確率割り当ての不確定性と E-admissibility

伊勢田哲治

本稿の目的は、日本でこれまでほとんど紹介されてこなかったアイザック・リーバイ(Isaac Levi)のベイズ主義に対する修正論を紹介することである。リーバイはベイズ主義と古典統計学という二つの主流理論の間で独自路線を歩んできた。統計の哲学や検証理論におけるリーバイの業績は多岐にわたるが、その一つの核をなすのが E-admissibility の概念を中心とする、不確定な確率割り当ての下での意志決定の理論である。本稿ではこの問題についてのリーバイの議論の詳細を紹介するとともに、E-admissibility を中心とするリーバイのモデルと他の立場との比較検討についてこれまでなされてきた議論を概観する。

１　確率割り当ての不確定性

まず、リーバイの一連の著作において、確率割り当て自体の不確定性の考え方がどのようにして導入されたのかを見る。[1]こうした問題設定をリーバイが導入したのは 1974 年の「不確定な確率について」という論文においてであり、リーバイのモデルの中心的概念である E-admissibilityの概念もここで提案されている(Levi 1974)。

何を信じ、何を信じないかについて、われわれは時に非常にラディカルに態度を変化させる。そういう場合一体なにが起きているのだろうか。リーバイは厳格なベイズ主義はこの問題にうまく対処できないと考える。厳格なベイズ主義者の多くは、ある人が命題の集合に対してわりふる確率は、どんなものであっても確率論の公理に従っている限りにおいて認めうると考える一方で、一旦確率をわりふってしまったら、その確率はいわゆるベイズ的条件化(Baysian conditionalization)に従った機械的な変更しかできないと考える。しかしわれわれは新しい証拠が得られたときに、単にベイズの定理をつかった改訂だけでは説明できないような信念の改訂をすることがある、とリーバイは考える。

厳格なベイズ主義の観点からは二つの選択肢がある。一つはそうした見直しは認められないとする強硬な立場であり、もう一つは確率の割り振り以前の段階に一旦たちもどって改めて確率の割り振りをやり直すという考え方である。前者はベイズ主義者の決めたドグマ的な規則にこだわりすぎであるように思われる。後者の考え方をとるならば今度は確率論の公理に従うあらゆる割り振りが認められることになってしまい、たいていの確率の割り当てが認められてしまうことになる。。厳格なベイズ主義にはこの両極端の選択肢しかないわけで、そのためにリーバイは「ベイズ主義者はドグマ的に固執する(dogmatically tenacious)か恣意的なまでに気まぐれ(arbitrarily capricious)かのいずれかにコミットしている」(Levi 1974,125)とベイズ主義者を批判することになる。

[1] 本稿では、確率といえばベイズ的な確率、つまり主観的確率を指す。客観的確率はここでは考慮しない。

厳格なベイズ主義の両極端の解決がまずいというのなら、リーバイはどのような解決を志すのだろうか。まず、リーバイの考えでは、信念への確率の割り当ては、自分が確かだと思っている信念の集合（これを集積知識(corpus of knowledge)と呼ぶ）から信念全体への関数によって行われる。もう少し平易な表現をするなら、われわれは手元にあるデータからさまざまな仮説を評価するわけだが、その際一定の関数にしたがって評価を行っている。リーバイはそうした関数を確証コミットメント（confirmational commitment)と呼び、関数によって得られる確率割り当ての状態を信念状態(credal state)と呼ぶ。集積知識はデータの付加、削除、修正などによって常に変化するので、確証コミットメントは同じでも信念状態は変化しうる。

この観点からは、ベイズ的条件化は同じ確証コミットメントの下で集積知識が変化したために行われる変更である。ちなみに、リーバイが指摘するように(Levi 1980,83)、ベイズの定理そのものは実は共時的な確率同士の関係を指定する定理であり、信念の度合いの更新をどうするべきかについては何も言っていない。信念の度合いの更新の仕方を決めるのは、「時点t_1において存在しなかったデータeが時点t_2に集積知識に加えられたならば、t_1におけるhの確率P_1 (h)をベイズ的条件化をつかってP_2(h)= P_1(h,e)へと更新せよ」という更新規則である。厳格なベイズ主義は確証コミットメント自体は変更できないとする立場であるため、事前確率 P_1 (h)、尤度 P_1 (e,h)、期待度 P_1 (e)といった値は集積知識の内容によって一意に決まり、したがって事後確率も一意に定まる。

リーバイは実は上記の更新規則そのものには反対しないが、それでも一見したところこの更新規則に反するようなラディカルな信念の度合いの変化を説明できると考える。彼の診断によれば、そうしたラディカルな変化は、実はもともと我々が確率を割り当てる関数について（つまり確証コミットメントについて）一定の幅を認めていることに由来する。これは、個別の命題についていえば、何通りかの確率の割り当て方を認めることを意味する。ラディカルな信念変化に見えたものは、実は許容された確率割り当てのうち実際にどれを使うかに関しての変化だったのだ、とリーバイは言う。

厳格なベイズ主義とリーバイの間の差は、一階の不確定性と二階の不確定性という区別でもとらえることができる。厳格なベイズ主義はある命題が正しいかどうかについては不確定性を認め、その不確定性の度合いを主観的確率という形で表すことを認めるわけであるが、その主観的確率の値自体についての不確定性、つまり二階の不確定性は認めていない。リーバイのアイデアは、新しい証拠が得られたときに確証コミットメント自体が変わるという現象は、この二階の不確定性のレベルで説明できるのではないか、というものである。そうすれば、確証コミットメントのレベルでの変化を全く認めないという立場と、なんでも認めるという立場の中間として、一定の範囲内であれば認める、という選択肢をとることが可能となる。

