

# 複数生産物の場合の確率的フロンティアと技術効率性の計測 ——一般廃棄物処理事業の効率性分析——

根本二郎  
小澤良往

This paper is aimed to examine the stochastic frontier analysis as a practical tool for a benchmarking study of efficiency in multiproduct production. We apply a Bayesian approach using Markov Chain Monte Carlo to measuring efficiency of the Solid Waste Management in Japan. This approach allows to specify a more flexible distribution of technical efficiency than one-dimensional distribution normally employed by the conventional maximum likelihood approach. The results are compared to those obtained by the conventional maximum likelihood method. We show that the Bayesian approach gives plausible measurements. In addition, the ranking of efficiency is very similar between two approaches.

## I. はじめに

本論文は、複数生産物を生産する事業の効率性評価手法として、確率フロンティア分析の可能性を検討することを目的とする。確率フロンティア分析の方法として、従来より用いられている最尤法の他に最近注目を集めてるMCMC法を用い、廃棄物処理事業の実データを使った分析によってその経験的妥当性を実証する。

市場による供給が困難な公共財や、外部効果により私的な供給が社会的最適を達成しないような財の場合、公的事業主体が民間に代わり供給することで、あるいは民間事業に委ねる場合は公的規制を用いることで、資源配分上望ましい成果を導こうとする。廃棄物処理事業は純粋公共財とは考え難いが、純粋な公共財である衛生環境を供給するために必須の中間財であり、したがって私的事業者による供給では社会的に望ましい供給量が得られない。このことは、廃棄物処理事業に対する何らかの公的介入を正当化するが、そのこと

は事業経営に対する市場による規律づけが制約されることを意味する。このような事業では、市場による経営効率の評価機能は働くが、そのままでは効率改善のインセンティヴは十分に付与されない。

そこで、市場による評価に代わって、効率性分析による継続的な事業評価が重要になる。事業評価の主眼は、同種事業体の相互比較、すなわちベンチマークによって仮想的な競争を作り出すことにある。同種事業体の中から、最も効率的なベストプラクティス事業体群を見出し、それらが構成する生産フロンティアからの距離をもって個々の事業体の効率性を評価するのである。

効率フロンティアを観察されたデータから計測する方法は二通りあり、一つは確率フロンティア分析 (Stochastic Frontier Analysis, 以下SFA), もう一つがデータ包絡分析 (Data Envelopment Analysis, 以下DEA) である。SFAは計量経済学の手法による効率性計測法であり、生産フロンティアからの離隔を効率性としてその分布をパラ

メトリックに定式化し、推定は最尤法を用いる。これに対し、DEAはミクロ経済学的な生産技術の公理に基づき、投入产出の観察値集合の凸包あるいはそれを含む最小の凸錐を生産フロンティアとみなし、そこからの乖離によって効率性を計測する方法で、生産フロンティアの導出には線形計画法が用いられる。両者には一長一短あり、SFAは変数の観測誤差を許容する点で DEA より優れるが、尤度最大化の数値解法の都合から、効率性の分布を比較的簡単なものに限定する必要がある。また多次元の尤度関数を最大化することの難しさのため、SFA は DEA に比べインプットとアウトプットの数が制約される。このため、複数生産物を考慮する必要がある事業では、効率性分析には DEA を用いるのが普通である。

最近になって、計量経済学の伝統的なモデルの統計的推測のために、MCMC (Markov Chain Monte Carlo) 法を利用したベイズ計量経済学の応用が急速に拡大している。このアプローチは、最尤法の適用を躊躇するような複雑なモデルに対しても、詳細な分析を可能にする強力な適用可能性を有している。効率性分析においても伝統的なアプローチに代わって注目されつつあり、既に Koop, Osiewalski and Steel (1997), Fernández, Osiewalski and Steel (1997), Griffin and Steel (2004), Kozumi and Zhang (2005), Kumbhakar and Tsionas (2005), Kao, Chiu, Gilbride, Otter and Allenby (2006) などにおいて MCMC 法の SFA への応用を見ることができる。

