

## 603 板・シェル構造の固有振動問題に対する形状最適化の数値解法

Solution to Shape Optimization for Natural Vibration Problem of Plate and Shell Structures

○ 正 下田 昌利 (湘南工科大)

正 畔上 秀幸 (豊橋技科大)

辻 二郎 (三菱自動車エンジニアリング)

神田 康宏 (MMCコンピュータリサーチ)

Masatoshi SHIMODA, Shonan Institute of Technology, 1-1-25 Nishikaigan Tsujido Fujisawa  
 Hideyuki AZEGAMI, Toyohashi University of Technology  
 Jiro TSUJI, Mitsubishi Automotive Engineering Corp.  
 Yasuhiro KANDA, MMC Computer Research Ltd.

Key Words: Optimum Design, Numerical Analysis, Finite Element Method, Shell, Traction Method

## 1. はじめに

任意の曲率を有し、外力に対して膜応力と曲げ応力で荷重を受け持つ曲面構造体(シェル構造)は自動車、船舶、航空機、建築構造、压力容器等に基本構造として幅広く用いられており、その振動、騒音対策は設計上、必須である。既報ではそのシェルや板構造に対して、剛性問題<sup>(1)</sup>と強度問題<sup>(2)</sup>に対する形状最適化の解法を示した。本報では指定した固有振動モードの振動固有値を体積制約下で最小化する問題に対する解法を示す。なお、シェルの形状を決定する設計変数は、既報同様、境界の面内方向の変動のみとした。また、状態変数を求めるためのシェルの有限要素解析には膜要素と曲げ要素を組み合わせた平面要素を用いた。板曲げに関する理論についてはMindlin-Reissnerの理論を用い、簡単のため、膜力と曲げ力の連成は考慮しないこととした。

問題の定式化に続き、物質導関数法とラグランジュ乗数法を用いて、感度関数(形状勾配関数)を導出し、著者らがこれまで開発してきたノンパラメトリックな形状最適化手法の力法<sup>(3)</sup>により、最適形状を求めた。なお、多重モードについては、重根制約を付加することにより特異性を回避する方法も示されているが<sup>(4)</sup>、ここでは簡単のため、指定したモードの追跡を行い、多重モードの場合はどちらかを選択することにより、重根問題を回避することとした。

## 2. シェルの変分固有振動方程式

有界な領域  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  を占める次のような区分的に板状の線形弾性体を考える。

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, x_2) \in A \subset \mathbb{R}^2, x_3 \in (-h/2, h/2)\} \quad (1)$$

ここで、領域  $A$  の境界を  $S$ 、板厚を  $h$  とする。また、板の中心面の位置を与える局所座標系  $(x_1, x_2, 0)$  から全体座標系  $(X_1, X_2, X_3)$  への写像  $\phi: (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{R}^3$  は区分的に滑らかであるとする。局所座標で表した変位  $u = \{u_i\}_{i=1,2,3}$  を面内方向変位  $\{u_\alpha\}_{\alpha=1,2}$  と面外方向変位  $u_3$  に分けて考える。なお、ギリシャ文字の下添字は  $\alpha=1,2$  を表すこととし、テンソルの添字表記においては  $\alpha=1,2$  に関して総和規約と空間座標に関する偏微分表記法を使用する。Mindlin-Reissnerの理論では変位について次の条件が仮定される。

$$u_\alpha(x_1, x_2, x_3) \equiv u_{0\alpha}(x_1, x_2) - x_3 \theta_\alpha(x_1, x_2) \quad (2)$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) \equiv w(x_1, x_2) \quad (3)$$

なお、 $\{u_{0\alpha}\}_{\alpha=1,2}, w, \{\theta_\alpha\}_{\alpha=1,2}$  はそれぞれ板中心面の面内変位、面外変位と回転角を表す。

