

## K-0207 フレーム構造のノンパラメトリック最適化問題の解法

## Solution to Nonparametric Optimization Problem of Frame Structures

○ 山本 直幸 (豊橋技科大)

正 畔上 秀幸 (豊橋技科大)

正 下田 昌利 (三菱自工)

Naoyuki YAMAMOTO, Graduate school of Toyohashi University of Technology, 1-1 Hibarigaoka, Tempaku-cho, Toyohashi  
 Hideyuki AZEGAMI, Toyohashi University of Technology  
 Masatoshi SHIMODA, Mistubishi Motors Corp.

This paper presents a numerical analysis method for shape optimization problems of cross section in three dimensional frame structures made of thin plate. The beam theory was applied for frame segments. Cross section was assumed as rectangle with height and width. The distribution functions of the height and the width defined on frame structures were chosen as design variables. With respect to stiffness maximization problem, numerical analysis method of shape gradient function was presented by applying the adjoint variable method. Using the shape gradient function, a program for three dimensional frame structures based on the gradient method was developed. The performance was demonstrated with some numerical results for three dimensional frame structures.

**Key Words:** Optimum Design, Numerical Analysis, Finite-Element Method, Adjoint Variable Method, Gradient Method

## 1. はじめに

自動車などの車体は薄板で構成されたフレーム構造になっている。このような機械構造物の薄板フレーム構造を設計する際には、剛性を落とさずに重量の軽減を図ったり、あるいは重量を変えずに剛性を高めるといった最適化が求められる。

従来、このような薄板フレーム構造を最適化する場合に、各フレーム部材の代表寸法を設計変数に設定して、質量あるいは外力仕事に対する各設計変数の感度を直接法によって評価して、あるいは応答曲面を評価して、勾配法によって最適な解を得る方法が採られてきた。しかしながら、フレーム構造が複雑になり、それに伴ってフレーム部材の代表寸法の数が増大してくると設計空間の次元数の増大を招き、最適解の解析を困難にする。

一方、著者らは、連続体の形状最適化問題に対して Lagrange 乗数法、あるいは随伴変数法、によって感度(形状勾配)を解析する方法を研究してきた<sup>(1)</sup>。この方法では、目的関数と制約関数の数に比例して支配方程式の数は増加するが、設計変数の数には依存しないという利点があった。したがって、薄板フレーム構造の最適化問題のような目的関数と制約関数が1つといった問題に対しては、感度を Lagrange 乗数法によって評価することが有利になる。本研究では、薄板フレーム構造を1次元連続体としてモデル化し、その断面形状が連続的に変化する場合の薄板フレームの最適化問題に対する感度の解析法を示し、それに基づいた勾配法による薄板フレームの最適化プログラムを開発することを目的にした。

## 2. フレーム構造に対する線形弾性問題の変分形式

有界な領域  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  を占める次のようなフレーム状の線形弾性体を考える。

$$\Omega = \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \xi_3 \in S \subset \mathbb{R}, (\xi_1, \xi_2) \in A \subset \mathbb{R}^2\} \quad (1)$$

ただし、局所座標系  $\xi$  から全体座標系におけるフレーム断面中心線の位置を与える写像  $x: S \ni \xi_3 \mapsto x = \{x_i\}_{i=1,2,3} \in \mathbb{R}^3$  は区分的に滑らかであるとする。

局所座標系で表した変位  $u = \{u_i\}_{i=1,2,3}: \Omega \mapsto \mathbb{R}^3$  を断面内変位  $\{u_\alpha\}_{\alpha=1,2}$  とフレーム方向変位  $u_3$  に分けて考える。なお、ギリシャ文字の下添字は  $\alpha = 1, 2$  を表すことにして、テンソルの添字表記においては  $\alpha = 1, 2$  に関して総和規約と空間座標に関する偏微分表記法を使用する。ここで、フレーム中心線の変位  $w = \{w_i\}_{i=1,2,3}$  と回転角  $\theta = \{\theta_i\}_{i=1,2,3}$  を導入して、

$$\sigma_{\alpha\beta} = 0 \quad (2)$$

$$u_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = w_1(\xi_3) - \xi_2\theta_3(\xi_3) \quad (3)$$

$$u_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = w_2(\xi_3) + \xi_1\theta_3(\xi_3) \quad (4)$$

$$u_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = w_3(\xi_3) - \xi_1\theta_2(\xi_3) + \xi_2\theta_1(\xi_3) \quad (5)$$