そこで本論文でも、廃棄物処理事業の効率性を計測するのに MCMC 法を採用し、その経験的妥当性を検討する。また比較対照のた

め、最尤法による分析も行なう。MCMC 法はベイズ計量経済学のアプローチであるので事前分布が必要である。事前分布の設定を具体的にどのようにするかが問題となるが、ここでは Koop et al. (1997) が提案したモデルに沿って、生産フロンティアのパラメータに正規ーガンマ共役事前分布、効率性にはガンマーガンマの階層型事前分布を用いる<sup>1)</sup>。この時、各事業者の効率性の周辺事前分布は二つのパラメータを持つ第 2 種ベータ分布となり、単一パラメータを仮定する従来の最尤法モデルよりフレキシブルであると考えられる。このようなモデルの事後分布は複雑な形になって分析困難であるが、全条件付事後分布からのサンプリングは容易であり、ギブス・サンプラーを利用して MCMC 法の適用が可能である。

## II. モデル

### 1. 最尤法

廃棄物処理事業のアウトプットとして焼却ごみ量 ( $y_A$ )、粗大ゴミ処理量 ( $y_B$ )、資源化ごみ量 ( $y_C$ ) の三種類を想定し、インプットは廃棄物処理従事職員数 ( $x_L$ ) とごみ処理費 ( $x_M$ ) の二種類とする。生産物が複数存在するため、技術効率性の計測には以下のように定義される出力指向の距離関数を用いる。

$$D_0(x, y) = \min \{ \delta | (x, y/\delta) \in \Omega \} \quad (1)$$

ここで  $x = (x_L, x_M)'$ ,  $y = (y_A, y_B, y_C)'$ ,  $\Omega$  は生産可能なすべての  $(x, y)$  から成る生産可能集合である。(1)の定義より、生産可能な  $(x, y)$  に対しては常に  $D_0(x, y) \leq 1$  となり、 $y/D_0(x, y)$  は  $x$  から可能なアウトプットの最大生産量を与える。よって  $r$  を技術効率性

とすると距離関数値  $D_0$  は  $r$  に等しいとみなすことができ、 $D_0=1$  の時に生産は技術効率的である。距離関数の推定のため誤差項を考慮し、便宜のため対数を取れば

$$\ln D_0(x, y) = -u + v, \quad u = -\ln r > 0 \quad (2)$$

と書くことができる。右辺の誤差項  $u$  は、期待値を 0 とする対称な分布を持つ確率変数とする。

ここで再び定義より  $D_0(x, y)$  は  $y$  について一次同次であるので、アウトプットを  $z = (y_A^2 + y_B^2 + y_C^2)^{\frac{1}{2}}$  によって  $\tilde{y}_i = y_i/z, i = A, B, C$  のように正規化すれば、

$\ln z = -\ln D_0(x, \tilde{y}) - u + v$  と書ける。推定可能な距離関数を導出するため、 $D_0(x, y)$  をトランスログ型で特定化する。各変数に添字を追加して事業者を識別すると、 $k$  番目の事業者について推定可能な距離関数は

$$\begin{aligned} \ln z_k &= \beta_z + \sum_{i=A,B,C} \beta_i \ln \tilde{y}_{ik} + \sum_{i=L,M} \beta_i \ln x_{ik} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=A,B,C} \sum_{j=A,B,C} \beta_{ij} \ln \tilde{y}_{ik} \ln \tilde{y}_{jk} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=L,M} \sum_{j=L,M} \beta_{ij} \ln x_{ik} \ln x_{jk} \\ &+ \sum_{i=A,B,C} \sum_{j=L,M} \beta_{ij} \ln \tilde{y}_{ik} \ln x_{jk} - u_k + v_k \\ \beta_{ij} &= \beta_{ji}, \quad i, j = A, B, C, \quad \sum_{i=A,B,C} \beta_i = 1, \\ \sum_{j=A,B,C} \beta_{ij} &= 0, \quad i = A, B, C \end{aligned} \quad (3)$$

となる。効率性は半正規分布にしたがう確率変数とし、誤差項は正規分布にしたがうものと仮定する。

$$\begin{aligned} u_k &\sim |N(0, \sigma_u^2)| \\ v_k &\sim N(0, \sigma_v^2) \end{aligned} \quad (4)$$

