

# 板・シェル構造の強度問題のための形状最適化の数値解法 (面内変動による形状設計)

## Solution to Shape Optimization for Strength Problems of Plate and Shell Structures (Shape Design by In-plane Variation)

○正 下田 昌利 (三菱自動車)

正 畔上 秀幸 (豊橋技科大)

辻 二郎 (三菱自動車エンジニアリング)

神田 康宏 (MMCコンピュータリサーチ)

Masatoshi SHIMODA, Shonan Institute of Technology, 1-1-25 Nishikaigan Tsujido Fujisawa

Hideyuki AZEGAMI, Toyohashi University of Technology

Jiro TSUJI, Mitsubishi Automotive Engineering Corp.

Yasuhiro KANDA, MMC Computer Research Ltd.

**Key Words:** Optimum Design, Numerical Analysis, Finite Element Method, Shell, Traction Method

## 1. はじめに

外力に対して膜応力と曲げ応力で荷重を受け持つシェル構造は自動車、船体、機体、建築構造、容器等に基本構造として幅広く用いられており、その強度確保は設計上の必須条件である。既報<sup>(1)</sup>ではそのシェルや板構造に対して、剛性問題に対する形状最適化の解法を示した。本報では最大応力を最小化する強度問題に対する解法を示す。なお、シェルの形状を決定する設計変数は、既報同様、境界の面内方向の変動のみとした。また、状態変数を求めるためのシェルの有限要素解析には膜要素と曲げ要素を組み合わせた平面要素を用いた。板曲げに関する理論についてはMindlin-Reissnerの理論を用い、膜力と曲げ力の連成は考慮しないこととした。

目的関数を最大応力とした場合に生じる特異性の回避は既報同様<sup>(2)</sup>、KS関数による変換を行い、体積制約を付加して最適化問題として定式化した。物質導関数法とラグランジュ乗数法を用いて、感度関数(形状勾配関数)を導出し、著者らがこれまで開発してきたノンパラメトリックな形状最適化手法の力法<sup>(3)</sup>により、最適形状を求めた。

## 2. シェルの変分方程式

有界な領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を占める次のような区分的に板状の線形弾性体を考える。

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, x_2) \in A \subset \mathbb{R}^2, x_3 \in (-h/2, h/2)\} \quad (1)$$

ここで、領域 $A$ の境界を $S$ 、板厚を $h$ とする。また、板の中心面の位置を与える局所座標系 $(x_1, x_2, 0)$ から全体座標系 $(X_1, X_2, X_3)$ への写像 $\phi: (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{R}^3$ は区分的に滑らかであるとする。局所座標で表した変位 $\mathbf{u} = \{u_i\}_{i=1,2,3}$ を面内方向変位 $\{u_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ と面外方向変位 $u_3$ に分けて考える。なお、ギリシャ文字の下添字は $\alpha=1,2$ を表すこととし、テンソルの添字表記においては $\alpha=1,2$ に関して総和規約と空間座標に関する偏微分表記法を使用する。Mindlin-Reissnerの理論では変位について次の条件が仮定される。

$$u_\alpha(x_1, x_2, x_3) \equiv u_{0\alpha}(x_1, x_2) - x_3 \theta_\alpha(x_1, x_2) \quad (2)$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) \equiv w(x_1, x_2) \quad (3)$$

なお、 $\{u_{0\alpha}\}_{\alpha=1,2}$ ,  $w$ ,  $\{\theta_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ はそれぞれ板中心面の面内変位、面外変位と回転角を表す。

ここで、境界条件を次のように定義する。領域 $A$ には面外荷重 $q$ が作用する。境界 $S$ では境界に対する面内の外向き単位法線を局所座標系 $(x_1, x_2)$ に対して $\mathbf{v} = \{v_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ 、単位接線

