日本応用数理学会論文誌
Vol. 16, No. 3, 2006, pp. 277～290

最適形状問題と力法について

海津　聰* 　　畔上秀幸 **

*茨城大学教育学部数学教育講座 **名古屋大学大学院情報科学研究科

Optimal Shape Problems and Traction Method

Satoshi KAIZU* 　Hideyuki AZEGAMI**

*Dept. of Mathematics, Faculty of Education Ibaraki University

**Dept. of Complex Systems, Graduate School of Information Science, Nagoya University

Abstract In shape optimization, in which partial differential equations are defined and the shape with minimum cost is searched, an admissible family of shapes are given as being compact in some topology. Then minimizing of shapes for a cost implies an optimal shape, which we desire. The traction method is a power way to construct minimizing sequence of shapes for a cost, which guarantees the smoothness of shapes of the sequence. A reason of why the smoothness of shape is guaranteed is given from the point of view of mathematics.

1　はじめに

諸種の現象で形が重要な意味をもっているものを多数挙げることができる．物に付着したり，落下する水滴の形，最も剛性が大きいときの弾性体の形状などである．これらはある条件下での最適形状を実現しているものと思われる．この種の問題を決定する物理状態量(落下する水滴の場合は流速と水圧，弾性体の場合には変位)が楕円型定常問題に支配されている場合に限定して考える．

実現する領域の形状 $\Omega\,(\subset \mathbf{R}^d, d=2,3)$ は，許容された領域の族(許容領域族 $\mathcal{U}^{\mathrm{ad}}$)上で定義されたコスト関数 $J(\Omega)=J(\Omega,u)$ を最小にする条件下で定まるもの(最適形状問題)として考える．u は Ω 上の楕円型定常問題の解である．許容領域族 $\mathcal{U}^{\mathrm{ad}}$ が適当な位相でコンパクトで，コスト関数 $J(\cdot)$ が，下に有界かつ下半連続であれば，問題 $\min\{J(\Omega)\mid\Omega\in\mathcal{U}^{\mathrm{ad}}\}$ は解けて最適形状 $\Omega^*(\in\mathcal{U}^{\mathrm{ad}})$ をもつ([15], [16])．実際コスト関数 $J(\cdot)$ の最小化列 $\{\Omega^n\}_n(\subset\mathcal{U}^{\mathrm{ad}})$ を構成できれば解 $\Omega^*\in\mathcal{U}^{\mathrm{ad}}$ を構成できる．そこで「$\Omega^0\in\mathcal{U}^{\mathrm{ad}}$ に対して $J(\Omega^0)$ の(後述の)勾配 $G\neq 0$ のとき

$$J(\Omega^1)<J(\Omega^0)$$

をみたす $\Omega^1\in\mathcal{U}^{\mathrm{ad}}$ を常に構成する方策があるか?」(コスト減少領域問題 (4.2) 参照)．コスト最小化領域列を構成的に与える方法が必要である．コスト減少領域の具体的構成法の一つ

に力法がある．力法は最適形状問題におけるコスト $J(\Omega)$ のガトー微分である勾配 G を計算した上で((4.1) と (4.14) を参照)，勾配 G に伴う線形汎関数 l_G を非斉次項とする楕円型境界値問題 (5.1) の解 ρ_G を求め，初期領域 Ω^0 に領域摂動 $\epsilon\rho_G(\epsilon > 0)$ を施してコスト減少領域 Ω^ϵ を構成，これを反復することで最適形状領域を得る方法として提案されている(コスト減少問題 (Q), (4.2) を参照, 更に注意 5.1 も参照，他に [2], [3], [6] 参照). 本論文では力法と問題 (5.1) を解くことを同一視して扱うことにする.

最適形状の数値的構成において領域に勾配法を用いコスト減少方向に摂動を加えると一般に波打ち現象がおこり，計算の制御が失われる事例報告がされている．Mohammadi, B. and O. Pironneau は勾配法による近似境界のこの種の不具合を回避し，滑らかさを保持する境界摂動の構成として本論文と異なる手法を用いている(p. 126, [17] 参照).

第二の著者が提案する力法もまた最適形状近似の際の波打ち現象を抑制し，ある種の平滑化機能をもつ([2], [3], [4], [5], [6]). 本論文で力法が機能する数学的根拠を提示し上記の平滑化作用の仕組みを考究する．具体的には命題5.2, 命題 5.4 と定理5.1 を示すことで力法の平滑化の構造が知られる．

2 最適形状問題

空間 $\mathbf{R}^d$ 内の有界領域 D, その上の関数 $f \in L^2(D)$, 正定数 A を固定する．領域 Ω の容積を $\mathrm{meas}(\Omega)$ とし，許容領域族を $\mathcal{U}_A^{\mathrm{ad}} = \{\Omega \mid \Omega \subset D, \mathrm{meas}(\Omega) \leq A\}$ とおく．このとき $\Omega \in \mathcal{U}_A^{\mathrm{ad}}$ 上の境界値問題: $\mathbf{BV}(\Omega)$

$$
\begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega, \\[2ex] u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}
$$

の解 u を求める．解 u が与えるコスト $J(\Omega, u)$ を

$$
J(\Omega) = \int_\Omega g(u)dx\Big(= J(\Omega, u)\Big) \tag{2.2}
$$

とおいて次の問題を考える．最適形状問題: **(P)**

$$
J(\Omega^*) = \min\left\{J(\Omega)\ |\Omega \in \mathcal{U}_A^{\mathrm{ad}}\right\}
$$

をみたす領域 $\Omega^* \in \mathcal{U}_A^{\mathrm{ad}}$ を求めよ．例えば $f = 2$ とおくとき問題 (2.1) の解 u は非負関数で，コストとして $J(\Omega, u) = -\int_\Omega u dx$ をとれば上に有界であり後述の (3.6) がみたされる．汎関数 $J(\Omega, u)$ は非正で，更に下に有界と分かる．$-J(\Omega^*, u^*)$ は Ω^* の最大のねじれ剛性を与え問題 **(P)** は工学的意味をもつ．Ω^* が最大ねじれ剛性を与える形状である ([15]).

ここで問題 $\mathbf{BV}(\Omega)$ として一般の楕円型方程式の境界値問題や流速ベクトルと圧力(スカラ)を未知量とするストークス問題を議論できるが，展開を出来るだけ簡単にするためポアソン方程式を採用，コスト関数 (2.2) も出来るだけ単純な形を採用した．

3 許容領域族

正定数 k, δ を固定する．領域 D の部分領域 Ω を考える．この境界 $\partial\Omega$ の任意の点 x を考える．この点 x の直方体形状からなる近傍系の内，k, δ で定まるサイズの直方体状近傍 $P_{\delta,k}$ を

取り，その直方体状近傍 $P_{\delta,k}$ と境界 $\partial\Omega$ の共通部分 $P_{\delta,k}\cap\partial\Omega$ がリプシツ定数 k の $d-1$ 変数の関数で表わされる．このような条件をみたす D の部分領域 Ω からなる領域族を $\mathrm{Lip}(\delta,k)$ で記し，$\Omega(\in \mathrm{Lip}(\delta,k))$ は「一様リプシツ条件をみたす」と呼ぶ．開集合 $\Omega\in\mathrm{Lip}(\delta,k)$ とその特性関数 $\chi_\Omega\in L^2(D)$ との対応により $\mathrm{Lip}(\delta,k)$ は $L^2(D)$ 位相 $\mathcal{T}_{L^2}$ 下でコンパクトである．非負整数 m を固定する．空間 $H^{m+1}(\Omega)$ から空間 $H^{m+1}(D)$ への拡張 π_Ω が存在し，その作用素ノルムの族 $\{\|\pi_\Omega\|\mid\Omega\in\mathrm{Lip}(\delta,k)\}$ が有界になる (D. Chenais [7] 参照).

