

Shape Optimization on Acoustic-Structure Interaction Problems

○ 長谷川義明 (名大院) 鍵山恭彦 (本田技研) 正 畔上 秀幸 (名大院)

Yoshiaki Hasegawa, Graduate School of Information Science, Nagoya University, 1 Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya 464-8601

Yasuhiko Kagiya, Honda R & D Co. Tochigi R & D Center

Hideyuki AZEGAMI, Graduate School of Information Science, Nagoya University

Key Words: Shape Optimization, Inverse Problem, Acoustic-Structure Interaction Problem, Finite-Element Method, Trac-tion Method

1. はじめに

音場と構造の連成問題の数値解析は振動騒音対策において重要な役割を演ずるようになってきた。近年では、数値解析の結果を利用したパラメトリックな形状最適化問題も解かれるようになってきた。本研究では、音場と構造の連成問題の形状最適化問題をノンパラメトリック形状最適化問題として定式化し、形状勾配を利用した力法⁽¹⁾による解法を示す。解析例として箱型モデルの結果を示す。

2. 音場・構造連成問題

車両などの構造を想定して、図 1 のような有界な $d = 2, 3$ 次元領域 $\Omega^s \subset \mathbb{R}^d$ (\mathbb{R} は実数), その境界 Γ^s , で定義された弾性体に囲まれた音場の領域 Ω^a を考えよう。この場合、音場の境界 Γ^a はすべて弾性体との連成境界となる ($\Gamma^a \subset \Gamma^s$)。弾性体は、部分境界 Γ_0 で変位が拘束され、別の部分境界 Γ^p に零でない境界力 $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \{P_i(\mathbf{x}, t)\}_{i=1}^d : \Gamma^p \times (-\infty, \infty) \ni (\mathbf{x}, t) \mapsto \mathbb{R}^d$ ($\mathbf{P}(\mathbf{x}, \cdot) \in (H^{-1/2}(\Gamma^p))^d$, $\mathbf{P}(\cdot, t) \in (H^{-1}((-\infty, \infty)))^d$) が作用すると仮定する。そのとき、弾性体では変位 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \{u_i(\mathbf{x}, t)\}_{i=1}^d : \Omega^s \times (-\infty, \infty) \ni (\mathbf{x}, t) \mapsto \mathbb{R}^d$ が生じ、音場では音圧 $p(\mathbf{x}, t) : \Omega^a \times (-\infty, \infty) \ni (\mathbf{x}, t) \mapsto \mathbb{R}$ が生ずるものと仮定する。

この音場・構造連成問題の運動方程式と境界条件は次式となる。ただし、音場の密度を ρ^a とする。弾性体は線形弾性体を仮定し、密度を ρ^s とする。弱形式の対称性を得るために音圧 $p = \rho^a \phi$ の代わりに速度ポテンシャル ϕ を用いることにする⁽²⁾。

$$\frac{\rho^a}{c^2} \ddot{\phi} - \rho^a \phi_{,ii} = 0 \quad \text{in } \Omega^a \quad (1)$$

$$\rho^a \phi_{,i} n_i^a + \rho^a \dot{u}_i n_i^a = 0 \quad \text{on } \Gamma^a \quad (2)$$

$$\rho^s \ddot{u}_i - \sigma_{ij,j}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{in } \Omega^s \quad (3)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_j^s + \rho^a \dot{\phi} n_i^s = 0 \quad \text{on } \Gamma^a \quad (4)$$

$$u_i = 0 \quad \text{on } \Gamma_0 \quad (5)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_j^s - P_i = 0 \quad \text{on } \Gamma^p \quad (6)$$

添え字に対して $(\cdot)_{,i} \equiv \partial(\cdot)/\partial x_i$ および総和規約を用いる。応力 $\sigma_{ij}(\mathbf{u}) = C_{ijkl} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u})$ ($\{C_{ijkl}\}_{i,j,k,l=1}^d$ は剛性), ひずみ $\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = (u_{i,j} +$

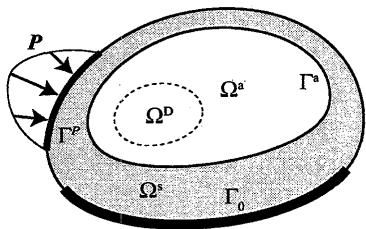


Fig. 1 Acoustic-structure interaction system

$u_{j,i})/2$ とする。 $\mathbf{n}^m = \{n_i^m\}_{i=1}^d$ は Ω^m の境界における外向き単位法線である。

この問題の運動方程式に、任意の随伴速度ポテンシャル $\varphi(\mathbf{x}, t) \in \Phi$ と任意の随伴変位 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \in U$ を乗じて積分し、境界条件を考慮することによって次の弱形式を得る。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{ a^a(\phi, \varphi) + b^a(\dot{\phi}, \varphi) + c^a(\varphi, \dot{\mathbf{u}}) + a^s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b^s(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + c^s(\dot{\phi}, \mathbf{v}) \} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \mathbf{P}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma^p} dt \quad (7)$$