ここで、拘束条件を次のように定義する。境界  $S$  では境界に対する面内の外向き単位法線を局所座標系  $(x_1, x_2)$  に対して  $\nu = \{\nu_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ 、単位接線を  $\nu^\perp = \{\nu_\alpha^\perp\}_{\alpha=1,2}$  と表す時、部分境界  $S_{w,\nu} \subset S$  において面内変位  $u_0$  の法線成分が拘束され  $(u_0 \cdot \nu = 0)$ 、部分境界  $S_{w,\nu^\perp} \subset S$  では接線成分が拘束  $(u_0 \cdot \nu^\perp = 0)$  されているとする。同様に、部分境界  $S_w \subset S$  では  $w = 0$ 、 $S_{\theta,\nu} \subset S$  では  $\theta \cdot \nu = 0$ 、 $S_{\theta,\nu^\perp} \subset S$  では  $\theta \cdot \nu^\perp = 0$  の拘束が与えられているとする。この時、 $(u_0, w, \theta) \in U$  に関する固有振動方程式の変分形式(弱形式)は次式のように表される。

$$a((u_{0(r)}, w_{(r)}, \theta_{(r)}), (\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})) = \lambda_{(r)} b((u_{0(r)}, w_{(r)}, \theta_{(r)}), (\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})), \quad \forall (\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta}) \in U. \quad (4)$$

ただし、 $(\cdot)$  は変分を表す。また、双一次形式  $a(\cdot, \cdot)$ 、及び一次形式  $l(\cdot)$  をそれぞれ以下のように定義する。

$$a((u_0, w, \theta), (\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})) = \int_A \{c_{\alpha\beta\gamma\delta}^B \theta_{(\gamma,\delta)} \bar{\theta}_{(\alpha,\beta)} + kc_{\alpha\beta}^S (w_{,\beta} - \theta_{,\beta})(\bar{w} - \bar{\theta}_\alpha) + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^M u_{0\gamma,\delta} \bar{u}_{0\alpha,\beta}\} dA \quad (5)$$

$$b((u_0, w, \theta), (\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})) = \rho \int_A \{h(w\bar{w} + u_{0\alpha} \bar{u}_{0\alpha}) + I \theta_\alpha \bar{\theta}_\alpha\} dA \quad (6)$$

ここで、 $\{c_{\alpha\beta\gamma\delta}^B\}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1,2}$ 、 $\{c_{\alpha\beta}^S\}_{\alpha,\beta=1,2}$ 、 $\{c_{\alpha\beta\gamma\delta}^M\}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1,2}$  はそれぞれ板の曲げ、せん断、膜力(平面応力)に関する剛性テンソルを表す。 $k$  はせん断補正係数を、 $\rho$  は密度を、 $I = h^3/12$  は断面の慣性モーメントを表す。また、 $\{k_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,2}$  は曲率を表し、次式で定義される。

$$k_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\theta_{\alpha,\beta} + \theta_{\beta,\alpha}) \equiv \theta_{(\alpha,\beta)} \quad (7)$$

なお、式(4)中の  $U$  は次式で与えられる。

$$U = \{(u_{01}, u_{02}, w, \theta_1, \theta_2) \in (H^1(A))^5 \mid u_0 \cdot \nu = 0 \text{ on } S_{w,\nu}, u_0 \cdot \nu^\perp = 0 \text{ on } S_{w,\nu^\perp}, \theta \cdot \nu = 0 \text{ on } S_{\theta,\nu}, \theta \cdot \nu^\perp = 0 \text{ on } S_{\theta,\nu^\perp}, w = 0 \text{ on } S_w\} \quad (8)$$

## 3. 形状最適化問題の定式化と解法

図1のように初期領域  $A$ 、境界  $S$  のシェルがシェル面内で変動して領域  $A_s$ 、境界  $S_s$  となるものと仮定する。このときの領域変動は  $(x_1, x_2) \in A$  から  $(x_{s1}, x_{s2}) \in A_s$  への写像の1媒介変数族  $T_s: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ ,  $0 \leq s \leq \varepsilon$  ( $\varepsilon$  は小さな正数)で表現できる<sup>(3)</sup>。 $s$  は領域の変動履歴を表す。体積および固有振動方程式(4)を制約条件とし、 $r$  次の固有振動モードに対する振動固有値  $\lambda_{(r)}$  の最大化( $-\lambda_{(r)}$  の最小化)を目的とする分布系(ノンパラメトリック)の形状最適化問題は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} & \text{Find } A \text{ (or } \bar{V}) & (9) \\ & \text{that minimize } -\lambda_{(r)} & (10) \\ & \text{subject to Eq.(4),} & (11) \\ & M(= \int_A h dA) \leq \hat{M}. & (12) \end{aligned}$$