正数 $0<\alpha\le 1$ に対し $C^{m,\alpha}$ 級の領域 Ω^0 の摂動 Ω^ϵ を考え，コスト $J(\Omega,u)$ を領域 Ω^0 において微分する方策を考える．空間 $C^m(\overline{D},\mathbf{R}^d)$ 上の点列 $\{\rho^n\}_n$ の収束を $\lim_{n\to\infty}\rho^n=\rho^0 \quad \text{in} \quad C^m$ と略記し多重添え字 γ を用いて $\|\rho^n-\rho^0\|_{C^m}=\sup_{\overline{D},|\gamma|\le m}|\partial^\gamma(\rho^n-\rho^0)|\to 0$ で定める．また空間 $C^{m,\alpha}(\overline{D},\mathbf{R}^d)$ 上の点列 $\{\rho^n\}_n$ の収束を $\lim_{n\to\infty}\rho^n=\rho^0 \quad \text{in} \quad C^{m,\alpha}$ と略記し (i) $\lim_{n\to\infty}\rho^n=\rho^0 \quad \text{in} \quad C^m$, (ii) $\lim_{n\to\infty}|\rho^n-\rho^0|_{m,\alpha}\to 0$ とする．ここでセミノルム $|\rho|_{m,\alpha}$ の定義は $|\gamma|=m$ なる任意の多重添え字 γ を用いて

$$|\rho|_{m,\alpha}=\sup_{(x,y)\in D\times D, x\neq y, |\gamma|=m}\frac{|\partial^\gamma\rho(x)-\partial^\gamma\rho(y)|}{|x-y|^\alpha}<\infty.$$

空間 $C^m(\overline{D},\mathbf{R}^d)$ と $C^{m,\alpha}(\overline{D},\mathbf{R}^d)$ は上記収束の定義でいずれもバナッハ空間となりそれぞれの位相を $\mathcal{T}_{C^m}$ と $\mathcal{T}_{C^{m,\alpha}}$ と記す．$\mathcal{T}_{C^{m,\alpha}}$ は $\mathcal{T}_{C^m}$ より強い．正数 $K>0$ を固定し空間 $C^{m,\alpha}(\overline{D},\mathbf{R}^d)$ 内の有界集合 $U_K^{\mathrm{ad},m,\alpha}$ を許容関数族として考える．

$$U_K^{\mathrm{ad},m,\alpha}=\left\{\rho\in C^{m,\alpha}\left(\overline{D},\mathbf{R}^d\right)\ \middle|\ \|\rho\|_{C^m}+|\rho|_{m,\alpha}\le K\right\}.$$

補題 3.1 許容関数族 $U_K^{\mathrm{ad},m,\alpha}$ は空間 $C^m(\overline{D},\mathbf{R}^d)$ 内でコンパクト凸集合である．

$U_K^{\mathrm{ad},m,\alpha}$ はコンパクト集合 $\overline{D}$ 上で空間 $C^m(\overline{D},\mathbf{R}^d)$ 内の部分集合として一様有界かつ同程度連続である．ゆえに Ascoli-Arzela の定理より上の補題が得られる．

補題3.1から $U_K^{\mathrm{ad},m,1}$ 内の関数列 $\{\rho^n\}_n$ は集積点 ρ^0 をもつが，任意の集積点は $\rho^0\in W^{m+1,\infty}(D,\mathbf{R}^d)$ をみたすことがわかる．一般に位相 $\mathcal{T}_{C^{m,1}}$ に対し ρ^0 は $\{\rho^n\}_n$ の集積点でない．そこで位相 $\mathcal{T}_{C^m}$ より強いが $\mathcal{T}_{C^{m,1}}$ より弱い位相 $\mathcal{T}_{C^{m,1}\cap W^{m+1,\infty}}$ が導入でき領域の収束に効力がある(類似の位相が Neças, J, p. 85, [18] に導入されている)．位相 $\mathcal{T}_{C^{m,1}\cap W^{m+1,\infty}}$ による収束は $\rho^0=\lim_{n\to\infty}\rho^n$ in $C^{m,1}\cap W^{m+1,\infty}$ と略記し (i) $\lim_{n\to\infty}\rho^n=\rho^0 \quad \text{in} \quad C^m$, (ii) $\limsup_{n\to\infty}\ \operatorname{ess.sup}_{|\gamma|=m+1,\Omega}|\partial^\gamma\rho^n|<\infty$ である．$\mathcal{T}_{C^{m,1}\cap W^{m+1,\infty}}$ を用い次の補題が得られる．

補題 3.2 許容関数族 $U_K^{\mathrm{ad},m,1}$ は位相 $\mathcal{T}_{C^{m,1}\cap W^{m+1,\infty}}$ でコンパクト凸集合である．

次に $K=\epsilon_0$ を小にとり $C^{m,1}$ 級の領域 Ω^0 と $\rho\in U_{\epsilon_0}^{\mathrm{ad},m,1}$ から $C^{m,1}$ 級の領域 Ω^ρ をつくる．

$$\text{(3.1)}\qquad\left\{\begin{aligned} T^\rho(x)&=x^\rho\\ &=x+\rho(x),\quad\forall x\in\mathbf{R}^d,\\ \Omega^\rho&=\{x^\rho\mid\forall x\in\Omega^0\}(\subset D),\\ \\ \mathcal{U}_{\epsilon_0}^{\mathrm{ad},m,\alpha}(\Omega^0)&=\left\{\Omega^\rho\mid\forall\rho\in U_{\epsilon_0}^{\mathrm{ad},m,\alpha}\right\}.\end{aligned}\right.$$

$U_{\epsilon_0}^{\mathrm{ad},m,1}$ に位相 $\mathcal{T}_{C^{m,1}\cap W^{m+1,\infty}}$ を制限し，この $U_{\epsilon_0}^{\mathrm{ad},m,1}$ 上の位相から領域族 $\mathcal{U}_{\epsilon_0}^{\mathrm{ad},m,1}(\Omega^0)$ の上に ($\mathcal{T}_{L^2}$ より強い) 位相が定まる．これを $\mathcal{T}(\mathcal{U}^{\mathrm{ad}})$ と記す．本論文では領域族 $\mathcal{U}_{\epsilon_0}^{\mathrm{ad},m,1}(\Omega^0)$ を許容領域族と呼ぶ．この位相 $\mathcal{T}(\mathcal{U}^{\mathrm{ad}})$ で $\mathcal{U}_{\epsilon_0}^{\mathrm{ad},m,1}(\Omega^0)$ はコンパクト集合となる．次に $H^{m+1}(\Omega^\rho)$ は標準的ソボレフ空間とする．任意の関数 $v^\rho\in H^{m+1}(\Omega^\rho)$ に対して $\hat{v}^\rho\in H^{m+1}(\Omega^0)$ を次式で定義する．

$$\hat{v}^\rho(x)=v^\rho(x^\rho).$$

補題 3.3 (i) 非負整数 m に対し正数 k,δ がとれ，$\mathcal{U}_{\epsilon_0}^{\mathrm{ad},m+1,\alpha}(\Omega^0)\cup\mathcal{U}_{\epsilon_0}^{\mathrm{ad},m,1}(\Omega^0)\subset\mathrm{Lip}(\delta,k)$ である．(ii) 小なる $\epsilon_0>0$，任意の $\rho=(\rho^i)_i\in U_{\epsilon_0}^{\mathrm{ad},m,1}$ に対し写像 $T^\rho:\mathbf{R}^d\ni x\mapsto x^\rho\in\mathbf{R}^d$ は $C^{m,1}$ 微分同型である．任意 $\epsilon\in(0,1),\rho\in U_{\epsilon_0}^{\mathrm{ad},0,1}$ に対し微分同型 $T^\epsilon=T^{\epsilon\rho}$ のヤコビ行列 $\left(\mathcal{J}_{ij}\right)$ は $\mathcal{J}_{ij}=\delta_j^i+\epsilon\rho_j^i$，$\rho_j^i=\partial_j\rho^i$ である．$I=(\delta_j^i),B_{ij}=(\rho_j^i)$ $(\subset\{L^\infty(D)\}^{d\times d})$ とおき次の等式がなりたつ．

$$\left(\mathcal{J}_{ij}\right)^{-1}=I-\epsilon B+\epsilon^2B^2(I+\epsilon B)^{-1}. \tag{3.2}$$

