

226 板・シェル構造の面内変動による形状最適化の数値解法

Numerical Solution to Shape Optimization for Plate and Shell Structures
by In-plane Variation

○正 下田 昌利 (三菱自動車)

正 畔上 秀幸 (豊橋技科大)

辻 二郎 (三菱自動車エンジニアリング)

神田 康宏 (MMC コンピュータリサーチ)

Masatoshi SHIMODA, Mitsubishi Motors Corp., 1 Nakashinkiri Hashime-cho Okazaki
Hideyuki AZEGAMI, Toyohashi University of Technology
Jiro TSUJI, Mitsubishi Automotive Engineering Corp.
Yasuhiro KANDA, MMC Computer Research Ltd.

Key Words: Optimum Design, Numerical Analysis, Finite Element Method, Shell, Traction Method

1. はじめに

シェル構造は薄板を3次元的に加工して得られる構造体であり、自動車のボデーやシャシの基本構造として使用されている他、船体、機体、建築構造、容器等、その用途は極めて広い。シェル構造の主な力学的な特徴は負荷に対して膜応力と曲げ応力で抵抗することにある。本論文ではそのシェルや板構造に対する形状最適化の解法を示すことを目的とする。シェルの形状変動に関する仮定としては、シェル面を既定としてシェル面内での変形を許した場合、シェル面の法線方向への移動を許した場合、またはその組み合わせが考えられる。本論文では面内の変形に限定し、続報にて面外の変形を扱うこととする。

これまでのシェルの形状最適化に関する報告のほとんどは形状基底ベクトルや形状定義の関数を利用して設計変数を縮退させ、設計自由度を限定したパラメトリックな手法を基本としている⁽¹⁾。一方、著者らは境界形状を自由曲面として求めるノンパラメトリックな手法(力法⁽²⁾)を開発してきた⁽³⁾⁻⁽⁵⁾。

本論文では板・シェル構造形状最適化問題に対して、感度関数(形状勾配関数)の導出を含む力法に基づく解法を示す。目的汎関数としては外力仕事を表す平均コンプライアンスを例とした。状態変数を求めるためのシェル構造の有限要素解析には最も簡単な膜要素と曲げ要素を組み合わせた平面要素を用いた。板曲げに関する理論についてはMindlin-Reissnerの理論を用いた。

2. シェルの変分方程式

有界な領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を占める次のような区分的に板状の線形弾性体を考える。

$$\Omega = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \left| \begin{array}{l} (x_1, x_2) \in A \subset \mathbb{R}^2, \\ x_3 \in \left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right) \end{array} \right. \right\} \quad (1)$$

ここで、領域 A の境界を S 、板厚を h とする。また、板の中心面の位置を与える局所座標系 $(x_1, x_2, 0)$ から全体座標系 (X_1, X_2, X_3) への写像 $\phi: \mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto (X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{R}^3$ は区分的に滑らかであるとする。局所座標で表した変位 $u = \{u_i\}_{i=1,2,3}: \Omega \mapsto \mathbb{R}^3$ を面内変位 $\{u_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ と面外変位 u_3 に分けて考える。なお、ギリシャ文字の下添字は $\alpha = 1, 2$ を表すことにして、テンソルの添字表記においては $\alpha = 1, 2$ に関して総和規約と空間座標に関する偏微分表記法を使用する。Reissner-Mindlin の板理論では次の条件を仮定する。

$$(i) \sigma_{33} = 0$$

$$(ii) u_\alpha(x_1, x_2, x_3) \equiv u_{0\alpha}(x_1, x_2) + x_3\theta_\alpha(x_1, x_2)$$

$$(iii) u_3(x_1, x_2, x_3) \equiv w(x_1, x_2)$$

$\{\sigma_{ij}\}_{i,j=1,1,3}$ は局所座標系で表した応力である。これらの仮定によって、面内変位 $u_0 \equiv \{u_{0\alpha}\}_{\alpha=1,2}$ に対する平衡方程式と面外変位と断面の回転 $u_3, \theta \equiv \{\theta_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ に対する平衡方程式は独立になる。

境界条件を次のように定義する。領域 A では面外力 q が作用する。境界 S では、面内方向の境界に対する外向き単位法線を局所座標系 (x_1, x_2) に対して $\nu = \{\nu_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ 、単位接線を $\nu^\perp = \{\nu_\alpha^\perp\}_{\alpha=1,2}$ と表すことにするとき、部分境界 $S_{u_0\nu} \subset S$ において面内変位 u_0 の法線成分が拘束され $u_0 \cdot \nu = 0$ 、残りの境界 $S \setminus S_{u_0\nu}$ では、単位長さ当たりの面内力 $N = \{N_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ の法線成分 $N \cdot \nu$ が与えられていると仮定する。部分境界 $S_{u_0\nu^\perp} \subset S$ では $u_0 \cdot \nu^\perp = 0$ 、 $S \setminus S_{u_0\nu^\perp}$ では、 $N \cdot \nu^\perp$ が与えられていると仮定する。同様に、部分境界 $S_w \subset S$ では $w = 0$ 、残りの境界 $S \setminus S_w$ では、単位長さ当たりのせん断力 Q が与えられていると仮定する。部分境界 $S_{\theta\nu} \subset S$ では $\theta \cdot \nu = 0$ 、残りの境界 $S \setminus S_{\theta\nu}$ では、単位長さ当たりの曲げモーメント $M = \{M_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ の法線成分 $M \cdot \nu$ が与えられていると仮定する。部分境界 $S_{\theta\nu^\perp} \subset S$ では $\theta \cdot \nu^\perp = 0$ 、残りの境界 $S \setminus S_{\theta\nu^\perp}$ では、 $M \cdot \nu^\perp$ が与えられていると仮定する。