を仮定して、等方弾性体の構成則を用いれば、物体力を断面内で積分した単位長さ当りの外力  $\{F_i^{[0]}\}_{i=1,2,3}$  と偶力  $\{C_i^{[0]}\}_{i=1,2,3}$  が作用して、 $S$  の部分集合  $S_1, S_2, S_3, S_4$  において適切な組み合わせで基本境界条件  $w|_{S_1} = w^{[0]}$ ,  $\theta|_{S_2} = \theta^{[0]}$  と自然境界条件  $Q = \{Q_i\}_{i=1,2,3}|_{S_3} = Q^{[0]}$ ,  $M = \{M_i\}_{i=1,2,3}|_{S_4} = M^{[0]}$  が与えられたときの平衡方程式の変分形式は次式となる。

$$a((w - w^{[0]}, \theta - \theta^{[0]}), (\bar{w}, \bar{\theta})) = l((\bar{w}, \bar{\theta})) \quad w^{[0]} \in U_w, \theta^{[0]} \in U_\theta, (w - w^{[0]}, \theta - \theta^{[0]}) \in U, \forall (\bar{w}, \bar{\theta}) \in U \quad (6)$$

ただし、 $(\cdot)^{[0]}$  は既定、 $(\bar{\cdot})$  は変分を表している。双1次形式  $a(\cdot, \cdot)$  および1次形式  $l(\cdot)$  は、それぞれ以下のように定義されている。

$$a((w, \theta), (\bar{w}, \bar{\theta})) = \int_S \{ (w'_1 - \theta_2)\mu|A|(\bar{w}'_1 - \bar{\theta}_2) + (w'_2 + \theta_1)\mu|A|(\bar{w}'_2 + \bar{\theta}_1) + \theta'_1 EI_1 \bar{\theta}'_1 + \theta'_2 EI_2 \bar{\theta}'_2 + w'_3 E|A|(\bar{w}'_3 + \theta'_3 EJ\bar{\theta}'_3) \} dS \quad (7)$$

$$l((\bar{w}, \bar{\theta})) = \int_S (F_i \bar{w}_i + C_1 \bar{\theta}_1 - C_2 \bar{\theta}_2 + C_3 \bar{\theta}_3) dS + (Q_i \bar{w}_i)|_{S_3} + (M_i \bar{\theta}_i)|_{S_4} \quad (8)$$

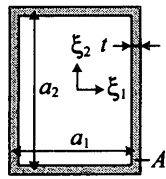


Fig. 1 Cross sectional area of frame with thin plate

$(\cdot)' \equiv d(\cdot)/d\xi_3$  とする。  $\mu$  は Lamé 定数 ( $\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk} + 2\mu\epsilon_{ij}$ ),  $E$  は Young 率,  $|A|$  は断面積,  $\{I_\alpha\}_{\alpha=1,2}$  は断面 2 次モーメント,  $J = I_1 + I_2$  である。 また,  $U_w, U_\theta, U$  は次式で与える。

$$U_w = \{w \in (H^1(S))^3 \mid w|_{S_1} = w^{[0]}, w|_{S \setminus S_1} = 0\} \quad (9)$$

$$U_\theta = \{\theta \in (H^1(S))^3 \mid \theta|_{S_2} = \theta^{[0]}, \theta|_{S \setminus S_2} = 0\} \quad (10)$$

$$U = \{(w, \theta) \in (H^1(S))^6 \mid w|_{S_1} = 0, \theta|_{S_2} = 0\} \quad (11)$$

### 3. フレーム構造の剛性最大化問題

本研究では, フレームの断面  $A$  は図 1 のように厚さ  $t$  大きさ  $a_1, a_2 \gg t$  の薄板矩形構造であると仮定し, さらに, 板厚  $t$  と全体座標系に対する矩形主軸の回転角は既定であると仮定する。