(iii) 任意の $\rho\in U_{\epsilon_0}^{\mathrm{ad},m,1}$ に対し正数 C があり，任意の $v^\rho\in H^{m+1}(\Omega^\rho)$ に対して次式がなりたつ．

$$C^{-1}\|v^\rho\|_{H^{m+1}(\Omega^\rho)}\le\|\hat{v}^\rho\|_{H^{m+1}(\Omega)}\le C\|v^\rho\|_{H^{m+1}(\Omega^\rho)}.$$

(iv) $\rho\in U_{\epsilon_0}^{\mathrm{ad},0,1}$ を固定する．問題 $\mathbf{BV}(\Omega^{\epsilon\rho})$ の解を u^ϵ とおくとき $\hat{u}^\epsilon$ は次の変分等式の解である．ここで問題 $\mathbf{BV}(\Omega^{\epsilon\rho})$ の非斉次項 f について $f=\overline{C}(=$ 定数$)$ とおく．総和記号の簡略化を用い

$$\int_{\Omega^0}\left(\nabla\hat{u}^\epsilon\cdot\nabla v+\epsilon(C_1^{ij}+\epsilon C_{2,\epsilon}^{ij})\hat{u}_i^\epsilon v_j\right)dx=\int_{\Omega^0}\overline{C}v(1+\epsilon\nabla\cdot\rho+\epsilon^2h_{2,\epsilon})dx,\quad\forall v\in H_0^1(\Omega^0). \tag{3.3}$$

ここで $v_i=\partial_iv$ と記す．$(C_1^{ij})_{ij},(C_{2,\epsilon}^{ij})_{ij}(\subset\{L^\infty(D)\}^{d\times d})$ は対称行列で C_1^{ij} は ρ_j^i のみに依存し C_2^{ij} は ρ_j^i と ϵ 双方に依存する．$h_{2,\epsilon}$ もまた ρ_j^i と ϵ に依存し空間 $L^\infty(D)$ の要素である．

注意 3.1 上の補題の等式(3.2)とヤコビアン $\det(\mathcal{J}_{ij})$ の ϵ による展開式を用いて変分等式(3.3)が得られる．また変分等式(3.3)は次節の(4.15)で定義された「物質差分商」$\hat{\phi}^\epsilon$ がみたす変分等式や $\hat{\phi}^\epsilon-\hat{\phi}$ がみたす変分等式(4.16)や物質微分 $\dot{u}(=\hat{\phi})$ がみたす変分等式(4.10)を定めることに注意する．

ここで m は非負整数として空間 $W^{m+1,\infty}(\mathbf{R},\mathbf{R})$ は次の条件をみたす関数の集合とする．

(i) $v\in C^m(\mathbf{R},\mathbf{R})$
(ii) $|\alpha|=m+1$ なる任意の多重指数に対して $\partial^\alpha v\in L^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$)

一般に

$$\begin{cases} W^{m+1,\infty}(\mathbf{R},\mathbf{R})\not\subset C^{m+1}(\mathbf{R},\mathbf{R}),\\ C^{m+1}(\mathbf{R},\mathbf{R})\not\subset W^{m+1,\infty}(\mathbf{R},\mathbf{R}) \end{cases} \tag{3.4}$$

なる包含関係の不成立に注意する．

本論では許容領域族としては $\mathcal{U}_{\epsilon_0}^{\mathrm{ad},0,1}(\Omega^0)$ を採用する．更に力法の成り立ちに集中するため，以降は許容領域族に容積の制約条件を除去した最適形状問題：$\mathbf{(P)}(\Omega^0)_{\epsilon_0}$，

$$J(\Omega^*)=\min\{J(\Omega)\mid\Omega\in\mathcal{U}_{\epsilon_0}^{\mathrm{ad},0,1}(\Omega^0)\}$$

を考える．この問題の可解性のための条件を与える．

$$\begin{cases} g(0)=0,\\ \\ g\in W^{1,\infty}(\mathbf{R},\mathbf{R}), \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\inf\left\{J(\Omega,u)\mid\forall\Omega\in\mathcal{U}_{\epsilon_0}^{\mathrm{ad},0,1}(\Omega^0)\right\}>-\infty. \tag{3.6}$$

命題 3.1 条件 (3.5), (3.6) の下でコスト最小化領域列 $\{\Omega^n\}_n\Big(\subset \mathcal{U}^{\mathrm{ad},0,1}_{\epsilon_0}(\Omega^0)\Big)$ は位相 $\mathcal{T}(\mathcal{U}^{\mathrm{ad}})$ の意味で集積点 Ω^* $(\in \mathcal{U}^{\mathrm{ad},0,1}_{\epsilon_0}(\Omega^0))$ をもつ．領域 Ω^* は問題 $\mathbf{(P)}(\Omega^0)_{\epsilon_0}$ の解である．

命題 3.1 は標準的手法によって証明される (例えば D. Chenais [7], J. Haslinger et al. [15], [16] 参照)． 命題 3.1 の結論をコスト最小化領域列の摂動関数列 $\{\rho^n\}_n$ に戻り表現すれば, 部分列 $\{\rho^{n(j)}\}_j$ と最適形状解を与える Ω^0 の摂動 ρ^* があり, $\rho^* = \lim_{j\to\infty}\rho^{n(j)}$ in $C^{0,1}\cap W^{1,\infty}$ がなりたつ．

冒頭の例は条件 (3.5), (3.6) をみたす．解を得るにはコスト最小化領域列の構成が不可欠であり, 条件 (3.6) 下でコスト最小化領域列の存在は先験的に保障される．このようにして連続問題の範囲内でのコスト最小化領域列の存在を先験的に仮定し，具体的構成に関しては最適形状問題の離散化後有限次元空間内の非線形計画法を駆使して離散空間内で最小化列を具体的に構成する (例えば J. Haslinger et al. [15], [16] 参照).

本論文の目的を繰り返すと力法が平滑化法の一つであること及び力法が連続問題の範囲内でコスト最小化領域列の具体的構成を与える方法である (実際に (5.1) の解 ρ_G が許容領域族内の摂動 Ω^ϵ を与える) ことを示す二点である．

4 ガトー微分

出発領域 Ω^0 と摂動後の領域 Ω^ϵ の滑らかさが異なる条件下で下記の関数 $j(\epsilon\rho)$ のガトー微分の結果を確認する．実際 Ω^0 に対しては (4.3) を仮定し摂動の生成素 ρ には (4.4) を仮定する．このとき Ω^ϵ は $C^{0,1}$ 級である．

任意の $\rho\in U^{\mathrm{ad},0,1}_{\epsilon_0}$ に対し $\mathcal{M}^\epsilon_\rho=\{\Omega^\epsilon=\Omega^{\epsilon\rho};\forall\epsilon\in(0,1]\}\subset\mathcal{U}^{\mathrm{ad},0,1}_{\epsilon_0}(\Omega^0)$ である．ρ を $\mathcal{M}^\epsilon_\rho$ の生成素と呼ぶ．領域族 $\mathcal{M}^\epsilon_\rho$ を用い汎関数 $J(\Omega^0,u^0)$ のガトー微分が可能である．境界値問題 $\mathbf{BV}(\Omega^\epsilon)$ の解 u^ϵ を用いて次の関数を定義する．

$$j(\epsilon\rho)=J(\Omega^\epsilon,u^\epsilon). \tag{4.1}$$

ここでは問題 $\mathbf{(P)}$ の単純化の，前節に導入した問題 $\mathbf{(P)}(\Omega^0)_{\epsilon_0}$ を考える．適当な条件の下で $j(\cdot)$ はガトー微分可能であり，勾配 $G\in H^{-1/2}(\partial\Omega^0)$ が定まり，$\rho\in\{H^1(\Omega^0)\}^d$ に対して (4.14) がなりたつ (命題 4.2)．命題 3.1 をみるとき最適形状領域 Ω^* を求めるには次の問題 $\mathbf{(Q)}$ を考える必要がある．

コスト減少領域問題 $\mathbf{(Q)}$: 勾配 $G\neq 0$ のとき条件 (4.2) をみたす $\rho_0\in U^{\mathrm{ad},0,1}_{\epsilon_0}$ を求めよ．

$$\exists\epsilon_1>0\quad\forall\epsilon\in(0,\epsilon_1)\quad j(\epsilon\rho_0)<j(0). \tag{4.2}$$

