343 音場を対象とした形状最適化問題の解法（車内音低減問題）

Solution to Shape Optimization Problem for Sound Field (Interior Noise Reduction Problem)

○ 正 畔上 秀幸（豊橋技科大）　　松浦 易広（豊橋技科大院）
丸山 新一（日産）

Hideyuki AZEGAMI, Toyohashi University of Technology, 1-1 Hibarigaoka, Tempaku-cho, Toyohashi
Yasuhiro MATSUURA, Graduate school of Toyohashi University of Technology
Shinichi MARUYAMA, Nissan Motor Co., LTD

This paper presents a numerical analysis method for boundary shape optimization problems of steady state sound field to minimize sound pressure distribution in response to sound source in bass register on prescribed sub-domain. Squared sound pressure on prescribed sub-domain was chosen as an objective functional. The shape gradient function of the problem was derived using the Lagrange multiplier method and the formula of material derivative. Reshaping was accomplished by the traction method. The presented method was applied to a interior noise reduction problem of a car.

Key Words: Optimum Design, Numerical Analysis, Finite-Element Method, Traction Method

1. はじめに

音響設計では想定される音源に対して室内空間の幾何学的形状と壁面の反射率が重要な設計対象となる．そのうち，壁面反射率の工夫だけでは限界があることを考えれば，幾何学的形状も設計対象とした最適化手法の開発が必要となる．

著者らは，前報[(1)]において，コンサートホールのような残響を積極的に利用する音場を想定し，特定の音色のみが強調されることのない音圧分布の一様性を実現することを目的にした音場の形状最適化問題を定式化して，その解法を示した．音場は波動方程式によって支配されていると仮定し，最小化規準にはステージや客席を想定した部分領域における２乗音圧勾配を選んだ．解法には，偏微分方程式の境界値問題が定義された領域の境界を変動させることによって，境界値問題の解関数で与えられた目的汎関数を与えられた制約の下で最小化する問題に対する汎用解法である力法[(2),(3)]を用いた．

本報では，静粛性が要求される音場の問題を扱った．エンジン音を音源とする乗用車の車内音場を想定し，乗客の聴覚が位置する特定部分領域の２乗音圧を最小化する問題を定式化し，その問題の形状勾配関数を導出した．形状勾配関数が評価できれば力法の適用が可能となる．最後に，乗用車の車内音場に対する解析例を紹介する．

2. 音場の境界値問題

音場の境界値問題を定義する．音圧 $p(x,t)$ の定義領域をEuclid 空間の有界部分開集合 $x \in \Omega \in \mathbb{R}^n$, $n=2,3$ （$\mathbb{R}$ は実数を表す），その境界 Γ, と時間の開集合 $t \in \mathbb{R}$ とする．部分境界 $x \in \Gamma_0 \subset \Gamma$ では音圧が $p(x,t)=p_0(x,t)$ （既知関数），$t \in \mathbb{R}$, のように規定され，残りの境界 $x \in \Gamma \setminus \Gamma_0$ （$\setminus$ は集合の差を表す）では法線方向（外向き単位法線ベクトルを $\nu(x)$ と表す）への音圧勾配が $p_{,i}(x,t)\nu_i(x)=g(x,t)$ （既知関数），$t \in \mathbb{R}$, （本稿では $\mathbb{R}^n$ における勾配 $\partial(\cdot)/\partial x_i$, $i=1,2,\cdots,n$, を $(\cdot)_{,i}$ と表し，さらに添字表記において総和規約を使用する）のように規定されていると仮定する．もしも，完全反射の壁面では $g(x,t)=0$ である．壁面が法線方向 $\nu(x,t)$ に速度 $u_{i,t}(x,t)\nu_i(x)$ で振動している場合には $g(x,t)=-\rho u_{i,t}(x,t)\nu_i(x)$ （本論文では時間 t に対する導関数を $(\cdot)_{,t}$ で表す）となる．ただし，ρ は媒質（空気）の密度である．さらに，媒質（空気）の体積弾率を K，音速を $c=\sqrt{K/\rho}$ と表す．このような定義に基けば，音源 $f(x,t)$, $x \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$, に対する音場の境界値問題は次式で与えられる．

$$-p_{,ii}(x,t)+\frac{1}{c^2}p_{,tt}(x,t)=f(x,t) \quad x \in \Omega \quad t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

$$p(x,t)=p_0(x,t) \quad x \in \Gamma_0 \quad t \in \mathbb{R} \tag{2}$$

$$p_{,i}(x,t)\nu_i(x)=g(x,t) \quad x \in \Gamma \setminus \Gamma_0 \quad t \in \mathbb{R} \tag{3}$$

