

726 大変形する弾性体の変形後形状を規定した形状同定問題の解法

Solution to Shape Identification Problem of Elastic Continuum
with Prescribed Large Deformation

○学 長谷 高明 (豊橋技科大院)

正 畔上 秀幸 (名古屋大学)

Takaaki NAGATANI, Graduate school of Toyohashi University of Technology, 1-1 Hibirigaoka,
Tempaku-cho, Toyohashi 441-8580

Hideyuki AZEGAMI, Nagoya University, 1 Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya 464-8601

Key Words: Optimum Design, Numerical Analysis, Finite-Element Method, Traction Method

1. はじめに

重力によって大変形した後の形状において機能を発揮するような柔らかい弾性体を設計する場合、変形後の形状が所望の形状を成すように原形状を求めることが必要となる。人工乳房などの整形自助具はその一例である。このような問題は一種の形状同定問題を形成する。

本論文では、このような大変形後の形状を規定した形状同定問題が解析可能な形で定式化できることを示す。目的汎関数には物体力による大変形後の変位と規定形状の変位の2乗誤差積分を選んだ。この問題に対する形状勾配の評価には随伴変数法を用いた。形状修正には力法⁽¹⁾⁻⁽⁴⁾を適用した。

2. 大変形する弾性体の形状同定問題

有界な領域 $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$)、その境界 Γ で定義された弾性体が、部分境界 Γ_0 において変位が拘束された下で時刻 $t \in (0, T)$ のときに物体力 $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times (0, T) \ni (\mathbf{x}, t) \mapsto \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ を受けて変位 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) : \Omega \times (0, T) \ni (\mathbf{x}, t) \mapsto \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ を生じ、領域が $\Omega|_t = \{\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) | \mathbf{x} \in \Omega\}$ となる場合を考える。

時刻 $t = T$ における領域 $\Omega|_{t=T}$ を規定領域 Ω^{ref} に近づける形状同定問題は、領域 Ω から規定領域への変位 $\mathbf{u}^{\text{ref}}(\mathbf{x}) : \Omega \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{u}^{\text{ref}} \in \mathbb{R}^n$ が与えられて、 $\Omega^{\text{ref}} = \{\mathbf{x} + \mathbf{u}^{\text{ref}}(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in \Omega\}$ と表現できれば、変位の2乗誤差積分最小化問題として、次のように表せる。

$$\min_{\Omega \in \mathbb{R}^n} \int_{\Omega} \|\mathbf{u}|_{t=T} - \mathbf{u}^{\text{ref}}\|_{\mathbb{R}^n}^2 dx \quad \text{such that} \quad (1)$$

$$\int_0^T a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) dt = \int_0^T l_t(\mathbf{v}) dt \quad \mathbf{u} \in U \quad \forall \mathbf{v} \in U \quad (2)$$

$$\text{and} \quad \int_{\Omega|_{t=T}} dx = \int_{\Omega^{\text{ref}}} dx \quad (3)$$

ただし、 $a(\cdot, \cdot)$ 、 $l_t(\cdot)$ および U は次のように定義する。

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, t) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx \quad (4)$$

$$l_t(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{p}, t \cdot \mathbf{v} dx \quad (5)$$

$$U = \left\{ \mathbf{v} \in (H^1(\Omega \times (0, T)))^n \mid \mathbf{v}|_{\Omega \cap \Gamma_0} = \mathbf{0} \right\} \quad (6)$$

$\boldsymbol{\sigma}$ は第2 Piola-Kirchhoff 応力、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ は Green-Lagrange ひずみである。時間に対する導関数を $(\cdot), t \equiv \partial(\cdot)/\partial t$ と表した。なお、体積制約式 (3) は収束性を高めるために採用した。

3. 最適性条件

この問題に随伴変数法と Lagrange 乗数法を適用して形状勾配の評価式を導出する。随伴変数 $\mathbf{v} \in U$ および体積制約に対する

Lagrange 乗数 $\Lambda \in \mathbb{R}$ を用いると、Lagrange 乗数形式は次式となる。

$$L = \int_{\Omega} \|\mathbf{u}|_{t=T} - \mathbf{u}^{\text{ref}}\|_{\mathbb{R}^n}^2 dx - \int_0^T a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) dt + \int_0^T l_t(\mathbf{v}) dt + \Lambda \left(\int_{\Omega|_{t=T}} dx - \int_{\Omega^{\text{ref}}} dx \right) \quad (7)$$

