するようになる。これを振動数凝縮 (frequency condensation) という。

この結合強度の臨界値 K_{cr} は、以下のように解析的に求まる。

$$K_{cr} = \frac{2}{\pi g(\omega_0)} \sim \Delta\omega \quad (18)$$

ここで $\Delta\omega$ は振動数分布関数 $g(\omega)$ の標準偏差である。つまり、振動数分布の特徴的な幅 $\Delta\omega$ と結合強度 K がほぼバランスした時に初めて同期が始まる。ここが2振動子系とは異なる点である。

3 対人格闘競技への適用

3.1 結合強度 K と固有振動数 ω の実験データからの同定

理論的には、結合強度と固有周波数の関係で収束する位相差が、 $\Delta\theta = \Delta\omega/2K$ で決定することが分かっている (式 (14))。ここで、これまで見てきた2連結振動子の結合強度 K が、二者間距離によって変化するという仮定を導入し、実データを用いる。これまでの解析から、タグ鬼ごっこの学習過程前半は0.4~0.6mの二者間距離において、また後半では0.6~0.8mにおいて同相同期と

逆相同期が切り替わることが分かっている (未発表データ)。つまり、これらの二者間距離以上では、お互いに距離を詰めるため同相同期が優勢で、これらの二者間距離より短くなると逆相同期、すなわち「詰める—離れる」という動きになる。そこで、同期が切り替わる二者間距離のパラメータ (IPD_{cr}) を、0.5、0.6、0.7mの3つとすることとした。

また、固有振動数に関しても、実データから算出した。各実験参加者の最大振動数と平均振動数を求め、二者間の振動数の差を求めたところ、最大振動数の差が0 ($\Delta\omega = 0$) となる試行があった (表1)。初期値が同じ場合には、振動数の差がないと、結合強度の正負によって、同相同期、もしくは逆相同期が続く。そこで、平均振動数を採用することとした。各ペアの各試行での平均振動数の差から、同期が生じる最低結合強度 (K_{cr}) を $\Delta\theta = \Delta\omega/2K$ に従い求めたものが表2である。

平均振動数から求めた最低結合強度の値から、結合強度のパラメータ K は、 $(IPD - 0.5)/10$ 、 $(IPD - 0.6)/10$ 、 $(IPD - 0.7)/10$ とした。

これらをまとめると、シミュレーションに用いたパラメータは以下の通りである。

固有振動数 実験データの各個人各試行の平均振動数

結合強度 二者間距離の実験データ (IPD) を変換したもの。

$$K(t) = (IPD(t) - IPD_{cr})/10, \quad IPD_{cr} = 0.5, 0.6, 0.7$$

3.1.1 シミュレーション結果

固有振動数のパラメータを実データから用いて、各ペアの第1試行と第8試行を、結合強度を3種類 (0.5, 0.6, 0.7m) に設定して実データと相対位相分布を比較したのが図10である*2。

結合強度を二者間距離が0.5、0.6mとしたもの (図10a-d) では二者間距離が0.4~0.6mのところ、同相同期が増加しており、実験データと食い違う。二者間距離を0.7mとした場合 (図10e, f) では、相対位相のピークが同相同期には見られなくなっているが、逆相同期でもない。

