

604 熱変形分布を規定する熱弾性場における形状同定問題の解法

Solution to Shape Identification Problem on Thermoelastic Solids
with Desired Distribution of Thermal Deformation

○正 片峯 英次 (岐阜高専) 学 平井 雅大 (豊橋技科大) 正 畔上 秀幸 (名大)

Eiji KATAMINE, Gifu National College of Technology, Kamimakuwa, Motosu, Gifu 501-0495
Masahiro HIRAI, Toyohashi University of Technology, Tempaku-cho, Toyohashi, 441-8580
Hideyuki AZEGAMI, Nagoya University, Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya, 464-8601

This paper presents a numerical analysis method for solving the shape identification problems of thermoelastic fields. The square error integral between the actual thermal deformation distributions and the prescribed thermal deformation distributions on the prescribed sub-boundaries is used as the objective functional. The shape gradient of the shape identification problems was derived theoretically using the adjoint variable method, the Lagrange multiplier method and the formulae of the material derivative. Reshaping was accomplished using a traction method that was proposed as a solution to the domain optimization problems. A new numerical procedure for the shape identification was proposed. The validity of the proposed method was confirmed by the results of 3D numerical analysis.

Key Words: Shape Identification, Shape Optimization, Computer Aided Design, Thermoelastic Solid, Adjoint Method, Traction Method

1. はじめに

熱弾性場において、熱変形後の形状が目標形状になるように原形状を決定する形状同定問題は、機器性能の改善を目的とした重要な工学的問題である。例えば、高温環境下で作動する工作機械の開発において、熱変形をできるだけ少なくして加工精度を向上させる機器の原形状を決定することは、本問題に直結した課題の一つである。また、熱変形が測定誤差に影響する精密測定機器の開発においても、その測定精度改善のための形状設計技術の確立が望まれている。

著者らのグループは、これまでに弾性体⁽¹⁾、熱伝導場⁽²⁾⁽³⁾、あるいは流れ場⁽⁴⁾⁽⁵⁾など、場の連成を考慮しない単一場における形状同定問題に対して、実用的な数値解析法を提示してきた。その解析手法には力法⁽⁶⁾を用いた。

本小論文では、熱伝導場と弾性体を連成させた熱弾性場において、実際の熱変形分布と指定された熱変形分布との二乗誤差積分を目的汎関数にした熱変形規定問題を定式化する。次に Lagrange 乗数法あるいは随伴変数法および物質導関数を利用して、形状修正の感度となる形状勾配を理論的に導出し、最後に簡単な 3 次元問題の数値解析結果を紹介する。

2. 熱変形分布の二乗誤差最小化問題

2.1 定式化 熱弾性場領域 Ω の領域変動を T_s (s は領域変動の履歴) で定義し、領域 Ω は変動して $\Omega_s = T_s(\Omega)$ になると仮定する。

この熱弾性体の領域 Ω の部分境界 $\Gamma_D \subset \Gamma$ において、実際の熱変形分布 u と指定された熱変形分布 u_D との二乗誤差積分を目的汎関数にした熱変形規定問題を考える。この問題は次のように定式化できる。

$$\begin{aligned} &\text{Given } M \text{ and} \\ &k, \phi_0, q, h, \phi_f, Q, C, \\ &u_0, \alpha, P, f: \text{ fixed in space} \quad (1) \\ &\text{find } \Omega \quad (2) \\ &\text{that minimize } E(u - u_D, u - u_D) \quad (3) \\ &\text{subject to } a_\varepsilon(\phi, \varphi) + b_\phi(\phi, \varphi) = l_\varepsilon(\varphi) \\ &\phi - \phi_0 \in \Phi, \quad \forall \varphi \in \Phi \quad (4) \end{aligned}$$

$$a_\varepsilon(\varepsilon(u) - \phi\alpha, \varepsilon(v)) = l_\varepsilon(v) \\ u - u_0 \in U, \quad \forall v \in U \quad (5)$$

$$\int_{\Omega} dx \leq M, \quad (6)$$

ただし、 $E(x, y)$ は次のように定義されている。

$$E(x, y) = \int_{\Gamma_D} x_i y_i d\Gamma$$

式 (4) は温度分布 $\phi \in H^1(\Omega)$ に対する熱伝導場の支配方程式の弱形式を表している。ただし、

$$a_\phi(\phi, \varphi) = \int_{\Omega} k_{ij} \phi_{,i} \varphi_{,j} dx, \quad b_\phi(\phi, \varphi) = \int_{\Gamma_h} h \phi \varphi d\Gamma \\ l_\phi(\varphi) = \int_{\Omega} Q \varphi dx + \int_{\Gamma_h} h \phi_f \varphi d\Gamma + \int_{\Gamma_q} q \varphi d\Gamma$$

$$\Phi = \{\phi \in H^1(\Omega) \mid \phi|_{\Gamma_\phi} = 0, \Gamma_\phi \subset \Gamma\} \quad (7)$$

