論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号	※　　　　　第　　　　号

氏　　　　名　　藤野　弘基

論　文　題　目

TEICHMÜLLER THEORY FOR C−Z
(C−Z に対するタイヒミュラー理論)

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　Ph.D.
森　吉　仁　志

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
大　沢　健　夫

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
小　林　亮　一

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（理学）
伊　師　英　之

論文審査の結果の要旨

与えられたリーマン面 R に対して，R の擬等角変形全体を記述する空間をタイヒミュラー空間とよび，これを $T(R)$ で表す．有限型のリーマン面 R，つまりコンパクトなリーマン面から高々有限個の点を除いて R が得られている場合には，タイヒミュラー空間 $T(R)$ は有限次元の多様体となり，この場合には多くの研究が行われている．一方，有限型でないリーマン面の場合には，そのタイヒミュラー空間 $T(R)$ は無限次元の（可分でない）バナッハ空間となり，その研究には未解明の部分が多く残っている．例えば，与えられた有限型リーマン面が互いに擬等角同値であるかどうかは，その種数と尖点の数によって容易に判定することが可能であるが，有限型でないリーマン面に対しては，このような簡単な判定条件を与えることは難しい．具体例を挙げると，$\mathbb{C} \setminus \{\pm e^n\}_{n=0}^{\infty}$ と $\mathbb{C} \setminus \{e^n\}_{n=0}^{\infty}$ が擬等角同値であることは初等的に証明できるが，$\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ と $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ は擬等角同値にはならない．さらに, $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$, $\mathbb{C} \setminus \{e^n\}_{n=0}^{\infty}$, $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ は全て同相なリーマン面であるがどの二つも擬等角同値とはならない．実際，$\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ と $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ が擬等角同値でないことは，多孔性 (porosity) が大域的な擬等角写像によって擬不変であるというヴァイサラ (Väisälä) の定理から従い，さらにその他のリーマン面が擬等角同値でないという主張は，本学位申請論文において証明される．このように無限型リーマン面に対する擬等角同値性などを含む性質の研究は，有限型の場合に比して非常に微妙な問題となることが判る．

本学位申請論文では，有限型でないリーマン面としてとくに $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ を取り上げ，その擬等角同値性について詳しく研究し, さらに $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ と同相であるが擬等角同値とはならないリーマン面の具体例を多く見出している．また擬対称写像の拡張性に関するヴァイサラ問題を考察し，$\mathbb{Z}$ に対する場合に肯定的な解決を与え, タイヒミュラー空間に作用するモジュラー群 $\mathrm{Mod}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})$ の極限集合の構造についても論じている．

本学位申請論文は 3 章から成る．第 1 章は準備的内容である．第 2 章では，$\mathbb{C}$ からカントール集合を除いた空間の擬等角同値性に関する MacManus の結果を紹介し，さらに実数の部分集合 A に対し，どのような条件の下で $\mathbb{C} \setminus A$ が $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ と擬等角同値になるかという問題を考え，いくつかの必要十分条件を提示した (Theorem A). またこの特徴付けの応用として，η-擬対称であるような任意の埋め込み $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ は K-擬等角拡張 $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を有するという結果を示した (Theorem C)．1995 年にヴァイサラは，$\mathbb{R}^n$ の部分集合 X が与えられたとして，η-擬対称な埋め込み $f : X \to \mathbb{R}^n$ が K-擬等角拡張 $F : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ をもつかという問題を提出した．申請者の上記結果は，$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ に対する 1 次元ヴァイサラ問題に肯定的な解決を与えたことになり，その成果は高く評価できる．また，これまでにヴァイサラ問題に関して多くの研究が行われているが，それらは連結あるいは有界な集合 X に対する場合が殆どであって，そうでない場合における研究成果は殆ど無いといっても過言でない．上記結果は非有界かつ非連結集合に対するヴァイサラ問題の解決を与えており，この点でも申請論文の高い独自性を認めることができる．

次いで第 3 章では，無限位数の双正則自己同型写像を持つという条件をおいて，$\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ と擬等角同値となるリーマン面を特徴付けて，そのようなリーマン面は $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ のある種の商空間の擬等角変形を $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ の擬等角変形に持ち上げることによって全て得られることを示した．従って, モジュラー群 $\mathrm{Mod}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})$ に属する無限位数の元のタイヒミュラー空間 $T(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})$ への作用に関する固定点集合 T_∞ は, $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ の商空間のタイヒミュラー空間を自然に $T(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})$ に埋め込んだ空間 T_0 の $\mathrm{Mod}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})$ による軌道によって埋め尽くされ，T_0 の軌道は T_0 の固定部分群による作用を除いて非交和になる．さらに McMullen の結果を援用すると T_0 は $T(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})$ において測地的凸であることが判る．つまり T_∞ は可分な測地的凸集合 T_0 の等長的なコピーの集まりとなる．すでに述べたように，有限型でないリーマン面のタイヒミュラー空間は可分でないため

論文審査の結果の要旨

扱い難いものとなるが，可分である T_0 はより詳細な研究が可能であり，その結果 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ に関する研究の進展する可能性が高まるものと考えられる．この点からも申請者の得た成果は大いに評価できる．

本研究は，ヴァイサラ，ツキアらによる先行研究の影響を受けたものであるが，その成果，特にヴァイサラ問題が解ける新しいクラスの発見が彼らに続くフィンランド学派に歓迎されたことは，論文の掲載決定通知が比較的早いことや，申請者と早速研究交流を始めた研究者が現れたことからもうかがえる．この申請者の研究はまさに東方からの光であったといえよう．

公開審査会において申請者は，リーマン面に関する擬等角同値性などの基礎概念を丁寧に説明し，有限型でないリーマン面の性質についての深い理解を示し，主定理証明の着想を明快に説明した．さらに申請者が有限型でないリーマン面の擬等角同値性やタイヒミュラー空間に関して広汎な知識を有することも確認された．

従って，この論文において得られている結果は当該分野において意義ある重要な貢献であると認められる．また本論文に関する公開審査会を 2017 年 2 月 1 日に行い，申請者が博士の学位を取得するに足る高い学識を有することも確認している．

以上により，学位審査委員会は，申請者には博士（数理学）の学位が授与される資格があるものと判断する．

学位審査委員会
伊師 英之
大沢 健夫（指導教員）
小林亮一
森吉 仁志（委員長）