

# 934 対流項を考慮した粘性流れ場の形状最適化問題の解法

Solution to Shape Optimization Problem of Viscous Flow Fields Considering Convection Term

○正 片峯英次 (岐阜高専) 津幡知幸 (スズキ (株)) 正 畔上秀幸 (名大)

Eiji KATAMINE, Gifu National College of Technology, Shinsei-cho, Motosu-gun, Gifu 501-0495  
Tomoyuki TSUBATA, Suzuki Motor Corporation, 300 Takatsuka-cho, Hamamatsu-city, Shizuoka 432-8611  
Hideyuki AZEGAMI, Nagoya University, Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya-city, Aichi 464-8601

**Key Words:** Optimum Design, Computer Aided Design, Computational Fluid Dynamics, Finite Element Method, Shape Optimization, Traction Method

## 1. はじめに

粘性流体中を移動する物体の形状を抵抗動力が最小となるように決定する問題、あるいは粘性流体の輸送に使われる流路形状をエネルギー損失が最小となるように決定する問題は、エネルギーの利用効率を高める観点から工学的に重要な問題である。

著者ら<sup>(1)</sup>は、前報において粘性流れ場の領域形状を設計対象とした散逸エネルギー最小化問題において、方法を適用した一つの数値解析法を提案し、簡単な Stokes 流れに対する二次元問題、汎用有限要素解析プログラムを利用した三次元問題の解析例<sup>(2)</sup>を通してその妥当性を確認した。方法は著者の一人<sup>(3)</sup>によって提案された実用的な領域最適化解析法である。

本研究の目的は、対流項の影響を考慮した粘性流れ場形状の最適化問題に対して、方法の適用を試みたことである。本小論文では、散逸エネルギー最小化問題を定式化し、領域変動に対する分布系の感度 (形状勾配密度) を理論的に導出した。次に導出した形状勾配密度に基づいて方法を適用し、数値解析した二次元問題の解析例を簡単に紹介する。

## 2. 散逸エネルギー最小化問題

境界  $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$  で囲まれた粘性流れ場領域  $\Omega \subset R^n$ ,  $n = 2, 3$  を考える。流速  $u = \{u_i\}_{i=1}^n \in U$  は次の関数空間の要素であり、Dirichlet 型境界  $\Gamma_0$  において  $\hat{u} \in (H^{1/2}(\Gamma_0))^n$  が既知関数として与えられている。

$$U = \{u \in (H^1(\Omega))^n \mid u = \hat{u} \text{ on } \Gamma_0\} \quad (1)$$

また Neumann 型境界  $\Gamma_1$  では次のような表面力  $\hat{\sigma} = \{\hat{\sigma}_i\}_{i=1}^n \in (H^{-1/2}(\Gamma_1))^n$  が与えられている。

$$\{-p\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i})\} \nu_j = \hat{\sigma}_i \text{ on } \Gamma_1 \quad (2)$$

圧力  $p \in Q$  は次の関数空間の要素であり、密度  $\rho \in L^\infty(\Omega)$ 、粘性係数  $\mu \in L^\infty(\Omega)$  は既知関数として与えられている。

$$Q = \{q \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} q dx = 0 \text{ (if } \text{meas}(\Gamma_1) = 0)\} \quad (3)$$

なお、本論文のテンソル表示では Einstein 総和規約と偏微分表示  $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial x_i$  を使用する。

**2.1 定式化** この粘性流れ場における散逸エネルギー最小化問題を定式化する。この粘性流れ場領域  $\Omega$  の領域変動を  $T_s$  ( $s$  は領域変動の履歴) で定義し、領域  $\Omega$  は変動して  $\Omega_s = T_s(\Omega)$  になると仮定する。 $T_s(\Omega)$  は、領域変動の制約を満たす適当に導関数が連続な許容関数空間の要素とする。簡単のために、領域変動の制約に境界  $\Gamma_0$  が含まれると仮定す

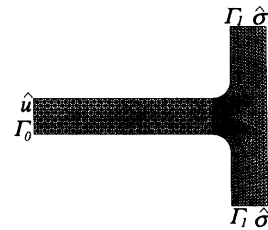


Fig. 1 2D branch channel problem and finite element meshes

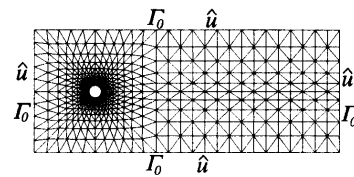


Fig. 2 2D isolated body problem and finite element meshes

る。このとき、領域の大きさ制約を課した散逸エネルギー最小化問題は次のように定式化される。

Problem: Given  $M$  and  $\hat{u}, \hat{\sigma}, \rho, \mu$ : fixed in space, (4)

find  $\Omega$  (5)

that minimize  $a^V(u, u)$  (6)

subject to  $a^V(u, w) + b(u, u, w) - c(w, p) = d(w) \quad \forall w \in W$  (7)