$n$  個の事業者のクロスセクションデータを使用して(3)を推定する。 $n$  事業者の観察値をスタッツして、 $n$  次列ベクトル  $\ln z = (\ln z_1, \dots, \ln z_n)', u = (u_1, \dots, u_n)', v = (v_1, \dots, v_n)'$  を定義する。また(3)式右辺はパラメータ制約を考慮すると 15 項（定数項を含む）から成るが、その係数ベクトルを  $\beta = (\beta_z, \beta_A, \beta_B, \beta_L, \beta_M, \beta_{AA}, \beta_{AB}, \beta_{AL}, \beta_{AM}, \beta_{BB}, \beta_{BL}, \beta_{BM}, \beta_{LL}, \beta_{LM}, \beta_{MM})'$  のように定義し、対応する説明変数の  $n$  次列ベクトルを各列に並べた  $n \times 15$  行列を  $X$  として(3)を

$$\ln z = X\beta - u + v \quad (5)$$

のように書き直す。(4)の仮定の下で対数尤度関数は

$$\begin{aligned} \ln l(\ln z | X, \beta, \sigma_v^2, \sigma_u^2) &= -n \ln \sigma \\ &+ \sum_{i=1}^n \ln \Phi\left(-\frac{\varepsilon_i \theta}{\sigma}\right) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \end{aligned} \quad (6)$$

となる。ただし、 $\varepsilon_i = -u_i + v_i$ ,  $\sigma = (\sigma_u^2 + \sigma_v^2)^{1/2}$ ,  $\theta = \sigma_u/\sigma_v$  である。

技術効率性の推定値は最尤推定値（' ^ ' を付けて表す）に基づき、次のような Battese and Coelli (1988) による条件付期待値より得る。

$$\begin{aligned} \hat{r}_k &= E(\exp(-u_k) | \varepsilon_k) \\ &= \frac{1 - \Phi(\mu_{\cdot k}/\sigma_{\cdot})}{1 - \Phi(-\mu_{\cdot k}/\sigma_{\cdot})} \exp\left(\mu_{\cdot k} + \frac{1}{2}\sigma_{\cdot}^2\right) \end{aligned} \quad (7)$$

ただし、 $\mu_{\cdot k} = -\varepsilon_k \sigma_u^2 / \sigma^2$ ,  $\sigma_{\cdot}^2 = \sigma_u^2 \sigma_v^2 / \sigma^2$  とする。

## 2. MCMC法

最尤法によるSFAでは、(4)のように技術効率性を半正規分布とすることが多い。単一のパラメータしか持たない半正規分布の制約に対しては従来より批判があり、切断正規分布[Stevenson(1980)]やガンマ分布[Greene(1990)]の適用が試みられてきた。しかし、このような複数パラメータを持つ分布の利用は、複雑な尤度関数を最大化することの難しさのため必ずしも成功していない。Ritter and Simar(1997)は、数値積分の近似誤差の精度の限界から、切断正規分布やガンマ分布よりむしろ半正規分布の優位を主張している。

MCMC法に基づくSFAのベイズ・アプローチは、最尤法の利用に比較して、ずっと複雑なモデルの適用を可能にする。ベイズ・アプローチでは、技術効率性の計測は技術効率性の事後分布による。MCMC法は、任意の初期状態から出発して所望の事後分布に収束するマルコフ連鎖を見出し、その連鎖からのサンプリングを十分なだけ繰り返すことで事後分布からのサンプリングを行なう。MCMC法を実行するアルゴリズムはいくつか知られているが、本論文で用いるギプス・サンプラーは、すべての確率変数について全条件付事後分布（残りの確率変数全部が与えられた時の条件付分布）からのサンプリングが可能であれば実行可能である。

以下では引き続き  $v_k \sim N(0, \sigma_v^2)$  を仮定する。技術効率性  $u$  の下で、尤度は

$$\begin{aligned} l(\ln z | X, \beta, \sigma_v^2, u) \\ = \prod_{k=1}^n f_N^1(\ln z_k | x_k' \beta - u, \sigma_v^2) \end{aligned} \quad (8)$$

となる。ただし、 $x_k$  は  $X$  の第  $k$  列、 $f_N^m(\cdot | \mu, \Sigma)$

は  $m$  次元正規分布  $N(\mu, \Sigma)$  の密度関数である。 $\sigma_v^2$  について事前分布を逆ガンマ分布とする。つまり事前分布として  $\sigma_v^{-2} \sim Ga(v_0, v_1)$  を適用する。ここで  $Ga(v_0, v_1)$  は期待値  $v_0/v_1$ 、分散  $v_0/v_1^2$  のガンマ分布を意味する。一方、 $\beta$  の事前分布は、 $I_m$  を  $m$  次単位行列として正規分布  $N(\beta_0, \sigma_v^2 I_{15})$  で与える。この結果、 $\beta$  と  $\sigma_v^2$  の同時事後分布は正規ガンマ分布となり、全条件付事後分布はそれぞれ次のように導かれる。