2　不確定性な確率割り当ての形式化

確率の割り当てに幅を認めたときに、問題となるのはそうしうた幅のある確率をもとにどうやって意志決定をすればいいのか、という問題である。そこで導入されるのがE-admissibility をはじめとする一連の概念である。ここでは、かなり詳細な形式化がなされている『知識の企図』での用語法にそって説明する(Levi 1980)。

2-1 horse lottery

以下の議論がどういう決定状況を念頭においているか理解するために、アンスコムとオーマンがhorse lotteryと呼ぶタイプの状況について解説しておく(Anscombe and Aumann 1962)。リーバイ自身がhorse lottery に明示的に言及することは少ないが、サイデンフェルトらによるE-admissibilityに関する議論はhorse lotteryにおける選択状況として定式化されており、リーバイもまたこれを許容している。horse lottery とは、その名のごとく競馬などにおいて発生する選択状況を形式化したものである。起こりうる状態の数がs個あるとし、その状態のそれぞれをh_1, h_2,....,h_sと名付ける（競馬の場合には可能なあらゆる着順の集合ということになる)。それぞれの状態に対して特定の賞金がつく。アンスコムとオーマンはこの賞金自体がルーレット的な仕組み、つまり確定した確率によって変動すると考える(これを複合horse lotteryと呼ぶ)。このような設定において、horse lotteryとはどの状態に対してどういう賞金がつくことにするかを選択するくじである（競馬において馬券を買う際には、特定の着順においては配当が発生し、それ以外の着順では配当がないようなhorse lottery を買っていることになる)。どのくじを買うかの選択は、h_1からh_sのどれがどのくらい起こりやすいかの判断に依拠することになる。

horse lottery の考え方は、倫理学的な思考の枠組みになれているとかえって理解が難しい。倫理学においては、行為の選択は、帰結としてどういう状態が生じるか（確率を考慮に入れるなら、どういう状態が生じやすくなるか)に影響すると考えるのが普通であるが、horse lotteryでは、どういう状態が生じるかについては行為者は介入できない。変えられるのはそれぞれの状態の望ましさだけである。ただしこれは見た目ほど本質的な違いではない。倫理学で行為の帰結とよばれるものは、horse lottery では賞金と呼ばれており、horse lottery で状態と呼ばれているものは、倫理学の枠組みでいえば、不確実な背景状況だと考えることができる。この違いの結果、horse lotteryでは同等の望ましさを持つ二つの出来事を表記上区別できないことになるが、選択の序列化だけが問題なのであればその区別は必要ないだろう。なお、以下で紹介するリーバイの議論では、A_iを選んだ際に実際にはh_1だった場合の帰結がc_{i1}というように表記されており、単に賞金がふられるのに比べれば分かりやすくなっている。

2-2 Q 関数と確率割り当ての不確定性

まず、前節でインフォーマルな言葉で導入した、確率割り当てそのものの不確定性を扱う

ためのフォーマルな用語法を説明する。集積知識はKx,tであらわされ、これはXにとって時点tにおいて何が真剣な可能性であり何が真剣な可能性でないかについての命題の集合である。集積知識は認知者が絶対確かとおもっている命題の集合であるから、通常のベイズ主義ではこの体系に属する命題はすべて確率1を持つはずである。

Bx,t はXにとっての時点tの信念状態であり、信念の対象となる命題はKx,tに含まれるものも含まれないものもある。すでに触れたように、Kx,tは証拠ないしデータの集合、Bx,tはその証拠をベースにしてさまざまな仮説に与えられる信憑性の集合だと言い換えることもできる。両者の関係は確証コミットメントCによって、Bx,t＝C（Kx,t）と表すことができる。

確証コミットメントの具体的な内容はQ関数によって与えられる。つまり、Bx,tとは時点tにおいてXにとって許容可能なQ関数の集合である。Q関数はLに属するいかなる文hと、Kx,tと整合的ないかなる文eの対に対しても一つの値を与える実数値関数Q(h;e)であり、その値はQ値(Q-value)と呼ばれる。要するに、通常のベイズ主義で背景知識に相対的な主観的確率と呼ばれるものがリーバイにおいてはQ関数と呼ばれているわけである。ただし、Q値は実は必ずしも確率測度である必要はなく、リーバイも実際Q値が厳密な意味での確率測度よりも若干弱い条件だけ満たせばよいのではないかという議論を展開している(Levi 1980, ch.5)。

前節でリーバイの提案として検討した、二階の不確定性を認める立場は、この用語法でいえば、ある特定のhとeの組み合わせについて、複数のQ値を同時に認める立場であり、厳格なベイズ主義は単独のQ値しか認めない立場だ、と言い換えることができる。

リーバイはQ関数が満たすべき条件もいくつか挙げている。一つは信念上の整合性(credal consistency)と呼ばれるもので、Kが整合的な場合、その場合にのみ信念状態Bは空集合ではない、という条件である。もう一つがリーバイの提案の核となるもので、信念上の凸包性(credal convexity)、すなわち許容可能なQ関数（Bに含まれるQ関数）の集合は離散的ではなく、凸包(convex hull, 点集合の一番外側を結んで作られる閉領域）をなすという条件である。つまり、hという仮説に対してたとえば Q1(h;e)=0.5 と Q2(h;e)=0.4 という二つのQ値がBに含まれる（より正確にいえばそうしたQ値を与えるような二つのQ関数がBに含まれる)なら、両者の加重平均で得られるすべての関数、つまり αQ1(h; e)+(1-α）Q2(h;e)　（ただし 0≦α≦1）もまたBに含まれる。もう少し簡単にいえば、0.5と0.4の間のすべての数値がhのQ値として許容可能でなくてはならない。厳格なベイズ主義においてはそもそもhがとりうるQ値は一つしかないから凸包性は自動的に満たされるのでこうした条件は必要ない。

