

3303 形状最適化問題の解法における多制約の取り扱い

Handling of Multi-constraints in Solution of Shape Optimization Problems

○ 小山 悟史 (名大院) 正 畔上 秀幸 (名大院)

Satoshi KOYAMA, Graduate School of Information Science, Nagoya University, Nagoya 464-8601
Hideyuki AZEGAMI, Graduate School of Information Science, Nagoya University

This paper presents an algorithm to solve efficiently multi-constraint problems in shape optimization problems. In the case of applying the Lagrange multiplier method to the multi-constraint problems, the Lagrange multipliers are decided by the Kuhn-Tucker conditions. The Kuhn-Tucker conditions require putting the Lagrange multipliers with respect to inactive inequality constraints zero. Instead of putting them zero, this paper proposed an algorithm of multiplying sufficiently large value to the diagonal term of shape gradient matrix. Applying this algorithm to volume minimization problems with mean compliance constraints with respect to multi-loads, well convergent results were obtained.

Key Words: Shape Optimization, Lagrange Multiplier Method, Adjoint Variable Method, Kuhn-Tucker Conditions, Traction Method

1. はじめに

機械部品を線形弾性体と仮定して、剛性の指標には平均コンプライアンス (外力仕事) を選ぶことにすれば、剛性を確保しながら軽量化する問題は、すべての負荷ケースに対する平均コンプライアンスを制限値以下に制約した下で体積を最小化する問題として定式化することができる。

これまで、境界形状を変動させることによって目的汎関数を最小化する形状最適化問題を効率的に解く方法として力法が開発されてきた⁽¹⁾⁻⁽⁴⁾。しかしながら、そこでは、不等式制約条件が1つの場合がほとんどであった。

複数の不等式制約条件が課された形状最適化問題を力法によって解析する場合、不等式制約条件に対しては、Lagrange 乗数法を適用して、それぞれの不等式制約条件に対応した Lagrange 乗数を Kuhn-Tucker 条件を満たすように決定することで対処してきた。Kuhn-Tucker 条件による Lagrange 乗数の決定方法に関しては、これまで、不等式制約条件がインアクティブ (等式を含まない不等式として成立) の場合には Lagrange 乗数を零とする簡単なアルゴリズムが使われてきた。しかしながら、不等式制約条件がインアクティブからアクティブ (等式として成立) に、あるいは、その逆の方向に移行する場合などにおいて収束しない現象が観察された。複数の不等式制約条件が課された場合には、それぞれの不等式制約条件が関連しながらその切り替えが起こることを考えれば、アルゴリズムを慎重に検討しなければ頻繁に解析不能に陥ることが予想される。

本論文では、このような背景を踏まえて、複数の不等式制約条件が課された最適化問題に対しても適切に機能する力法のアルゴリズムを提案する。本稿では、複数荷重に対する平均コンプライアンス制約付体積最小化問題の定式化から形状勾配の導出過程をまとめ、最後に、本研究で開発した力法による形状最適化解析のアルゴリズムを示す。

2. 複数荷重に対する平均コンプライアンス制約付体積最小化問題の定式化

線形弾性体が領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, (\mathbb{R} は実数), その境界 Γ で定義されていると仮定する。領域 Ω の変動は写

像の1媒介変数族 $T_s: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, $0 \leq s < \epsilon$ (ϵ は小さな正の実数) で表現できる。また、次式で定義される s に対する T_s の導関数 V を速度と呼ぶ。

$$V(x) = \frac{\partial T_s}{\partial s}(T_s^{-1}(x)) \quad x \in \Omega_s \quad (1)$$

負荷ケース (荷重の種類ではなく、荷重の組み合わせが異なれば別のケースとして数える) を $m = 1, 2, \dots, q$ と記述し、それぞれの場合の物体力を $\{f_i^{[m]}\}_{i=1}^n$ 、境界力を $\{P_i^{[m]}\}_{i=1}^n$ 、変位を $u^{[m]} = \{u_i^{[m]}\}_{i=1}^n$ 、主応力を $\{\sigma_i^{[m]}\}_{i=1}^n$ と表記すれば、負荷ケース $m = 1, 2, \dots, q$ に対する平均コンプライアンスをそれぞれ $l_0^{[m]}$ 以下に制限した下で体積を最小化する形状最適化問題は次のように定式化できる。