$$\begin{aligned} p(\sigma_v^{-2} | \ln z, X, u) = f_G\left(\sigma_v^{-2} | \frac{n-15}{2} + v_0, v_1\right. \\ \left. + \frac{1}{2}(\ln z - u - X\hat{\beta}^*)'(\ln z - u - X\hat{\beta}^*)\right. \\ \left. + \frac{1}{2}(\beta_0 - \hat{\beta}^*)'[(X'X)^{-1} + I_{15}]^{-1}(\beta_0 - \hat{\beta}^*)'\right) \end{aligned} \quad (9)$$

$$p(\beta | \ln z, X, u, \sigma_v^{-2}) = f_N^{15}(\beta | (X'X + I_{15})^{-1} \\ (X'X\hat{\beta}^* + \beta_0), \sigma_v^2(X'X + I_{15})^{-1}) \quad (10)$$

なお(9)において  $f_G(\cdot | a_0, a_1)$  は  $Ga(a_0, a_1)$  の密度関数、また  $\hat{\beta}^* = (X'X)^{-1}X'(\ln z - u)$  である。

次に、効率性  $u_k$  の事前分布を  $Ga(\varphi_0, \lambda)$  とし、 $\lambda$  については  $Ga(\varphi_0, \lambda_0)$  を事前分布とする。この時、階層型事前分布

$$p(u, \lambda) = \prod_{k=1}^n f_G(u_k | \varphi_0, \lambda) f_G(\lambda | \varphi_0, \lambda_0) \quad (11)$$

から畳み込みにより  $\lambda$  と  $u_i, i \neq k$  を消去すると、 $u_k$  の周辺事前分布は第2種逆ベータ分布  $IB2(\lambda_0, \varphi_0, \varphi_0)$  にしたがうことがわかる<sup>2)</sup>。ただし、 $IB2(a, b, c)$  の密度関数は

$$f_{IB2}(\cdot | a, b, c) = \frac{\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(b+c)} a^c u_k^{b-1} (a+u_k)^{b+c} \quad (12)$$

である。

$u_k$  の全条件付事後分布は

$$p(u_k | \ln z, X, \beta, \sigma_v^{-2}, \lambda) \propto u_k^{\varphi_0-1} f_N^1(u_k | \ln z_k - x'_k \beta - \sigma_v^2 \lambda, \sigma_v^2) \quad (13)$$

となる。 $(13)$ は  $\varphi_0 > 1$  の時 log-concave であるので、事前分布のパラメータとして 1 より大きい  $\varphi_0$  を与える限り採択棄却法によるサンプリングが可能である。 $\lambda$  については

$$p(\lambda | \ln z, X, \beta, \sigma_v^{-2}, u) = f_G(\lambda | (n+1)\varphi_0, \sum_{k=1}^n u_k + \lambda_0) \quad (14)$$

が全条件付事後分布となる。

モデルの同時事後分布は

$$\begin{aligned} p(\ln z, \beta, u, \sigma_v^{-2}, \lambda | X) &= l(\ln z | X, \beta, \sigma_v^2, u) p(\beta | \sigma_v^{-2}) \\ &\quad p(\sigma_v^{-2}) p(u | \lambda) p(\lambda) \\ &= \prod_{k=1}^n \{f_N^1(\ln z_k | x'_k \beta - u_k, \sigma_v^2)\} \\ &\quad f_N^{15}(\beta | \beta_0, \sigma_v^2 I_{15}) f_G(\sigma_v^{-2} | v_0, v_1) \\ &\quad \prod_{k=1}^n \{f_G(u_k | \varphi_0, \lambda)\} f_G(\lambda | \varphi_0, \lambda) \end{aligned} \quad (15)$$

となる。また、畳み込みにより

$$\begin{aligned} p(\ln z, \beta, u_k, \sigma_v^{-2} | X) &= \prod_{k=1}^n f_N^1(\ln z_k | x'_k \beta - u_k, \sigma_v^2) \\ &\quad f_N^{15}(\beta | \beta_0, \sigma_v^2 I_{15}) f_G(\sigma_v^{-2} | v_0, v_1) \\ &\quad f_{IB2}(u_k | \lambda_0, \varphi_0, \varphi_0) \end{aligned} \quad (16)$$