Garabedian and Schiffer [12], Fujii [9], 藤井他 [8], Y. Goto, N. Fujii and Y. Muramatsu [13], Sokolowski and Zolesio [19] に見られる結果を条件 (4.3), (4.4) の正則性のみで再導出し次の命題 4.1, 4.2 と補題 4.1 を得る．特に前節のように $\mathbf{BV}(\Omega^\epsilon)$ の非斉次項を ϵ に依存しない定数 $\overline{C}$ を用いて $f=\overline{C}$ と簡単化し記述する．dS は $\partial\Omega^0$ の面積素である．ガトー微分の周辺を整理するため次の条件を考える．

$$\Omega^0 \text{ は } C^{2,1} \text{ 級である,} \tag{4.3}$$

$$\rho\in U^{\mathrm{ad},0,1}_{\epsilon_0}, \tag{4.4}$$

$$\begin{cases} g(0)=0,\\ g\in W^{1,\infty}(\mathbf{R},\mathbf{R})\cap W^{2,\infty}(\mathbf{R},\mathbf{R}).\end{cases} \tag{4.5}$$

下記命題で条件(4.3)と(4.4)の組み合わせに注意する．

命題 4.1 条件(4.3), (4.4)と(4.5)の仮定の下で次の事項(i), (ii)がなりたつ．

(i) 境界値問題 $\mathbf{BV}(\Omega^\epsilon)$ の解 u^ϵ に対して $\{\pi_{\Omega^\epsilon}(u^\epsilon)\}_\epsilon$ は空間 $H^1(D)$ で一様有界である．$\pi^\epsilon = \pi_{\Omega^\epsilon}$ として次の形状微分が存在する．

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\pi^\epsilon(u^\epsilon)-u}{\epsilon} = u', \quad H^1(\Omega^0)\text{ で弱収束.} \tag{4.6}$$

ここで u' は次の問題の一意解である．ν は単位長外向き法線である．

$$\begin{cases} -\Delta u' = 0 & \text{in} \quad \Omega^0, \\ u' = -\rho\cdot\nu\dfrac{\partial u}{\partial \nu}. & \text{on} \quad \partial\Omega^0. \end{cases} \tag{4.7}$$

(ii) $\epsilon\to 0$ に対して

$$j(\epsilon\rho) = j(0) + \epsilon\int_{\Omega^0} u' g_u(u)dx + \epsilon\int_{\partial\Omega^0} g(u)\rho\cdot\nu dS + o(\epsilon). \tag{4.8}$$

漸近式(4.8)における $o(\epsilon)$ の評価を次の補題で詳しくみる．

補題 4.1 命題4.1の条件の下で, $\|\rho\|_{1,\infty}, \|g\|_{2,\infty}, \|u\|_{H^2(\Omega^0)}, \overline{C}$ により定まる正定数 C と小なる $\overline{\epsilon}>0$ が存在して次の結果がなりたつ．

$$|o(\epsilon)| \le \epsilon^2 C, \quad 0<\forall\epsilon<\overline{\epsilon}.$$

仮定(4.3), (4.4)と(4.5)の下で補題の証明の経過を付録に記する．

命題 4.2 命題4.1の条件の下で次の事項(i), (ii), (iii)がなりたつ．

(i) 物質微分は次式で定義される．

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\hat{u}^\epsilon - u}{\epsilon} = \dot{u}, \quad H_0^1(\Omega^0)\text{ で強収束.} \tag{4.9}$$

物質微分 $\dot{u}\in H_0^1(\Omega^0)$ は次の変分問題の一意解である．

$$(\nabla\dot{u},\nabla v) + (C_1^{jk}\partial_j u, \partial_k v) = (\overline{C}v, \nabla\cdot\rho), \quad \forall v\in H_0^1(\Omega^0). \tag{4.10}$$

ここで C_1^{jk} は変分等式(3.3)で用いられた係数である．物質微分 $\dot{u}$ と形状微分 u' は次の等式をみたし，$u'\in H^1(\Omega)$ である．

$$u' + \rho\cdot\nabla u = \dot{u}. \tag{4.11}$$

(ii) 次の補助問題(随伴問題)を考える．

$$\begin{cases} -\Delta p = g_u(u) & \text{in} \quad \Omega^0, \\ \\ p = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega^0. \end{cases} \tag{4.12}$$

ここで(Ω^0 が $C^{2,1}$ クラスゆえ $u\in H^3(\Omega^0)$ であり) $p\in H_0^1(\Omega^0)\cap H^3(\Omega^0)$(cf. [1]), 次式がなりたつ．

$$\int_{\Omega^0} u' g_u(u)dx = \int_{\partial\Omega^0}\frac{\partial p}{\partial\nu}\frac{\partial u}{\partial\nu}\rho\cdot\nu dS. \tag{4.13}$$

(iii) $G = g(u) + (\partial u/\partial\nu)(\partial p/\partial\nu)\in H^{3/2}(\partial\Omega^0)$ とおけば $\epsilon\to 0$ のとき

$$j(\epsilon\rho) = j(0) + \epsilon\int_{\partial\Omega^0} G\rho\cdot\nu dS + o(\epsilon). \tag{4.14}$$

注意 4.1 (i) 次の記号を用いる．$\Gamma=\partial\Omega^0$, 領域Ω^ϵとΩ^0の共通部分をω_0^ϵ, 差集合$\Omega^\epsilon\setminus\Omega^0$を$\omega_2^\epsilon$と記し，$\Omega^0\setminus\Omega^\epsilon$を$\omega_1^\epsilon$と記す．$\partial\Omega^\epsilon$の部分集合について$\Gamma_2=\Omega^\epsilon\cap\Gamma$, $\Gamma_1=\Gamma\setminus(\Omega^\epsilon\cap\Gamma)$とおく．記号$\rho=(\rho^j)_j$, $u_j=\partial u/\partial x_j$, $\phi=u',\hat{\phi}=\dot{u}$を用いる．

$$\phi^\epsilon(x)=\frac{u^\epsilon(x)-u(x)}{\epsilon},\quad \hat{\phi}^\epsilon(x)=\frac{\hat{u}^\epsilon(x)-u(x)}{\epsilon}. \tag{4.15}$$

(ii) 命題 5.1は力法の基礎的命題であり，Ω^0が$C^{2,1}$級のときコスト減少領域問題 **(Q)** (4.2) を解くことができる(補題5.1, 命題5.2参照)．そのため本節の条件(4.3)は不可欠である．

(iii) 命題 4.2で領域摂動の生成素ρとして(4.4)を仮定した．より強い正則性をρに仮定するとき$\hat{\phi}^\epsilon-\hat{\phi}$はより強い位相で収束する．実際に(4.4)の代わりに$\rho\in U_{\epsilon_0}^{\mathrm{ad},1,1}$を仮定するとき$\hat{\phi}^\epsilon-\hat{\phi}\to 0$は$H^2(\Omega)$ (よって$C^0(\overline{\Omega})$)で収束する．更に強く$\rho\in U_{\epsilon_0}^{\mathrm{ad},2,1}$を仮定するとき$\hat{\phi}^\epsilon-\hat{\phi}\to 0$は$H^3(\Omega)$(よって$C^1(\overline{\Omega})$)で収束する．これらは$\hat{\phi}^\epsilon-\hat{\phi}$が

$$(\nabla(\hat{\phi}^\epsilon-\hat{\phi}),\nabla v)+\epsilon(C_{2,\epsilon}^{jk}\hat{u}_j^\epsilon,v_k)=\epsilon(\overline{C}h_{2,\epsilon},v),\quad \forall v\in H_0^1(\Omega^0) \tag{4.16}$$

