

温度分布を規定する強制熱対流場の形状同定

Shape Identification of Forced Convection Heat Transfer Fields
with Desired Temperature Distribution

○正 片峯 英次 (岐阜高専) 織田 恭平 (岐阜高専) 正 畔上 秀幸 (名大)

Eiji KATAMINE, Gifu National College of Technology, Kamimakuwa, Motosu, Gifu 501-0495
Kyohei ODA, Gifu National College of Technology, Kamimakuwa, Motosu, Gifu 501-0495
Hideyuki AZEGAMI, Nagoya University, Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya, 464-8601**Key Words:** Shape Identification, Shape Optimization, Computer Aided Design, Forced Convection Heat Transfer Field, Adjoint Method, Traction Method

1. はじめに

連続体領域の指定した境界あるいは部分領域において、変位、流速、あるいは温度などの状態関数が規定した分布を満たすように境界形状を決定する問題や、境界や部分領域上の測定データを基にして、計測困難な境界形状を推定する問題は、工学の分野で頻出する重要な問題である。著者らはこれまでに流れ場⁽¹⁾⁽²⁾や熱伝達場⁽³⁾⁽⁴⁾など、場の連成を考慮しない単一場における形状同定問題に対して数値解析法を提示してきた。しかしながら、これらの連成を考慮した複雑な問題に対しては検討してこなかった。

そこで本研究では、流れと伝熱場を連成させた基本的な定常強制熱対流場の形状同定問題の解法を検討する。本小論文では、強制熱対流場の部分領域において、実際の温度分布と指定された温度分布との二乗誤差積分を目的汎関数にした形状同定問題を定式化し、形状修正の感度となる形状勾配密度を導出した。さらに、導出した形状勾配密度に基づいて力法⁽⁵⁾を適用した二次元問題の解析例を簡単に紹介する。

2. 強制熱対流場の支配方程式

強制熱対流場の温度分布は流れの影響を受けるため、はじめに粘性流れ場の支配方程式から流速分布および圧力分布を解析し、その流速分布を用いた熱伝達場の支配方程式から熱対流場の温度分布が解析できる。

2.1 流れ場の支配方程式 流れ場領域 $\Omega \subset R^n$, $n = 2, 3$ において、流速 $u = \{u_i\}_{i=1}^n \in U$ と圧力 $p \in Q$ を解析することを考える。無次元化された Navier-Stokes 方程式と連続の式の弱形式は、随伴流速 $w = \{w_i\}_{i=1}^n \in W$ と随伴圧力 $q \in Q$ を用いて次のように表すことができる。

$$a^V(u, w) + b(u, u, w) - c(w, p) = l(w) \quad \forall w \in W \quad (1)$$

$$-c(u, q) = 0 \quad \forall q \in Q \quad (2)$$

ただし、 $a^V(u, w)$, $b(u, u, w)$, $c(w, p)$, $l(w)$ は次のように定義されている。

$$a^V(u, w) = \frac{1}{Re} \int_{\Omega} w_{i,j} (u_{i,j} + u_{j,i}) dx,$$

$$b(u, u, w) = \int_{\Omega} w_i v_j u_{i,j} dx, \quad c(w, p) = \int_{\Omega} w_{i,i} p dx,$$

$$l(w) = \int_{\Gamma_1} w_i \hat{\sigma}_i d\Gamma \quad (3)$$

ここで Re は Reynolds 数を表す。また流速 $\hat{u} \in (H^{1/2}(\Gamma_0))^n$ 、表面力 $\hat{\sigma} = \{\hat{\sigma}_i\}_{i=1}^n \in (H^{-1/2}(\Gamma_1))^n$ を既

関数とした境界条件は、次のように与えられている。

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{on } \Gamma_0 \quad (4)$$

$$\{-p\delta_{ij} + \frac{1}{Re}(u_{i,j} + u_{j,i})\} \nu_j = \hat{\sigma}_i \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (5)$$

ここで、 ν_j は単位法線ベクトルを表す。流速 $u \in U$ 、圧力 $p \in Q$ 、随伴流速 $w \in W$ は次の関数空間の要素である。

$$U = \{u \in (H^1(\Omega))^n \mid u = \hat{u} \text{ on } \Gamma_0\} \quad (6)$$

$$Q = \{q \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} q dx = 0 \text{ (if } \text{meas}(\Gamma_1) = 0)\} \quad (7)$$

$$W = \{w \in (H^1(\Omega))^n \mid w = 0 \text{ on } \Gamma_0\} \quad (8)$$

2.2 熱伝達場の支配方程式 温度分布 $\theta \in \Theta$ を解析する無次元化された熱伝達場の支配方程式の弱形式は、随伴温度 $\xi \in \Xi$ を用いて次のように表すことができる。

$$a^H(\theta, \xi) + d(u, \theta, \xi) + h^H(\theta, \xi) = f_q(\xi) + f_h(\xi) \quad \forall \xi \in \Xi \quad (9)$$