3 E-admissibility

3-1　通常の効用のもとでのE-admissibility

科学哲学におけるベイズ主義との対応づけだけであればこれで十分であるが、統計学におけるベイズ主義は行為選択の理論であり、E-admissibilityもその文脈で提案されている。そして行為選択に必要なのが、それぞれの状態に対する価値づけ(valuation)であり、xの時点tにおける価値づけの集合をGx,tで表す。Gx,t を構成する成員は効用関数（u関数）であり、選択肢A_iから生じうる帰結がc_{i1}ーc_{ik}のk個である場合、u関数はその一つ一つについて効用u(c_{i1})... u(c_{ik})を割り振る。厳格なベイズ主義の意志決定は、特定のQ関数とu関数の下での選択肢Aiの期待値E(Ai;Q,u)によって選択肢を序列化することで行われ、E(A_i; Q,u)はQ(c_{ij}; A_i) u(c_{ij}) をすべてのc_{ij} (j=1,2,...,k)について計算した総和である。
しかしすでに見たような理由でQ関数が一つに絞り込めない場合、E (Ai; Q, u)の値は単一の値ではなく一定の幅を持つことになる。そうした状況での判断規則として提案されるのがE-admissibilityである。E-admissibilityは以下のように定義される。「A_i がBx,t Kx,t Gx,t に相対的にE-admissibleなのは次の場合、その場合に限る。それは、 Bx,t において真剣に許容可能なQ関数と、Gx,tにおいて真剣に許容可能なu関数で、しかもそれらのQ関数とu関数に相対的な期待効用においてA_iがオプティマルであるような組み合わせが存在する場合である」(Levi 1980, 96)。つまり、許容可能なQ値の組み合わせのどれかにおいてその選択肢が期待効用を最大化するなら、その選択肢はE-admissibleである。なお、E-admissibilityのEは「期待効用」(expected utility)のEのようである。リーバイは、このE-admissibilityを、許容可能性な選択肢を絞り込むための条件とする。すなわち、許容可能な選択肢はすべてE-admissibleであると考える。
この定義だけでは何を言っているのかわかりにくいと思われるので、E-admissibilityを具体例で説明しておこう(図１)。この事例においては発生しうる状態はEとーEの二通りだけである。選択肢は三つある。選択肢A_1はEという状態においては効用(図ではUで表されている)が１、ーEという状態においては効用が０となる(『知識の企図』の記号法で言い換えれば、選択者xにとって時点tにおいて真剣に許容可能なu関数の集合Gx,t の成員は一つだけであり、その関数はA_1とEの組み合わせに1, A_1とーEの組み合わせに０という値をわりふる)。選択肢A_2はその逆で、Eという状態においては効用が０、ーEという状態においては効用が１となる。選択肢A_3はEであれーEであれ効用が 0.4 となる。xにとってEのとりうる確率P(E)は 0.25 から 0.7 の区間内である。つまり『知識の企図』の用語法で言い換えれば、xはEにもーEにも確信を持っていないのでどちらもKx,tの成員ではなく、Kx,tと確証コミットメントCx,t から導出されるQ関数の集合Bx,tには 0.25≦P(E)≦0.7 となるすべてのP(E)が含まれる。さて、この条件では選択肢A_1を選んだ際の期待効用は １×P(E)＋０×（１－P(E))=P(E)であり、同様にA_2の期待効用は１－P(E)で、A_2の期待効用はP(E)の値に関係なく0.4 である。