$$\min_{\Omega \subset \mathbb{R}^n} \int_{\Omega} dx \quad \text{such that} \quad (2)$$

$$a(u^{[m]}, v^{[m]}) = l^{[m]}(v^{[m]}) \quad \forall v^{[m]} \in U^{[m]} \quad (3)$$

$$(m = 1, 2, \dots, q)$$

$$l^{[m]}(u^{[m]}) \leq l_0^{[m]} \quad (m = 1, 2, \dots, q) \quad (4)$$

ただし、

$$a(u, v) \equiv \int_{\Omega} C_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j} dx \quad (5)$$

$$l^{[m]}(v) \equiv \int_{\Omega} f_i^{[m]} v_i dx + \int_{\Gamma} P_i^{[m]} v_i d\Gamma \quad (6)$$

$$U^{[m]} \equiv \{u \in (H^1(\Omega))^n \mid \text{負荷ケース } m \text{ の変位拘束条件}\} \quad (7)$$

また、 $\{C_{ijkl}\}_{i,j,k,l=1}^n \subset (L^\infty(\mathbb{R}^n))^{n^4}$ は剛性テンソルである。

3. 形状勾配の導出

随伴変数法と Lagrange 乗数法を適用すれば、この形状最適化問題の形状勾配は次のように導出される。この問題

の Lagrange 乗数形式は次式となる.

$$L = \int_{\Omega} dx - \sum_{m=1}^q \left(a(u^{[m]}, v^{[m]}) - l^{[m]}(v^{[m]}) \right) + \sum_{m=1}^q \Lambda^{[m]} \left(l^{[m]}(u^{[m]}) - l_0^{[m]} \right) \quad (8)$$

非零の境界力が作用する部分境界は変動しないものとするれば, この Lagrange 乗数形式の領域変動に対する物質導関数は次式となる.

$$\begin{aligned} \dot{L} = & - \sum_{m=1}^q \left(a(u^{[m]'}, v^{[m]}) + a(u^{[m]}, v^{[m]}') - l^{[m]}(v^{[m]}') \right) \\ & + \sum_{m=1}^q \dot{\Lambda}^{[m]} \left(l^{[m]}(u^{[m]}) - l_0^{[m]} \right) \\ & + \sum_{m=1}^q \Lambda^{[m]} l^{[m]}(u^{[m]}') + \langle G\nu, V \rangle \end{aligned} \quad (9)$$

ただし, 最終項は次式で定義する.

$$\langle G\nu, V \rangle = \int_{\Gamma} G\nu \cdot V d\Gamma \quad (10)$$

$$G = G^{[0]} + \sum_{m=1}^q \Lambda^{[m]} G^{[m]} \quad (11)$$

$$G^{[0]} = 1 \quad (12)$$

$$G^{[m]} = C_{ijkl} u_{k,l}^{[m]} v_{i,j}^{[m]} \quad (13)$$

また, $\nu = \{\nu_i\}_{i=1}^n$ は外向き単位法線である.

式 (9) において, $v^{[m]'} \in U^{[m]}$ は任意の形状変動速度 V に対する随伴変位 $v^{[m]}$ の形状導関数である. したがって, 任意の形状変動に起因する $v^{[m]'} \in U^{[m]}$ に対する最適性の必要条件は次式となる.

$$a(u^{[m]}, v^{[m]}') = l(v^{[m]}') \quad \forall v^{[m]'} \in U^{[m]} \quad (14)$$

同様に, $u^{[m]'} \in U^{[m]}$ に対する最適性の必要条件は次式となる.

$$a(u^{[m]'}, v^{[m]}) = \Lambda^{[m]} l(u^{[m]}') \quad \forall u^{[m]'} \in U^{[m]} \quad (15)$$

ここで, 式 (14) は式 (3) と同じ $u^{[m]}$ を決定するための状態方程式になっている. また, 式 (15) は随伴変位 $v^{[m]}$ を決定するための随伴方程式である. 式 (14) と (15) を比較すると, 式 (15) の $v^{[m]}$ は式 (14) において外力が $\Lambda^{[m]}$ 倍されたときの $u^{[m]}$ と等しい関係になっていることから, $v^{[m]}$ は次の準自己随伴関係で決定される.