ただし、 $a^H(\theta, \xi)$, $d(u, \theta, \xi)$, $h^H(\theta, \xi)$, $f_q(\xi)$, $f_h(\xi)$ は次のように定義されている。

$$a^H(\theta, \xi) = \frac{1}{Pe} \int_{\Omega} \theta_{,k} \xi_{,k} dx, \quad d(u, \theta, \xi) = \int_{\Omega} \xi u_j \theta_{,j} dx,$$

$$h^H(\theta, \xi) = \int_{\Gamma_h} \theta \xi \hat{h} d\Gamma, \quad f_q(\xi) = \int_{\Gamma_q} \xi \hat{q} d\Gamma,$$

$$f_h(\xi) = \int_{\Gamma_h} \xi \hat{h} \theta_f d\Gamma \quad (10)$$

ここで、 Pe は Peclet 数を表す。また温度 $\hat{\theta} \in H^{1/2}(\Gamma_\phi)$ 、熱流束 $\hat{q} \in H^{-1/2}(\Gamma_q)$ 、熱伝達率 $\hat{h} \in L^\infty(\Gamma_h)$ 、外気温度 $\theta_f \in L^\infty(\Gamma_h)$ を既知関数とした境界条件は、次のように与えられている。

$$\theta = \hat{\theta} \quad \text{on } \Gamma_\phi \quad (11)$$

$$\frac{1}{Pe} \theta_{,k} \nu_k = \hat{q} \quad \text{on } \Gamma_q \quad (12)$$

$$\frac{1}{Pe} \theta_{,k} \nu_k = -\hat{h}(\theta - \theta_f) \quad \text{on } \Gamma_h \quad (13)$$

温度 $\theta \in \Theta$ 、随伴温度 $\xi \in \Xi$ は次の関数空間の要素である。

$$\Theta = \{\theta \in H^1(\Omega) \mid \theta = \hat{\theta} \text{ on } \Gamma_\phi\} \quad (14)$$

$$\Xi = \{\xi \in H^1(\Omega) \mid \xi = 0 \text{ on } \Gamma_\phi\} \quad (15)$$

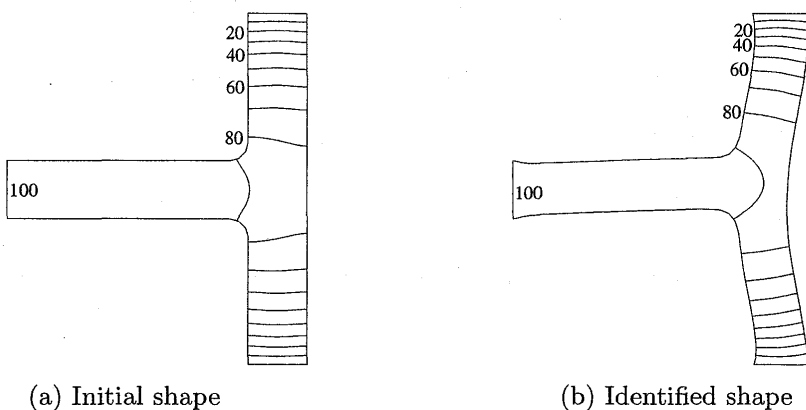


Fig. 1 Numerical results: Temperature distribution for 2D branch channel problem

3. 部分領域における温度分布二乗誤差最小化問題

3.1 定式化 この強制熱対流場の部分領域 $\Omega_D \subset \Omega$ において、実際の温度分布 $\theta \in \Theta$ と規定したい温度分布 $\theta_D \in H^1(\Omega_D)$ との二乗誤差積分を最小化する形状同定問題を考える。この問題は次のように定式化できる。

$$\text{Find } \Omega \tag{16}$$

$$\text{that minimize } E_{\Omega_D} \tag{17}$$

$$\text{subject to } a^V(u, w) + b(u, u, w) - c(w, p) = l(w) \quad \forall w \in W \tag{18}$$

$$-c(u, q) = 0 \quad \forall q \in Q \tag{19}$$

$$a^H(\theta, \xi) + d(u, \theta, \xi) + h^H(\theta, \xi) = f_q(\xi) + f_h(\xi) \quad \forall \xi \in \Xi \tag{20}$$

$$\int_{\Omega} dx \leq M \tag{21}$$

ただし、 E_{Ω_D} は次のように定義されている。

$$E_{\Omega_D} = E(\theta - \theta_D, \theta - \theta_D) = \int_{\Omega_D} (\theta - \theta_D)^2 dx \tag{22}$$