を $\mathbf{v}^\perp = \{v_\alpha^\perp\}_{\alpha=1,2}$ と表す時、部分境界 $S_{u_0} \subset S$ において面内変位 $\mathbf{u}_0$ の法線成分が拘束され( $\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v} = 0$ )、残りの境界 $S \setminus S_{u_0}$ では単位長さ当たりの面内力 $\mathbf{N} = \{N_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ の法線方向成分 $\mathbf{N} \cdot \mathbf{v}$ が与えられているとする。部分境界 $S_{u_0^\perp} \subset S$ では $\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v}^\perp = 0$ 、 $S \setminus S_{u_0^\perp}$ では $\mathbf{N} \cdot \mathbf{v}^\perp$ が与えられているとする。同様に、部分境界 $S_w \subset S$ では $w = 0$ 、残りの境界 $S \setminus S_w$ では単位長さ当たりのせん断力 $Q$ が与えられているとする。部分境界 $S_{\theta} \subset S$ では $\theta \cdot \mathbf{v} = 0$ 、残りの境界 $S \setminus S_{\theta}$ では単位長さ当たりの曲げモーメント $\mathbf{M} = \{M_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ の法線成分 $\mathbf{M} \cdot \mathbf{v}$ が与えられているとする。部分境界 $S_{\theta^\perp} \subset S$ では $\theta \cdot \mathbf{v}^\perp = 0$ 、残りの境界 $S \setminus S_{\theta^\perp}$ では $\mathbf{M} \cdot \mathbf{v}^\perp$ が与えられているとする。この時、 $(\mathbf{u}_0, w, \theta) \in U$ に関する平衡方程式の弱形式は次式のように表される。

$$a((\mathbf{u}_0, w, \theta), (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{w}, \bar{\theta})) = l((\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{w}, \bar{\theta})), \quad \forall (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{w}, \bar{\theta}) \in U \quad (4)$$

ただし、 $(\cdot)$ は変分を表す。また、双一次形式 $a(\cdot)$ 、及び一次形式 $l(\cdot)$ をそれぞれ以下のように定義する。

$$a((\mathbf{u}_0, w, \theta), (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{w}, \bar{\theta})) = \int_A \{c_{\alpha\beta\gamma\delta}^B \theta_{(\gamma,\delta)} \bar{\theta}_{(\alpha,\beta)} + kc_{\alpha\beta}^S (\theta_\beta - w_{,\beta})(\bar{\theta}_\alpha - \bar{w}_{,\alpha}) + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^M u_{0\gamma,\delta} \bar{u}_{0\alpha,\beta}\} dA \quad (5)$$

$$l((\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{w}, \bar{\theta})) = \int_A q \bar{w} dA + \int_S (N_\alpha \bar{u}_0 ds + M_\alpha \bar{\theta}_\alpha + Q \bar{w}) dS \quad (6)$$

ここで、 $\{c_{\alpha\beta\gamma\delta}^B\}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1,2}$ 、 $\{c_{\alpha\beta}^S\}_{\alpha,\beta=1,2}$ 、 $\{c_{\alpha\beta\gamma\delta}^M\}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1,2}$ はそれぞれ曲げ、せん断、膜力(平面応力)に関する剛性テンソルを表す。 $k$ はせん断補正係数を表す。また、 $\{\kappa_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,2}$ は曲率を表し、次式で定義される。

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\theta_{\alpha,\beta} + \theta_{\beta,\alpha}) \equiv \theta_{(\alpha,\beta)} \quad (7)$$

なお、式(4)中の $U$ は次式で与えられる。

$$U = \{(u_{01}, u_{02}, w, \theta_1, \theta_2) \in (H^1(A))^5 \mid \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ on } S_{u_0}, \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v}^\perp = 0 \text{ on } S_{u_0^\perp}, \theta \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ on } S_\theta, \theta \cdot \mathbf{v}^\perp = 0 \text{ on } S_{\theta^\perp}, w = 0 \text{ on } S_w\} \quad (8)$$

## 3. 形状最適化問題の定式化と解法

図1のように初期領域 $A$ 、境界 $S$ のシェルがシェル面内で変動して領域 $A_s$ 、境界 $S_s$ となるものと仮定する。このときの領域変動は $(x_1, x_2) \in A$ から $(x_{s1}, x_{s2}) \in A_s$ への写像の1媒介変数族 $T_s: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ ,  $0 \leq s \leq \varepsilon$  ( $\varepsilon$ は小さな正数)で表現できる<sup>(3)</sup>。 $s$ は領域の変動履歴を表す。体積および状態方程