3.1.2 問題点

現在のシミュレーションにおける問題点として、以下の2点があげられる。

1. 最低結合強度 (K_{cr}) にばらつきがある (表2参照)
2. 結合強度 (K) は IPD の変化に伴い線形に変化

特に2番目の問題点に関しては、線形よりもシグモイ

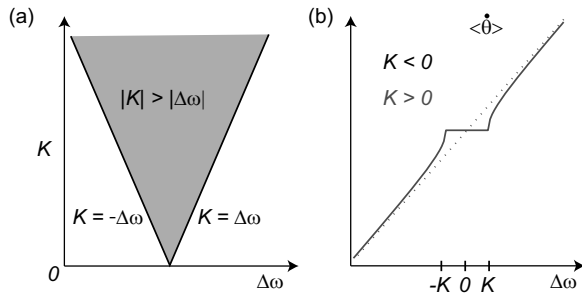


図8：蔵本秩序パラメータのイメージ。蔵本秩序パラメータ $R(t)$ は、円中心から延びるベクトルの長さ。

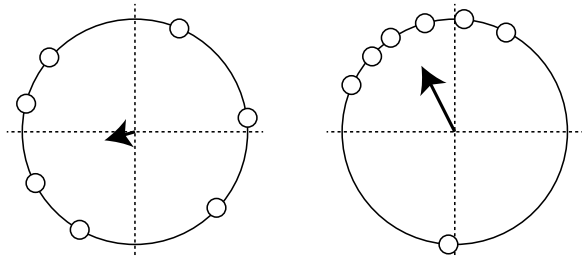


図9：(a) 蔵本秩序パラメータ $R(t)$ と結合強度 K の関係。(b) 固有振動数 ω_i と真の振動数 ω_o 。平均振動数に近い部分は完全に同期する。(c) 真の平均振動数 $g(\omega)$ の分布関数で、真の振動数のヒストグラム

*2 相対位相分布を分析するに当たり、Hilbert 変換によって瞬時位相を求める必要があるが、その方法については Appendix 参照のこと

表 1 実データの最大周波数の差 ($\Delta\omega$) と同期が起きる最低結合強度 (K_{cr})

Trial	Pair_1		Pair_2		Pair_3		Pair_4		Pair_5	
	$\Delta\omega$	K_{cr}	$\Delta\omega$	K_{cr}	$\Delta\omega$	K_{cr}	$\Delta\omega$	K_{cr}	$\Delta\omega$	K_{cr}
#1	1.132	0.566	0.699	0.350	3.547	1.774	0.772	0.386	1.481	0.741
#2	2.330	1.165	0.948	0.474	0.556	0.278	0.000	0.000	4.365	2.183
#3	0.278	0.139	0.356	0.178	2.250	1.125	1.984	0.992	0.970	0.485
#4	0.397	0.198	1.054	0.527	0.552	0.276	0.930	0.465	0.348	0.174
#5	1.578	0.789	0.342	0.171	1.318	0.659	0.167	0.083	0.132	0.066
#6	1.333	0.667	0.579	0.289	0.095	0.047	0.673	0.337	0.198	0.099
#7	0.103	0.052	0.226	0.113	0.167	0.083	0.652	0.326	1.378	0.689
#8	0.463	0.231	1.120	0.560	3.180	1.590	1.320	0.660	0.238	0.119
#9	0.667	0.333	0.000	0.000	0.067	0.034	1.244	0.622	1.190	0.595
#10	0.000	0.000	0.101	0.050	0.900	0.450	0.595	0.298	0.370	0.185