3.2 形状勾配 この形状同定問題は次の Lagrange 関数 $L(u, p, \theta, w, q, \xi, \Lambda)$ の停留化問題に置き換えることができる。

$$\begin{aligned} L = & E(\theta - \theta_D, \theta - \theta_D) \\ & - a^V(u, w) - b(u, u, w) + c(w, p) + l(w) \\ & + c(u, q) \\ & - a^H(\theta, \xi) - d(u, \theta, \xi) - h^H(\theta, \xi) + f_q(\xi) + f_h(\xi) \\ & + \Lambda \left(\int_{\Omega} dx - M \right) \end{aligned} \tag{23}$$

領域変動に対する L の導関数 \dot{L} を速度場 $V = \partial T_s(\Omega) / \partial s = \partial T_s(T_s^{-1}(\Omega_s)) / \partial s$ を用いて計算⁽⁵⁾、簡単のために部分境界 Γ_1 および部分領域 Ω_D の領域変動を拘束し、設計境界において流速がゼロとなる断熱境界を仮定すれば、この問題の形状勾配密度 G は次のようになる。

$$\begin{aligned} G &= G_0 + G_1 \Lambda, \\ G_0 &= -\frac{1}{Re} w_{i,j} (u_{i,j} + u_{j,i}) - \frac{1}{Pe} \theta_{,k} \xi_{,k}, \quad G_1 = 1 \end{aligned} \tag{24}$$

また流速 u 、圧力 p 、温度 θ 、随伴流速 w 、随伴圧力 q 、随伴温度 ξ および Lagrange 乗数 Λ は、次の最適性の条件か

ら決定できる。

$$\begin{aligned} a^V(u, w') + b(u, u, w') - c(w', p) &= l(w') \quad \forall w' \in W \tag{25} \\ -c(u, q') &= 0 \quad \forall q' \in Q \tag{26} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^H(\theta, \xi') + d(u, \theta, \xi') + h^H(\theta, \xi') \\ - f_q(\xi') - f_h(\xi') &= 0 \quad \forall \xi' \in \Xi \tag{27} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^V(u', w) + b(u', u, w) + b(u, u', w) \\ - c(u', q) + d(u', \theta, \xi) &= 0 \quad \forall u' \in W \tag{28} \end{aligned}$$

$$-c(w, p') = 0 \quad \forall p' \in Q \tag{29}$$

$$a^H(\theta', \xi) + d(u, \theta', \xi) = 2E(\theta - \theta_D, \theta') \quad \forall \theta' \in \Theta \tag{30}$$

$$\Lambda \geq 0, \quad \int_{\Omega} dx \leq M, \quad \Lambda \left(\int_{\Omega} dx - M \right) = 0 \tag{31}$$

ここで $(\cdot)'$ は空間座標に固定した分布関数の領域変動に対する導関数 (形状導関数) を表す。式 (28) と (29) は随伴流速 w と随伴圧力 q に対する随伴方程式を表している。式 (30) は随伴温度 ξ に対する随伴方程式を表している。

なお、本節では部分領域において温度分布を規定する問題を取り上げたが、同様な手法を用いて、部分境界での温度分布規定問題についても定式化および形状勾配密度の導出が可能である。

4. 解析例

二次元分岐管の解析結果を Fig.1 に示す。流れの境界条件は、左側の流入境界 Γ_0 で Poiseuille 流れ、上下二つの流出境界 Γ_1 で自然境界とした。温度の境界条件は、流入口で $\theta=100$ 、流出口で $\theta=0$ 、その他は断熱境界とした。Reynolds 数、Peclet 数をそれぞれ、1.0, 2.24 とした。温度規定領域 Ω_D は上側出口付近に設け、規定温度は初期形状の温度より高温で $\theta_D=40$ の一様分布とした。設計境界は全管壁面境界とし、領域の制約条件を初期形状の 80% 以下として解析を行った。

同定後の形状は、流入口側管路が上側に曲がり、規定領域方向へ向かう流量が増加して、高温部が上側出口に広がったことが確認できる。同定後の形状では、目的汎関数の値は最小化し、提案した手法の妥当性が確認できた。

文 献

- (1) 片峯ほか, 機論 B, 61 巻, 581 号, (1995), 103-108.
- (2) 片峯ほか, 機論 B, 64 巻, 620 号, (1998), 1063-1070.
- (3) 片峯ほか, 機論 B, 65 巻, 629 号, (1999), 275-281.
- (4) 片峯ほか, 機論 B, 66 巻, 641 号, (2000), 227-234.
- (5) 畔上, 機論 A, 60 巻, 574 号, (1994), 1479-1486.