このとき、 $(u_0, w, \theta) \in U$ に関する平衡方程式の弱形式は次式で与えられる。

$$a((u_0, w, \theta), (\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})) = l((\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})) \quad \forall (\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta}) \in U \quad (2)$$

ただし、 $a(\cdot)$ と $l(\cdot)$ は次式で定義する。

$$\begin{aligned} a((u_0, w, \theta), (\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})) &= \int_A \{c_{\alpha\beta\gamma\delta}^B \theta_{(\gamma,\delta)} \bar{\theta}_{(\alpha,\beta)} + kc_{\alpha\beta}^S (w_{,\beta} + \theta_\beta)(\bar{w}_{,\alpha} + \bar{\theta}_\alpha) \\ &\quad + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^M u_{0\gamma,\delta} \bar{u}_{0\alpha,\beta}\} dA \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} l((\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})) &= \int_A q \bar{w} dA \\ &\quad + \int_S (N_\alpha \bar{u}_{0\alpha} + M_\alpha \bar{\theta}_\alpha + Q \bar{w}) dS \end{aligned} \quad (4)$$

$\{c_{\alpha\beta\gamma\delta}^B\}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1,2}$ 、 $\{c_{\alpha\beta}^S\}_{\alpha,\beta=1,2}$ 、 $\{c_{\alpha\beta\gamma\delta}^M\}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1,2}$ はそれぞれ曲げ、せん断、膜力(平面応力)に関する剛性テンソルを表す。 k はせん断補正係数を表す。また、 $\{\kappa_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,2}$ は曲率を表し、次式で定義する。

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\theta_{\alpha,\beta} + \theta_{\beta,\alpha}) \equiv \theta_{(\alpha,\beta)} \quad (5)$$

U は次式で与える.

$$U = \left\{ (u_{01}, u_{02}, w, \theta_1, \theta_2) \in (H^1(A))^5 \right. \\ \left. \begin{aligned} u_0 \cdot \nu &= 0 \text{ on } S_{u_0\nu}, u_0 \cdot \nu^\perp = 0 \text{ on } S_{u_0\nu^\perp}, \\ w &= 0 \text{ on } S_w, \theta \cdot \nu = 0 \text{ on } S_{\theta\nu}, \\ \theta \cdot \nu^\perp &= 0 \text{ on } S_{\theta\nu^\perp} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

なお、添字表示において総和規約と空間に関する偏微分表記法 $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial x_i$ を使用する. $H^m(\Omega)$ は m 階のソボレフ空間を表す.

3. 形状最適化問題の定式化と解法

初期領域 A , 境界 S のシェルがシェル面内で変動して, 領域 A_s , 境界 S_s となるものと仮定する. このときの領域変動は, シェル中心面の位置を与える区分的に滑らかな写像 $\phi: \mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto (X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{R}^3$ は既定として, $(x_1, x_2) \in A$ から $(x_{s1}, x_{s2}) \in A_s$ への写像の 1 媒介変数族 $T_s: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2, 0 \leq s < \epsilon$ (ϵ は小さな正の実数) で表現できる. s は領域の変動履歴を表す. 体積を M_0 以下に制限した平均コンプライアンス (外力仕事) の最小化を目的とした形状最適化問題は次のように表される.

$$\min_{ACR^2} l((u_0, w, \theta)) \text{ such that Eq. (2)} \\ \int_A h dS \leq M_0 \quad (7)$$

この問題に対するラグランジュ汎関数 L は $\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta}$ を状態方程式に対するラグランジュ乗数, Λ を体積制約に対するラグランジュ乗数として, 次のように表される.

$$L(u_0, w, \theta, \bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta}, \Lambda) = l((u_0, w, \theta)) + l((\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})) \\ - a((u_0, w, \theta), (\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})) + \Lambda \left(\int_A h dS - \hat{M} \right) \quad (8)$$

簡単のため外力の作用する境界は変動しないこと, 面外力 q の作用領域は変動しないことを仮定すると, ラグランジュ汎関数の領域変動に対する導関数 \dot{L} は, 次式のように表される.

