

流砂の水理

名古屋大学工学研究科社会基盤工学専攻教授 辻本哲郎

河川 水だけでなく土砂も運ばれる（流砂）→地形変化 治水・河川生態系

流砂現象

流砂を規定する要素：

場 g 重力加速度
 流体 ρ 水の密度
 ν 動粘性係数
 流れ h 水深
 U 流速 → u_* 摩擦速度 （←抵抗係数）
 砂 d 粒径
 ρ 砂の密度

無次元表示 $Re_* \equiv \frac{u_* d}{\nu}$, $\tau_* \equiv \frac{u_*^2}{(\sigma/\rho - 1)gd}$, $\frac{\sigma}{\rho}$, $\frac{h}{d}$ → 普遍的記述

移動限界

Shields ダイアグラム $Re_* \sim \tau_*$ (限界掃流力)

流砂の運動形態からの分類

- ・ 掃流砂 (Bed load sediment) Einstein, Kalinske
 粒子運動平均流に支配される Saltation 軌跡の砂面での反発 (←不規則性)

→ 掃流砂量式 $q_{B*} \equiv \frac{q_B}{\sqrt{(\sigma/\rho - 1)gd^3}} = func(\tau_*)$

流砂の連続式 $\frac{\partial y_b}{\partial t} = \frac{1}{1 - \rho_0} \frac{\partial q_B}{\partial x}$ y_b =河床高, ρ_0 =砂の空隙率

- ・ 浮遊砂 (Suspended load sediment) Rouse, Lane-Kalinske
 水流の乱れに乗った不規則挙動 (乱流拡散)

→ 濃度分布式 $\frac{c(y)}{c_B} = func\left(\frac{y}{h}\right)$ c_B =底面濃度

浮遊砂量 $q_S = \int_{\rightarrow 0}^h c(y)u(y)dy$

水深平均移流拡散方程式 (沈殿・巻上げ) $C = \frac{c_B}{h} \int_{\rightarrow 0}^h \frac{c(y)}{c_B} dy$ 水深平均濃度

$$\frac{\partial hC}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hCU - \varepsilon_{sx} h \frac{\partial C}{\partial x} \right) = w_0 c_B - w_0 c_{Be}$$

底面での上向き, 下向きフラックス

ε_s = 浮遊砂の乱流拡散係数

c_{Be} = 平衡状態での底面濃度 $\leftarrow \frac{u_*}{w_0}, \tau_*$ に依存

移動床過程

河床地形, 河道形状

小規模河床波 Dunes (砂堆), Ripples (砂漣), Antidunes (反砂堆) \rightarrow 水流の抵抗

中規模河床形態 単列(交互)砂州, 複列砂州 \rightarrow 流れの境界条件

河床低下・河床上昇

川幅拡大(側岸侵食)・縮小(堆積)

分級

掃流砂

Einstein モデル

ジグザグモデル (rest period $\{T\}$ と step length $\{X\}$) \leftarrow H.A. Einstein 1935

確率変数, 確率過程 \rightarrow “Stochastic Hydraulics”

平均化 \rightarrow pick-up rate $p_s = 1/E[T]$, 平均 step length $\Lambda = E[X]$

流砂量 = 粒子群の平均移動速度 $V_g \times$ 移動層厚さ $V_g \sim p_s \Lambda$

1942 基準点を通過する砂粒子個数 \rightarrow 流砂量 \rightarrow 非平衡への応用示唆

$$q_B = \frac{\Lambda}{A_2 d_2} p_s A_3 d^3$$

1950 単位面積あたりの離脱個数 = 停止個数 \rightarrow 平衡概念

$$\frac{p_s}{A_2 d^2} = \frac{q_B}{\Lambda A_3 d^3}$$

Einstein の流砂量式は実験式であるスイス公式 (Meyer-Peter-Muller 式) で良く近似

$$q_{B*} = 8(\tau_* - \tau_{*c})^{3/2} \quad \tau_{*c} = \text{無次元限界掃流力}$$

非平衡流砂量式 (平坦河床) Nakagawa-Tsujimoto 1980

$$q_B(x) = \frac{A_3 d^3}{A_2 d^2} \int_0^\infty p_s(x - \xi) f_X(\xi) d\xi$$

$$f_X(\xi) = \frac{1}{\Lambda} \exp\left(-\frac{\xi}{\Lambda}\right)$$

Kalinske モデル (1947)

移動粒子数密度 \times 粒子運動速度 = 流砂量

\rightarrow 芦田・道上の掃流砂量式 (1972)

$$q_{B*} = 17\tau_*^{3/2} \left(1 - \frac{\tau_{*c}}{\tau_*}\right) \left(1 - \sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\tau_*}}\right)$$