$\phi \in \Phi, \mathbf{u} \in U, \forall \varphi \in \Phi, \forall \mathbf{v} \in U$

ただし、以下の定義に従う。

$$a^a(\phi, \varphi) \equiv \int_{\Omega^a} \rho^a \phi_{,i} \varphi_{,i} d\Omega \quad a^s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv \int_{\Omega^s} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) d\Omega \quad (8)$$

$$b^a(\dot{\phi}, \varphi) \equiv \int_{\Omega^a} \frac{\rho^a}{c^2} \dot{\phi} \varphi d\Omega \quad b^s(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \equiv \int_{\Omega^s} \rho^s \dot{u}_i v_i d\Omega \quad (9)$$

$$c^a(\varphi, \dot{\mathbf{u}}) \equiv \int_{\Gamma^a} \rho^a \varphi u_i n_i^a d\Gamma \quad c^s(\dot{\phi}, \mathbf{v}) \equiv \int_{\Gamma^a} \rho^a \dot{\phi} v_i n_i^s d\Gamma \quad (10)$$

$$\langle \mathbf{P}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma^p} \equiv \int_{\Gamma^p} P_i v_i d\Gamma \quad (11)$$

$$\Phi \equiv \{ \varphi \in H^1(\Omega^a \times (-\infty, \infty)) \} \quad (12)$$

$$U \equiv \{ \mathbf{v} \in (H^1(\Omega^s \times (-\infty, \infty)))^d \mid \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_0 \} \quad (13)$$

ここで、 $\phi(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$ の Fourier 変換を $\hat{\phi}(\mathbf{x}, \omega), \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \omega), \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{x}, \omega)$ と表すことにしよう。すなわち、 $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$ は次式の逆 Fourier 変換で与えられる。

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{P}} e^{j\omega t} d\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \quad (14)$$

ただし、 j は単位虚数を表す。式 (14) などの逆 Fourier 変換関係を弱形式 (7) に代入し、 $\varphi(\mathbf{x}, t), \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ の Fourier 変換を $\hat{\varphi}(\mathbf{x}, \omega), \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, \omega)$ と表す。さらに音場の音響減衰係数を g^a , 線形弾性体の構造減衰係数を g^s とすれば、減衰を仮定した音場・構造連成問題の周波数領域における弱形式を得る⁽³⁾。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{ (1 + jg^a) a^a(\hat{\phi}, \hat{\varphi}^*) - \omega^2 b^a(\hat{\phi}, \hat{\varphi}^*) + j\omega c^a(\hat{\varphi}^*, \hat{\mathbf{u}}) + (1 + jg^s) a^s(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}^*) - \omega^2 b^s(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}^*) + j\omega c^s(\hat{\phi}, \hat{\mathbf{v}}^*) \} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} d(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{v}}^*) d\omega \quad \forall \varphi \in \Phi, \forall \mathbf{v} \in U \quad (15)$$

ただし、 $(\cdot)^*$ は複素共役を表す。式 (15) は $\hat{\phi}, \mathbf{u}$ と $\hat{\varphi}, \mathbf{v}$ に対して可換であり、周波数ごとに次式のような対称なマトリクス表示が可能である。この性質は、随伴問題を原問題の左辺を変換するだけで計算できることを意味する。

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} M^a & 0 \\ 0 & M^s \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K^a & 0 \\ 0 & K^s \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \hat{\phi} \\ \hat{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \hat{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

3. 指定部分領域における音圧パワー最小化問題

車両などの設計では、音場領域 Ω^a の形状は固定して、線形弾性体領域 Ω^s の形状変更によって耳元の部分領域 $\Omega^D \subset \Omega^s$, その境界 Γ^D , における特定周波数帯 $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ の音圧パワー $\hat{p}\hat{p}^*$ を下げるのが検討される。この問題は次のように表すことができる。ただし、線形弾性体の体積が発散する可能性があることから、線形弾性体の体積を上限值 m_0 以下に制限する。

$$\min_{\Omega^s \subset \mathbb{R}^d} \left\{ J \equiv \int_{\omega_1}^{\omega_2} (\hat{p}, \hat{p}^*)_{\Omega^D} d\omega = \int_{\omega_1}^{\omega_2} -\omega^2 d(\hat{\phi}, \hat{\phi}^*) d\omega \right\}$$

such that $\int_{\Omega^s} d\Omega - m_0 \leq 0$ (17)

