K-0208 力法による形状最適化スキームにおける収束性の改善

Improvement of Convergency in Shape Optimization Scheme by Traction Method

○正 竹内 謙善（豊橋技科大院） 正 畔上 秀幸（豊橋技科大）

Kenzen TAKEUCHI, Graduate school of Toyohashi University of Technology, 1-1 Hibarigaoka, Tempaku-cho, Toyohashi
Hideyuki AZEGAMI, Toyohashi University of Technology

This paper presents an improvement of the traction method that was proposed as a solution of shape optimization problems of domain boundaries in which boundary value problems of partial differential equations are defined. Using the theory of the gradient method in Hilbert space the principle of the traction method is presented. Based on the principle a new method is proposed by selecting another bounded coercive bilinear form from the previous method. The proposed method obtains domain variation with solution of a boundary value problem with the Robin condition using the shape gradient. With respect to a three-dimensional bar problem with notch that was not solved with the previous method the proposed method obtained smooth convergence.

Key Words: Optimum Design, Numerical Analysis, Finite-Element Method, Adjoint Variable Method, Gradient Method

1. はじめに

力法は弾性体や流れ場の境界形状を最適化する方法として提案されてきた[1]．この方法は，境界形状の滑らかさを保つことに関しては優れていた．しかしながら，形状拘束条件が緩い問題，例えば，細長い構造の両端以外の形状を拘束しないような問題，に対しては収束解が得られない場合があった．

本論文では，力法の勾配法としての原理を再検討し，従来の方法とは別の可能性があることを示す．新しい方法によれば，従来の方法では収束解が得られなかった問題に対しても良好な収束が得られる可能性がある．

2. 形状最適化問題

弾性体や流れ場などの境界形状を設計対象にした最適化問題は偏微分方程式の境界値問題が定義された領域が位相を変えずに変動すると仮定した場合の最適化問題として一般化される．領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n=2,3$, の変動は写像の 1 媒介変数族 $T_s: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, $0 \le s < \epsilon$ (ϵ は小さな正の実数) で表現できる．ただし，Ω の位相を変えないために次の条件を仮定する[2]．

(i) T_s と T_s^{-1} はすべての $s \in [0,\epsilon)$ に対して $(W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n))^n$ あるいは $(C^1(\mathbb{R}^n))^n$ に属する．

(ii) 写像 $s \mapsto T_s(x)$ と $s \mapsto T_s^{-1}(x)$ はすべての $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $(C^1([0,\epsilon)))^n$ に属する．

また，次式で定義される s に対する T_s の導関数 V を速度と呼ぶ．

$$V(x) = \frac{\partial T_s}{\partial s}(T_s^{-1}(x)) \quad x \in \Omega_s \tag{1}$$

例えば，2 階楕円型偏微分方程式の境界値問題に対する目的汎関数 $J_0(\Omega; u)$ と制約汎関数 $J_i(\Omega; u)$, $i = 1,2,\cdots,q$ の境界変動型形状最適化問題は次のような領域 $\Omega^* \subset \mathbb{R}^n$ を見つける問題として記述できる．

$$\begin{aligned} &J_0(\Omega^*; u) = \min_{\Omega \subset \mathbb{R}^n} J_0(\Omega; u) \quad \text{such that} \\ &a(\Omega; u, v) = l(\Omega; v) \quad u - h \in U \quad h \in U_h \quad \forall v \in U \\ &J_i(\Omega; u) - J_i^{[0]} \le 0 \quad i = 1,2,\cdots,q \end{aligned} \tag{2}$$

ただし，双 1 次形式 $a(\Omega; \cdot, \cdot)$ と 1 次形式 $l(\Omega; \cdot)$ は次式で定義する．

$$a(\Omega; u, v) \equiv \int_\Omega (\nabla u \cdot A \nabla v + a_0 u v)\, dx, \tag{3}$$

$$l(\Omega; v) \equiv \int_\Omega f v\, dx + \int_{\Gamma \setminus \bar{\Gamma}_0} g v\, d\Gamma \tag{4}$$

$A = A^T$ (A の転置) $\in (L^\infty(\mathbb{R}^n))^{n \times n}$, $a_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ は楕円性を備えた既定関数，$f \in H^0(\mathbb{R}^n)$，$g \in H^0(\mathbb{R}^n)$，$h \in U_h = \{u \in H^1(\Omega) |\ u(x) = 0,\ x \in \Gamma \setminus \bar{\Gamma}_0\}$ は既定関数である．$U = \{u \in H^1(\Omega) |\ u(x) = 0,\ x \in \Gamma_0\}$ である．$J_i^{[0]} \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,\cdots,q$, は制約汎関数の上限値を与える実定数である．簡単のために，関数 $A(x)$, $a_0(x)$, $f(x)$, $h(x)$ および $g(x)$ は $x \in \mathbb{R}^n$ で与えられ，領域変動に伴って変化しないと仮定する．