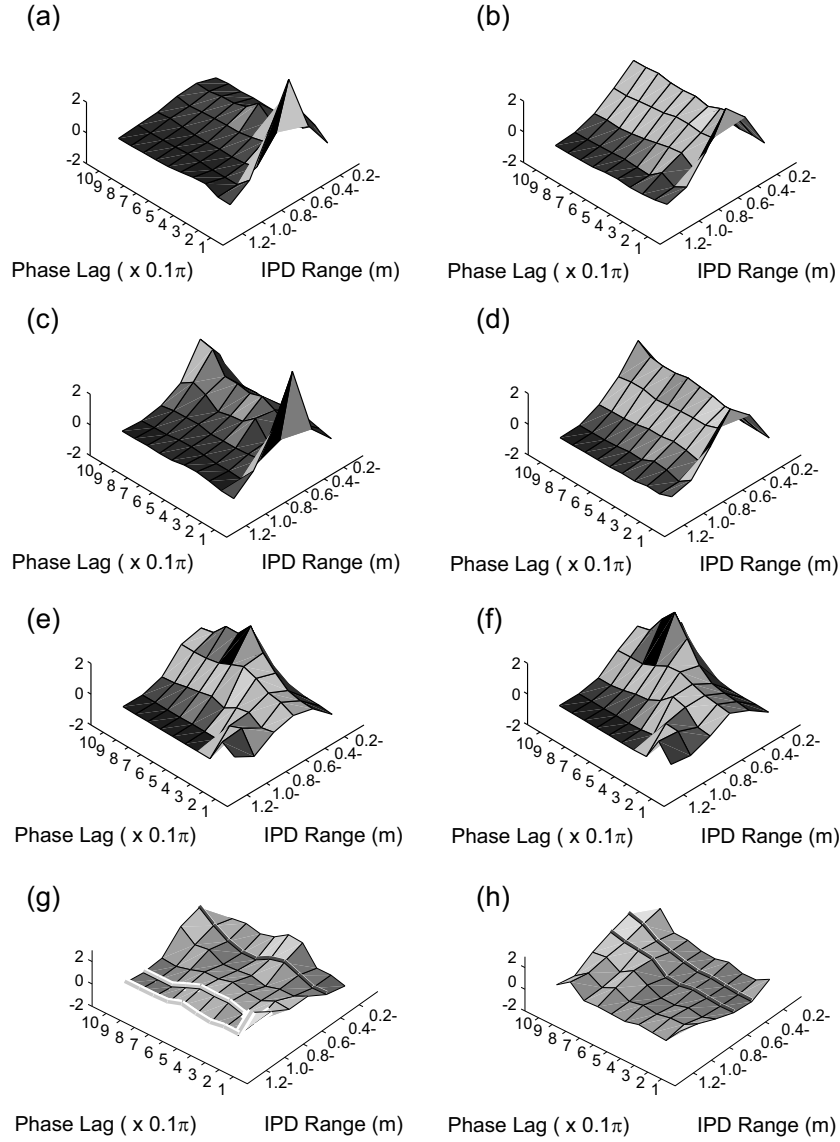


図10: 二者間距離と相対位相分布。a, b は $(IPD - 0.5)/10$ で計算したもの。c, d は $(IPD - 0.6)/10$ で計算したもの。e, f は $(IPD - 0.7)/10$ で計算したもの。g, h は実験データ。左列が第1試行で、右列が第8試行。 ω_1, ω_2 はそれぞれ実データの平均周波数。初期値は $\theta_1(0) = 0, \theta_2(0) = 0$

表2 実データの平均周波数の差 ($\Delta\omega$) と同期が生じる最低結合強度 (K_{cr})

Trial	Pair_1		Pair_2		Pair_3		Pair_4		Pair_5	
	$\Delta\omega$	K_{cr}	$\Delta\omega$	K_{cr}	$\Delta\omega$	K_{cr}	$\Delta\omega$	K_{cr}	$\Delta\omega$	K_{cr}
#1	0.173	0.087	0.006	0.003	-0.324	0.162	0.458	0.229	-0.149	0.074
#2	-0.132	0.066	-0.113	0.056	0.174	0.087	0.270	0.135	0.141	0.071
#3	-0.505	0.253	0.094	0.047	0.393	0.197	-0.048	0.024	-0.204	0.102
#4	-0.172	0.086	-0.046	0.023	-0.265	0.132	-0.664	0.332	0.093	0.047
#5	0.202	0.101	0.213	0.106	-0.060	0.030	0.311	0.155	0.316	0.158
#6	-0.568	0.284	0.001	0.001	-0.050	0.025	0.011	0.006	-0.098	0.049
#7	-0.155	0.078	0.104	0.052	-0.125	0.062	-0.058	0.029	0.006	0.003
#8	0.082	0.041	-0.077	0.039	-0.025	0.012	0.319	0.159	-0.160	0.080
#9	-0.403	0.202	-0.047	0.024	0.113	0.056	-0.283	0.142	-0.043	0.022
#10	0.135	0.068	0.177	0.088	0.048	0.024	0.206	0.103	-0.152	0.076