ただし、以下の定義に従う。

$$(\hat{p}, \hat{p}^*)_{\Omega^D} \equiv \int_{\Omega^D} \hat{p}\hat{p}^* d\Omega = -\omega^2 \int_{\Omega^D} \rho^{a2} \hat{\phi}\hat{\phi}^* d\Omega \equiv -\omega^2 d(\hat{\phi}, \hat{\phi}^*)$$
 (18)

この問題の Kuhn-Tucker 条件は、式 (19) で定義する Lagrange 乗数形式 $L(\Omega^s, \hat{\phi}, \Lambda)$ に対して、式 (20) が成立することである。

$$L = J(\Omega^s, \hat{\phi}) + \Lambda \left(\int_{\Omega^s} d\Omega - m_0 \right)$$
 (19)

$$\dot{L} = 0, \Lambda \left(\int_{\Omega^s} d\Omega - m_0 \right) = 0, \int_{\Omega^s} d\Omega - m_0 \leq 0, \Lambda \geq 0$$
 (20)

ただし、 L の領域変動に対する物質導関数 \dot{L} は次式で与えられる。

$$\dot{L} = \dot{J} + \langle G_\Lambda \mathbf{n}, \mathbf{V} \rangle_{\Gamma^s}$$
 (21)

$$\dot{J} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} [-\omega^2 \{d(\hat{\phi}', \hat{\phi}^*) + d(\hat{\phi}, \hat{\phi}^*)\} + \langle G^D \mathbf{n}^D, \mathbf{V} \rangle_{\Gamma^D}] d\omega$$
 (22)

$$G_\Lambda = 1 \quad \text{on } \Gamma^s$$
 (23)

$$G^D = -\omega^2 \rho^{a2} \hat{\phi}\hat{\phi}^* \quad \text{on } \Gamma^D$$
 (24)

ただし、 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma^D}$ は式 (11) の定義に従う。 \mathbf{V} は領域変動速度である。 $(\cdot)' = (\dot{\cdot}) - (\cdot)_{,i} V_i$ は形状導関数、 $(\dot{\cdot})$ は物質導関数を表す。

原問題の弱形式 (15) に対して、任意の領域変動に対する物質導関数を計算し、 $\hat{\phi}, \hat{u}$ は原問題の解、さらに、 $\mathbf{v} \in U, \varphi \in \Phi$ であることを考慮すれば、次式を得る。

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \left\{ (1 + jg^a) a^a(\hat{\phi}', \hat{\phi}^*) - \omega^2 b^a(\hat{\phi}', \hat{\phi}^*) + j\omega c^a(\hat{\phi}^*, \hat{u}') \right. \\ \left. + (1 + jg^s) a^s(\hat{u}', \hat{v}^*) - \omega^2 b^s(\hat{u}', \hat{v}^*) + j\omega c^s(\hat{\phi}', \hat{v}^*) \right\} d\omega \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\langle G^a \mathbf{n}^a, \mathbf{V} \rangle_{\Gamma^a} + \langle G^s \mathbf{n}^s, \mathbf{V} \rangle_{\Gamma^s} + \langle G^p \mathbf{n}^p, \mathbf{V} \rangle_{\Gamma^p} \right) d\omega \\ \mathbf{v} \in U, \varphi \in \Phi, \forall \phi' \in \Phi, \forall u' \in U$$
 (25)

$$G^a = -(1 + jg^a) \rho^a \hat{\phi}_i \hat{\phi}_i^* + \omega^2 \frac{\rho^a}{c^2} \hat{\phi} \hat{\phi}^* - j\omega \left[\rho^a (\hat{\phi}^* \hat{u}_i - \hat{\phi} \hat{v}_i^*) n_i^a \right]_j n_j^a \\ + \rho^a (\hat{\phi}^* \hat{u}_i - \hat{\phi} \hat{v}_i^*) n_i^a \kappa^a \quad \text{on } \Gamma^a$$
 (26)

$$G^s = -(1 + jg^s) \sigma_{ij}(\hat{u}) \varepsilon_{ij}(\hat{v}^*) + \omega^2 \rho^s \hat{u}_i \hat{v}_i^* \quad \text{on } \Gamma^s$$
 (27)

$$G^p = (\hat{P}_i \hat{v}_i^*)_{,j} n_j^p + \hat{P}_i \hat{v}_i^* \kappa^p \quad \text{on } \Gamma^p$$
 (28)

ただし、 κ^m は Ω^m の境界における平均曲率の $d-1$ 倍である。ここで、随伴問題を次式で定義する。

$$\text{式 (25) の左辺} = \int_{-\infty}^{\infty} -\omega^2 \{d(\hat{\phi}', \hat{\phi}^*) + d(\hat{\phi}, \hat{\phi}^*)\} d\omega \\ \mathbf{v} \in U, \varphi \in \Phi, \forall \phi' \in \Phi, \forall u' \in U$$
 (29)