を得る。このような事後分布をMCMC以外の方法で分析することは著しく困難である。しかし、(9)(10)(13)(14)より、ギブス・サンプラーを使って事後分布からサンプリングすることは可能である。技術効率性の計測値は、そうして生成された事後分布のサンプルから  $u_k$  の周辺事後分布の期待値を求めて得られる。

### III. データ

廃棄物処理事業の効率性計測は、2002年度の環境省「一般廃棄物処理実態調査」により報告されている廃棄物処理組合（特別地方公共団体）のデータを利用して行なった。事業のアウトプットは焼却ごみ量（t）、粗大ゴミ処理量（t）、資源化ごみ量（t）の三種類とし、インプットは廃棄物処理従事職員数（人）とごみ処理費（円）の二種類とした。「一般廃棄物処理実態調査」でデータが利用可能な組合のうち、上記のインプットおよびアウトプットがすべて正值である112組合を選び、さらに職員一人あたり人件費が異常な値を取る計7組合を除外して、残る105組合を分析対象とした。

### IV. 結果

表1に、最尤法とMCMC法による距離関数モデルの推定結果を示す。MCMC法では、Broeck van den et al. (1994), Koop et al. (1997) の議論を参考にして事前分布のパラメータを  $\lambda_0 = 0.875$ ,  $\varphi_0 = 1.07$ ,  $v_0 = 0.001$ ,  $\beta_0 = 0$  とした。ギブス・サンプラーにより三本の連鎖を生成し、それぞれ最初の1000個を捨て次の10000個をサンプルとして収集した。三本の連鎖ともほぼ同様の値に収束し、初期

表1 距離関数の推定結果

最尤法		MCMC法	
	推定値	標準誤差	事後分布平均
$\beta_z$	-0.309	0.1485	-0.072
$\beta_A$	0.8047	0.1702	0.8790
$\beta_B$	0.1341	0.1405	0.0725
$\beta_L$	0.0592	0.1486	0.0786
$\beta_M$	-1.047	0.1736	-1.126
$\beta_{AA}$	0.1382	0.1102	0.0419
$\beta_{AB}$	-0.162	0.0626	-0.145
$\beta_{AL}$	0.0888	0.1071	0.0829
$\beta_{AM}$	0.0729	0.1090	0.0879
$\beta_{BB}$	0.1466	0.0685	0.0880
$\beta_{BL}$	-0.209	0.0904	-0.205
$\beta_{BM}$	0.0885	0.0700	0.0776
$\beta_{LL}$	-0.0915	0.1810	-0.0832
$\beta_{LM}$	0.1673	0.1854	0.2599
$\beta_{MM}$	-0.290	0.2375	-0.218
$\sigma_\nu^2$	0.04021	0.0446	0.1737

表2 効率性の推定値

	期待値	最小値	第一四分位	中央値	第三四分位	最大値
最尤法	0.549	0.071	0.353	0.553	0.761	0.925
MCMC法	0.675	0.176	0.591	0.714	0.790	0.879

値の変更に対しても結果が大きく異なることから、事後分布への収束は達成されているものと考える。表1に示す推定値は、周辺事後分布の期待値である。

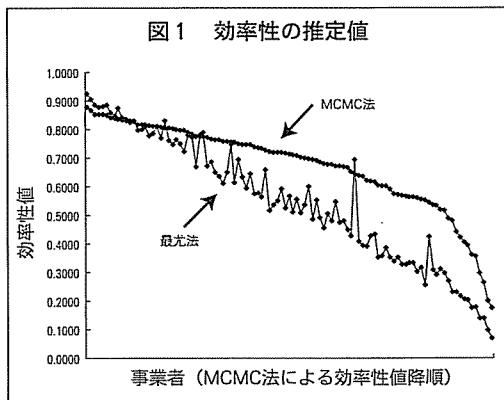
出力指向の距離関数に対してミクロ経済学が要請する条件は、1) アウトプットに関して増加関数、2) インプットに関して減少関数、3) アウトプットに関して凸関数、4) インプットに関して準凸関数、である。これらについて105の観察値のうち1)～4)を満たすものの数は、最尤法による結果ではそれぞれ81, 81, 49, 44, MCMC法では74, 85, 36, 36である。特に3) 4)について、推定結果はミクロ理論との整合性を欠いている<sup>3)</sup>。ただし、配分効率は別として、技術効率だけを問