$c(u, q) = 0 \quad \forall q \in Q$  (8)

$\int_{\Omega} dx \leq M$ , (9)

ここで式 (7), (8) は随伴流速  $w = \{w_i\}_{i=1}^n \in W$ :

$$W = \{w \in (H^1(\Omega))^n \mid w = 0 \text{ on } \Gamma_0\} \quad (10)$$

と随伴圧力  $q \in Q$  を用いて定義した Navier-Stokes 方程式、連続式の弱形式である。式 (9) は領域の大きさの制約条件式を表している。

ここで、粘性項  $a^V(u, w)$ 、対流項  $b(v, u, w)$ 、圧力項  $c(w, p)$ 、表面力項  $d(w)$  は次式で与えられる。

$$a^V(u, w) = \int_{\Omega} 2\mu \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(w) dx = \int_{\Omega} \mu w_{i,j} (u_{i,j} + u_{j,i}) dx,$$

$$b(v, u, w) = \int_{\Omega} \rho w_i v_j u_{i,j} dx, \quad c(w, p) = \int_{\Omega} w_{i,i} p dx,$$

$$d(w) = \int_{\Gamma_1} w_i \hat{\sigma}_i d\Gamma,$$

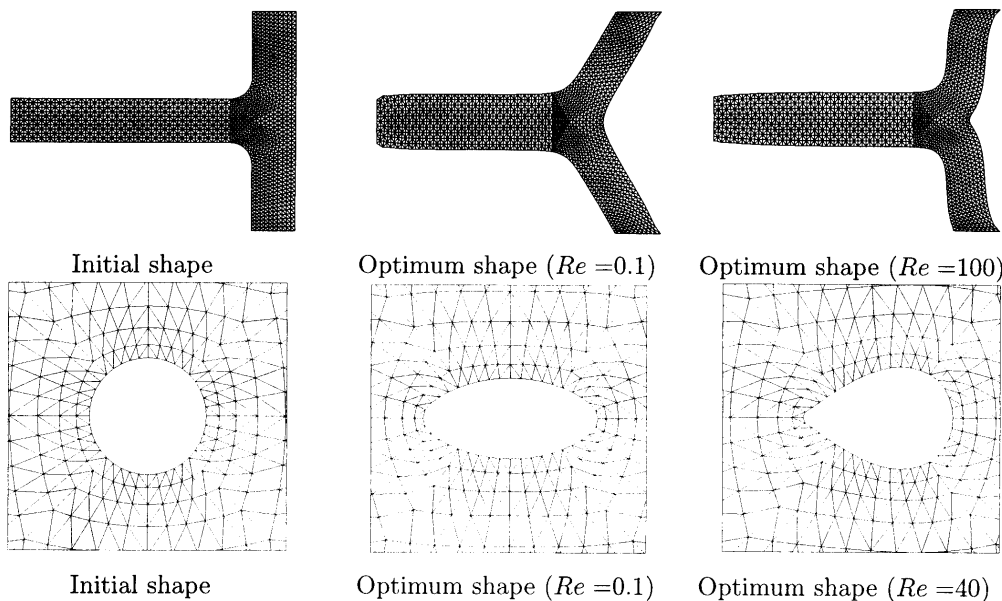


Fig. 3 Numerical results of branch channel problem (upper) and isolated body problem (lower)

ここで、 $\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$  である。

**2.2 形状勾配** この形状最適化問題を次の Lagrange 汎関数  $L(u, p, w, q)$  の停留化問題に置き換え、領域変動に対する  $L$  の導関数  $\dot{L}$  を速度場  $V = \partial T_s(\Omega)/\partial s = \partial T_s(T_s^{-1}(\Omega_s))/\partial s$  を用いて計算すると次のように得られる<sup>(3)</sup>。