この問題の解 $\hat{\phi}, \hat{v}$ を用いれば、式 (22) の右辺被積分項第 1 項は式 (29) の右辺と等しく、さらに、式 (29) の左辺は、式 (25) の右辺に等しいことから、次式を得る。

$$\dot{J} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left\{ \langle G^a \mathbf{n}^a, \mathbf{V} \rangle_{\Gamma^a} + \langle G^s \mathbf{n}^s, \mathbf{V} \rangle_{\Gamma^s} + \langle G^p \mathbf{n}^p, \mathbf{V} \rangle_{\Gamma^p} \right. \\ \left. + \langle G^D \mathbf{n}^D, \mathbf{V} \rangle_{\Gamma^D} \right\} d\omega = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \langle G_J \mathbf{n}^s, \mathbf{V} \rangle_{\Gamma^s} d\omega$$
 (30)

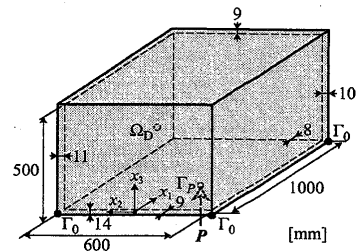


Fig. 2 Box model

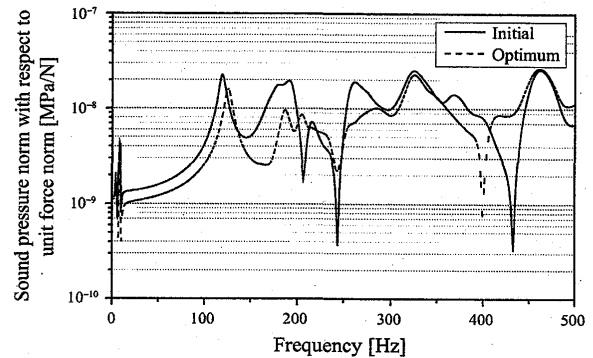


Fig. 3 Frequency response for absolute value of sound pressure

ただし、音場領域 Ω^a の変動を拘束し、速度 \mathbf{V} の許容集合 D を次のように定義する。

$$D = \{ \mathbf{V} \in (W^{1,\infty}(\Omega^a \cup \Omega^s))^d \mid \mathbf{V} = \mathbf{0} \text{ on } \Omega^s \}$$
 (31)

$G_J \mathbf{n}^s$ は音圧パワーに対する形状勾配である。

目的汎関数と制約汎関数の形状勾配が G_J, G_Λ に基づいて計算されれば、最適化に向う形状更新は力法によって解析できる。

4. 解析例

線形弾性体の箱の中に音場があるモデルに対する解析例を紹介する。問題設定を図 2 に示す。線形弾性体は板厚中心で表記の大きさである。変位拘束部分境界 Γ_0 は下面角の 4 点とした。ただし、 x_1, x_2, x_3 方向にそれぞればね定数 49, 49, 98 [N/mm] のばねを介して拘束した。境界力 \mathbf{P} は $\mathbf{P} = (225.3253, -174.709, -7.0)$ (単位 [mm]) における集中力 (有限要素モデルの節点力) を仮定した。ただし、原点の x_1 方向位置は前板前面、 x_3 方向位置は底板の厚さ中央とした。音圧パワーは有限要素モデルの節点 $\Omega^D = (198.7542, 158.9309, 276.3181)$ における $90 \leq \omega/2\pi \leq 225$ [Hz] で評価した。形状変動は $\Gamma_0, \Gamma^p, \Gamma^a$ を拘束した。なお、音速 340[m/s], 空気密度 $\rho^a = 1.178$ [kg/m³], 線形弾性体密度 $\rho^s = 7.80 \times 10^3$ [kg/m³], Young 率 205.8[GPa], ポアソン比 0.33, 構造減衰比 0.06, 音響減衰比 0.12 とした。解析ソルバーには MSC.NASTRAN の周波数応答解析機能を用いた。図 3 に最適化前と最適化後の $\|\hat{p}(\omega, \Omega^D)\|_{\mathbb{R}^d}$ を示す。90 ~ 225[Hz] において音圧の低下が認められた。

文献

- (1) 畔上秀幸. 領域最適化問題の一解法. 日本機械学会論文集 (A 編), Vol. 60, pp. 1479-1486, 1994.
- (2) 安田仁彦. 振動工学応用編. コロナ社, 2001.
- (3) The MacNeal Schwendler Corporation. MSC/NASTRAN Basic Dynamic Analysis USER'S GUIDE Version 68 Chapter 5. California, 1998.