であり、 φ は随伴温度を表す。この熱伝導場の境界 Γ は、 $\Gamma = \Gamma_\phi \cup \Gamma_h \cup \Gamma_q$ から構成され、温度 $\phi_0 \in H^{1/2}(\Gamma_\phi)$ 、熱流束 $q \in H^{-1/2}(\Gamma_q)$ 、熱源 $Q \in H^{-1}(\Omega)$ は既定関数として与えられている。境界 Γ_h は、熱伝達率 $h \in L^\infty(\Gamma_h)$ と温度 $\phi_f \in L^\infty(\Gamma_h)$ の外部流体との熱伝達を考慮した境界である。また $k = \{k_{ij}\}_{i,j=1}^n \in (L^\infty(\Omega))^{n \times n}$ は熱伝達率テンソルを表している。なお、本論文のテンソル表示では Einstein の総和規約と偏微分表示 $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial x_i$ を使用している。 $H^m(\Omega)^n$ は m 階の導関数まで二乗可積分な n 次元ベクトル関数空間、 $L^\infty(\Omega)$ は有界可積分なスカラー関数空間を表す。

式 (5) は温度分布 ϕ に基づいて熱変形 $u = \{u_i\}_{i=1}^n \in U$ が生じる線形熱弾性場の支配方程式の弱形式を表している。ただし、

$$a_\varepsilon(\varepsilon, \varepsilon) = \int_{\Omega} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} dx, \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \\ l_\varepsilon(u) = \int_{\Omega} f_i u_i dx + \int_{\Gamma_P} P_i u_i d\Gamma$$

$$U = \{u \in (H^1(\Omega))^n \mid u|_{\Gamma_u} = 0, \Gamma_u \subset \Gamma\} \quad (8)$$

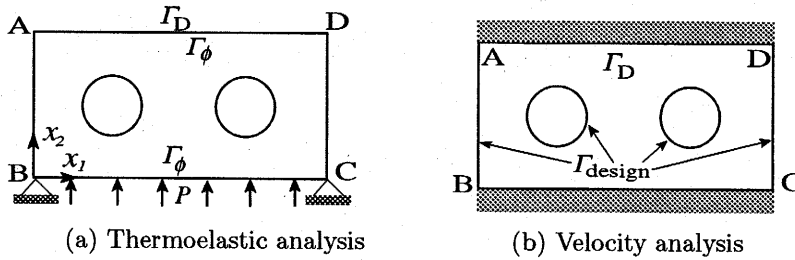


Fig. 1 3D plate problem with two holes

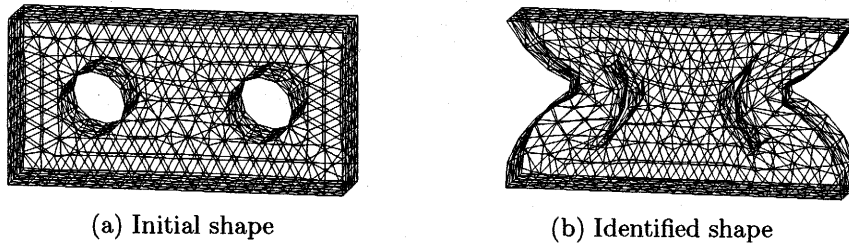


Fig. 2 Shapes with finite element meshes in 3D plate problem with two holes

であり、 v は随伴変位を表す。熱弾性体の境界 Γ は、 $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_P$ から構成され、変位 $u_o = \{u_{oi}\}_{i=1}^n \in (H^{1/2}(\Gamma_u))^n$ 、表面力 $P = \{P_i\}_{i=1}^n \in (H^{-1/2}(\Gamma_P))^n$ 、体積力 $f = \{f_i\}_{i=1}^n \in (H^{-1}(\Omega))^n$ は既定関数として与えられている。 $C = \{C_{ijkl}\}_{i,j,k,l=1}^n \in (L^\infty(\Omega))^{n \times n \times n}$ 、 $\alpha = \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^n \in (L^\infty(\Omega))^{n \times n}$ はそれぞれ剛性テンソル、熱膨張係数テンソルを表している。

2.2 形状勾配 この形状最適化問題は次の Lagrange 汎関数 $L(\phi, u, \varphi, v, \Lambda)$ の停留化問題に置き換えることができる。

$$L(\phi, u, \varphi, v, \Lambda) = E(u - u_D, u - u_D) - a_\phi(\phi, \varphi) - b_\phi(\phi, \varphi) + l_\phi(\varphi) - a_\varepsilon(\varepsilon(u) - \phi\alpha, \varepsilon(v)) + l_\varepsilon(v) + \Lambda \left(\int_\Omega dx - M \right) \quad (9)$$