の解であることからわかる．ここで$C_{2,\epsilon}^{jk}$と$h_{2,\epsilon}$は変分等式(3.3)に現れた係数である．

(iv) 点$x\in\omega^\epsilon$と点$y^\epsilon\in\lambda^\epsilon(\subset\Omega)$の定義は付録**A**に述べた．このとき$\phi^\epsilon-\phi$と$\hat{\phi}^\epsilon-\hat{\phi}$の関係は(付録の等式(A.2)を変形した)次式で与えられる．これから命題4.1と合わせ$(\phi^\epsilon-\phi)(x)$の挙動が(4.11)と$(A.1)$より詳細にわかる．

$$\begin{aligned}\int_{\omega_0^\epsilon}\Big((\phi^\epsilon-\phi)\zeta\Big)(x)dx&=\int_{\lambda^\epsilon}\Big((\hat{\phi}^\epsilon-\hat{\phi})\hat{\zeta}\Big)(y^\epsilon)\det\left(\frac{\partial x}{\partial y^\epsilon}\right)dy^\epsilon\\ &+\int_{\lambda^\epsilon}\Big(\rho^j\Big(y^\epsilon+\epsilon\rho(y^\epsilon)\Big)-\rho^j(y^\epsilon)\Big)u_j(y^\epsilon+\epsilon\rho(y^\epsilon))\hat{\zeta}(y^\epsilon)\det\left(\frac{\partial x}{\partial y^\epsilon}\right)dy^\epsilon\\ &+\int_{\lambda^\epsilon}\int_0^1\Big\{u_j\Big(y^\epsilon+\epsilon\rho(y^\epsilon)\Big)-u_j\Big(y^\epsilon+t\epsilon\rho(y^\epsilon)\Big)-\epsilon\hat{\phi}_j\Big(y^\epsilon+t\epsilon\rho(y^\epsilon)\Big)\Big\}dt(\rho^j\zeta)(y^\epsilon)\det\left(\frac{\partial x}{\partial y^\epsilon}\right)dy^\epsilon.\end{aligned} \tag{4.17}$$

等式(4.17)の右辺の第2項$u_j\Big(y^\epsilon+\epsilon\rho(y^\epsilon)\Big)$, 第3項にある被積分関数

$$u_j\Big(y^\epsilon+\epsilon\rho(y^\epsilon)\Big)-u_j\Big(y^\epsilon+t\epsilon\rho(y^\epsilon)\Big)-\epsilon\hat{\phi}_j\Big(y^\epsilon+t\epsilon\rho(y^\epsilon)\Big)$$

に現れる関数$u_j,\hat{\phi}_j$にはΩ^0の滑らかさが遺伝する．

本論では境界値問題の解の第一変分のみに注目している．更に境界摂動による解の第二変分の存在についてはFujii [10], Goto, Fujii et al. [13] を参照のこと．

5 力法によるコスト減少領域問題の解

コスト減少領域問題 **(Q)** (4.2)の領域解Ω^ϵを与える摂動$\rho_0\in U_{\epsilon_0}^{\mathrm{ad},0.1}$が力法(5.1)で与えられることを示す(力法については文献[3]のSection 6.3 Smoothing gradient method, Section 9 Traction method, 又は注意5.1参照)．Ω^0上のベクトル関数空間$X=\{H^1(\Omega^0)\}^d$を考える．$\|v\|$はvのL^2-ノルムである．空間X上のノルムとして$\|\rho\|_X=\|\rho\|_{\{H^1(\Omega^0)\}^d}$を採用する．$\rho\in X$に対して次の記号を用いる．

$$e_{ij}(\rho)=\frac{\partial_j\rho^i+\partial_i\rho^j}{2},\ \|e(\rho)\|:=\left\{\sum_{ij}\|e_{ij}(\rho)\|^2\right\}^{1/2},$$
$$\|\rho\|:=\left\{\sum_{i=1}^d\|\rho^i\|^2\right\}^{1/2}.$$

補題 5.1 (Kornの不等式) 正定数Cがあり，任意の$\rho\in X$に対して次の不等式がなりたつ．

$$\|\rho\|_X^2\le C\Big(\|e(\rho)\|^2+\|\rho\|^2\Big).$$

X上の連続な双1次形式$a(\cdot,\cdot)$と連続な線形汎関数l_Gを考える．線形汎関数l_Gのノルムを$\|l_G\|_{X'}$とおく．ここで$F=\partial p/\partial\nu\ \partial u/\partial\nu=\nu^i p_i\nu^j u_j$とおく．$\partial\Omega^0$の管状近傍$W=W(\partial\Omega^0)$に対し命題4.1の仮定の下で$\nu$の滑らかさは$C^{1,1}$級で，よって$\nu\in\{H^2(W)\}^d$，$F\in H^2(W)$である．

非負定数βを固定し次の問題(5.1)を考える．文献[2], [3]で力法として下記で$\beta=0$を採用している．自然な力法の発展として文献[4], [5], で第3種境界条件(下記で$\beta>0$)を採用しその計算性能の検討を行っている．

$$(5.1)\qquad \begin{cases} a(\rho,v)=\displaystyle\int_\Omega e_{ij}(\rho):e_{ij}(v)dx+\beta\int_{\partial\Omega}(\rho\cdot\nu)(v\cdot\nu)dS,\\[2ex] l_G(v)=-\displaystyle\int_{\partial\Omega}G\,v\cdot\nu dS,\quad G=g(u)+\frac{\partial p}{\partial\nu}\frac{\partial u}{\partial\nu}.\\[2ex] \text{とおくとき次の変分等式の解},\ \rho_G\in X\ \text{を求めよ．}\\[2ex] a(\rho_G,v)=l_G(v)\quad\forall v\in X.\end{cases}$$

補題5.1から$a(\cdot,\cdot)$はX上で強圧的な双1次形式である．問題5.1の解を力法の解と呼ぶことができる．Lax-Milgramの補題から次の結果を得る．

補題 5.2 力法(5.1)の解$\rho_G\in X$が一通りに存在し，$\|\rho_G\|_X=\|l_G\|_{X'}$をみたす．

一般に$\left\{C^{0,1}(\overline{\Omega}^0)\right\}^d\subset X$であるがその逆は一般に不明であり下記の条件(5.2)の成立は分からない．力法(5.1)の解ρ_Gが条件(5.2)をみたすことは初期領域Ω^0の摂動$\epsilon\rho_G$による領域Ω^ϵが$\mathcal{U}^{\mathrm{ad},0,1}_{\epsilon_0}(\Omega^0)$に属するために必要である． 命題5.3は条件(5.2)が成立する十分条件を述べたものである．

$$(5.2)\qquad \rho_G\in\left\{C^{0,1}(\overline{\Omega}^0)\right\}^d.$$

力法(5.1)の解ρ_Gが(5.2)をみたすときΩ^0の摂動$\mathcal{M}^\epsilon_{\rho_G}$が定まり$j(\epsilon\rho_G)$が定義できる．補題4.1と補題5.2から次の補題が示される．

命題 5.1 $G\neq 0$のとき力法(5.1)の解$\rho_G\in X$が(5.2)をみたすとき次の事項がなりたつ．
(i) $\epsilon_1>0$が存在し，$\epsilon_0=\epsilon_1\rho_G\in U^{\mathrm{ad},0,1}_{\epsilon_0}$であり，次の不等式をみたす．

$$(5.3)\qquad j(\epsilon\rho_G)<j(0),\quad\forall\epsilon\in(0,\epsilon_1).$$

(ii) $\|\rho\|_X=1$をみたす任意の$\rho\in X$に対して次の不等式をみたす．

$$(5.4)\qquad \begin{cases} |l_G(\rho)|\le\left|l_G\left(\dfrac{\rho_G}{\|\rho_G\|_X}\right)\right|,\\[2ex] l_G\left(\dfrac{\rho_G}{\|\rho_G\|_X}\right)=-\|\rho_G\|_X<0.\end{cases}$$

注意 5.1 力法 (5.1) の解 ρ_G に対して小なる $\epsilon_1>0$ をとり $\rho_0=\epsilon\rho_G, \forall\epsilon\in(0,\epsilon_1]$ とし，領域の摂動 ρ_0 により生成された領域をコスト減少領域問題 **(Q)** (4.2) の解であるとする立場が力法である．力法が(離散問題のみならず)連続問題で機能するには(5.2)が必要であり，命題5.3により保障される．

注意 5.2 関係 (5.4) から力法 (5.1) の解 ρ_G は有限次元における勾配の役割を果たすことが分かる．事実 空間 X における原点からの方向は X の単位球面上の点 ρ により示される．$G\neq 0$ のとき (5.4) により $\rho_G/\|\rho_G\|_X$ が $j(\epsilon\rho)$ の最大減少方向を示す．