題にするのであれば、3) 4)のような凸性条件は満たされなくとも、距離関数から得られる $u_k$ の推定値を効率性と解釈することに不都合はない。

表2に効率性推定値の要約を示す。また図1は、MCMC法による効率性の大きさ順に組合を並べた横軸に対して、効率性推定値をプロットしたものである。最尤法の効率性推定値は(7)の $\hat{r}_k$ による。MCMC法の推定値は $u_k$ の周辺事後分布の期待値である。105組合の効率性の平均値は最尤法で0.549、MCMC法で0.675である。最尤法の方がやや散らばりが大きい。

図1に見るように、最尤法とMCMC法の違いは効率性が中位の水準のグループで大き

## 複数生産物の場合の確率的フロンティアと技術効率性の計測



くなり、その差は0.25程度にまで広がる。しかし、最尤法とMCMC法の効率性値のランキングは良く似ており、両者の順位相関係数は0.9815である。したがって、実際のベンチマークで必要な情報が効率性の値そのものではなく順位である場合は、古典的な最尤法でも構わないと言える。

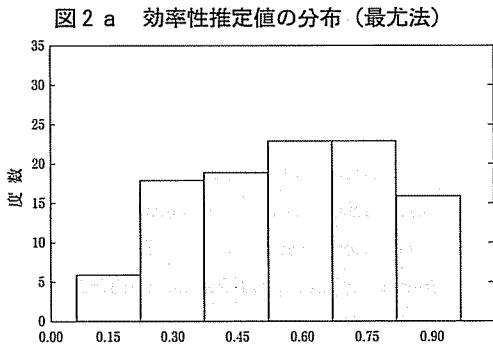


図2 a, bは効率性値の分布を示しているが、最尤法では非常に低効率の領域にもかなりの度数があり、実際のベンチマーク評価ではその解釈が問題となり得る。たとえば最尤法では効率性が0.3以下の組合が1割以上(15組合)存在するが、これは効率性を最効率の組合のレベルにまで改善すれば70%のコストを削減可能というものであり、現実的には考え難い状況である。MCMC法でもきわめて低効率の組合は存在するが、図2 bに見るようにその度数は急速に減少しており、実際の効率性の分布として受け入れ易いものとなっている。

図3 a 効率性の事後分布1  $u_k = 0.879$

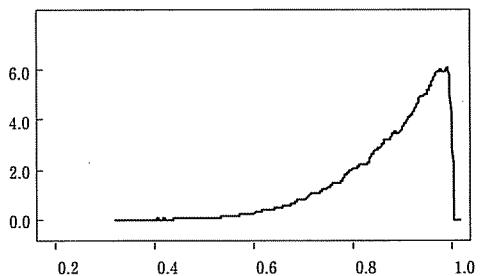


図3 b 効率性の事後分布2  $u_k = 0.714$

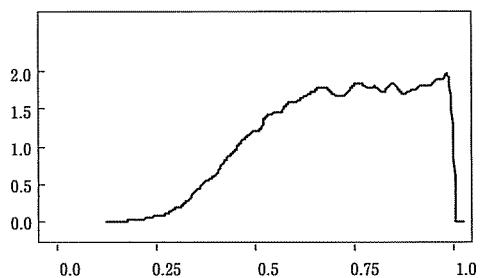


図3 c 効率性の事後分布3  $u_k = 0.176$

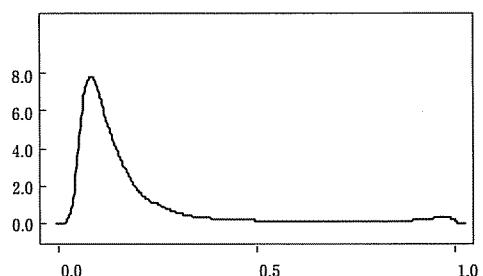


図 3 a, b, c は、MCMC法による  $u_k$  の事後分布の例を示している。図 3 b は最効率 ( $u_k = 0.879$ )、図 3 b は効率性中位 (メディアン,  $u_k = 0.714$ )、図 3 c は最非効率 ( $u_k = 0.176$ ) の事後効率性分布である。いずれも非対称で、最尤法の  $\hat{r}_k$  のような切断正規分布と大きく異なる。分散はかなり大きく、そのため区間推定は実用的な精度を持たない。図 3 a の場合、95%信頼区間は [0.624, 0.997]、図 3 b では [0.358, 0.990]、図 3 c では [0.0482, 0.882] と非常に精度が悪い。特に効率性値が低くなるほど分散が大きくなる傾向がある。個別事業者について実用的な精度を得るためにパネルデータの利用が必要となろう。