ここで Λ は領域の大きさ制約条件式に対する Lagrange 乗数である。また φ, v を Lagrange 乗数として用いている。領域変動に対する L の導関数 L は速度場 $V = \partial T_s(\Omega) / \partial s = \partial T_s(T_s^{-1}(\Omega_s)) / \partial s$ を用いて計算し⁽⁶⁾、簡単のために部分境界 $\Gamma_h, \Gamma_\phi, \Gamma_P$ と変位規定境界 Γ_D の領域変動を拘束すれば、この問題に対する形状修正のための分布系感度を表す形状勾配密度 G は次のようになる。

$$G = G_0 + G_1\Lambda, \quad (10)$$

$$G_0 = -C_{ijkl}(\varepsilon_{kl}(u) - \alpha_{kl}\phi)\varepsilon_{ij}(v) - k_{ij}\phi_{,i}\varphi_{,j} + Q\varphi + f_i v_i \quad (11)$$

$$G_1 = 1 \quad (12)$$

ここで、温度 ϕ 、熱変位 u 、随伴温度 φ 、随伴変位 v および Lagrange 乗数 Λ は次の最適性の条件から決定できる。

$$a_\phi(\phi, \varphi') + b_\phi(\phi, \varphi') = l_\phi(\varphi') \quad \forall \varphi' \in \Phi \quad (13)$$

$$a_\varepsilon(\varepsilon(u) - \phi\alpha, \varepsilon(v')) = l_\varepsilon(v') \quad \forall v' \in U \quad (14)$$

$$a_\varepsilon(\varepsilon(u'), \varepsilon(v)) = 2E(u - u_D, u') \quad \forall u' \in U \quad (15)$$

$$a_\phi(\phi', \varphi) + b_\phi(\phi', \varphi) = a_\varepsilon(\phi'\alpha, \varepsilon(v)) \quad \forall \phi' \in \Phi \quad (16)$$

$$\Lambda \geq 0, \quad \int_\Omega dx \leq M, \quad \Lambda \left(\int_\Omega dx - M \right) = 0 \quad (17)$$

ここで、 $(\cdot)'$ は空間座標に固定した分布関数の領域変動に対する導関数 (形状導関数) を表す。

3. 方法

方法は形状最適化のための速度場 V を次の支配方程式に基づいて解く方法である。⁽⁶⁾

$$a_\varepsilon(\varepsilon(V), \varepsilon(y)) = - \langle Gv, y \rangle \quad (18)$$

方法に基づく領域変動では、形状勾配密度 G に比例した外力を設計境界に作用させたときの弾性変位場を、形状修正量とみなして解析する方法である。

4. 解析例

導出した形状勾配と方法を用いて解析した 3 次元問題の解析例を紹介する。

問題設定を Fig.1 に示す。熱変形規定境界 Γ_D は上面境界 A-D である。本問題では、境界 A-D の x_2 方向における熱変形ができるだけ均一化する境界形状を決定することを目的とした。熱弾性場解析および形状修正のための速度場解析の境界条件を図中に示す。上面境界 A-D が高温境界、下面境界 B-C が力学的負荷を受ける低温境界である。設計境界は円孔部と側面部の断熱境界とした。領域の大きさ制約は初期形状以下になるように設定した。有限要素解析には、温度および変位に対して 2 次の形状関数を有する 4 面体要素を用いた。

解析結果を Fig.2 に示す。同定された形状では、境界 A-D における熱変形は完全には均一化できなかったが、熱変形の最大値と最小値の差が小さく目標の熱変形分布に近づいた。その結果、目的汎関数は減少し初期値に比較して 68% 改善した。これらの結果から、提示した解法の基本的な妥当性が確認できた。

なお、本研究は平成 15 年度財団法人マザック財団研究助成の援助を受けて行われた。記して深く謝意を表す。

文 献

- (1) 下田ほか, 機論 A, 62 巻, 604 号, (1996), 2831-2837.
- (2) 片峯ほか, 機論 B, 65 巻, 629 号, (1999), 275-281.
- (3) 片峯ほか, 機論 B, 66 巻, 641 号, (2000), 227-234.
- (4) 片峯ほか, 機論 B, 61 巻, 581 号, (1995), 103-108.
- (5) 片峯ほか, 機論 B, 64 巻, 620 号, (1998), 1063-1070.
- (6) 畔上, 機論 A, 60 巻, 574 号 (1994), 1479-1486.