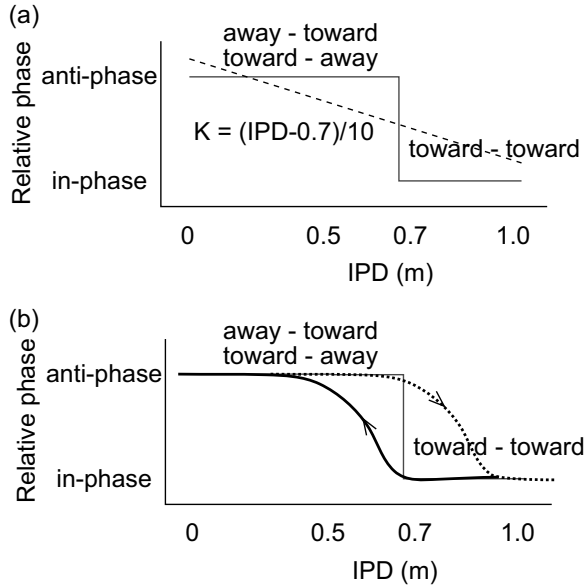


図11：(a) 今の仮定：結合強度 (K) は IPD の変化に伴い線形に変化。(b) 近い IPD でも逆相同期が生じるが、その変化がシグモイド。それによってヒステリシスが生じる。

ド関数を考えた方がよいかもしれない (図11)。そして近い二者間距離から遠い二者間距離に移行する場合と、その逆の場合とを勘案することによってヒステリシスを表現できる可能性がある。

4 まとめ

本稿では、2 連結振動子モデルを概説し、そのモデルを対人格闘競技の二者の運動パターンのシミュレーションへの適用可能性を検討した。2 振動子の結合強度を、二者間距離で表すことによって、二者間距離がある臨界値をとることによって同期の様相が切り替わることを確かめた。しかしながら、実験データを再現できたとは言えず、問題点も浮き彫りとなった。パラメータ同定の問題と結合強度の時間関数の問題である。

距離依存の連結振動子モデルとして、ろうそく振動子 (Kitahara et al., 2009) があるが、ここでは結合強度は2つの振動子の距離の二乗に反比例するとしている。今後より詳細な検討が必要である。

しかしながら、より大きな問題と考えられるのが、対人格闘競技における二者の運動パターンを振動子として取り入れることが妥当かどうかという問題である。対人格闘競技における二者の運動パターンは調和振動 (harmonic oscillation) からは程遠く、瞬時に位相が大きく変化する。連結振動子モデルは、基本的には調和振動を前提とし、ある一定の同期パターンにある時間内に収束することを示している。その分岐も比較的長い時間をかけて生じる、すなわち数周期以上を要して生じると考えられる。

したがって、連結振動子モデルを仮定するのではなく、例えば階層型ボイド (Couzin et al., 2002) のように、距離に依存して振る舞いの規則を変更すると考えた方がよいかもしれない。

Appendix 1：2振動子同期における K と $\Delta\omega$ の関係によって決まる安定解の有無

2 振動子同期においては、 K と $\Delta\omega$ の関係によって安定解の有無が決定する。それを示すプログラム。

```
■ phase_lock.m
```

```
K=1.0;
delta_omega=0.6;

theta=linspace(-pi,pi,360);
theta_dot=delta_omega-K*sin(theta);

figure(1);
clf;
```



```
subplot 121;
plot(theta,theta_dot);
ylim([-0.5 2.0]);

K=0.5;
delta_omega=0.6;

theta=linspace(-pi,pi,360);
theta_dot=delta_omega-K*sin(theta);

subplot 122;
plot(theta,theta_dot);
ylim([-0.5 2.0]);
```