$$v^{[m]} = \Lambda^{[m]} u^{[m]} \quad (16)$$

一方, 平均コンプライアンスの不等式制約に対する Lagrange 乗数 $\Lambda^{[m]}$ の最適性の条件は, 次のような Kuhn-Tucker 条件によって与えられる.

$$l^{[m]}(u) - l_0^{[m]} \leq 0 \quad (17)$$

$$\Lambda^{[m]} \left(l^{[m]}(u) - l_0^{[m]} \right) = 0 \quad (18)$$

$$\Lambda^{[m]} \geq 0 \quad (19)$$

これらの条件を満たすように $\Lambda^{[m]}$ を決定する方法は, 5. 章で示す.

変位 $u^{[m]}$ と随伴変位 $v^{[m]}$ および平均コンプライアンスの不等式制約に対する Lagrange 乗数 $\Lambda^{[m]}$ が, それぞれ式 (14), (16) および式 (17) から (19) によって決定されれば, 式 (8) の右辺において第一項を除いて零になることから, そのときの Lagrange 乗数形式の物質導関数 $\dot{L}|_{u^{[m]}, v^{[m]}, \Lambda^{[m]}}$ は, 目的汎関数の物質導関数と一致して, 次式となる.

$$\begin{aligned} \dot{L}|_{u^{[m]}, v^{[m]}, \Lambda^{[m]}} &= \langle G\nu, V \rangle \\ &= \left\langle \left(G^{[0]} + \sum_{m=1}^q \Lambda^{[m]} G^{[m]} \right) \nu, V \right\rangle \end{aligned} \quad (20)$$

なお, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $G\nu$ と V が互いに随伴関係となっていることに着目した表現である.

式 (20) の中に現れた $G\nu$ は, 目的汎関数の物質導関数における形状変動速度 V の境界における随伴関数になっていることから形状勾配と呼ばれる. また, $G^{[0]}$ および $G^{[m]}$ はそれぞれ体積および負荷ケース m に対する平均コンプライアンス平均コンプライアンスに対する形状勾配密度と呼ばれる. この平均コンプライアンス制約付き体積最小化問題では, $G^{[m]}$ は負荷ケース m のときのひずみエネルギー密度の 2 倍であることを思えば有限要素法プログラムを用いて容易に解析できることになる.

4. 手法

手法は, 形状変動速度 $V \in D$ を次式の境界値問題の解として得る方法として提案されている.

$$a(V, y) = -\langle G\nu, y \rangle \quad \forall y \in D \quad (21)$$

ただし, $a(\cdot, \cdot)$ は式 (5) で定義したものと同一である. また, D は形状変動の制約を満たす次の集合である.

$$D = \{ V \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n \mid \text{形状拘束条件} \} \quad (22)$$

式 (21) は, 形状変動の拘束条件 (変位の固定境界と非零の境界力が作用する境界では固定) の下で大きさ $-G$ の境界力を外向き単位法線ベクトル ν の方向に作用させたときの線形弾性問題を解いて, その変位を V として得る関係を表している. 境界の法線方向に境界力が作用したときの線形弾性問題が解析可能な有限要素法プログラムを用いれば容易に計算可能である.

5. 手法のアルゴリズム

本論文では, 不等式制約条件が複数であっても, それらに対する Kuhn-Tucker 条件を満たした上で形状を更新していくことのできる手法のアルゴリズムを開発した. ここでは, 領域 Ω のときの目的汎関数を $J^{[0]}(\Omega)$, 等式あるいは負値に制限された q 個の不等式制約汎関数を $\{J^{[m]}(\Omega)\}_{m=1}^q$, それぞれに対する形状勾配密度を $G^{[0]}, \{G^{[m]}\}_{m=1}^q$, 制約条件に対する Lagrange 乗数を $\{\Lambda^{[m]}\}_{m=1}^q$ と表すことにした場合の解析手順について説明する. このとき, 形状勾

配密度は $G = G^{[0]} + \sum_{m=1}^q \Lambda^{[m]} G^{[m]}$ で与えられることになる。複数荷重に対する平均コンプライアンス制約付体積最小化問題では、 $J^{[0]}(\Omega)$ および $J^{[m]}(\Omega)$ が体積および負荷ケース m のときの平均コンプライアンス、 $G^{[0]}$ および $G^{[m]}$ は式 (12) および式 (13) で与えられる。