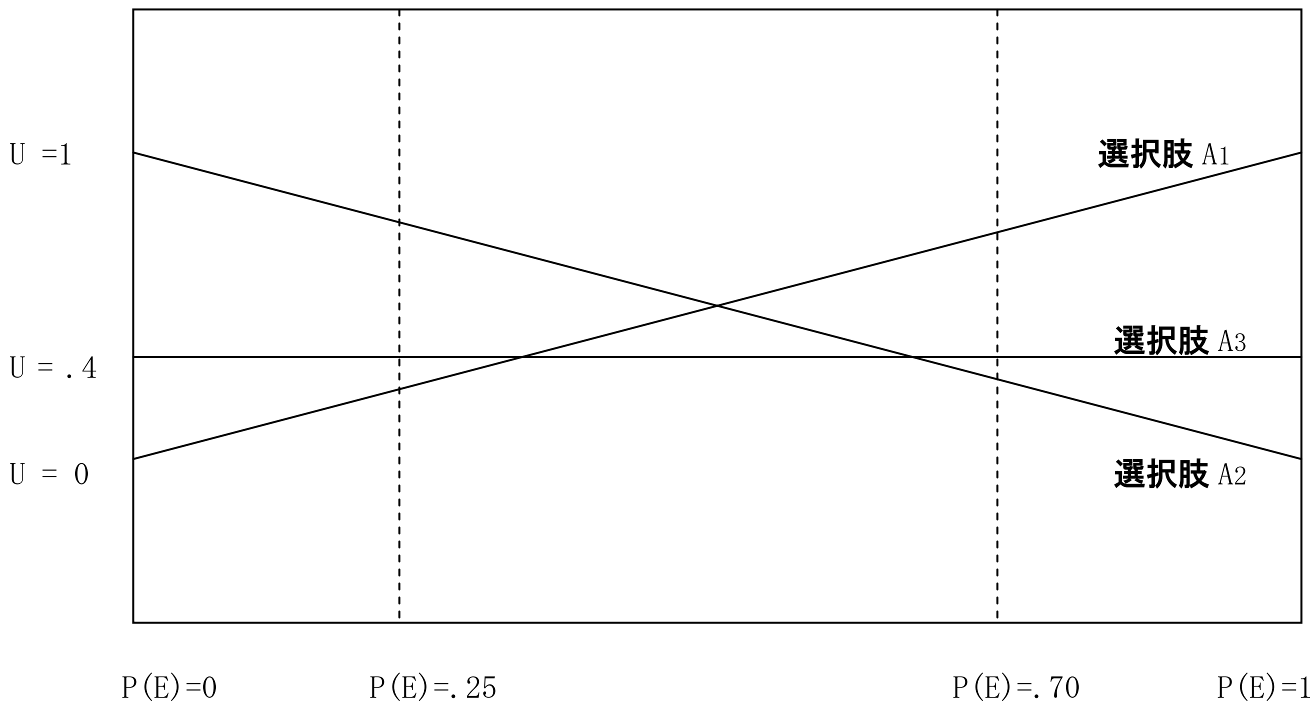

図1 (Seidenfeld 2004 **を元に改変**)

さて、E- admissibleな選択肢は許容可能ななんらかのQ関数とU関数の値の下で最適となる（つまり三つの選択肢の中でもっとも大きな期待効用を持つ）選択肢である。選択肢A_1は0.5≦P(E)≦0.70 の範囲で最適となるのでE-admissible、選択肢A_2は 0.25≦P(E)≦0.5 の範囲で最適となるのでE- admissibleである。しかしA_3は許容可能なQ関数の範囲内で最適となることがないのでE- admissibleではない。

3-2 認知的効用に関する E-admissibility

以上の議論は効用関数を前提として行為選択をするという話だったわけだが、通常科学哲学で問題になる理論選択について考えるためには、効用関数を認知的効用(epistemic utility)に置き換える必要がある。リーバイはこれについても早い時期から議論を展開している(Levi 1967; Levi 1980, 45-51)。この問題について考えるために、リーバイはまず与えられた集積知識と矛盾しない仮説の空間を究極的な分割(ultimate partition)に切り分ける。究極的分割の成員は少なくとも一つが真であり、しかも真な成員は一つしかない。あらゆる仮説gはその究極的分割の選言($h_1 \lor h_2 \lor \ldots \lor h_k$)の形を取るものとする。究極的な分割がn分割であるならば、選択肢gの数は 2^nである。

認知的効用の基本となるのは、仮説g を拒否することの情報価値(information value)M(g)

という値であり、これは、gに含まれるすべての選言肢を一つ一つ拒否することの価値と等しい、つまり$g=(h_1 \vee h_2 \vee ... \vee h_k)$であるとき、$M(g)=M(h_1)+M(h_2)+...+M(h_k)$である。逆に、仮説gを受け入れるということは¬gを拒否するということであり、その情報価値は$1-M(g)=M(\neg g)$で表される(あらゆる仮説を拒否することの情報価値は1とおかれている)。情報価値はその情報の真偽に関わらず与えられる値だとされる。しかし、誤った情報を集積知識に付け加えてしまうことを避けようという認知的要請も強く存在する。正しい判断を下すことの価値を1、誤った判断を下すことの価値を0、情報価値に対し誤った判断を下すことがどれくらい重大かを表す指標をα(ただし$0.5 \leqq \alpha \leqq 1$)[2]とする。認知的効用がこれらの要素だけで決まるとすると、gが真である(より正確にはgを構成する選言肢の一つが真である)のにgを拒否することの認知的効用は$0\alpha+(1-\alpha)M(g)=(1-\alpha)M(g)$、gが偽であるときにgを拒否することの認知的効用は$1\alpha+(1-\alpha)M(g)=\alpha+(1-\alpha)M(g)$となる(ただし$0 \leqq M(g) \leqq 1$; Levi 1980,51, 180)。

さて、この認知的効用をベイズ主義の枠組みに挿入してみよう。選択肢となるのは、さまざまな仮説を受け入れたり拒否したりするという行為である。まず、厳格なベイズ主義の枠組みで考えるなら、仮説gを受け入れる(¬gを拒否する)という行為の期待認知効用(expected epistemic utility)は、$Q(g)-qM(g)$となる(ただし$q=(1-\alpha)/\alpha$、Levi 1980, 52, 135)。[3]この期待認知効用を最大化するには、$Q(h_i)<qM(h_i)$となるすべてのhiを選言肢として含み、それ以外のものを選言肢として含まないようなgを拒否すればよい、とリーバイは言う(Levi 1980, 135)。このままでは分かりにくいので話を単純にするためにあらゆるh_iの情報価値が等値であるとするならば、結局$Q(h_i)$が一定値以上になるようなh_iすべてを残してそれ以外を拒否するような選択肢が最善となる。さて、そうした単純化をするにせよ$M(h_i)$が一定ではないと考えるにせよ、Q関数に不確定性をみとめるならば、当然どの選言肢がgに含まれるべきかの判断は変わる。そして、いずれかのQ関数において期待認知効用を最大にするような選択肢はE-admissibleである。

図1に即していえば、この図の状況は$E=h_1$、$\neg E=h_2$の二つしか可能性がないという状況だと考えることができる。選択肢はA_1={h_1を受け入れる}、A_2={h_2を受け入れる}、A_3={$h_1 \vee h_2$を受け入れる}、という三つである(何も受け入れないという選択肢もあるがとりあえずここではおいておく)。h_1のQ値があがるにつれ、A_1の値は上がり、A_2の値は下がる。$h_1 \vee h_2$を受け入れるという選択は間違いの可能性はないが情報価値もゼロであるため、認知的効用は低