ここで、 $M, \hat{M}$  はそれぞれ体積とその制約値を表す。また、モード追跡には以下のようなモード評価パラメータ  $t$  を用い、全てのモードの内、初期に指定したモードに対して  $t$  が最大となるモードを追跡した。

$$\phi_0^T m_s \phi_s = t_s \quad (13)$$

ここで、 $\phi_s, m_s$  はそれぞれ  $s$  回目の繰返しでの  $(u_{0(r)}, w_{(r)}, \theta_{(r)})$  を自由度成分とする固有ベクトルの質量正規化ベクトル、質量マトリクスを表す。

この問題に対するラグランジュ汎関数  $L$  は  $\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta}, \Lambda$  をそれぞれ固有振動方程式と体積制約に対するラグランジュ乗数として次のように表される。

$$\begin{aligned} L((u_{0(r)}, w_{(r)}, \theta_{(r)}), (\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta}), \Lambda) = & -\lambda_{(r)} \\ & + \lambda_{(r)} b((u_{0(r)}, w_{(r)}, \theta_{(r)}), (\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})) - a((u_{0(r)}, w_{(r)}, \theta_{(r)}), (\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})) \\ & + \Lambda(M - \hat{M}) \quad (14) \end{aligned}$$

ラグランジュ汎関数  $L$  の領域変動に対する導関数  $\dot{L}$  は次式のように表される。

$$\begin{aligned} \dot{L} = & -a((u'_{0(r)}, w'_{(r)}, \theta'_{(r)}), (\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})) + \lambda_{(r)} b((u'_{0(r)}, w'_{(r)}, \theta'_{(r)}), (\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})) \\ & - a((u_{0(r)}, w_{(r)}, \theta_{(r)}), (\bar{u}'_0, \bar{w}', \bar{\theta}')) + \lambda_{(r)} b((u_{0(r)}, w_{(r)}, \theta_{(r)}), (\bar{u}'_0, \bar{w}', \bar{\theta}')) \\ & + \dot{\lambda}_{(r)} [b((u_{0(r)}, w_{(r)}, \theta_{(r)}), (\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})) - 1] + \Lambda'(M - \hat{M}) \\ & + \int_S G v_i V_i ds \quad (15) \end{aligned}$$

ただし、 $V(x) = \partial T_s / \partial s(T_s^{-1}(x))$ ,  $x \in A_s$  は領域変動  $s$  に対する速度場を表す。また、 $(\cdot)'$  は形状導関数、 $(\cdot)$  は物質導関数を表す<sup>(3)</sup>。感度関数の形状勾配密度関数  $G$  は次式となる。

$$\begin{aligned} G = & -c_{\alpha\beta\gamma\delta}^B \theta_{(\gamma,\delta)} \bar{\theta}_{(\alpha,\beta)} - k c_{\alpha\beta}^S (w_{(r),\beta} - \theta_{(r),\beta})(\bar{w}_{,\alpha} - \bar{\theta}_{,\alpha}) \\ & - c_{\alpha\beta\gamma\delta}^M u_{0(r),\gamma} \bar{u}_{0\alpha,\beta} + \lambda_{(r)} \rho \{ h(w_{(r)} \bar{w} + u_{0(r)\alpha} \bar{u}_{0\alpha}) + I \theta_{(r)\alpha} \bar{\theta}_{,\alpha} \} + \Lambda \quad (16) \end{aligned}$$

$G$  はラグランジュ汎関数  $L$  の停留条件から導出される状態方程式 (17) と随伴方程式 (18) には自己随伴関係  $(u_{0(r)}, w_{(r)}, \theta_{(r)}) = (\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})$  が成立するため、式 (18) のみ解くことにより、形状勾配関数を求めることができる。

$$\begin{aligned} a((u_{0(r)}, w_{(r)}, \theta_{(r)}), (\bar{u}'_0, \bar{w}', \bar{\theta}')) = & \lambda_{(r)} b((u_{0(r)}, w_{(r)}, \theta_{(r)}), (\bar{u}'_0, \bar{w}', \bar{\theta}')), \\ \forall (\bar{u}'_0, \bar{w}', \bar{\theta}')) \in U \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a((u'_{0(r)}, w'_{(r)}, \theta'_{(r)}), (\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})) = & \lambda_{(r)} b((u'_{0(r)}, w'_{(r)}, \theta'_{(r)}), (\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})), \\ \forall (u'_{0(r)}, w'_{(r)}, \theta'_{(r)}) \in U \quad (18) \end{aligned}$$