$$\dot{L} = l((u'_0, w', \theta')) + l((\bar{u}'_0, \bar{w}', \bar{\theta}')) \\ - a((u'_0, w', \theta'), (\bar{u}'_0, \bar{w}', \bar{\theta}')) - a((u_0, w, \theta), (\bar{u}'_0, \bar{w}', \bar{\theta}')) \\ + \dot{\Lambda} \left(\int_A h dS - \hat{M} \right) + \int_S G \nu_i V_i dS \quad (9)$$

ただし, $V(x) = \partial T_s / \partial s (T_s^{-1}(x)), x \in A_s$, は領域変動の s に対する速度を表す. $(\cdot)'$ は形状導関数, (\cdot) は物質導関数を表す⁽²⁾. また, 形状勾配密度関数 G は次式となる.

$$G = -c_{\alpha\beta\gamma\delta}^B \theta_{(\gamma,\delta)} \bar{\theta}_{(\alpha,\beta)} - kc_{\alpha\beta}^S (w_{,\beta} + \theta_\beta) (\bar{w}_{,\alpha} + \bar{\theta}_\alpha) \\ - c_{\alpha\beta\gamma\delta}^M u_{0\gamma,\delta} \bar{u}_{0\alpha,\beta} + \Lambda \quad (10)$$

ラグランジュ汎関数 L の停留条件から, 自己随伴関係 $(u_0, w, \theta) = (\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})$ を含めた $u_0, w, \theta, \bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta}, \Lambda$ の決定式を得る. したがって, この問題の形状勾配密度関数 G は評価可能である.

形状勾配関数が導出されれば力法の適用が可能となる. 力法では, 変動が許された境界を法線方向に $-G$ に比例した境界力を作用させたときの変形を形状更新に用いる. シェルの面内変動においては, シェルの中心面の位置を滑り拘束した下で, 変動が許された S の部分境界に $-G$ に比例した境界力をシェル面内の S に対する法線方向へ作用させたときの変形を形状更新に用いる.

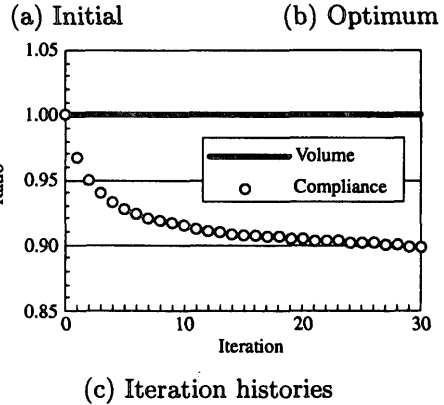
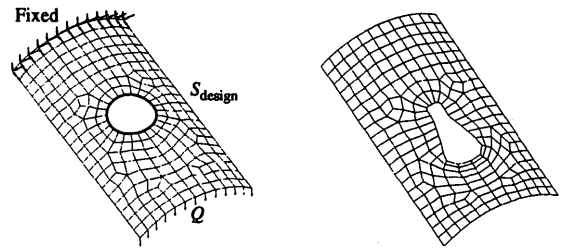


Fig. 1 Optimization of cylindrical shell with a clamed edge under distributed load

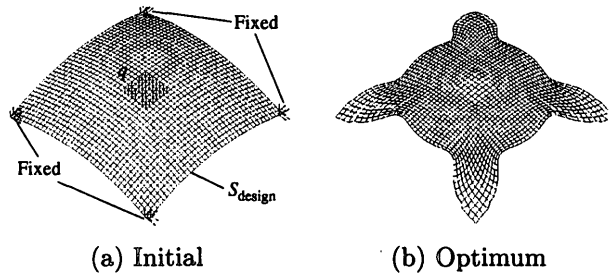


Fig. 2 Optimization of quadratic shell with clamed corners under central distributed load with 75% of the initial volume

4. 数値解析結果

本手法の 2 種類のシェル構造への適用例を図 1 と 2 に示す.

文 献

- (1) N. V. Rao and E. Hinto. Structural optimization of variable-thickness plates and free-form shell structures. *Structural Engineering Review*, Vol. 5, .
- (2) 畔上秀幸. 領域最適化問題の一解法. 日本機械学会論文集 (A 編), Vol. 60, pp. 1479-1486, 1994.
- (3) 下田昌利, 呉志強, 畔上秀幸, 桜井俊明. 汎用 FEM コードを利用した領域最適化問題の数値解析法 (力法によるアプローチ). 日本機械学会論文集 (A 編), Vol. 60, pp. 2418-2425, 1994.
- (4) 下田昌利, 畔上秀幸, 桜井俊明. 応力分布を規定した連続体の境界形状決定. 日本機械学会論文集 (A 編), Vol. 62, pp. 2393-2400, 1996.
- (5) 下田昌利, 畔上秀幸, 桜井俊明. 形状最適化におけるミニマックス問題の数値解法 (最大応力と最大変位の最小設計). 日本機械学会論文集 (A 編), Vol. 63, pp. 610-617, 1997.