[2] αが0.5よりも小さいならば、拒否することの情報価値の高いgを誤って拒否することが、情報価値の低いg'を正しく拒否することより望ましいことになってしまうからまずい、とリーバイは言う(Levi 1980, 51)。ここではこの判断の是非は問わない。

[3] 定義に従って計算すると、gを拒否することの期待認知効用は

$(1-Q(g))(1+qM(g))+Q(g)qM(g)$

で、計算すると$1+qM(g)-Q(g)$となり、ここでのLeviの説明と食い違う上、決して負の値にはならない(つまりあらゆる仮説を拒否することが期待認知効用を最大化してしまう)。この1という値をなぜ無視するのかについてはLevi 1980にも先行するLevi 1967にも与えられていない。

い値で一定となる。
以上、リーバイの E-admissibility の概略を説明した。当然ながら、認知的効用も含めた効用の割り当てには、信念の度合い以上に個人差がありえる。リーバイも当然このことに気づいており、価値づけにおける不確定性についても長年にわたって検討している(Levi 1980, ch 8; Levi 1999)。また、認知的効用については過ちを犯すことの重大性をどのくらいに見積もるか（具体的には q をどう設定するか）も考慮の必要がある。しかし議論の複雑化をさけるため、本稿ではリーバイの議論のこうした側面は扱わないこととする。

4 P-admissibility と S-admissibility

E-admissibilityはその性格上、複数のE-admissibleな選択肢が生き延びることも十分ありうる。たとえば図 1 のA_1とA_2はどちらもE-admissible である。その中でさらに選ばなくてはならないとしたらどうしたらよいのであろうか。もちろんE-admissibleな選択肢はどれも合理的だからそれ以上の決定規則は必要ないという考え方もあるわけだが、リーバイはその路線はとらず、E-admissibilityを補足する二つの選択基準を導入する。

4-1 P-admissibility

まず導入されるのが P-admissibility という概念である。まず 1974 年の論文における定式化をみよう(Levi 1974)。P-admissible な選択肢とは、それ自体 E-admissible であると共に、あとでほかの E-admissible な選択肢に乗り換える余地を残す、つまり他の E-admissible な選択肢を保存するという点で最善の選択肢である。リーバイは特に説明していないが、この P は保存(preservation)の P からとったようである。これはリーバイが E-admissibility を導入したそもそもの動機が確証コミットメントの変化にあったことを考えるなら納得のいく基準である。Q 関数が単一に絞り込めないということは X 自身が確率の割り当てについて確信が持てないということであり、後から考えてやはり割り当てを変えたいと考えたときにそれができた方が X にとっても望ましい。そこで、決定をなるだけ先送りするような選択肢がよいということになるわけである。ただ、この論文では、それ以上にはどういうやり方で判断を保留すればよいのかは論じられていない。
1974 年の論文における議論では、P-admissible な選択肢は E-admissible な選択肢でもあることが要求されていたが、リーバイは『知識の企図』においてその条件をゆるめ、P-admissible な選択肢は E-undominated であることだけを求めるようになった(Levi 1974; Levi 1980, 136)。E-undominated な選択肢とは、E-admissible な選択肢のうち少なくとも一つが、許容可能なある Q 関数のもとではその選択肢と同じかそれ以下の期待効用しか持たないような選択肢のことである(138-139)。正確にいえば、P-admissible な選択肢の定義は、WU な選択肢が存在するかどうかによって分かれる。WU な選択肢とは、あらゆる E-admissible な選択肢より弱いか少なくとも同じだけ弱く、しかもその条件を満たす選択肢の中では一番強く、そして E-undominated である、という条件を満たす選択肢である。

もしそうした選択肢が存在すれば、P-admissible な選択肢の集合は WU な選択肢の集合と同一である。もし WU な選択肢が存在しないなら、P-admissible な選択肢は E-admissible な選択肢の集合と同一である。

図 1 に即していえば、選択肢がこの三つに限られるのなら、1974 年の基準ではP-admissible な選択肢は二つ、つまりA_1とA_2がそのままP-admissibleである。1980 年の基準では、A_1とA_2の間で決定を下さないような選択肢であればよい。たとえば認知的効用について考えるなら、A_1とA_2の間で決定を下さないとは、結局h_1とh_2の両方を受け入れるということであり、これは$h_1 \vee h_2$を受け入れる、つまりA_3を選ぶということに他ならない。A_3はもちろんE-admissibleではないが、1980 年の基準ではそれはかまわない。また、A_1もA_2もあらゆるQ値においてA_3より高い期待効用を持つわけではないので、E-undominatedという条件も満たされている。ということで、A_3は唯一のP-admissibleな選択肢となる。

4-2 S-admissibility

P-admissibilityを導入してもまだ選択肢を絞り込めない場合、さらなる選択の基準としてリーバイはS-admissibilityという概念を導入する(Levi 1980, 98, 144-163)。基本的な考え方としては、どうしても選択に困るのならもっとも安全さ(security)においてまさるような選択肢を選べ、ということである。「安全な選択」についてはさまざまな提案がなされてきたが、リーバイが妥当な基準として認めるのは、ウォルドのマクシミン（最小値最大化. maximin)規則(Wald 1942, ch. 4)と、レクシミン(leximin)規則[4]である(Levi 1980, 156)。以下ではマクシミン規則の方をもっぱら検討する。リーバイの設定する選択状況にあてはめれば、それぞれの選択肢において最も期待効用が小さくなるQ関数をさがし、その期待効用の値が一番大きい選択肢を選ぶ、というのがマクシミン規則の考え方である。ただし、リーバイはこれをP-admissibleな選択のみに対してあてはめる。つまり、S-admissible な選択肢とはP-admissibleな選択肢の中でマクシミンであるような選択肢である。