注意 5.3 微小摂動 $\epsilon\rho_G\in X$ により領域 Ω^0 の摂動領域の体積は保存されない．本論は簡単のために摂動領域の体積保存を取り除いた．体積保存の制約を加える場合 X の代わりに

$$X_0=\{\rho\in X\mid\nabla\cdot\rho\equiv 0\}$$

を用いる．また問題 (5.2) で扱う問題を次の問題 (5.5) に変更すればよい．

$$(5.5)\qquad \begin{cases} a(\rho_G,v)-\int_{\Omega^0} r_G\nabla\cdot v dx=l_G(v) \quad \forall v\in X,\\ \int_{\Omega^0} q\nabla\cdot\rho_G dx=0, \quad \forall q\in M_0=\{q\in L^2(\Omega^0)\mid \int_{\Omega^0} q dx=0\}\\ \\ \text{をみたす}\{\rho_G,r_G\}\in X_0\times M_0\text{を求めよ.}\end{cases}$$

ここで登場した新未知量 $r_G\in M_0$ は体積保存条件摂動におけるラグランジュ乗数である．

次の命題を述べる前に次の事項に注意する．

注意 5.4 例 $g(\xi)=-\xi$ は条件 (3.6) をみたす．このような例 $g(\xi)=-\xi$ は下記条件 (5.6) へと一般化できる．条件 (5.6) をみたすとき条件 (3.6) が得られる．

$$(5.6)\qquad \begin{cases} g(0)=0,\\ \\ g\in W^{1,\infty}(\mathbf{R},\mathbf{R}).\end{cases}$$

実際に (5.6) から $g\circ u^\epsilon\in H_0^1(\Omega^\epsilon)$, $\sup_\epsilon\|g\circ u^\epsilon\|_{L^2}<\infty$ が示され，(3.6) が導出できる．

ソボレフの埋蔵定理から $\left\{C^{0,1}(\overline{\Omega}^0)\right\}^d\supset\{H^3(\Omega^0)\}^d$ ゆえ条件 (5.2) のために $\rho_G\in\{H^3(\Omega^0)\}^d$ が必要とされる．では $\rho_G\in\{H^3(\Omega^0)\}^d$ のための十分条件は何か？これに答えて次の命題 5.2 を得る．これは主定理 5.1 の鍵として働く．

命題 5.2 条件 (4.3) と (4.5) を仮定する．このとき力法(5.1)の解 ρ_G は $\rho_G\in\{H^3(\Omega^0)\}^d$ である．

命題 5.2 から $d=3$ のとき $\rho_G\in\left\{C^{0,1}\left(\overline{\Omega}^0\right)\cap C^{1,1/2}(\overline{\Omega}^0)\right\}^d$，$d=2$ のとき $\rho_G\in\left\{C^{0,1}(\overline{\Omega}^0)\cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}^0)\right\}^d, 0<\alpha<1$ であり，小なる $\epsilon_1>0$ をとり $\epsilon_1\rho_G\in U^{\mathrm{ad},1,\alpha}_{\epsilon_0}$ $(\subset U^{\mathrm{ad},0,1}_{\epsilon_0})$ である．条件 (5.2) と命題 5.1 から次の命題を得る．

命題 5.3 命題 5.2 の仮定の下で問題 **(Q)** (4.2) の許容領域 $\Omega\epsilon\in\mathcal{U}^{\mathrm{ad},0,1}_{\epsilon_0}$ を与える摂動 ρ_0 を次式で与えることができる．

$$(5.7)\qquad \rho_0=\epsilon_1\rho_G\in U^{\mathrm{ad},0,1}_{\epsilon_0}.$$

命題 5.1 から $0 < \epsilon \le 1$, 勾配 $G \neq 0$ のとき $j(\epsilon\rho_0) < j(0)$ である．だが摂動領域 Ω^ϵ は一般には (4.3) を満足せず，上の命題 5.3 を用いて Ω^ϵ を新たな初期領域 $\Omega^{\epsilon,0}(=\Omega^\epsilon)$ とするコスト減少領域を逐次構成できない．そこで次の命題が必要になる．命題 5.4 は命題 5.2 の証明 (後述) と同様にして得られる．

注意 5.4 と条件 (5.11) の仮定から条件 (3.6) がなりたつ．

命題 5.4 m を非負整数とし次の条件を仮定する．

$$\Omega \text{ は } C^{m+2,1}\text{級}, \tag{5.8}$$

$$\begin{cases} g(0) = 0, \\ g \in C^{m+2}(\mathbf{R},\mathbf{R}) \cap W^{1,\infty}(\mathbf{R},\mathbf{R}) \cap W^{2,\infty}(\mathbf{R},\mathbf{R}). \end{cases} \tag{5.9}$$

このとき力法 (5.1) の解 ρ_G は $\rho_G \in \{H^{m+3}(\Omega^0)\}^d$ をみたし，

$$\rho_G \in \left\{C^{m+1,\alpha}\left(\overline{\Omega^0}\right)\right\}^d \subset \left\{C^{m,1}\left(\overline{\Omega^0}\right)\right\}^d, \quad 0 < \alpha < 1$$

である．

命題 5.5 次の条件を仮定する．

$$\Omega^0 \text{ は } C^\infty\text{級}, \tag{5.10}$$

$$\begin{cases} g(0) = 0, \\ g \in C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R}) \cap W^{1,\infty}(\mathbf{R},\mathbf{R}) \cap W^{2,\infty}(\mathbf{R},\mathbf{R}). \end{cases} \tag{5.11}$$

このとき問題 (5.2) の解 ρ_G は $\rho_G \in \left\{C^\infty(\overline{\Omega^0})\right\}^d$ をみたす．

命題 5.5 から次の主定理を得る．

定理 5.1 条件 (5.10), (5.11) の仮定の下でコスト減少問題 **(Q)** (4.2) の領域解 Ω^ϵ を与える C^∞ 級の摂動 ρ_0 を次式で与えることができる．ここで ρ_G は力法 (5.1) の解である．

$$\rho_0 = \epsilon_1 \rho_G \in U_{\epsilon_0}^{\mathrm{ad},0,1}. \tag{5.12}$$

注意 5.5 命題 5.2 に楕円型境界値問題の解の正則性の論理を適用した (下記命題 5.2 の証明概略参照)．同様な論理は *Mohammadi, B. and O. Pironneau* ((5.1), p. 126, [17]) における手法に適用できる．この文献 [17] の手法で構成したコスト減少領域の問題も摂動領域の正則性低下が一般的には起こる．そこで上記の定理 5.1 に述べたように *Mohammadi, B. and O. Pironneau* による手法も初期領域 Ω^0 を C^∞ 級にすることによりコスト最小化領域列が構成できる．

注意 5.6 条件 (5.11) と注意 5.4 から条件 (3.6) が導かれることに注意する．また一般に $\Omega^0\left(\in U_{\epsilon_0}^{\mathrm{ad},0,1}\right)$ が C^∞ 級でないときにおいても，C^∞ 級の $\Omega \in U_{\epsilon_0}^{\mathrm{ad},0,1}$ で初期の領域 Ω^0, 境界値問題 $\mathbf{BV}(\Omega^0)$ の解 u とコスト関数 $J(\Omega^0)$ のいずれも任意の精度で近似できる．これより定理 5.1 の仮定 (5.10) は一般性を失わない．定理 5.1 は C^∞ 級としてコスト減少領域問題の構成が逐次実行できることを示している．

命題5.2の証明概略

条件 (4.3) なる領域 Ω において $\mathbf{BV}(\Omega^0)$ の解 u は次の等式をみたす (Grisvard [14] 参照).

$$\|\partial_{ij}u\|^2+\int_{\partial\Omega^0}\left(u_iu_j\nu_j^i+\nu_i^i\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2\right)dS=\|\Delta u\|^2 \tag{5.13}$$

