別紙 4

報告番号	※　　第　　号

主　論　文　の　要　旨

論文題目 ON FROBENIUS SPLIT ABELIAN FIBER SPACES OVER CURVES

(曲線上の FROBENIUS分裂するアーベルファイバー空間について)

氏　　名 白土智彬

論　文　内　容　の　要　旨

k を標数が素数 p でありかつ代数閉であるような体とし, X を k 上の代数多様体とする. 本論文では, X に対し定義される Frobenius 分裂という性質を, 特に X が曲線上のアーベルファイバー空間の構造を持ち, 順ファイバーしか持たないときに重複ファイバーの重複度, 非通常点, 高次直像の次数及び体の標数 p で分類する.

正標数上の代数多様体 X には絶対的 Frobenius 写像 $F_X : X \to X$ が定義できる. この写像は位相空間の間の写像としては恒等写像であるが, 座標環の間の写像としてはすべての関数を p 乗する, という次の写像で定義される:

$$F_X^\sharp : \mathcal{O}_X \to (F_X)_*\mathcal{O}_X \quad (f \mapsto f^p).$$

ここで $(F_X)_*\mathcal{O}_X$ は層としては $\mathcal{O}_X$ であるが, この p 乗写像 $F_X^\sharp$ を通して $\mathcal{O}_X$-加群の層とみなすことができる. $(F_X)_*\mathcal{O}_X$ を $\mathcal{O}_X$-加群とみなしたときに, $\mathcal{O}_X$ を直和因子としてもつような, あるいはもう少し一般的に $F_X^\sharp$ が $\mathcal{O}_X$-加群の射として分裂するとき, X を Frobenius 分裂する（F-split）と言う. F-split という条件は正標数上の代数多様体の大域的な条件であり, 代数多様体に強い条件を課す. また F-split な代数多様体は小平の消滅定理を満たすなど正標数の代数多様体の中でも「良い」性質をもつことが知られている. 特に代数多様体がファイバー構造 $\pi : X \to Y$ をもつとき, X が F-split ならば π のファイバーや Y に強い条件を課すことになるわけだが, そこでこの「強い条件」がどのような条件なのか, またどのような「強い条件」が満たされれば X は F-split となるか？ということをより詳しく調べたい. このような疑問に対し, 次の先行結果が知られている.

事実（c.f., 權業-高木, Mehta-Srinivas）　$\pi : X \to C$ を相対的極小な線織曲面とする. このとき C 上の階数 2 のベクトル束 $\mathcal{E}$ に対し X は射影束 $\mathbb{P}_C(\mathcal{E})$ と同型であるとしてよい. 全空間 X が F-split と C が F-split かつベクトル束 $\mathcal{E}$ が分裂することは同値である.

線織曲面とは, 代数曲線上の全てのファイバーの種数が 0 であるような代数曲面である. そこでこの学位論文では, 楕円ファイブレーション $\pi : X \to C$ と呼ばれる代数曲線上の一般的なファイバーの種数が 1 になるような代数曲面 X や, 楕円曲面の高次元への一般化になっている曲線上のアーベルファイバー空間 $\pi : X \to C$ において, 全空間 X が F-split になる条件について調べた. より詳しく言えば,

主定理　X の次元を n とし, H を X の超平面切断, K_X を X の標準因子とする. $\pi : X \to C$ を跳躍数が 1 の順ファイバーのみ持つような C 上のアーベルファイバー空間とし, $(K_X^2 \cdot H^{n-2}) = 0$ を満たすとする.

1. C が通常型楕円曲線ならば, X が F-split であることは, π の一般的ファイバーが通常型アーベル多様体であり $\mathrm{ord}(K_X)|(p-1)$ であることと同値. ただし $\mathrm{ord}(K_X) := \min\{n \in \mathbb{Z}_{n>0} | \omega_X^{\otimes n} \cong \mathcal{O}_X\}$.

2. C が射影直線と同型ならば, X が F-split であることは, π の一般的ファイバーが通常型アーベル多様体であり, π の重複ファイバーの重複度と非通常点, 高次直像の次数及び k の標数 p により特徴付けられる.

ここで「順ファイバーのみ持つ」という定義は, 高次直像 $R^{n-1}\pi_*\mathcal{O}_X$ が局所自由層ということであり, 正標数特有の病理的な現象は起こらないことが多い. また跳躍数は順ファイバーに定義される数値的不変量で, 特に $n = 2$ ならば跳躍数はいつでも 1 であることが知られている. 非通常点 $b \in C$ とはファイバー $F_b := \pi^{-1}(b)$ に誘導されるコホモロジーの Frobenius 作用がゼロであるような点 b のことであり, 後述する相対的 Frobenius 写像の余核から自然に定義される.

F-split の定義において絶対的 Frobenius 写像が用いられるが, 絶対的 Frobenius 写像はすべての関数の p 乗で定義されるので特に k 上の射ではない. このことは特に X の絶対的 Frobenius 写像とファイバーへの制限が両立的でないことを意味し, 特に楕円曲面や線織曲面などのファイバー構造 $\pi : X \to Y$ をもつような代数多様体を考えるときは大きな障害となりうる.

このような問題に対し, 本論文では以下のアプローチを取る. まずファイブレーション $\pi : X \to C$ に対し, 相対的 Frobenius 写像と呼ばれるファイバー積の普遍写像で定義される写像を用いて, X の絶対的 Frobenius 写像をファイバー積の射影と相対的 Frobenius 写像に分解する. さらにファイブレーション $\pi : X \to C$ が代数曲線上のアーベルファイバー空間となる場合は, 相対的 Frobenius 作用は一般的ファイバーが通常であれば, ある直線束の非自明な大域切断から誘導される写像である, ということを示す. このようにして X の F-split という性質を相対的 Frobenius 写像で特徴付け, さらに順ファイバーしか持たないようなアーベルファイバー空間であれば渡辺氏による代数曲線上とその上の $\mathbb{Q}$-因子の組に関する F-split の分類の結果を組み合わせることによって**主定理**を示す.

また一般に楕円ファイブレーション $\pi : X \to C$ に対し, 与えられた重複度をもつ重複ファイバーがいつでも存在するとは限らないが, **主定理**において出現する重複ファイバーにおいて, 存在するものには具体的に構成して例を与え, 存在しないものは桂・上野両氏の判定法を用いて存在しないことを証明する.