図 1 の例に沿って言うなら、P-admissibilityのある定義によればA_1とA_2の両方がP-admissibleなわけであるが、最小値には差がある。すなわち、ありうるQ値の範囲内では、A_1を選んだ場合の最小値が$P(E)=0.25$ のときの$A_1=0.25$ という値であるのに対し、A_2の最小値は$P(E)=0.70$ のときの$A_2=0.30$ という値になる。つまり、A_2の方が最小値が大きいので、マクシミン規則によってA_2が選択されることになる。

5 リーバイのモデルの既存の検討

[4] レクシミン規則についてはここではこれ以上ふれないが、簡単に解説しておく。レクシミンとは lexicographical maximinの略で、マクシミン規則で同等になる二つの選択肢について、最悪の次に悪い結果を比較してその値が大きい方を選び、それでも決着が着かない場合は三番目に悪い結果を比較して…というように決着が着くまで比較を続けるという選択方法である(Levi 1980, 148-149)。

5-1 リーバイのモデルのまとめ

さて、以上でようやく不確定な確率割り当ての状況下での意志決定に関するリーバイのモデル（以下単に「リーバイのモデル」と呼ぶ）の全体像を紹介し終えた。簡単にまとめるなら、Q 関数、つまり確率の割り当て方を一つにしぼることができなくとも、E-admissibility、P-admissibility、S-admissibility と三つの判断規則を順次当てはめて行くならば許容可能な判断は絞り込むことができる、というのがリーバイのアイデアである。E-admissibility は、与えられた条件の下でできるだけベイズ主義と整合的な判断を下そうという発想、P-admissibility は不確かな条件の下ではできるだけ判断を保留しようという発想、S-admissibility は、できるだけ最悪の場合を避けようという発想にもとづいている。どれもそれぞれに筋の通った判断基準であり、その限りでは確かにある程度のもっともらしさはあるといえるだろう。

さて、リーバイは以上のような意志決定の枠組みを社会的な意志決定にも拡張する(Levi 1985; Levi 1990a)。発想は非常にシンプルである。個人の意志決定において確率の割り当て方に不確定性があるのと、複数の個人の間で確率の割り当てが異なるのはさまざまな点で似た状況であり、同じルールが適用できるのではないか、というのが基本的な発想である。この拡張の妥当性については別稿で論じている(伊勢田 2006)。以下で検討する対案や批判には、社会的意志決定の手段としてのリーバイのモデルへの対案や批判もある。

5-2 単一の加重平均による意志決定

では、リーバイのモデルは、どのくらいもっともらしいのだろうか。これについてはすでにいくつかの他のモデルとの比較がなされているので、それを以下みて行く事にしよう。

まず、同じような確率割り当ての不確定性がある際の考え方として、加重平均を取ることによって確率を一つに定めようという考え方がある。たとえば、社会的意志決定の文脈でキース・レーラーとカール・ワグナーがこの路線をとっている(Lehrer and Wagner 1981)。要するに、二人の認知者がある仮説に別の確率を割り当てるなら、二人の割り当てた値の加重平均が集団としての割り当てになるというわけである。

リーバイの考える Q 関数の凸包も両端の値のさまざまな加重平均の集合であるから、両者の立場は非常に近いように見える。しかし、リーバイは、レーラーとワグナーの立場は最終的にある時点におけるある仮説の主観的確率を単一の値にしようとしているという点で厳格なベイズ主義にまだひきずられている、と批判する(Levi 1985; Levi 1997, 166-167)。レーラーとワグナーは、認知者たちがお互いの判断を尊重(respect)することから加重平均を選択するようになると考えるが、そうやって性急に不一致をなくそうとするのは不一致の解決法として賢いやり方ではないとリーバイは考える。

さらに，一意な加重平均を取ることには技術的な難点も存在する。関係者全員が二つの事象間が統計的に独立だと考えていた場合にも加重平均ではその関係が保存されない。これについてはリーバイはラッダガによるレーラーへの批判を利用している(Laddaga 1977;

Levi 1985, 8-10)。[5]hがeから統計的に独立とは、P(h, e)=P(h)となるということであるが、二つの確率割り当てP_1とP_2において$P_1(h, e) = P_1(h)$かつ$P_2(h, e) = P_2(h)$であっても、$P_\alpha = \alpha P_1 + (1-\alpha) P_2$で定義される$P_\alpha$について$P_\alpha(h, e) = P_\alpha(h)$となるとは限らない。もし独立であれば$P_\alpha(h\&e) = P_\alpha(h) P_\alpha(e)$が成り立つはずだが、レーラーのアルゴリズムでは、左辺は同一人物のhとeについての確率割り当てにその人の信頼性での重みづけ係数をかけたものを総和し、右辺はhとeそれぞれについて違う人が行った確率割り当てにそれぞれの人の信頼性をかけたものを総和することになる(Laddaga 1977, 474-475)。

これに対しリーバイのモデルでは単一の加重平均を選ぶのではなく凸包集合をとる。この凸包集合については、$P_\alpha(h, e)$が$0 \leqq \alpha \leqq 1$の範囲で取る値の範囲と$P_\alpha(h)$が$0 \leqq \alpha \leqq 1$の範囲で取る値の範囲は同一である。従って、単独の確率割り当てを指定しないことでかえって独立性が維持されている、とリーバイは主張する(9)。

また、リーバイは単なる加重平均でなく単一の確率分布を得るもう一つの選択肢として対数的意見プール(logarithmic opinion pool)にも言及している。この立場の問題点はパレート的一致(Paretian unianimity)が保証されないことである(Levi 1997, 166-167)。共有された合意という以上は、パレート的一致は合意の中で保存される必要がある。