Appendix 2 : ルンゲ=クッタ法 (Runge-Kutta method) による微分方程式の数値解析

ここでシミュレーションは位相を詰め引き速度と仮定し、各ステップごとに二者間距離を位相から求めることによって、結合強度を変更しようというものである。しかしながら、現時点では Matlab の ODE 関数を用いながら、ステップごとに数値解析する方法がわからない。そこで、4 次のルンゲ=クッタ法を用いることとする。図 A.2 は 2 つの方法によって同じパラメータで解いたものである。同じ結果が得られたので、プログラムは正し

く動いていると考えられる。

Appendix 3 : 瞬時位相の算出方法

瞬時位相差はヒルベルト変換 (Pikovsky, Rosenblum, and Kurths (2001) の p.368, 式 A2.7 による) を用いる (式 A.1)。

$$\phi_1(t) - \phi_2(t) = \arctan \frac{s_{H,1}(t)s_2(t) - s_1(t)s_{H,2}(t)}{s_1(t)s_2(t) + s_{H,1}(t)s_{H,2}(t)} \quad (\text{A.1})$$

ここで、位相差を、ヒルベルト変換をせずにそのまま引き算、ヒルベルト変換後 $\text{atan}(Y/X)$ 求める ($\text{atan}(x)$ を使うので $\pi/2 \sim \pi/2$ まで)、ヒルベルト変換後 $\text{atan2}(Y, X)$ で求める ($\text{atan2}(x, y)$ を使うので $-\pi \sim \pi$ まで) の 3 種類で比較したのが、図 A.2 で、そのまま引き算 (左)、ヒルベルト変換で $\text{atan}(Y/X)$ (中)、 $\text{atan2}(Y, X)$ (右) という結果。位相差としては $\text{atan2}(Y, X)$ が時系列から判断すればよい。

```
■ tco_RK_Hilbert.m
function tco_RK_Hilbert
```

```
clear;
```

```
k=-0.05;
```