ここで総和に関するアインシュタインの規則を用いた. また関数 u の一階偏導関数を $u_i=\partial_i u$, 単位長外向き法線は $\nu=(\nu^i)_i$ で示した. これから解 $u\in H^2(\Omega^0)$ が示される. これを用い Agmon, Douglis and Nirenberg [1] の定理15.2より $u\in H^3(\Omega^0)$ が得られる. 同様にして $g_u(u)\in H^1(\Omega^0)$, $p|_{\partial\Omega^0}=0$ から $p\in H^3(\Omega^0)$ が得られる. $\partial\Omega^0$ が $C^{2,1}$ 級より ν^j が $C^{1,1}$ 級であり (例えば Gilbarg and Trudinger [11] の Lemma 14.16 とその証明参照), $u,p\in H^3(\Omega^0)$ から $F=\nu^iu_i\nu^jp_j$ が $\partial\Omega^0$ の管状近傍で $H^2(\Omega^0)$ に属することがわかり, 更に Agmon, Douglis and Nirenberg [1] の定理15.2を補題5.2の解 ρ_G に適用し $\rho_G\in H^3(\Omega^0)$ が得られる. **証明終わり**

6 おわりに

最適形状問題の解法に有効な力法の数学的根拠を論じることができた. ところで力法とは異なる Mohammadi, B. and O. Pironneau [17] 提案の手法を用いてもコスト減少領域を構成可能である. この方法を楕円型微分方程式の枠組みを用いて解析できる. そこで領域の正則性低下の力法との共通性, 異質性の有無を確認することが緊急の課題である.

我々にとり「初期領域 $\Omega^0\in\mathcal{U}_{\epsilon_0}^{\mathrm{ad},0,1}$ から出発してコスト減少方向に摂動を加えて $\Omega^\epsilon\in\mathcal{U}_{\epsilon_0}^{\mathrm{ad},0,1}$ を得る方策が一般的に存在するか」, あるいは「存在しないか」は基本的で且つ大きい問題である.

Haslinger, J. and R. A. E. Mäkinen[16] では連続問題におけるコスト最小化領域列を回避し (即ち感度解析を行わないで), 離散スキームに対して有限次元問題における非線形プログラミングの適用により最適形状問題を解いている. その際に離散化モデルをどのような注意の下で構成するかを公理論的に精密に規定している.

連続問題におけるコスト減少領域の具体的構成方法として, 力法の数学的根拠を, 力法 (5.1) の解 ρ_G の正則性の議論を通して与えた (文献 [3] ではヘルダー空間の枠組みで力法の正当性を論じた). 本論文の延長においても, 文献 [16] の如く連続問題におけるコスト減少領域構成として一層適切な離散化スキームとはなにかを明らかにする必要があり, 今後の課題である.

謝辞 査読者の貴重な指摘を頂き感謝致します.

A 補題4.1の証明の概略

領域 Ω^0 と Ω^ϵ の滑らかさが異なるので細かく慎重な計算が必要である. 注意 4.1 (i) の記号を用いる. 下記積分量 $I^\epsilon(II)$ に必要な局所座標系を考える. $\partial\Omega^\epsilon\cap\partial\Omega$ の微小近傍 B^ϵ を除いた $\omega_2^\epsilon\setminus B^\epsilon$, $\omega_1^\epsilon\setminus B^\epsilon$ の各点 x に対し開集合 $G_x^\epsilon(\subset\mathbf{R}^{d-1})$ を適切にとり局所座標系 $x_\Gamma(\xi)\in\Gamma$ とこれを用いて定まる局所座標系 $G_x^\epsilon\times(0,1)\ni(\xi,t)\mapsto x(\xi,t)=x_\Gamma(\xi)+t\epsilon(\rho\circ x_\Gamma)(\xi)$ を考える. 一般に $\omega_2^\epsilon\setminus B^\epsilon$, $\omega_1^\epsilon\setminus B^\epsilon$ のそれぞれに単位1の分解を与えて評価する. ここでは $\omega_2^\epsilon\setminus B^\epsilon$ を座標近傍 $x\big(G_x^\epsilon\times(0,1)\big)$ が一個で覆う場合に制限しても一般性は失わない. 局所座標 $\xi\mapsto x_\Gamma$ に

おけるΓ_2の面素を$dS_2(\xi)$とおくとき

$$dx = \epsilon\rho\cdot\nu(1+t\epsilon h^{(1)}+t^2\epsilon^2 h^{(2)})dS_2(\xi)dt,\quad \rho\cdot\nu dS_2(\xi) = \det\left(\frac{\partial x}{\partial(\xi,t)}\right)d\xi.$$

ここで$h^{(i)}$はρ_j^iの多項式を係数とするϵの冪で展開される級数である．Γ_1の面素を$dS_1(\xi)$とおけば$-dx = \epsilon\rho\cdot\nu(1+t\epsilon h^{(1)}+t^2\epsilon^2 h^{(2)})dS_1(\xi)dt$である．積分量$I_1^\epsilon(II)$の評価は$I_2^\epsilon(II)$と同様な方法を用いる．$I_2^\epsilon(II)$の評価を下に記した．次の等式がなりたつ．

$$\begin{aligned}
j(\epsilon\rho)-j(0) &= \int_{\omega_0^\epsilon}(g\circ u^\epsilon - g\circ u)(x)dx + \left(\int_{\omega_2^\epsilon} g\circ u^\epsilon dx - \int_{\omega_1^\epsilon} g\circ u dx\right)\\
&= I_0^\epsilon(I) + (I_2^\epsilon(II)+I_1^\epsilon(II)),\\
I_0^\epsilon(I) &= \epsilon\int_{\omega_0^\epsilon}\phi(x)g_u\circ u dx + \epsilon\int_{\omega_0^\epsilon}(\phi^\epsilon(x)-\phi(x))\int_0^1 g_u\circ(u+t\epsilon\phi^\epsilon)dtdx\\
&\quad +\epsilon\int_{\omega_0^\epsilon}\phi(x)\int_0^1\left(g_u\circ(u+t\epsilon\phi^\epsilon)-g_u\circ u\right)dtdx = \epsilon\int_{\omega_0^\epsilon}\phi(x)g_u(u)dx + R_1^\epsilon(I)+R_2^\epsilon(I),\\
I_2^\epsilon(II) &= \epsilon\int_{\Gamma_2}(g\circ u\circ x_\Gamma)(\xi)dS_2(\xi)\\
&\quad +\epsilon^2\int_{\Gamma_2}(\rho^j\circ x_\Gamma)(\xi)\int_0^1\int_0^1 g_u\circ u_j\Big(x_\Gamma(\xi)+t\tau\epsilon\,(\rho\circ x_\Gamma)(\xi)\Big)d\tau dt dS_2(\xi)\\
&\quad +\epsilon^2\int_{\Gamma_2}\int_0^1(\phi^\epsilon\circ x)(\xi,t)\int_0^1 g_u\Big((u\circ x)(\xi,t)+\tau\epsilon(\phi^\epsilon\circ x)(\xi,t)\Big)d\tau dt dS_2(\xi)\\
&= \epsilon\int_{\omega^\epsilon}\phi(x)(g_u\circ u)(x)dx + R_3^\epsilon(II)+R_4^\epsilon(II)
\end{aligned}$$

命題4.1の条件の下で$I_2^\epsilon(II)$における$R_3^\epsilon(II)$と$R_4^\epsilon(II)$に対してにϵに依存しない正定数C_3, C_4がとれ，$|R_3^\epsilon(II)|\le\epsilon^2 C_3$と$R_4^\epsilon(II)\le\epsilon^2 C_4$がなりたつ．同じく命題4.1の条件の下で$I^\epsilon(I)$における$R_1^\epsilon(I)$と$R_2^\epsilon(I)$を考える．$g_u$のリプシツ性から$R_2^\epsilon(I)$に対する望みの評価が得られる．積分量$R_1^\epsilon(I)$を評価する．関数$\phi^\epsilon(x)-\phi(x)$の$L^2$ノルムの$\epsilon$オーダを示すことで補題4.1の証明が終わる．