ただ、この後者の要請についてはリーバイは後に態度を変えている。実は、不確定な確率割り当ての下で選ばれる選択肢がパレート的一致を満たさなくてはならないという基準についてはサイデンフェルトらによる批判がなされている(Seidenfeld et al 1989)。それによれば、確率の割り当てと効用関数の両方において意見の食い違う二人の間でさまざまな加重平均をとったときに、あらゆるパレート的一致を保存できる期待効用関数はどちらか一方の選択に完全に一致するもののみである。要するに、パレート的一致を保存するような妥協というものは存在せず、どちらかが他方に完全に折れるしかないのである。これは凸包集合をとっても同じことである。サイデンフェルトらは、パレート的一致の重要性を重視して、妥協は望ましいやり方ではないという結論を得る。

リーバイはこれに答えて、文字通りの意味でのパレート的一致は必ずしも必要ないという立場に鞍替えする(Levi 1990b)。サイデンフェルトらが想定している状況を分かりやすい文脈に置き換えるなら、それはたとえば、まったく正反対の政治的立場の二つのグループが、ある政策の帰結についてまったく正反対の予測を立て、その結果として同じ政策を支持する結果となる、というような状況である。これは確かにパレート的一致といえばパレート的一致だが、中身を吟味すればそれはたまたま一致しているにすぎず、本当の一致とは言えない。こうしたパレート的一致を保存する必要はない、というのがリーバイの答えである。ただ、共有された合意について何も拘束がないのでは困るので、リーバイは「頑健なパレート的一致」(robust Pareto unanimity)という概念を提案する(489)。 これは、

[5] ラッダガの直接の批判の対象となっているのはLehrer 1975であるが、ここで批判されている点についてはLehrer and Wagner 1981でも踏襲されている。

二人の認知者が同じ確証コミットメントを持ち、ただ蓄積知識の内容が違うために違う Q 関数を得ているという状況を想定した場合に成り立つ一致であり、もし両者がそれぞれの蓄積知識を弱めて共通部分だけを受け入れることにしたときにやはりパレート的一致が存在するならばそれは頑健なパレート的一致である、と定義される。あるいは、別の文脈では、頑健なパレート的一致とは両者がお互いの効用関数を取り替えたとしても一致が保存されるような一致である、と説明されている(Levi 1997, 163, n1)。

5-3 マクシミン規則

ウォルドらの提案する既存のマクシミン規則もまたリーバイのモデルの対抗馬である（Wald 1942。リーバイが名指しで批判するのは Good 1952 の議論の一部である)。ここでは単なるマクシミン規則ではなく、サイデンフェルトの言い方で言うところのΓマクシミン規則が問題となる(Seidenfeld 2004)。与えられた選択肢のうちどれを選ぶかを考えるとき、それぞれの選択肢の期待効用を計算することになるが、起こりうるさまざまな状態についての確率の割り当て方が一通り以上あるならば期待値もまたどの割当を選ぶかで変わってくる。その際に、許容可能な確率割当の集合Γと固定された効用関数との組み合わせで期待値を計算したとき、期待値の最小値が最大となるような選択肢を選ぶように求める規則がΓマクシミン規則である。最小値最大化の対象となるのは、最悪の状況ではなく、最悪の期待値（つまりそれ自体結果のばらつきを許容するようなもの）である。

リーバイも、文脈を限定して使うならΓマクシミン規則が理にかなっていることを否定しない。実際、S-admissibilityは内容においてはマクシミン規則である。既存のマクシミン規則とS-admissibilityの違いは、言うまでもなく、E-admissibilityやP-admissibilityであらかじめ選択肢を絞り込むかどうかというところである。たとえば、図１において、もし選択肢をしぼらなければ、与えられたQ値の範囲内での最小値が 0.4 となるA_3は、最小値が 0.3 であるA_2や 0.25 であるA_1よりも最小値が大きいため、マクシミン規則ではA_3選択されるはずである。

この立場へのリーバイの批判は，要するに，マクシミン規則はあまりに悲観的にすぎるというものである(Levi 1997, 168)。たとえばグッドは、ベイズ的な選択とマクシミン規則を状況によって使い分けることを提案するが、その際マクシミン規則を使うのが適当だと考えられる状況として、自然と我々の間がゼロ和ゲームとなっていてしかも自然が十分賢いと考える理由があるなような状況を想定している(Good 1952, 114). しかしリーバイは事態をそのようにはとらえない。少なくとも許容可能な Q 値のどれにおいても期待効用を最大にしないような選択肢を自分から選ぶのは(それが P-admissible である場合を除いて）不合理な悲観主義である。

サイデンフェルトもまた E-admissibility をΓマクシミン規則と対比する(Seidenfeld 2004。サイデンフェルトは Gilboa and Schmeidler 1989 をΓマクシミン規則の例として挙げる)。まず、E-admissibility とΓマクシミン規則がどちらも最低限の合理性基準として

ダッチブックを逃れていることをサイデンフェルトは示す。つまり、これらの規則に従っている人に対して、その人が必ず負ける賭けを構成して受け入れさせることはできない。しかし他の点ではE-admissibilityの方が優れているとサイデンフェルトは考える。サイデンフェルトはΓマクシミン規則が「混合優越性」(mixture dominance)を満たさない点を重視する。混合優越性とは、Aという選択肢とBという選択肢があったときに、確率αでA、確率1-αでBとなる（0≦α≦1)ような選択肢を混合選択肢と呼ぶとすると、混合選択肢の望ましさはAの望ましさとBの望ましさの間の値にならなくてはならない、という要請である。この要請が満たされないことは、図１においてA_1とA_2の混合選択肢を考えれば分かる。α=0.5 ととれば、この混合選択肢の期待値はあらゆるQ値において 0.5 となり、既存の三つの選択肢を超えてΓマクシミン規則ではもっとも望ましい選択肢となる。