形状勾配関数が導出されれば力法の適用が可能となる。詳細は文献<sup>(3)</sup>に譲るが、 $-G$  に比例した境界力を設計境界に与えることにより、領域変動量が求められる。なお、曲率保持のため、シェル の面外法線方向への変動を拘束し、面内方向の変動量を求め、その変動量を形状更新に用いた。

#### 4. 数値解析結果

本手法のシェルと板構造への適用例として、球面から切り出した四辺形シェルに対する計算結果を図2 (初期形状

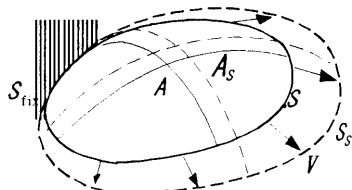


Fig.1 In-plane shape variation by  $V$

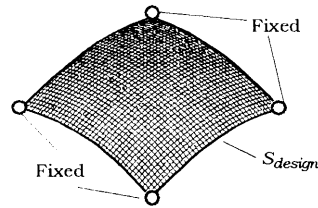
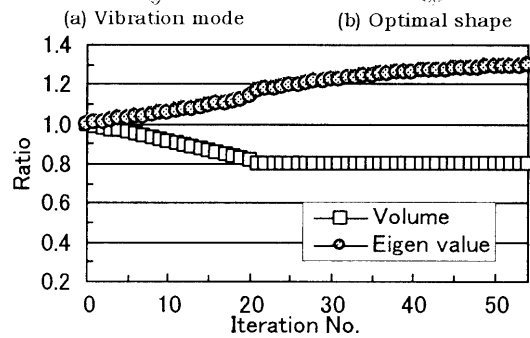
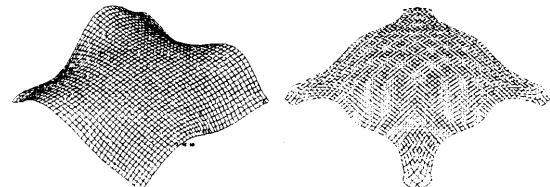
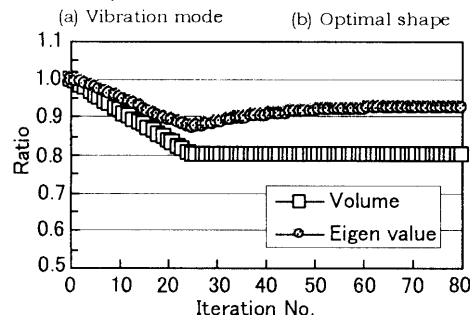
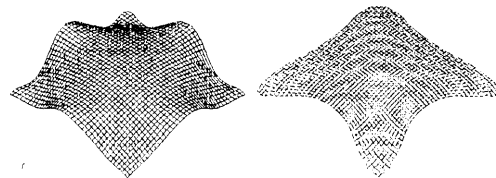


Fig.2 Optimization problem of quadratic shell with clamped corners



(c) Iteration histories

Fig.3 Optimization of quadratic shell with clamped corners (3rd. eigen mode,  $\hat{M} = 0.8M_{init}$ )



(c) Iteration Histories

Fig.4 Optimization of quadratic shell with clamped corners (4th. eigen mode,  $\hat{M} = 0.8M_{init}$ )

と問題設定)、図3 (3次モード)、及び図4 (4次モード) に示す。体積を初期の80%とする制約条件を満たしながら、振動固有値を最大化した収束形状が得られ、板・シェルの固有振動問題に対する本数値解法の有効性が確認できた。

#### 参考文献

- [1] 下田, 畔上, 辻, 神田, 機講論, No.01-10, (2001).
- [2] 下田, 畔上, 辻, 神田, 機講論, No.014-2, (2002).
- [3] 畔上, 機論, 60-574, A(1994).
- [4] 畔上, 須貝, 下田, 機論, 66-647, A(2000).