- (i) 領域 Ω に対して、状態方程式を解き、目的汎関数 $J^{[0]}(\Omega)$ と制約汎関数 $\{J^{[m]}(\Omega)\}_{m=1}^q$ を計算する。
- (ii) 領域 Ω に対して、問題に応じて随伴方程式を解き、形状勾配密度 $\{G^{[m]}\}_{m=0}^q$ を計算する。
- (iii) 領域 Ω に対して、 $\{G^{[m]}\}_{m=0}^q$ を用いて、それぞれに対応する速度 $\{V^{[m]}\}_{m=0}^q \in D$ を次式 (力法) で計算する。

$$a(V^{[m]}, y) = -(G^{[m]}\nu, y) \quad \forall y \in D \quad (23)$$

- (iv) Lagrange 乗数 $\{\Lambda^{[m]}\}_{m=1}^q$ を制約汎関数の変動率行列 $\{\langle G^{[i]}\nu, \Delta s V^{[j]} \rangle\}_{ij}$ を用いて、次式で決定する。ただし、このステップでは、形状変動増分 $\Delta s = 1$ 、 $\{J^{[m]}(\Omega)\}_{m=1}^q = 0$ とする。また、不等式制約がインアクティブ ($\langle G^{[m]}\nu, \Delta s V^{[0]} \rangle < 0$) となる m 番目の対角成分 $\langle G^{[m]}\nu, \Delta s V^{[m]} \rangle$ には十分大きな値 $M_0 > 0$ を乗じた上で次式を解く (実際には、 $M_0 = 10^3$ 程度の値を用いる)。

$$-\begin{bmatrix} \langle G^{[1]}\nu, \Delta s V^{[1]} \rangle & \dots & \langle G^{[1]}\nu, \Delta s V^{[q]} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle G^{[q]}\nu, \Delta s V^{[1]} \rangle & \dots & \langle G^{[q]}\nu, \Delta s V^{[q]} \rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Lambda^{[1]} \\ \vdots \\ \Lambda^{[q]} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \langle G^{[1]}\nu, \Delta s V^{[0]} \rangle + J^{[1]}(\Omega) \\ \vdots \\ \langle G^{[q]}\nu, \Delta s V^{[0]} \rangle + J^{[q]}(\Omega) \end{Bmatrix} \quad (24)$$

式 (24) の解が $\{\Lambda^{[m]} \geq 0\}_{m=1}^q$ となれば次のステップに進む。もしも、 $\Lambda^{[m]} < 0$ となる制約 m が存在する場合には、 $\langle G^{[m]}\nu, \Delta s V^{[m]} \rangle$ に十分大きな値 $M_0 > 0$ を乗じた上で、式 (24) を解く。 q 回繰り返しても $\{\Lambda^{[m]} \geq 0\}_{m=1}^q$ が満たされない場合には異常終了する。また、等価な制約条件が存在する場合には制約汎関数の変動率行列 $\{\langle G^{[i]}\nu, \Delta s V^{[j]} \rangle\}_{ij}$ が特異となる。その判定のために、行列の固有値を計算し、最小固有値 = 0、あるいは条件数 = 最大固有値 / 最小固有値 が十分大きな値となったときに特異と判定する。その場合には、アクティブな不等式制約 m ($\langle G^{[m]}\nu, \Delta s V^{[0]} \rangle + J^{[m]}(\Omega) \geq 0$) の中から一つを選び、それをインアクティブにしたときに (対角成分 $\langle G^{[m]}\nu, \Delta s V^{[m]} \rangle$) に十分大きな値 $M_0 > 0$ を乗ずること 特異性がなくなるかを判定し、特異性がなくなったら次のステップに進む。特異性がなくならない場合には異常終了する。

