報告番号	※	第	号
------	---	---	---

主 論 文 の 要 旨

論文題目 Cyclic Cohomology Groups of Some Self-similar Sets
(ある自己相似集合の巡回的コホモロジー群)

氏 名 丸山 貴志

論 文 内 容 の 要 旨

本論文では、自己相似集合のあるクラスに対する巡回的コホモロジー群のコサイクルを構成する。そして、そのコサイクルが非自明であることを示したのちに様々な自己相似集合の上でコサイクルが実際に定義できることを示す。本論文における結果は、シェルピンスキギヤスケットに対する森吉、夏目によって定義されたコサイクルの結果をもととしている。コサイクルの構成には、Alexander-Spanier コホモロジー論の余微分とカップ積を必要とし、森吉、夏目の結果を拡張するために単体的複体の理論を用いて自己相似集合のクラスを定義する。そのクラスをなす自己相似集合の単体複体的性質に Alexander-Spanier のコホモロジー論を組み合わせることで、コサイクルの存在が示される。

本論文において与えられる結果は、Young 積分をその基礎に持つ。Young 積分は実数直線上の閉区間 $I = [a, b]$ 上で定義される積分であり、Rimenn-Steiltjes 積分の特別な場合の積分とみなすことができる。特に、 α -Hölder 連続関数環 $C^\alpha(I)$ の指数が $2\alpha > 1$ を満たすときに、Young 積分 Y は 2 つの α -Hölder 連続関数環の直和から複素数体への写像として well-defined である。ここで、条件に現れる 1 は閉区間 I の次元を表している。さらに、 $C^\alpha(I)$ は滑らかな関数のなす環 $C^\infty(I)$ を含んでおり、Young 積分を $C^\infty(I)$ に制限すると以下の等式が得られる：

$$Y(f, g) = \int_I f dg.$$

このことから Young 積分は微分 1 形式の積分の拡張とみなすことができる。

一方、自己相似集合は距離空間の列の極限として定義される位相空間である。自己相似集合の研究のために様々な研究法が提案されてきているが、そのうちのひとつに自己相似集合を与える空間の列を用いる手法がある。Young 積分を定義する際、閉区間 I に細分を与えその細分を極限まで細かくする議論を行うが、この議論は閉区間 I を自己相似集合とみなしたときの自己相似集合 I を与える空間列の上でも同様に働く。この意味で、Young 積分は自己相似集合 I の上で定義される積分と考えることができる。

本論文で扱うコサイクルは、1 次特異ホモロジー群の生成元が可算無限個存在するような自己相似集合の上で定義されるコサイクルである。コサイクルを定義するために Young 積分を用いて、自己相似集合を与える空間列から複素数の列である巡回的擬 1-コサイクル $\{\phi_n(f, g)\}_{n \in \mathbb{N}}$ を定義し、その列がコーシー列であることを示す。ここで、冒頭で述べた単体的複体の理論と Alexander-Spanier コホモロジー論が重要な役割を果たす。次で述べる定理は、巡回的擬 1 コサイクルが自己相似集合上へのヤング積分の拡張を与えることを示している。

定理 0.1 (存在定理). 3 対 $(|X|, S, \{F_j\}_{j \in S})$ を胞体的自己相似構造とし、 $K_{|X|}$ を $(|X|, S, \{F_j\}_{j \in S})$ に付随する胞体的自己相似集合とする。また、 $C^\alpha(K_{|X|})$ を $K_{|X|}$ 上で定義される複素数に値を持つ α -Hölder 連続関数環とする。このとき、Hölder 指数 α が条件 $2\alpha > \dim_H(K_{|X|})$ を満たすとき、任意の $f, g \in C^\alpha(K_{|X|})$ に対し巡回的擬 1-コサイクル $\{\phi_n(f, g)\}_{n \in \mathbb{N}}$ は Cauchy 列となる。

巡回的コホモロジーは Connes によって導入され、コントロール集合に対して応用されたことがひとつのきっかけとなり、フラクタルのような微分構造を定義することが難しい空間への応用が期待されている。その一方で、ひとつの重要な事実として、向き付けられた可微分多様体上で定義された滑らかな関数のなす環の 0, 1 次連続的周期コホモロジー群が de Rham ホモロジー群と同型である、という結果がある。この事実から巡回的コホモロジー群は de Rham ホモロジー群の一般化と捉えることができる。

先に説明した Young 積分 Y は閉区間 I の有限個の組み合わせせからなるジョルダン曲線 C へ拡張することができる。このとき Y は $C^\alpha(C) \times C^\alpha(C)$ 上の双線形写像となり、巡回的 1 コサイクルとなる。この意味で、ヤング積分 $Y : C^\alpha(C) \times C^\alpha(C) \rightarrow \mathbb{C}$ は代表的な巡回 1 コサイクルのひとつである単位円 S^1 上の積分

$$\int_{S^1} : C^\infty(S^1) \times C^\infty(S^1) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (f, g) \mapsto \int_{S^1} f dg.$$

の一般化と捉えることができる。冒頭で触れた森吉, 夏目の結果は, この事実をもとにヤング積分をシェルピンスキガスケットへ応用したものであり, これから述べる結果は S^1 の de Rham ホモロジーの類似を与えた結果とみなすことができる。定理 0.1 のコーシー列の極限をとることで双線形写像

$$\phi : C^\alpha(K_{|X|}) \times C^\alpha(K_{|X|}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \phi(f, g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(f, g).$$

が得られる。このとき,

定理 0.2. 存在定理の仮定の下, 以下が成り立つ。

- a) 双線形写像 ϕ は $C^\alpha(K_{|X|})$ の 1 次巡回的コサイクルである。
- b) $|X| \neq |X_1|$ であるとき, コサイクル ϕ は $HC^1(C^\alpha(K_{|X|}))$ の非自明な元 $[\phi]$ を与える。