Γマクシミン規則が E-admissibility に対して優れているように思われる点は序列性(ordering)である。たとえば選択肢 A、B、C があって、Γマクシミン規則で A が B よりよい選択肢、B が C よりよい選択肢だと判断されたなら、A は C よりよい選択肢である。こうした序列性が E-admissibility については成り立たない。比較対象となる選択肢次第で A が B よりよく、B が C よりよいのに C が A よりよいということも十分成り立ちうる。

ただ、サイデンフェルトは、最終的には混合優越性やその背後にある独立性の要請の方が序列性の要請よりも重要であると考える。詳しくは紹介しないが、混合優越性が破られることにより、場合によってはΓマクシミンは決定に関連する新しい情報に負の価値を与えることになってしまい、非常に直観に反する。

リーバイはサイデンフェルトの分析に基本的に同意するが、自分自身の S-admissibility はここでΓマクシミン規則が陥ったのと同じ問題には陥らないと力説している(Levi 2004)。

5-4 確率タイプ連鎖

リーバイと同様な確率割り当て自体の不確定性を扱った先行する議論としてはグッドのものがある(Good 1952)。[6]グッドは高階の信憑性（つまり信憑性についての信憑性）を導入する考え方を導入する。図１に即していえば、P(E)が 0.25≦P(E)≦0.75 という範囲内にあるとしても、P(E)=0.5 であると考える根拠の方がP(E)=0.25 であると考える根拠の方が強いということがあるだろう。グッドはこれを確率タイプ連鎖(probability type-chain)と呼ぶ(Good 1952, 109)。

リーバイはこの種の議論を検討していない。その理由はよくわからないが、そもそも確率割り当てに対する信念の度合いという考え方が意味をなさないと考えているようである(Levi 1985, 7-8 など)。

---

[6]リーバイはグッドがE-admissibilityの概念をこの論文で提唱した、という引用のしかたをしており、確かにそう読める部分もあるが、グッドの主要な提案はむしろ以下でまとめるような部分の方であるように思われる。

5-5　以上の検討のまとめ

以上の検討からは、とりあえず、E-admissibility を中心としたリーバイのモデルが不確定な確率割り当ての処理の仕方としてそれほど悪いやり方ではないということが見えてくる。ダッチブックの回避、統計的独立性の保存、頑健なパレート的一致、混合優越性など、のぞましい意志決定モデルが持つべき性質の多くをリーバイのモデルは持っている。ただし、その代償として、リーバイのモデルは選択肢をふるい落とす力は弱く、選択肢間の序列性も維持されない。ただ、これらは多くの決定状況においてそれほど問題になる特徴ではない。

６　結論

本稿では不確実な確率割り当ての下での意志決定に関するリーバイのモデルと、それをめぐるこれまでの論争を概観した。レーラーらのモデルとの本格的比較など、理論的レベルで検討しなくてはならない課題は多いし、科学共同体の実際の営みとつきあわせて現実的なモデルといえるかどうかを検討するという作業も必要である。リーバイは個人の確率割り当ての不確定性から理論構築をはじめて複数の間での確率割り当ての不一致に適用範囲を拡張したわけであるが、この二つを同じ枠組みで扱うべきかどうかも慎重に検討すべき課題であろう。しかし、リーバイのモデルは十分に検討を続けていくに値することは以上の検討からも言えたのではないだろうか。

文献

Anscombe, E.J. and R.J. Aumann (1963) "A definition of subjective probability," Annals of Mathematical Statistics 34, 199-205.

Gilboa, I. and D. Schmeidler (1989) ‘Maxmin Expected Utility with Non-Unique Prior”, Journal of Mathematical Econics 18, 141-153.

Good, I.J. (1952) "Rational decisions," Journal of the Royal Statistical Society series B 14, 107-114.

Laddaga, R.(1977) "Lehrer and consensus proposal," Synthese 36, 473-476.

Lehrer, K. (1975) "Social consensus and rational agnoiology," Synthese 31, 141-160.

Lehrer,K. and Wagner, C. (1981) Rational Consensus in Science and Society : A Philosophical and Mathematical Study.Reidel.

Levi, I. (1974) "On indeterminate probabilities," Journal of Philosophy 71, 391-418, reprinted in Levi 1997, 117-144.

Levi, I. (1980) The Enterprise of Knowledge, MIT Press.

Levi, I. (1990a) "Compromising Bayesianism: a plea for indeterminacy", Journal of

Statistical Planning and Inference 25, 347-362, reprinted in Levi 1997, 154-172.
Levi, I. (1990b) ″Pareto unanimity and consensus″, The Journal of Philosophy 87, 481-492.
Levi, I. (1997) The Covenant of Reason. Cambridge: Cambridge University Press.
Levi, I. (1999)″Value comittments, value conflict, and the separability of belief and value″, Philosophy of Science 66, 509-533.
Seidenfeld, T. (2004) ″A contrast between two decision rules for use with (convex) sets of probabilities: Γ-maximin versus E-admissibility″ Synthese 140, 69-88.
Seidenfeld, T. J.B.Kadane and M.J. Schervish (1989) ″On the shared preferences of two Bayesian decision makers″, The Journal of Philosophy 86, 225-244.
Wald, A. (1942) On the Principles of Statistical Inference. University of Notre Dame Press.
伊勢田哲治（2006）「ベイズ主義の社会化はいかにあるべきかーーリーバイのモデルの検討を通してーー」『科学哲学科学史研究』１号、京都大学文学研究科科学哲学科学史研究室発行、23-36.