$$\begin{aligned} \dot{L} = & -\{a^V(u, w') + b(u, u, w') - c(w', p) - d(w')\} + c(u, q') \\ & -\{a^V(u', w) + b(u', u, w) + b(u, u', w) - c(u', q)\} \\ & -2a^V(u, u') + c(w, p') \\ & + \dot{\Lambda} \left( \int_{\Omega} dx - M \right) + \langle G\nu, V \rangle \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、 $w \in W$  と  $q \in Q$  は Lagrange 乗変数として用いている。また  $\Lambda$  は領域の大きさ制約条件式に対する Lagrange 乗数である。 $(\cdot)$  は物質導関数、 $(\cdot)'$  は空間座標に固定した分布関数の領域変動に対する導関数 (形状導関数) を表す。また、

$$\langle G\nu, V \rangle = \int_{\Gamma_{\text{design}}} G\nu_i V_i d\Gamma \quad (12)$$

$$G = \mu u_{i,j}(u_{i,j} + u_{j,i}) - \mu w_{i,j}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \Lambda. \quad (13)$$

式 (11) から  $w' \in W$ ,  $q' \in Q$ ,  $u' \in W$  と  $p' \in Q$  に対する停留条件を考慮すれば、 $u, p, w, q$  に関する Kuhn-Tucker 条件は次のように得られる。

$$a^V(u, w') + b(u, u, w') - c(w', p) = d(w') \quad \forall w' \in W \quad (14)$$

$$c(u, q') = 0 \quad \forall q' \in Q \quad (15)$$

$$\begin{aligned} a^V(u', w) + b(u', u, w) + b(u, u', w) - c(u', q) \\ - 2a^V(u, u') = 0 \quad \forall u' \in W \end{aligned} \quad (16)$$

$$c(w, p') = 0 \quad \forall p' \in Q \quad (17)$$

$$\Lambda \geq 0, \quad \int_{\Omega} dx \leq M, \quad \Lambda \left( \int_{\Omega} dx - M \right) = 0, \quad (18)$$

上式によって  $u, p, w, q$  が解析できれば、Lagrange 汎関数の導関数は評価関数の導関数と一致して、次の関係が成立する。

$$\dot{L}|_{u,p,w,q,\Lambda} = \langle G\nu, V \rangle. \quad (19)$$

式 (12) の  $G\nu$ 、式 (13) の  $G$  は、それぞれこの問題における形状勾配および形状勾配密度と呼ばれる。式 (16) と (17) は随伴流速  $w$  と随伴圧力  $q$  に対する随伴方程式を表している。式 (18) は  $\Lambda$  に対する支配方程式を表わしている。

このようにして、本問題に対する形状勾配密度が与えられれば、方法<sup>(3)</sup>を適用することが可能となる。

### 3. 方法

方法に基づく領域変動では、場の領域を弾性体と仮定して、形状勾配密度に比例した外力を設計境界に作用させたときの弾性変位場を、速度場とみなして解析する方法として提案されている<sup>(3)</sup>。本研究では、粘性流れ場および速度場の解析にはとも有限要素法を用いた。

### 4. 解析例

Fig. 1 の分岐管と Fig. 2 の一様流中におかれた孤立物体の二次元問題に対する解析例を簡単に紹介する。

分岐管の問題では、流体は Poiseuille 流れを仮定した左側入口境界  $\Gamma_0$  から流入し、表面力  $\hat{\sigma} = 0$  の上下二つの出口境界  $\Gamma_1$  から流出する。設計境界は全壁面境界である。流れ場解析の有限要素には Taylor-Hood 型の有限要素を用い、節点数、要素数はそれぞれ 5,041、2,400 である。Reynolds 数は Poiseuille 流の平均流速と流入幅から定義した。一方、孤立物体の問題では、物体表面の全境界を設計境界とし、節点数、要素数はそれぞれ 2,310、1,100 である。Reynolds 数は一様流速と孤立物体の直径から定義した。

Fig. 3 に体積一定の制約条件下で解析した最適形状の結果を示す。孤立物体の問題では物体周辺部を拡大して示している。両解析ともに Reynolds 数の大きさに応じた滑らかな最適形状が得られている様子が確認できる。 $Re = 100$  の分岐管、 $Re = 40$  の孤立物体の最適形状では、散逸エネルギーが初期形状に対してそれぞれ 32%、13% 改善した。

これらの解析例から提示した解法の妥当性が確認できた。

### 文献

- (1) 片峯, 畔上, 日本機械学会論文集, B 編, 60 巻, 579 号, (1994), 3859-3866.
- (2) 片峯, 畔上, 井藤, 日本機械学会 99 年次大会講演論文集・No.99-1(Vol. I), (1999), 563-564.
- (3) 畔上, 日本機械学会論文集, A 編, 60 巻, 574 号 (1994), 1479-1486.