任意点$x\in\Omega^\epsilon$に対して$y^\epsilon\in\Omega^0$があり，領域$\lambda^\epsilon=\{y^\epsilon \mid \forall x\in\omega_0^\epsilon, x=y^\epsilon+\epsilon\rho(y^\epsilon)\}$とおく．関数$\phi^\epsilon,\hat{\phi}^\epsilon,\forall\zeta\in C_0^\infty(\omega_0^\epsilon)$に対する次の積分形式(A.1)が得られ(A.2)がなりたつ．ここで$u\in H^3(\Omega^0)$だが$\hat{\phi}^\epsilon\in H_0^1(\Omega^0)$に注意．

$$\text{(A.1)}\qquad \int_{\omega_0^\epsilon}\phi^\epsilon\zeta dx = \int_{\lambda^\epsilon}\left(\hat{\phi}^\epsilon(y^\epsilon)-\rho^j(y^\epsilon)\int_0^1 u_j(y^\epsilon+t\epsilon\rho(y^\epsilon))dt\right)\hat{\zeta}^\epsilon(y^\epsilon)\det\left(\frac{\partial x}{\partial y^\epsilon}\right)dy^\epsilon,$$

$$\begin{aligned}
\text{(A.2)}\qquad \int_{\omega_0^\epsilon}\left(\phi^\epsilon-\phi\right)(x)\zeta(x)dx &= \int_{\lambda^\epsilon}\left(\hat{\phi}^\epsilon(y^\epsilon)-\hat{\phi}(y^\epsilon+\epsilon\rho(y^\epsilon))\right)\det\left(\frac{\partial x}{\partial y^\epsilon}\right)dy^\epsilon\\
&+\int_{\lambda^\epsilon}\left\{\left(\rho^j u_j\right)(y^\epsilon+\epsilon\rho(y^\epsilon))-\rho^j(y^\epsilon)\int_0^1 u_j(y^\epsilon+t\epsilon\rho(y^\epsilon))dt\right\}\hat{\zeta}(y^\epsilon)\det\left(\frac{\partial x}{\partial y^\epsilon}\right)dy^\epsilon.
\end{aligned}$$

(A.2)は更に変形され(4.17)となる．(4.17)の右辺第1項$\hat{\phi}^\epsilon-\hat{\phi}$の$L^2$ノルム$\|\hat{\phi}^\epsilon-\hat{\phi}\|$は(楕円型微分方程式の標準的な評価から諸条件の考察を用い)ϵに依存しない定数C_5がありϵC_5で押さえられる．(4.17)の右辺第2項と第4項のL^2ノルムはρの条件とその他からϵオーダとなる．

(4.17)の右辺第3項のL^2ノルムがϵオーダであれば証明が終わる．$u_j(\cdot)\in H^1(\Omega^0)$から

$$F_j(y^\epsilon) = \int_0^1\left\{u_j\Big(y^\epsilon+\epsilon\rho(y^\epsilon)\Big)-u_j\Big(y^\epsilon+t\epsilon\rho(y^\epsilon)\Big)\right\}dt$$

の L^2 ノルムが ϵ オーダとなる．実際に $z^\epsilon = y^\epsilon + \epsilon\Big(t(1-\tau)+\tau\Big)$ とおいて

$$\int_{\omega^\epsilon} |F_j(y^\epsilon)|^2 dy^\epsilon = (1-t)^2\epsilon^2 \int_{\omega^\epsilon} |\rho^k|^2 \left|\int_0^1 \int_0^1 u_{jk}(z^\epsilon) d\tau dt\right|^2 dy^\epsilon$$
$$\leq \epsilon^2 \|\rho\|_\infty^2 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\omega^\epsilon} \left|u_{jk}(z^\epsilon)\right|^2 \det\Big(\frac{\partial y^\epsilon}{\partial z^\epsilon}\Big) dz^\epsilon d\tau dt \leq C\epsilon^2 \|\rho\|_\infty^2 \int_D |\nabla^2 u(z^\epsilon)|^2 dz^\epsilon.$$

ここで $0 < \det\Big(\frac{\partial y^\epsilon}{\partial z^\epsilon}\Big) = \det\Big(\frac{\partial z^\epsilon}{\partial y^\epsilon}\Big)^{-1} = (1+\epsilon h_3)^{-1} \leq C$ を用いた．

参考文献

[1] Agmon, S. , A. Douglis and L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations, satisfying general bindary conditions, I, Communications on pure and applied mathematics, Vol. XII(1959), pp. 623-727.

[2] 畔上秀幸，領域最適化問題の一解法，日本機械学会論文集 (A 編)，Vol. 60(1994), pp. 1479-1486.

[3] Azegami, H., S. Kaizu, M. Shimoda and E. Katamine, Irregularity of shape optimization problems and an improvement technique, Computer Aided Optimum Design of Structures V, Computational Mechanics Publications, Editors, S. Hermandez and C. A. Brevvia, 1997, pp. 309-326.

[4] Azegami, H., Solution to boundary shape optimization problems, High Performance Structures and Materials II, WIT Press, Southampton, UK, Editors, Brebbia, C. A. and de Wilde, W. P., 2004, pp. 589-598.

[5] Azegami, H. and K. Takeuchi, A smoothing method for shape optimization: traction method using the robin condition, International Journal of Computational Methods, (in press).

[6] 畔上秀幸，計算力学ハンドブック第 2 編 (応用編)，朝倉書店，東京，準備中.

[7] Chenais, D., On the existence of a solution in a domain identification problem, J. of mathematical analysis and applications, Vol. 52, pp. 189-219, 1975.

[8] 藤井信夫，市川雅司，香西治彦，境界値問題を制約条件とする領域最適化問題の必要条件，計測自動制御学会論文集, Vol. 21(1985), No. 8, pp. 800-805.

[9] Fujii, N., Necessary conditions for a domain optimization problem in elliptic boundary value problems, SIAM J. on controle and optimization, Vol. 24(1986), pp. 346-360.

[10] Fujii, N., Second-order necessary conditions in a domain optimization problem, J. of optimization theory and applications, Vol. 65, No. 2(1990), pp. 223-244.

[11] Gilbarg, D. and N. S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Third Ed. Springer, Heidelberg, 1998.

[12] Garabedian, P. R. and M. Schiffer, Convexity of domain functionals, J. d'analyse mathématiques, Vol. 2(1953), pp. 281-368.

[13] Goto, Y. , N. Fujii and Y. Muramatsu, Second-order necessary conditions for domain optimization problems of the Neumann type, J. of optimization theory and applications, Vol. 65, No. 3(1990), pp. 431-445.

[14] Grisvard, P., Smoothness of the solution of a monotone boundary value problems for a second order equation in a general convex domain, Springer Lect. Notes, 564, pp. 135-151, Heidelberg, 1977.

[15] Haslinger, J. and R. A. E. Mäkinen, Finite Element Approximation for Optimal Shape, Material and Topology Design, Second ed. John Wiley and Sons Ltd., Chichester, 1997.

[16] Haslinger, J. and R. A. E. Mäkinen, Introduction to Shape Optimization, SIAM, Philadelphia, 2003.

[17] Mohammadi, B. and O. Pironneau, Applied shape optimization for fluids, Oxford Science Publications, Oxford Univ. Press, Oxford, 2001.

[18] Neças, J., Méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Messon, Paris, Academia Éditeurs, Prague, 1967.

[19] Sokolowski, J. and J. P. Zolesio, Introduction to Shape Optimization, Springer-Verlag, New York, 1991.

海津　聰 (正会員) 〒310-8512 茨城県水戸市文京 2-1-1 茨城大学教育学部 1966 年 東京理科大学理学部数学科卒業. 1968 年　東京理科大学大学院理学研究科修士課程修了. 同年, 電気通信大学電気通信学部助手. 1989 年理学博士. 電気通信学部講師を経て 1991 年電気通信学部助教授. 1997 年茨城大学教育学部教授現在に至る.

畔上秀幸 (正会員) 〒464-8601 名古屋市千種区不老町 1 名古屋大学大学院情報科学研究科
1979 年 山梨大学工学部機械工学科卒業. 1982 年 東京大学大学院工学系研究科修士課程修了. 1985 年 同博士課程修了 (工学博士). 1989 年 同講師. 1991 年 同助教授. 2003 年 名古屋大学大学院情報科学研究科教授現在に至る.

(2006年 3 月29日受付)
(2006年 8 月16日最終稿受付)