簡単のために，部分境界の境界 $\bar{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma \setminus \Gamma_0}$ や Γ 上の特異点は変動しないと仮定して，随伴法と領域変動に対する物質導関数の公式を用いれば，目的汎関数の s に対する物質導関数 $\dot{J}_0$ は速度 V の 1 次形式 $\langle \Omega; G\nu, V \rangle$ で与えられる．

$$\dot{J}_0(\Omega; u) = \langle \Gamma; G\nu, V \rangle \equiv \int_\Gamma G\nu \cdot V\, d\Gamma \tag{5}$$

ただし，ν は単位外向き法線である．G の具体的な記述は文献[3]に譲る．ここで，$G\nu$ は形状勾配，G は形状勾配密度と呼ばれる．

3. Hilbert 空間における勾配法

勾配法は内積空間（Hilbert 空間）において次のように定義される．実 Hilbert 空間 Φ の内積を $(\cdot,\cdot)_\Phi$，ノルムを $\|\cdot\|_\Phi$ と表すことにする．汎関数 $J_\Phi : \Phi \mapsto \mathbb{R}$ を考え，次式のように J_Φ が最小となるときの最適解 $\phi^* \in \Phi$ を求める問題を考える．

$$J_\Phi(\phi^*) = \min_{\phi \in \Phi} J_\Phi(\phi) \tag{6}$$

Hilbert 空間 Φ における勾配法は，J_Φ の勾配 $G_{J_\Phi} \in \Phi$:

$$(G_{J_\Phi}, \varphi)_\Phi = \lim_{\zeta \to 0} \frac{1}{\zeta} (J_\Phi(\phi + \zeta\varphi) - J_\Phi(\phi)) \quad \forall \varphi \in \Phi \tag{7}$$

〔No.01-1〕日本機械学会 2001 年度年次大会講演論文集（V）〔2001-8.27〜30,福井市〕

を評価して，次式で φ を解き，ϕ を φ の方向に移動していくことによって，最適解 ϕ^* を見つける方法である[4]．

$$b_\Phi(\varphi,\psi) = -(G_{J_\Phi},\psi)_\Phi \quad \forall\psi \in \Phi \tag{8}$$

ただし，$b_\Phi(\cdot,\cdot)$ は次式を満たす一様有界で強圧的な Φ における双 1 次形式であると仮定する．

$$\begin{aligned}&\exists\alpha,\beta > 0:\ b_\Phi(\psi,\psi) \geq \alpha\|\psi\|_\Phi^2\\ &\text{and}\quad b_\Phi(\psi,\phi) \leq \beta\|\psi\|_\Phi\|\phi\|_\Phi \quad \forall\psi,\phi \in \Phi\end{aligned} \tag{9}$$

実際，ζ を小さな正定数として，$\zeta\varphi$ が汎関数を減少させることは次のように保証される．

$$\begin{aligned}J_\Phi(\phi+\zeta\varphi) &= J_\Phi(\phi) + (G_{J_\Phi},\zeta\varphi)_\Phi + o(\zeta)\\ &= J_\Phi(\phi) - b_\Phi(\varphi,\zeta\varphi) + o(\zeta)\\ &\leq J_\Phi(\phi) - \alpha\zeta\|\varphi\|^2 + o(\zeta)\end{aligned} \tag{10}$$

ここで，不等式の右辺第 2 項は負値で，第 3 項は ζ を小さくすることによって十分小さくできる．

4. 従来の力法

力法は，速度 $V \in D$ を次式の境界値問題の解として解析する方法として提案されてきた[3]．

$$a_n(\Omega;V,y) = -\langle\Gamma;G\nu,y\rangle \quad \forall y \in D \tag{11}$$

ただし，

$$a_n(\Omega;V,y) \equiv \int_\Omega C_{ijkl}V_{k,l}y_{i,j}\,dx \tag{12}$$

$$D \equiv \left\{V \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n \mid \text{形状拘束条件}\right\} \tag{13}$$

$C_{ijkl} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $i,j,k,l = 1,2,\cdots,n$, は楕円性を有した Hooke 剛性テンソルである．なお，総和規約と偏微分表記法 $(\cdot)_{,i} \equiv \partial(\cdot)/\partial x_i$ を使用した．この方法は，仮定 (i) より，式 (5) の $V \in (W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n))^n$ を Hilbert 空間の一つ $(H^1(\mathbb{R}^n))^n \equiv (W^{1,2}(\mathbb{R}^n))^n$ に拡張して，そこで定義された双 1 次形式 $a_n(\Omega;\cdot,\cdot)$ を用いた勾配法になっていた．一様有界性と強圧性は剛体運動を拘束する形状拘束条件を設定することによって保たれる．