- (v) 形状変動増分 Δs を次のように決定する。形状変動速度を $V = V^{[0]} + \sum_{m=1}^q \Lambda^{[m]} V^{[m]}$ として、領域 Ω を写像 $I + \Delta s V : \Omega \mapsto \Omega_{\Delta s}$ (I は恒等写像) によって領域 $\Omega_{\Delta s}$ に、仮に、更新する。このときの形状変動速度 $V(x)$ の $x \in \Omega$ における絶対値最大主ひずみを $\varepsilon^P(V(x))$ と表すことにすると、その最大値が制限値 ε_0 を超えない次式の条件で Δs を決定する (形状変動の最大主ひずみが形状変動が定義された関数空間 $(W^{1,\infty}(\Omega))^n$ のセミノルムに相当することに基づく。実際には $\varepsilon_0 = 0.3$ 程度を超えない範囲で設定する)。

$$\Delta s = \frac{\varepsilon_0}{\max_{x \in \Omega} |\varepsilon^P(V(x))|} \quad (25)$$

- (vi) 領域 Ω に対して不等式制約 $\{J^{[m]}(\Omega) \leq 0\}_{m=1}^q$ が満たされている場合にはステップ (viii) に進む。もしも、満たされていない場合は、形状変動増分 Δs と制約汎関数の値 $\{J^{[m]}(\Omega)\}_{m=1}^q$ を用いて Lagrange 乗数 $\{\Lambda^{[m]}\}_{m=1}^q$ を式 (24) で決定する。ただし、ステップ (iv) と同様、制約がインアクティブ ($\langle G^{[m]}\nu, \Delta s V^{[0]} \rangle + J^{[m]}(\Omega) < 0$) となる m 番目の対角成分 $\langle G^{[m]}\nu, \Delta s V^{[m]} \rangle$ には十分大きな値 $M_0 > 0$ を乗じた上で、 $\{\Lambda^{[m]} \geq 0\}_{m=1}^q$ となるまで式 (24) の計算を繰り返す。

- (vii) 形状変動増分 Δs と Lagrange 乗数 $\{\Lambda^{[m]}\}_{m=1}^q$ を用いて、形状変動速度を $V = V^{[0]} + \sum_{m=1}^q \Lambda^{[m]} V^{[m]}$ として、次式で Δs を更新し、領域 Ω を写像 $I + \Delta s V : \Omega \mapsto \Omega_{\Delta s}$ によって $\Omega_{\Delta s}$ に更新する。

$$\min \left\{ \frac{\varepsilon_0}{\max_{x \in \Omega} |\varepsilon^P(V(x))|}, \Delta s \right\} \mapsto \Delta s \quad (26)$$

- (viii) 変動後の領域 $\Omega_{\Delta s}$ に対して、状態方程式を解き、目的汎関数 $J^{[0]}(\Omega_{\Delta s})$ と制約汎関数 $\{J^{[m]}(\Omega_{\Delta s})\}_{m=1}^q$ を計算する。

- (ix) 形状変動増分 Δs の適切性を目的汎関数 $J^{[0]}(\Omega_{\Delta s})$ とアクティブ ($\Lambda^{[m]} > 0$) 制約汎関数 $J^{[m]}(\Omega_{\Delta s})$ の非線形性に対する Armijo の規準⁽⁵⁾ で判定する (同一勾配の 2 次関数が極値を超えない条件)。

$$J^{[m]}(\Omega_{\Delta s}) - J^{[m]}(\Omega) < \frac{1}{2} \langle G^{[m]}\nu, \Delta s V \rangle \quad (27)$$

式 (27) が満たされていれば次のステップに進む。一つでも満たされていない場合には、 Δs を半減させた上で、ステップ (vi) に戻る。ただし、この計算を繰り返しても収束しないと判断された場合には異常終了する。

- (x) 変動後の領域 $\Omega_{\Delta s}$ に対して、不等式制約 $\{J^{[m]}(\Omega_{\Delta s}) \leq 0\}_{m=1}^q$ が満たされているか判定する。すべての不等式制約条件が満たされる場合には、領域 $\Omega_{\Delta s}$ を Ω に更新し、一回の正則な形状変動を終了する。さらに、目的汎関数の変動率に基

づく収束判定や繰り返し数による終了判定を行う。継続する場合にはステップ(ii)に戻る。一つでも不等式制約条件が満たされていない場合には、領域 Ω_{Δ} を Ω に更新し、ステップ(ii)に進む。ただし、正則な形状変動に達するまでは、 $V^{[0]} = 0$ とおき(式(23)の計算は不要となる)、ステップ(iv)と(v)をスキップする。この計算を繰り返しても正則な形状変動に達しない場合には異常終了する。