無次元化された掃流砂量と Shields 数の関係 ←Bagnolds : エネルギーと仕事の釣合 (1957)

掃流砂量式の意義

掃流砂量の推測 ←「有効掃流力」の概念 ←小規模河床波

Ripples (砂漣), Dunes (砂堆), Antidunes (反砂堆)

様々な移動床過程 (小規模河床波, アーマーコート伝播) が出現する「萌芽」を具備

掃流運動に伴う「非平衡性」 固定床に接続する移動床で実感



Step length が鍵

小規模河床波形成

砂面不安定 = 砂面擾乱の増幅・減衰 ←J.F. Kennedy (1963)

初期擾乱 = 微小振幅正弦波砂面形状 $y_b(x, t) = a(t) \sin \kappa(x - ct)$

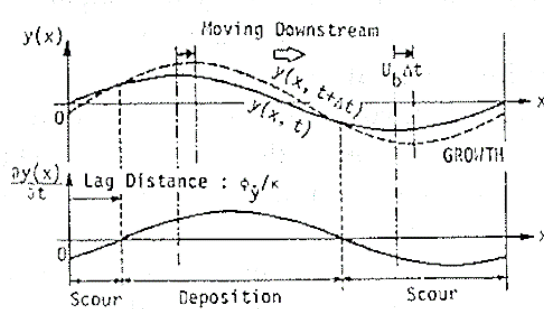
$\kappa = 2\pi/L$ L =波長, c =伝播速度, a =振幅

$$\frac{\partial y_b(x, t)}{\partial t} = \dot{a}(t) \sin \kappa(x - ct) - kca(t) \cos \kappa(x - ct) = r_y a \sin \{ \kappa(x - ct) - \phi_y \}$$

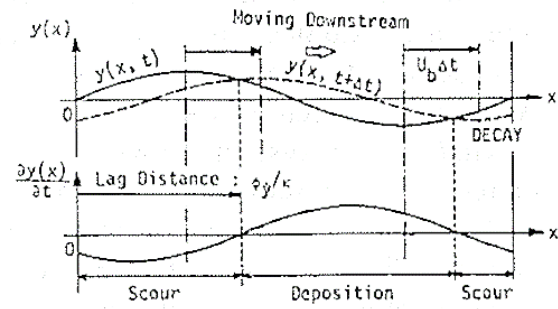
$$\frac{\dot{a}}{a} = \cos \phi_y; \quad \kappa c = \sin \phi_y$$

増幅・減衰 伝播方向

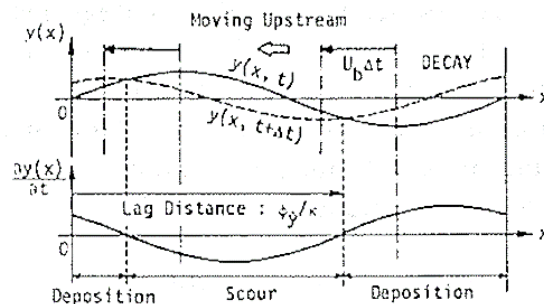
時刻 t と $t+\Delta t$ での砂面形状の比較 → 増幅・減衰, 前進・後退の判断



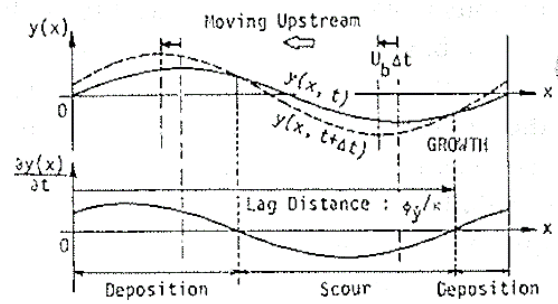
(a) $0 < \phi_y < \pi/2$



(b) $\pi/2 < \phi_y < \pi$



(c) $\pi < \phi_y < (3/2)\pi$



(d) $(3/2)\pi < \phi_y < 2\pi$

砂面上の掃流力空間分布＝せん断流の効果で砂面形状と位相差

$$\tau_b(x,t) = \tau_{b0}[1 + r_\tau a(t) \sin\{\kappa(x - ct) - \phi_\tau\}]$$

↓ Pick-up rate と掃流力の関係

砂面上の Pick-up rate の空間分布 位相差

$$r_p = r_{p\tau} r_\tau : \phi_p = \phi_\tau + \phi_{p\tau}$$

$$p_s(x,t) = p_{s0}[1 + r_p a(t) \sin\{\kappa(x - ct) - \phi_p\}]$$

↓ 非平衡掃流砂量式 $q_B(x) = \frac{A_3 d^3}{A_2 d^2 \Lambda} \int_0^\infty p_s(x - \xi) \cdot \exp\left(-\frac{\xi}{\Lambda}\right) d\xi$