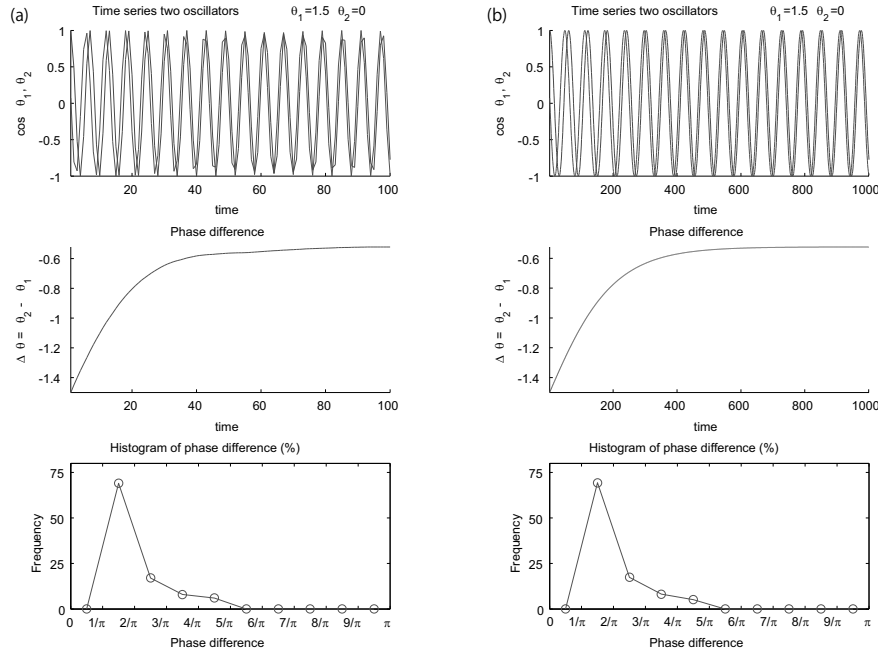


図 A.1 自然振動数 $\omega_1=1.05$, $\omega_2=1.0$, $k=0.05$, 初期値 $\theta_1=1.5$, $\theta_2=0$ として MATLAB の ODE 関数 (ode15s) で解いたもの (a) と同じパラメータをルンゲ=クッタ法で解いたもの (b)。

```

omega1=1.00;
omega2=1.05;
omega=[omega1; omega2];

theta1=1.5; % theta1の初期値
theta2=0; % theta2の初期値

tn=100;

x0 = [theta1; theta2];

i=1;
dt=0.1;
time(i)=0;
x(:,i)=[theta1; theta2];
for t=dt:dt:tn
    time(i+1)=t;

    k1=tco(x(:,i),omega,k);
    k2=tco(x(:,i)+dt/2*k1,omega,k);
    k3=tco(x(:,i)+dt/2*k2,omega,k);
    k4=tco(x(:,i)+dt*k3,omega,k);

    x(:,i+1)=x(:,i)+dt/6*(k1+2*k2+2*k3+k4);
    i=i+1;
end

x=x';
len=length(x);
y=linspace(1,tn,len);

%% relative phase
% 平均値を引く
tmpA=cos(x(:,1));
tmpB=cos(x(:,2));
tmpA=tmpA-mean(tmpA);
tmpB=tmpB-mean(tmpB);

% Hilbert transform by Rosenblum
sA=hilbert(tmpA);
sB=hilbert(tmpB);
sHA=imag(sA);sA=real(sA);