簡単のために、この弾性体は均質で Hook 則に従うと仮定する。また、物体力 $\mathbf{p}(\mathbf{x}, T)$ は領域変動とは独立に $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ で与えられていると仮定する。このとき、Lagrange 乗数形式の領域変動に対する物質導関数 \dot{L} は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{L} = & 2 \int_{\Omega} (\mathbf{u}|_{t=T} - \mathbf{u}^{\text{ref}}) \mathbf{u}'|_{t=T} dx \\ & + 2 \int_{\Omega} (\mathbf{u}|_{t=T} - \mathbf{u}^{\text{ref}}) (\mathbf{I} + \mathbf{D}\mathbf{u}^{\text{ref}}) \cdot \mathbf{V} dx \\ & + \int_{\Gamma} \left(\|\mathbf{u}|_{t=T} - \mathbf{u}^{\text{ref}}\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \bar{\Lambda} \right) \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{V} d\Gamma \\ & + \int_0^T \left\{ -a(\mathbf{u}', \mathbf{v}) - a(\mathbf{u}, \mathbf{v}') + l_t(\mathbf{v}') \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma} (-\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, t) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) + \mathbf{p}, t \cdot \mathbf{v}) \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{V} d\Gamma \right\} dt \\ & + \dot{\Lambda} \left(\int_{\Omega|_{t=T}} dx - \int_{\Omega^{\text{ref}}} dx \right) \end{aligned} \quad (8)$$

ただし、 $(\cdot)'$ は形状導関数、 $(\dot{\cdot})$ は物質導関数、 $\mathbf{D}(\cdot) \equiv \{\partial(\cdot)/\partial x_i \partial x_j\}_{i,j=1}^n$ 、 $\boldsymbol{\nu}$ は外向き単位法線、 \mathbf{V} は領域変動に対する速度である。なお、 $\mathbf{u}'^{\text{ref}} \equiv \mathbf{u}^{\text{ref}'} + \mathbf{D}\mathbf{u}^{\text{ref}} \cdot \mathbf{V} = -\mathbf{V}$ となることを考慮して⁽⁵⁾、次式の関係を用いた。

$$\mathbf{u}'^{\text{ref}} = -(\mathbf{I} + \mathbf{D}\mathbf{u}^{\text{ref}}) \cdot \mathbf{V} \quad (9)$$

\mathbf{I} は恒等写像である。また、 $\bar{\Lambda}$ は次式で定義する。

$$\bar{\Lambda} = \Lambda \int_{\Gamma|_{t=T}} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{V} d\Gamma / \int_{\Gamma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{V} d\Gamma \quad (10)$$

式 (8) より、 \mathbf{u} 、 \mathbf{v} および $\bar{\Lambda}$ に関する最適性条件は次のようになる。

$$\int_0^T a(\mathbf{u}, \mathbf{v}') dt = \int_0^T l_t(\mathbf{v}') dt \quad \forall \mathbf{v}' \in U \quad (11)$$

$$\int_0^T a(\mathbf{u}', \mathbf{v}) dt = 2 \int_{\Omega} (\mathbf{u}|_{t=T} - \mathbf{u}^{\text{ref}}) \mathbf{u}'|_{t=T} dx \quad \forall \mathbf{v}' \in U \quad (12)$$

$$\int_{\Omega|_{t=T}} dx - \int_{\Omega^{\text{ref}}} dx = 0 \quad (13)$$

式(11)は物体力による変位 \mathbf{u} を求める本来の大変形問題である。それに対して、式(12)は随伴変位 \mathbf{v} を求めるための随伴方程式となる。式(13)は本来の体積の等式制約条件であるが、 $\bar{\Lambda}$ を決定するための条件を与える。