## V. 結論

従来の確率フロンティア分析では、効率性の分布に半正規分布のような単一パラメータ分布を仮定することが多かったが、本論文ではベイズ・アプローチとMCMC法を採用することにより、格段にフレキシブルなモデルの定式化を行なった。その結果、最尤法で半正規分布モデルを推定した場合に比べ、より現実的な効率性推定値を得ることができたと考えられる。ただし、効率性の事業者間順位については両者の結果はほぼ一致しており、もし効率性評価がランキングだけを求めるなら従来の最尤法を利用することも可能である。

今後は、事前分布の設定変更による分析結果への影響を慎重に検討するとともに、パネルの利用によりデータの情報量を増加させることが課題となる。

## 注

- 1) Koop et al. (1997) では、実際にはガンマ分布の特殊ケースである指数分布による階層型事前分布を用いている。
- 2) 第2種逆ベータ分布は逆ベータ・プライム分布とも呼ばれる。
- 3) 理論的制約を距離関数に課すことは最尤法でもMCMC法でも可能であるが、古典的な方法では制約によってパラメータ数が減少し、モデルのフレキシビリティを損なう。その点ではMCMC法の方が有利である。また、事業者の行動に非効率を想定する限り、理論的制約は満たされない方が自然かもしれない。その場合は、Tsurumi, Wago and Ilmakunnas (1986) がトランスログ生産関数のベイズ推定で行っているように、確率的制約を課すことが妥当である。

## 参考文献

- Broeck van den, J. G. Koop, J. Osiewalski and M. F. J. Steel (1994), "Stochastic Frontier Models: A Bayesian Perspective", *Journal of Econometrics* 61, pp273-303.
- Battese, G. E. and T. J. Coelli (1988), "Prediction of Firm - Level Technical Efficiencies with a Generalized Frontier Production Function and Panel Data", *Journal of Econometrics* 38, pp387-399.
- Fernández, C., J. Osiewalski and M. F. J. Steel (1997), "On the Use of Panel Data in Stochastic Frontier Models with Improper Priors", *Journal of Econometrics* 79, pp169-193.
- Greene, W. H. (1990), "A Gamma-Distributed Stochastic Frontier Model", *Journal of Econometrics* 46, pp141-164.
- Griffin, J. E. and M. F. J. Steel (2004), "Semiparametric Bayesian Inference for Stochastic Frontier Models", *Journal of Econometrics* 123, pp121-152.

## 複数生産物の場合の確率的フロンティアと技術効率性の計測

- Kao, L. J., C. C. Chiu, T. J. Gilbride and G. M. Allenby (2006), "A Direct Approach to Evaluating Technical and Allocative Efficiency in Marketing", Paper Presented at Seminar on Bayesian Inference in Econometrics and Statistics, University of Iowa, April 28-29, 2006.
- Koop, G., J. Osiewalski and M. F. J. Steel (1997), "Bayesian Efficiency Analysis through Individual Effects : Hospital Cost Frontier", *Journal of Econometrics* 76, pp77-105.
- Kozumi, H. and X. Y. Zhang (2005), "Bayesian and non-Bayesian Analysis of Gamma Stochastic Frontier Models by Markov Chain Monte Carlo Methods", *Computational Statistics* 20, pp575-593.
- Kumbhakar, S. C. and E. G. Tsionas (2005), "Measuring Technical and Allocative Inefficiency in the Translog Cost System : a Bayesian Approach", *Journal of Econometrics* 126, pp355-384.
- Ritter, C. and L. Simar (1997), "Pitfalls of Normal-Gamma Stochastic Frontier Models", *Journal of Productivity Analysis* 8, pp167-182.
- Stevenson, R. E. (1980), "Likelihood Functions for Generalized Stochastic Frontier Estimation", *Journal of Econometrics* 13, pp57-66.
- Tsurumi, H., H. Wago and P. Ilmakunnas (1986), "Gradual Switching Multivariate Regression Models with Stochastic Cross-equational Constraints and an Application to the KLEM Translog Production Model", *Journal of Econometrics* 31, pp235-253.

(名古屋大学大学院経済学研究科)  
(名古屋大学大学院経済学研究科博士後期課程)