5. 提案する力法

本論文では，一様有界で強圧的な別の双 1 次形式 $a_n(\Omega;\cdot,\cdot) + \alpha\langle\Gamma;\cdot,\cdot\rangle$ を用いることを提案する．ただし，$\alpha > 0$ とする．双 1 次形式 $\langle\Gamma;\cdot,\cdot\rangle$ は式 (5) によって定義する．このとき，速度 $V \in D$ は次式の境界値問題の解として得られる．

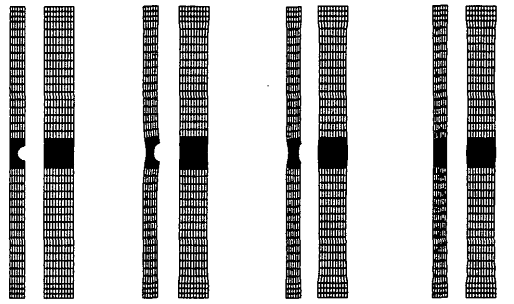
$$a_n(\Omega;V,y) + \alpha\langle\Gamma;(V\cdot\nu)\nu,y\rangle = -\langle\Gamma;G\nu,y\rangle \quad \forall y \in D \tag{14}$$

従来の方法では $G\nu$ を Neumann 条件として導入していたのに対して，提案する方法では Robin 条件として導入した．$\alpha \geq 0$ のときこの境界値問題の解は一つ存在する．

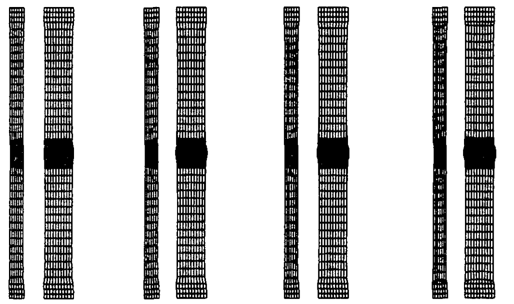
6. 解析例

提案した方法による有限要素法を用いた形状最適化解析プログラムを自作した．図 1 はそのプログラムで切欠き付 3 次元棒の引張り問題を解析した結果である．ただし，図中 r は，$a_n(\Omega;V,V)$ と $\langle\Gamma;(V\cdot\nu)\nu,V\rangle$ の剛性マトリックスにおいて，設計境界上節点に対する対角要素の平均値を K_a, K_b としたとき，$r = K_b/K_a$ で与えた．$r = 0$ が従来の力法である．

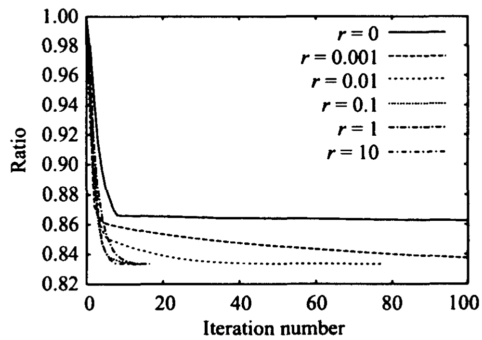
この問題は従来の方法では収束しなかったが (図 1 (b))，提案した方法では収束した (図 1 (d)-(h))．この問題においては，$r \geq 0.1$ のときに良好な結果が得られた．



(a) Initial Iter. 0 (b) $r = 0$ Iter. 100 (c) $r = 0.001$ Iter. 100 (d) $r = 0.001$ Iter. 680



(e) $r = 0.01$ Iter. 78 (f) $r = 0.1$ Iter. 17 (g) $r = 1$ Iter. 18 (h) $r = 10$ Iter. 16



(i) Iteration history

Fig. 1 Optimization of three-dimensional bar with notch loading perpendicular uniform external force on the top plane fixed on the bottom plane and under constraint on subboundaries of the three element layers at the bottom and the top during shape variation

文　献

(1) 畔上秀幸．形状最適化問題の解法．計算工学, Vol. 2, pp. 239–247, 1997.

(2) J. Sokolowski and J. P. Zolésio. *Introduction to Shape Optimization: Shape Sensitivity Analysis*. Springer–Verlag, New York, 1991.

(3) 畔上秀幸．境界変動型領域形状最適化問題の解法．日本応用数理学会 2000 年度年会講演予稿集, pp. 554–555, 2000.

(4) Cea J. Numerical methods of shape optimal design. In E. J. Haug and J. Cea, editors, *Optimization of Distributed Parameter Structures*, Vol. 2, pp. 1049–1088. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1981.