6. 解析例

このアルゴリズムの有効性を検討するために、有限要素法を用いた形状最適化プログラムを開発し、図1のような片持ち曲りはり状線形弾性体を解析対象に選んで、形状最適化解析を行った。解析モデルには5種類の外力がそれぞれ独立に作用すると仮定し、それぞれの平均コンプライアンスを初期形状のときの値以下に制限した下で体積を最小化問題を想定した。形状を更新する際は、左側端面は法線方向の変動を拘束し、5種類の外力が作用した部分境界は固定した。

図2に最適化された形状を示す。また、図3に収束履歴を示す。これらの結果、外力3, 4, 5 (Force 3, 4 and 5)に対する平均コンプライアンス (Mean compliance 3, 4 and 5) はインアクティブとなったが、良好な収束履歴が得られた。

7. まとめ

本論文では、形状最適化問題における多制約問題を効率的に解くためのアルゴリズムを提案した。多制約問題にLagrange乗数法を適用する場合、Lagrange乗数はKuhn-Tucker条件で決定される。Kuhn-Tucker条件はインアクティブとなる不等式制約のLagrange乗数を零にすることを要求する。本論文では、Lagrange乗数を零とする代わりに形状勾配行列の対角項に十分大きな値を乗ずるアルゴリズムを提案した。そのアルゴリズムで複数の平均コンプライアンス制約付体積最小化問題を解析した結果、良好な収束結果を得た。

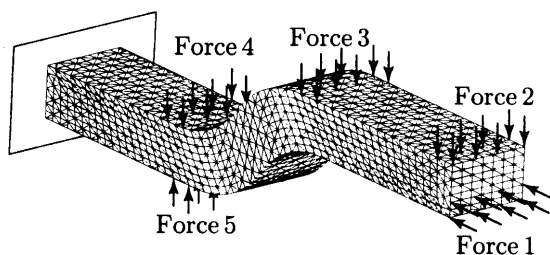


Fig. 1 解析モデル (初期形状と5つの負荷ケース)

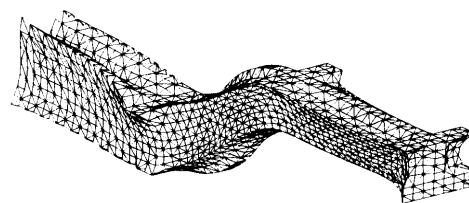


Fig. 2 最適化された形状

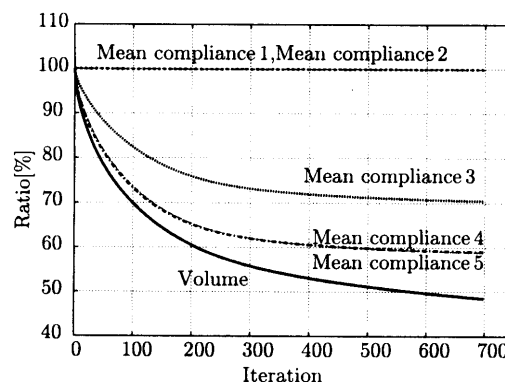


Fig. 3 収束履歴

文 献

- (1) 畔上秀幸. 領域最適化問題の一解法. 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 60, No. 574, pp. 1479-1486, 6 1994.
- (2) 畔上秀幸, 呉志强. 線形弾性問題における領域最適化解析 (法法によるアプローチ). 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 60, No. 578, pp. 2312-2318, 10 1994.
- (3) H. Azegami, S. Kaizu, M. Shimoda, and E. Katamine. Irregularity of shape optimization problems and an improvement technique. In S. Hernandez and C. A. Brebbia, editors, *Computer Aided Optimization Design of Structures V*, pp. 309-326. Computational Mechanics Publications, Southampton, 9 1997.
- (4) H. Azegami. Solution to boundary shape identification problems in elliptic boundary value problems using shape derivatives. In M. Tanaka and G. S. Dulikravich, editors, *Inverse Problems in Engineering Mechanics II*, pp. 277-284. Elsevier, Tokyo, 12 2000.
- (5) L. Armijo. Minimization of functions having lipschitz-continuous first partial derivatives. *Pacific Journal of Mathematics*, Vol. 16, pp. 1-3, 1966.