式(4)を制約条件とし、ミーゼス応力 $\sigma_M$ のシェル表裏での最大値の最小化を目的とする分布系（ノンパラメトリック）の形状最適化問題は次のように表すことができる。

$$\text{Find } A \quad (9)$$

$$\text{that minimize } \max_{x \in A} \max_{m=\text{top, bottom}} \frac{\sigma_M^{(m)}(x)}{\sigma_a} \quad (10)$$

$$\text{subject to Eq.(4),} \quad (11)$$

$$M(=\int_A h dA) \leq \hat{M}. \quad (12)$$

ここで、 $M, \hat{M}$ はそれぞれ体積とその制約値、 $\sigma_a$ は規準化のための定数を表す。

応力のMinmax問題にはその局所性に基づく特異性と微分不可能の問題が潜在しているため、式(10)の局所目的汎関数の感度を直接求めることは理論上困難である。そのため、式(10)の目的関数をKS関数を用いて、次のように滑らかで微分可能な積分汎関数へ変換する。

$$\max_{x \in A} \max_{m=\text{top, bottom}} \frac{\sigma_M^{(m)}(x)}{\sigma_a} \Rightarrow \frac{1}{\rho} \ln \int_A \left\{ \sum_m \exp\left(\frac{\sigma_M^{(m)}(x)}{\sigma_a} \rho\right) \right\} dA \quad (13)$$

この問題に対するラグランジュ汎関数 $L$ は $\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta}, \Lambda$ をそれぞれ状態方程式と体積制約に対するラグランジュ乗数として次のように表される。

$$L(u_0, w, \theta, \bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta}, \Lambda) = \frac{1}{\rho} \ln \int_A \left\{ \sum_m \exp\left(\frac{\sigma_M^{(m)}}{\sigma_a} \rho\right) \right\} dA + l((\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})) - a((u_0, w, \theta), (\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})) + \Lambda(M - \hat{M}) \quad (14)$$

簡単のため、荷重の作用する境界は法線方向には変動しないこと、及び面外力 $q$ の作用領域は変動しないことを仮定すると、ラグランジュ汎関数の領域変動に対する導関数 $\dot{L}$ は次式のように表される。

$$\dot{L} = \frac{1}{\sigma_a B} \int_A \sum_m \exp\left(\frac{\sigma_M^{(m)}}{\sigma_a} \rho\right) \frac{\partial \sigma_M^{(m)}}{\partial \sigma_{ij}} \sigma'_{ij} dA - a((u'_0, w', \theta'), (\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})) + l((\bar{u}'_0, \bar{w}', \bar{\theta}')) - a((u_0, w, \theta), (\bar{u}'_0, \bar{w}', \bar{\theta}')) + \Lambda'(M - \hat{M}) + \int_S G v_i v_i ds \quad (15)$$

$$B = \int_A \sum_m \exp(\sigma_M^{(m)} / \sigma_a) \rho dA \quad (16)$$

ただし、 $V(x) = \partial T_s / \partial s(T_s^{-1}(x))$ 、 $x \in A_s$ は領域変動 $s$ に対する速度場を表す。また、 $(\cdot)'$ は形状導関数、 $(\cdot)$ は物質導関数を表す<sup>(3)</sup>。感度関数の形状勾配密度関数 $G$ は次式となる。

$$G = -c_{\alpha\beta\gamma\delta}^B \theta_{(\gamma, \delta)} \bar{\theta}_{(\alpha, \beta)} - kc_{\alpha\beta}^S (w_{,\beta} - \theta_{,\beta}) (\bar{w}_{,\alpha} - \bar{\theta}_{,\alpha}) + \frac{1}{\rho B} \sum_m \exp\left(\frac{\sigma_M^{(m)}}{\sigma_a} \rho\right) + \Lambda \quad (17)$$