簡単のために基本境界条件の境界値はすべて零値を仮定して, 剛性最大化問題を外力仕事最小化問題として考える。この問題は次のように定式化される。

$$\min_{(a_1, a_2) \in D} l((w, \theta)) \quad \text{such that Eq. (6)}$$

$$\int_S 2(a_1 + a_2)t dS \leq M^{[0]} \quad (12)$$

ただし,  $D$  は次式で与える。

$$D = \{(a_1, a_2) \in (L^\infty(S))^2 \mid a_1, a_2 > 0\} \quad (13)$$

Lagrange 乗数法を適用する。この問題は自己随伴問題となり,  $a_1, a_2$  に対する感度 (形状勾配)  $\{G_{a_i}\}_{i=1,2}$  は次式となる。

$$G_{a_i} = 2\Delta t - (w'_1 - \theta_2)\mu \frac{\partial A}{\partial a_i}(w'_1 - \theta_2) + (w'_2 + \theta_1)\mu \frac{\partial A}{\partial a_i}(w'_2 + \theta_1) + \theta'_1 E \frac{\partial I_1}{\partial a_i} \theta'_1 + \theta'_2 E \frac{\partial I_2}{\partial a_i} \theta'_2 + w'_3 E \frac{\partial A}{\partial a_i} w'_3 + \theta'_3 E \frac{\partial J}{\partial a_i} \theta'_3 \quad (14)$$

ただし, この式における  $A$  は断面積を表す。また,

$$\frac{\partial A}{\partial a_i} = 2t \quad (15)$$

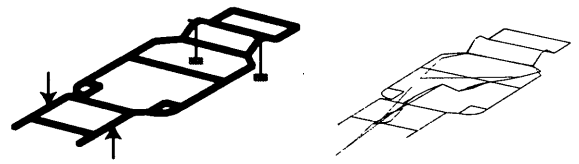
$$\frac{\partial I_1}{\partial a_1} = \frac{3a_2^2 t + t^3}{6} \quad (16)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial a_1} = \frac{(6a_1 a_2 + 3a_1^2)t + 3t^3}{6} \quad (17)$$

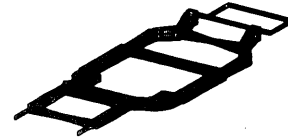
$$\frac{\partial I_1}{\partial a_2} = \frac{(6a_1 a_2 + 3a_2^2)t + 3t^3}{6} \quad (18)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial a_2} = \frac{3a_1^2 t + t^3}{6} \quad (19)$$

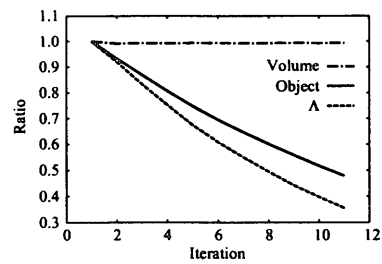
$$\frac{\partial J}{\partial a_i} = \frac{(3a_1^2 + 3a_2^2 + 6a_1 a_2)t + 4t^3}{6} \quad (20)$$



(a) Initial shape (b) Initial deformation



(c) Optimized shape



(d) Iteration history

Fig. 2 Optimization of simplified car frame structure

体積制約式 (12) に対する Lagrange 乗数  $\Lambda$  は次式の Kuhn-Tucker 条件の一部を満たすように決定する。

$$\Lambda \geq 0 \quad (21)$$

$$\Lambda \left( \int_S 2(a_1 + a_2)t dS - M^{[0]} \right) = 0 \quad (22)$$

$$\int_S 2(a_1 + a_2)t dS - M^{[0]} \leq 0 \quad (23)$$

本研究では勾配法に基づいて断面寸法を更新した。式 (14) で  $k$  回目の形状勾配  $\{G_{a_i}^{(k)}\}_{i=1,2}$  を評価して,  $k$  回目の断面寸法  $\{a_i^{(k)}\}_{i=1,2}$  から  $k+1$  回目の断面寸法  $\{a_i^{(k+1)}\}_{i=1,2}$  を次式で計算した。

$$a_i^{(k+1)} = a_i^{(k)} + \rho G_{a_i}^{(k)} \quad (24)$$

ただし,  $\rho$  は増分定数である。

### 4. 解析例

数値解は汎用有限要素解析プログラム MSC.Nastran 70.5.2 の CBAR 要素を用いて得た。断面積寸法は要素内一定とした。Lagrange 乗数  $\Lambda$  を式 (21) から (23) により決定する際に Brent 法を用いた<sup>(2)</sup>。

簡略な自動車フレーム構造に適用した結果を図 2 に示す。

### 文 献

- (1) 畔上秀幸. 形状最適化問題の解法. 計算工学, Vol. 2, pp. 239-247, 1997.
- (2) Richard P. Brent. *Algorithms for Minimization without Derivatives*, chapter 3 and 4. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1973.