論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号	※　　第　　号

氏　　名　　丸山　貴志

論　文　題　目

Cyclic Cohomology Groups of Some Self-similar Sets

（ある自己相似集合の巡回的コホモロジー群）

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
納　谷　　信

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　Ph.D.
森　吉　仁　志

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（数理科学）
川　村　友　美

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（数理科学）
松　尾　信　一　郎

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

申請者は, 本論文において, あるクラスの自己相似集合に対してその de Rham ホモロジー理論とよぶべきものを定式化している.

いわゆるフラクタル集合の最も基本的な例として Cantor 集合があり, その同相類は一意的である. 一方, その Hausdorff 次元は各々の Cantor 集合の距離構造に依存し, 双 Lipschitz 同相写像によっては不変であるが, 任意の同相写像によっては不変にならない. したがって, 通常の (コ) ホモロジー理論によって Hausdorff 次元といったフラクタル集合の不変量をとらえることは困難であると考えられる.

このような状況において, A. Connes は 1985 年に巡回コホモロジー理論を提唱し, さらにこの理論を Cantor 集合に適用してその Minkowski 容量を Dixmier トレースのある値として復元することに成功した. この研究を契機として, 巡回コホモロジー理論はフラクタル集合の解析に対して極めて有効な道具を提供するものと期待されるようになった.

巡回コホモロジー理論は de Rham ホモロジー理論の一般化とみなすことができる. 実際, 巡回コサイクルの典型例は多様体内の部分多様体あるいは単体的サイクル上の積分によって与えられる. 一方, この事実は, 巡回コホモロジー理論を利用して de Rham ホモロジー理論をフラクタル集合に対して一般化する可能性を示唆してもいる.

この方向の研究としては, 森吉と夏目による最近の研究 (論文は準備中) がある. 彼らは Sierpinski ガスケット SG 上の α-Hölder 連続関数全体のなす多元環 (ただし α は SG の Hausdorff 次元の $1/2$ より大とする) 上の巡回 1 コサイクルを構成した. この結果は, SG の α-Hölder 連続関数環が多様体上の C^∞ 関数環の類似とみなせ, 巡回コホモロジー理論が SG の Hausdorff 次元といった双 Lipschitz 不変量を検出し得ることを示唆している. 巡回 1 コサイクルの構成は古典的な Young 積分が利用してなされ, 一般化された de Rham ホモロジー群の元を与える.

以上を背景として, 申請者は, 森吉と夏目による SG に対する上記の構成を, あるクラスの自己相似集合に一般化する問題を提起し, 研究を行った. まず, 胞体的自己相似集合 (cellular self-smilar set) という自己相似集合のクラスを新たに定義し, 次に, そのような集合 K の α-Hölder 連続関数環上の巡回 1 コサイクルを構成した. 構成したコサイクルが非自明であることおよび Young 積分として解釈できることも確認している. 構成は, まず K を近似する 2 次元胞体複体の列に対してコサイクルを構成し, その極限の存在を証明することによってなされる. SG の場合からの一般化に伴う技術的困難として, 近似胞体複体列の 1 単体の長さが一定でないということがあるが, その上限が 0 に収束していくことを精緻な議論で示すことで困難を克服している. 構成された巡回 1 コサイクルは, 胞体的自己相似集合の双 Lipschitz 同相による不変量であることも確かめている. 論文の末尾では, 胞体的自己相似集合の例を豊富に提示して, 申請者の定理がよく知られた自己相似集合の多くに適用可能であることを示した.

申請者の研究は, Connes の巡回コホモロジー理論が適用可能なフラクタル集合のクラスを見出し, それらの上の非自明な巡回コホモロジー類の存在を確立したものである. 胞体的自己相似集合に単体的複体の構造を導入し, 代数的トポロジーの手法を用いることで, 証明の道筋も明確にされている. その発想力・表現力は, 存在証明にみられる精緻な議論の遂行能力とともに高く評価できる. 証明および結果の正否の観点からも問題点は見当たらなかった.

本論文に関する公開審査会を 2017 年 3 月 3 日に行った. 講演および質疑応答を通じて, 申請者が代数的トポロジーに習熟するとともに, フラクタルといった解析的側面も努力して体得しており, 博士の学位を取得するに十分な学識を有することを確認した.

以上に鑑みて, 学位審査委員会は, 丸山氏の論文は博士（数理学）の学位を授与するにふさわしい価値を有するものと認める.

学位審査委員会

森吉仁志 (指導教員)
川村友美
松尾信一郎
納谷信 (委員長)