$G$ はラグランジュ汎関数 $L$ の停留条件から導出される状態方程式(18)と随伴方程式(19)を解き<sup>(2)</sup>、状態変数 $(u_0, w, \theta)$ と随伴変数 $(\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})$ を求めることにより決定できる。

$$a((u_0, w, \theta), (\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})) = l((\bar{u}'_0, \bar{w}', \bar{\theta}')), \forall (\bar{u}'_0, \bar{w}', \bar{\theta}') \in U \quad (18)$$

$$a((u'_0, w', \theta'), (\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})) = \frac{1}{\sigma_a B} \int_A \sum_m \exp\left(\frac{\sigma_M^{(m)}}{\sigma_a} \rho\right) \frac{\partial \sigma_M^{(m)}}{\partial \sigma_{ij}} \sigma'_{ij} dA, \forall (u'_0, w', \theta') \in U \quad (19)$$

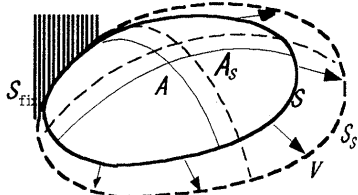


Fig. 1 In-plane shape variation by  $V$

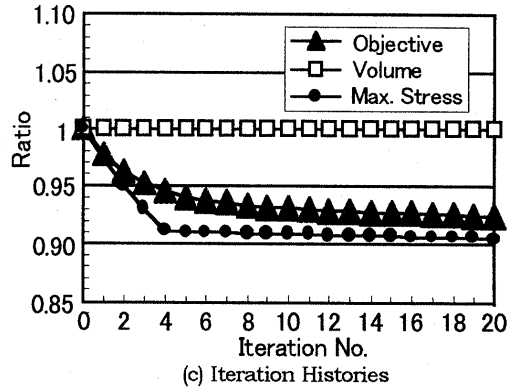
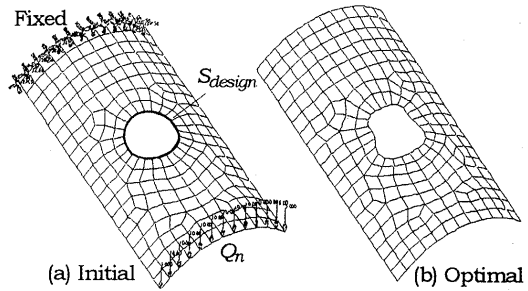


Fig. 2 Optimization of cylindrical shell with a clamped edge under distributed load ( $\hat{M} = M_{init}$ )

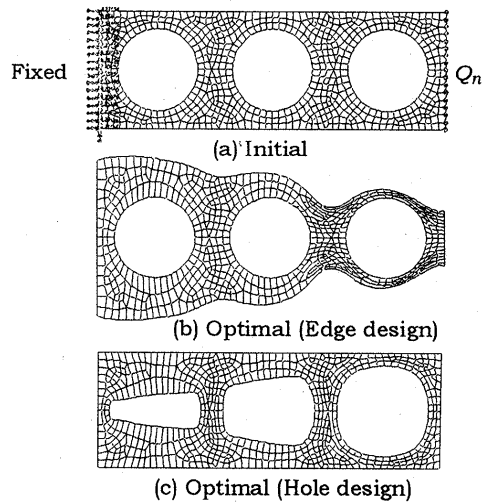


Fig. 3 Optimization of plate with a clamped edge under distributed load ( $\hat{M} = M_{init}$ )

形状勾配関数が導出されれば手法の適用が可能となる。詳細は文献<sup>(3)</sup>に譲るが、 $-G$ に比例した境界力を設計境界に与えることにより、領域変動量が求められる。今回のシェル問題の場合、シェルの面外法線方向への変動を拘束し、面内法線方向の変動量を求め、形状更新を行った。

#### 4. 数値解析結果

本手法のシェルと板構造への適用例として面外せん断荷重に対する結果をそれぞれ図2、図3に示す。シェル、板の強度問題に対して、それぞれ収束形状が得られ、本数値解法の有効性が確認できた。

#### 参考文献

- [1] 下田, 畔上, 辻, 神田, 桜井, 機講論, No.01-10, (2001).
- [2] 下田, 畔上, 桜井, 機論, 63-607, A (1997).
- [3] 畔上, 機論, 60-574, A (1994).