```

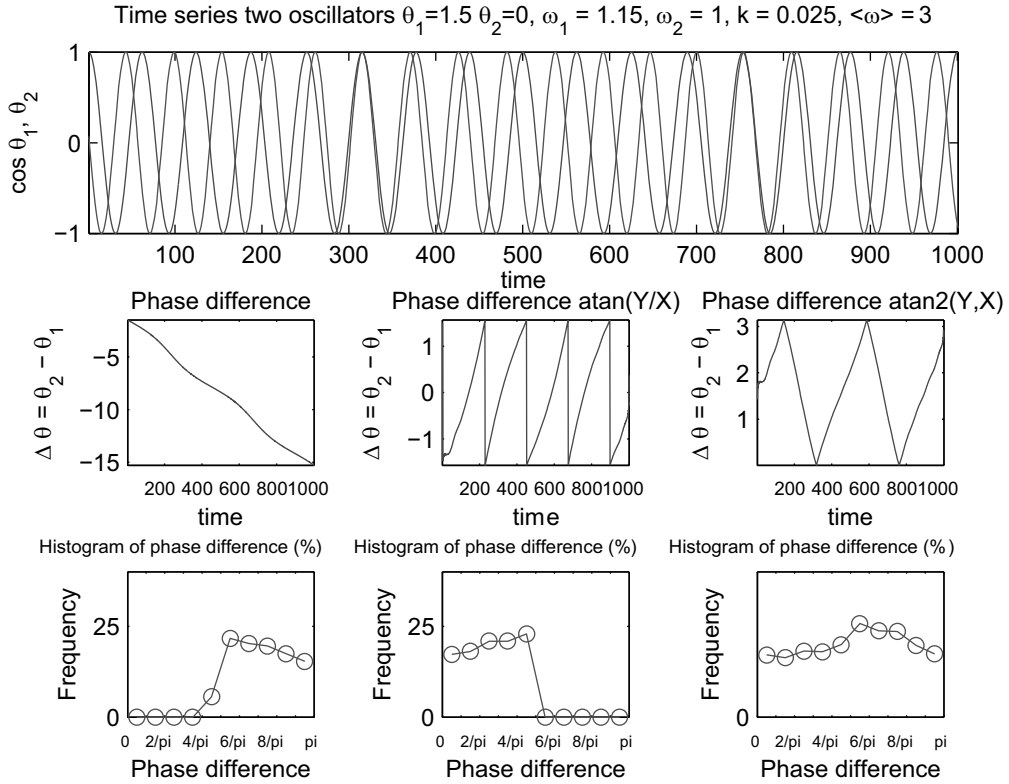


図 A.2 3つの計算方法で求めた位相差分析 (tco_RK_Hilbert.m)

```

sHB=imag(sB);sB=real(sB);

%   そのまま引き算
phaseD1=x(:,2)-x(:,1);

%   atan(Y/X) で算出
phaseD2=abs(atan((sHA.*sB-sHB.*sA)./(sA.*sB+sHA.*sHB)));

%   atan2(Y,X) で算出
phaseD3=abs(atan2((sHA.*sB-sHB.*sA),(sA.*sB+sHA.*sHB)));

function dx=tco(x,omega,k)

dx=zeros(2,1);
dx(1)=omega(1) + k * sin(x(2) - x(1));
dx(2)=omega(2) + k * sin(x(1) - x(2));

```

文 献

- Coey, C., Varlet, M., Schmidt, R. C., & Richardson, M. J. (2011). Effects of movement stability and congruency on the emergence of spontaneous interpersonal coordination. *Experimental Brain Research*, **211**, 483–493.
- Couzin, I. D., Krause, J., James, R., Ruxton, G. D., & Franks, N. R. (2002). Collective memory and spatial sorting in animal groups. *Journal of Theoretical Biology*, **218**, 1–11.
- FitzHugh, R. (1961). Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophysical Journal*, **1**, 445–466.
- Haken, H., Kelso, J. A. S., & Bunz, H. (1985). A theoretical model of phase transitions in human hand movements. *Biol. Cybern.*, **51** (5), 347–356.
- Kijima, A., Kadota, K., Yokoyama, K., Okumura, M., Suzuki, H., Schmidt, R. C., & Yamamoto, Y. (2012). Switching dynamics in an interpersonal competition brings about ‘Deadlock’ synchronization of players. *PLoS ONE*, **7**, e47911.
- Kitahara, H., Taguchi, J., Nagayama, M., Sakurai, T., Ikura, Y., Osa, A., Sumino, Y., Tanaka, M., Yokoyama, E., & Miike, H. (2009). Oscillation and synchronization in the combustion of candles. *Journal of Physical Chemistry A*, **113**, 8164–8168.
- 郡 宏・森田善久 (2011). 『生物リズムと力学系』. 東京：共立出版. 郡 宏 (2012). 振動と同期の数学的思考Ⅱ. 『時間生物学』, **18**, 80-88.
- 蔵本由紀 (2003). リズム現象と位相ダイナミクス. 蔵本由紀 (編), 『非線形・非平衡系現象の数理1 リズム現象の世界』, 137-184. 東京：東京大学出版会.
- Nagumo, J., Arimoto, S., & Yoshizawa, S. (1962). An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proceedings of the IRE*, **50**, 2061–2070.
- Okumura, M., Kijima, A., Kadota, K., Yokoyama, K., Suzuki, H., & Yamamoto, Y. (2012). A critical interpersonal distance switches between two coordination modes in kendo matches. *PLoS ONE*, **7**, e51877.
- Pikovsky, A., Rosenblum, M., & Kurths, J. (2001). *Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences*. New York: Cambridge University Press. (徳田 功 訳 (2009). 『同期理論の基礎と応用－数理科学, 化学, 生命科学から工学まで－』. 東京：丸善.).
- Schmidt, R. C. & O’Brien, B. (1997). Evaluating the dynamics of unintended interpersonal coordination. *Ecological Psychology*, **9**, 189–206.
- van der Pol, B. (1926). On ‘Relaxation-oscillations’. *Phil. Mag.*, **2**, 978–992.
- Winfree, A. T. (1967). Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators. *J. Theor. Biol.*, **16**, 15–42.