随伴方程式(12)の解は、 $\mathbf{v} = \delta(t-T)\mathbf{v}|_{t=T}$ ($\delta(\cdot)$ はDirac δ 関数)となり、 $\mathbf{v}|_{t=T}$ は、次式のように、時刻 $t=T$ のときの変位誤差 $\mathbf{u}|_{t=T} - \mathbf{u}^{\text{ref}}$ を $t=T$ のときの物体力と仮定したときの変位により解析できる。

$$a(\mathbf{u}'_t|_{t=T}, \mathbf{v}|_{t=T}) = 2 \int_{\Omega} (\mathbf{u}|_{t=T} - \mathbf{u}^{\text{ref}}) \mathbf{u}'_t|_{t=T} dx \quad \forall \mathbf{u}' \in U \quad (14)$$

4. 形状勾配

式(11)、(14)および(13)により決定された \mathbf{u} 、 \mathbf{v} および $\bar{\Lambda}$ を用いたときのLagrange乗数形式の物質導関数 $\dot{L}|_{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \bar{\Lambda}}$ は、制約条件式(2)および(3)が成立したときの領域変動に対する目的汎関数(式(1))の物質導関数を与え、次のように表せる。

$$\dot{L}|_{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \bar{\Lambda}} = \langle \mathbf{G}_0, \mathbf{V} \rangle + \bar{\Lambda} \langle \mathbf{G}_1, \mathbf{V} \rangle \quad (15)$$

$$\langle \mathbf{G}_0, \mathbf{V} \rangle \equiv \int_{\Gamma} G_0^\Gamma \nu \cdot \mathbf{V} d\Gamma + \int_{\Omega} G_0^\Omega \cdot \mathbf{V} dx \quad (16)$$

$$\langle \mathbf{G}_1, \mathbf{V} \rangle \equiv \int_{\Gamma} G_1 \nu \cdot \mathbf{V} d\Gamma \quad (17)$$

$$G_0^\Gamma = \left\| \mathbf{u}|_{t=T} - \mathbf{u}^{\text{ref}} \right\|_{\mathbb{R}^n}^2 - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, t|_{t=T}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}|_{t=T}) + \mathbf{p}_{,t}|_{t=T} \cdot \mathbf{v}|_{t=T} \quad (18)$$

$$G_0^\Omega = 2 (\mathbf{u}|_{t=T} - \mathbf{u}^{\text{ref}}) (\mathbf{I} + \mathbf{D}\mathbf{u}^{\text{ref}}) \quad (19)$$

$$G_1 = 1 \quad (20)$$

\mathbf{G}_0 は目的汎関数に対する形状勾配、 \mathbf{G}_1 は体積制約に関連した形状勾配を与える。

5. 手法

手法によれば、これらの形状勾配を用いて領域変動を次のように計算する。 \mathbf{G}_i ($i=0,1$) に対する速度 $\mathbf{V}_i \in D$ を次式で計算する。

$$a^L(\mathbf{V}_i, \mathbf{y}) = -\langle \mathbf{G}_i, \mathbf{V} \rangle \quad \forall \mathbf{y} \in D \quad (21)$$

ただし、 $a^L(\cdot, \cdot)$ は式(4)で定義した $a(\cdot, \cdot)$ を線形化した双一次形式である。また、 D は形状変動の制約を満たす集合である。増分 Δs を導入し、次式で $\bar{\Lambda}$ を決定する。

$$-\bar{\Lambda} \langle \mathbf{G}_1, \Delta s \mathbf{V}_1 \rangle = \langle \mathbf{G}_1, \Delta s \mathbf{V}_0 \rangle + \int_{\Omega|_{t=T}} dx - \int_{\Omega^{\text{ref}}} dx \quad (22)$$

1回の領域変動は $\mathbf{I} + \Delta s(\mathbf{V}_0 + \bar{\Lambda} \mathbf{V}_1)$ によって行う。ただし、 Δs の決定方法や制約が満たされない場合の $\bar{\Lambda}$ の更新方法などアルゴリズムの詳細は文献(6)に譲る。