砂面上の流砂量空間分布

$$r_B = r_{Bp} r_p : \phi_B = \phi_{Bp} + \phi_p \quad \phi_{Bp} = \kappa \delta_{Bp}$$

$$q_B(x,t) = q_{B0}[1 + r_B a(t) \sin\{\kappa(x - ct) - \phi_B\}]$$

↓ 流砂の連続式 $\frac{\partial y_b}{\partial t} = \frac{1}{1 - \rho_0} \frac{\partial q_B}{\partial x}$

砂面高さの時間変化率の空間分布

$$r_y = r_{yB} r_B : \phi_y = \phi_{yB} + \phi_B$$

$$\frac{\partial y_b(x,t)}{\partial t} = r_y a(t) \sin\{\kappa(x - ct) - \phi_y\}]$$

浮遊砂

平衡状態での浮遊砂濃度分布 $c(y)$

下向きフラックス cw_0

上向きフラックス $\overline{c'v'} = \varepsilon_s \frac{dc}{dy}$

支配方程式 $cw_0 = -\varepsilon_s \frac{dc}{dy}$

解 ($\varepsilon_s = \text{const.}$) ← Kalinske

$$\frac{c(y)}{c_B} = \exp\left(-\frac{w_0 y}{\varepsilon_s}\right) \quad c_B = \text{底面濃度}$$

浮遊砂の拡散係数 $\varepsilon_s = \beta \nu_t$

ν_t = 渦動粘性係数 (水の運動量についての乱流拡散係数); $1/\beta$ 乱流 Schmidt 数

$$v_t = \frac{\kappa_0 u_* h}{6} \quad \leftarrow \text{水深平均値} \quad \leftarrow \quad v_t = \kappa_0 u_* h \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad (\rightarrow \text{Rouse 式})$$

(放物型, Slip 速度を持つ流速分布) \uparrow

$$\rho u_*^2 \left(1 - \frac{y}{h}\right) = \rho v_t \frac{du}{dy}; \quad \frac{du}{dy} = \frac{u_*}{\kappa_0 y} \quad (\text{対数則}) \quad \kappa_0 = \text{Karman 定数}$$

Reynolds 応力の三角形分布 + Boussinesq 近似 対数則の微分表示

$$\frac{c(y)}{c_B} = \exp\left(-\frac{6}{\beta \kappa_0} \frac{w_0}{u_*} \frac{y}{h}\right)$$

浮遊砂粒子の確率的挙動 \leftarrow モンテカルロシミュレーション

粒子の存在高さについての確率密度 $f(y, t)$ についての支配方程式:

$$f(y|t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y - \zeta | t - \Delta t) g(\zeta) d\zeta$$

$g(\zeta) = \Delta t$ 時間に水深方向に ζ だけ位置偏倚する確率密度

$$E[\zeta] = -w_0 \Delta t; \quad Var[\zeta] = v_{rms}'^2 \cdot \Delta t$$

定常状態 $f(y) = f(y|t) = f(x|t - \Delta t)$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ f(y) + \zeta f'(y) + \frac{\zeta^2}{2!} f''(y) + \cdots \right\} g(\zeta) d\zeta$$

$$f(y) + E[\zeta] \cdot f'(y) + \frac{Var[\zeta] + \{E[\zeta]\}^2}{2} f''(y)$$

$$-w_0 f = \frac{1}{2} \{v_{rms}'^2 + w_0^2\} \Delta t \frac{df}{dy}$$

$c(y)$ と $f(y)$ が「相似」 \rightarrow

$$\varepsilon_s = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{v_{rms}'}{u_*} \right)^2 + \left(\frac{w_0}{u_*} \right)^2 \right\} u_*^2 \Delta t \quad \text{辻本(1986)}$$

中立粒子の乱流拡散係数を渦動粘性係数と同一視 \rightarrow

$$\frac{1}{\beta} \equiv \frac{\varepsilon_s}{v_t} = 1 + \alpha \left(\frac{w_0}{u_*} \right)^2; \quad \alpha = \left(\frac{v_{rms}'}{u_*} \right)^{-2} = 1.56 \quad \leftarrow \text{Delft 回帰曲線(1979) と酷似}$$

$$\Delta t = \frac{2\alpha v_t}{u_*^2} = \frac{\alpha \kappa_0 h}{3u_*}$$