6. 解析例

本論文で示した形状同定問題の定式化と形状勾配が期待通りに機能することを確認するために、有限要素法を用いたプログラムを自作し、重力による片持ちはり状弾性体の大変形問題を解析した。

図1に領域変動の結果を示す。図1(a)は、重力によって変形する前の初期領域 $\Omega|_{t=0}$ であると同時に、重力によって変形した後の規定領域 Ω^{ref} であると仮定する。図1(b)は、(a)が重力によって変形した後の領域 $\Omega|_{t=T}$ を示す。図1(b)の領域が(a)の領域に近づくような形状同定問題を解析し、図1(c)のような重力によって変形する前の領域 $\Omega|_{t=0}^*$ を得た。実際、図1(c)に重力が作用すると(d)に示す領域 $\Omega|_{t=T}^*$ となり、(d)は(a)の規定領域 Ω^{ref} と一致した。目的汎関数と体積の変動履歴を図2に示す。

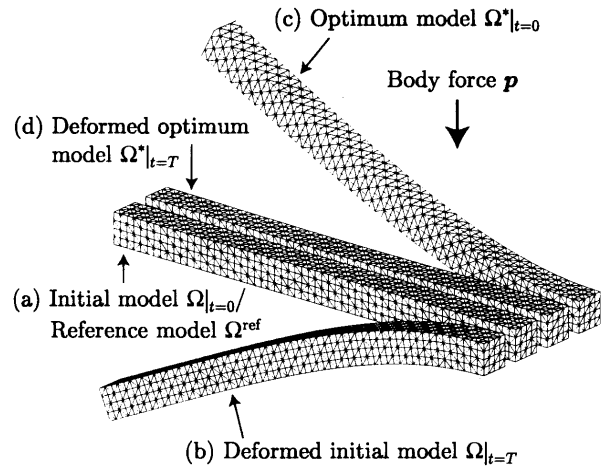


Fig. 1 Shape identification of cantilever-like elastic continuum with prescribed large deformation by gravity

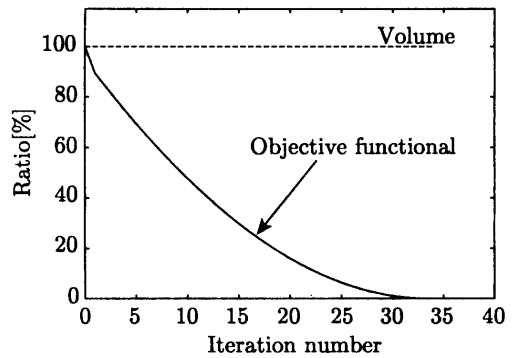


Fig. 2 Iteration history

7. まとめ

本論文では、物体力を受けて大変形した弾性体が規定した形状になるように原形状を決定する形状同定問題に対して、変形前の領域から規定領域への変位が与えられていれば、変形後の変位と規定形状の変位の2乗誤差積分の最小化問題として解くことができることを示した。

文献

- (1) 畔上秀幸. 領域最適化問題の一解法. 日本機械学会論文集 (A編), Vol. 60, pp. 1479-1486, 1994.
- (2) 畔上秀幸. 形状最適化問題の解法. 計算工学, Vol. 2, pp. 239-247, 1997.
- (3) 井原久, 畔上秀幸, 下田昌利, 渡邊勝彦. 材料非線形性を考慮した形状最適化問題の解法. 日本機械学会論文集 A編, Vol. 66, No. 646, pp. 1111-1118, 6 2000.
- (4) 井原久, 畔上秀幸, 下田昌利. 幾何学的非線形性を考慮した変位経路制御問題に対する形状最適化. 日本機械学会論文集 A編, Vol. 67, No. 656, pp. 611-617, 4 2001.
- (5) 畔上秀幸, 呉志强. 線形弾性問題における領域最適化解析(力法によるアプローチ). 日本機械学会論文集 (A編), Vol. 60, pp. 2312-2318, 1994.
- (6) 小山悟史, 畔上秀幸. 形状最適化問題の解法における多制約の取り扱い. 日本機械学会第13回設計工学・システム部門講演会講演論文集, 2003.