また，随伴音圧を $q(x,t)$, $x \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$, と表せば，この境界値問題の弱形式は次式となる．

$$\int_0 \left(a(\Omega;p,q)-\frac{1}{c^2}b(\Omega;p_{,t},q_{,t})\right)dt$$

$$=\int_0^T l(\Omega;q)\,dt \quad p-p_0 \in P \quad p_0 \in P_0 \quad \forall q \in P \tag{4}$$

ただし，双１次形式 $a(\Omega;\cdot,\cdot)$，$b(\Omega;\cdot,\cdot)$ および１次形式 $l(\Omega;\cdot,)$ は次式で定義する．

$$a(\Omega;p,q)=\int_\Omega p_{,i}q_{,i}\,dx \tag{5}$$

$$b(\Omega;p,q)=\int_\Omega pq\,dx \tag{6}$$

$$l(\Omega;q)=\int_\Omega fq\,dx+\int_{\Gamma\setminus\Gamma_0} gq\,d\Gamma \tag{7}$$

p_0 と q の許容集合 P_0 と P は次のように定義する．

$$P_0=\{p \in H^1(\Omega\times\mathbb{R}) \mid p(x,t)=0,\ x \in \Gamma\setminus\Gamma_0,\ t \in \mathbb{R}\} \tag{8}$$

$$P=\{q \in H^1(\Omega\times\mathbb{R}) \mid q(x,t)=0,\ x \in \Gamma_0,\ t \in \mathbb{R}\} \tag{9}$$

$H^m(\Omega\times\mathbb{R})$ は m 階の導関数まで２乗可積分な $\Omega\times\mathbb{R}$ を定義域とする関数空間（sobolev 空間）である．

音源が $f(x,t)=F(x)\cos\omega t=F(x)(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t})/2$ （$j=\sqrt{-1}$）のとき，音圧を $p(x,t)=(\hat{p}(x,\omega)e^{j\omega t}+\hat{p}^*(x,\omega)e^{-j\omega t})/2$ （$(\cdot)^*$ は複素共役を表す）と表して，随伴音圧を $q(x,t)=\hat{q}(x,\omega)e^{-j\omega t}=\hat{q}^*(x,\omega)e^{j\omega t}$ と仮定すれば，次のような周波数応答に対する弱形式を得る．

$$(a(\Omega;\hat{p},\hat{q})-k^2b(\Omega;\hat{p},\hat{q}))+(a(\Omega;\hat{p}^*,\hat{q}^*)-k^2b(\Omega;\hat{p}^*,\hat{q}^*))$$

$$=l(\Omega;\hat{q})+l(\Omega;\hat{q}^*)) \qquad (\hat{p}-\hat{p}_0)+(\hat{p}^*-\hat{p}_0^*) \in P$$

$$\hat{p}_0+\hat{p}_0^* \in P_0 \quad \forall(\hat{q}+\hat{q}^*) \in P \tag{10}$$

ただし，$k=\omega/c$ である．

3. 二乗音圧最小化問題

部分境界 $\Gamma_1 \subset \Gamma \backslash \Gamma_0$ が駆動壁面で，法線方向 $\nu(x,t)$ に速度 $u_{i,t}(x,t)\nu_i(x)$ で振動する場合を仮定する．このとき，法線方向への音圧勾配の既知関数 $g(x,t) = -\rho u_{i,t}(x,t)\nu_i(x)$ と音源 $f(x,t)$ が変数分離型

$$g(x,t) = -\rho\Upsilon_i(x)\nu_i(x)\phi(t) \quad x \in \Gamma_1 \quad t \in \mathbb{R} \tag{11}$$

$$f(x,t) = F(x)\phi(t) \quad x \in \Omega \quad t \in \mathbb{R} \tag{12}$$

で与えられた場合を仮定して，指定された部分領域 $\Omega_D \subset \Omega$ における二乗音圧の時間平均

$$J(\Omega_D;p) \equiv \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/} b(\Omega_D;p,p)dt \tag{13}$$

を最小化する問題を考えよう．ただし，$b(\Omega_D;\cdot,\cdot)$ は式 (6) の積分領域を Ω_D に変更した双 1 次形式である．

時間関数 $\phi(t)$ に関しては，次式の Wiener-Khintchine の関係で定義された自己相関関数 $C_{\phi\phi}(\tau)$ とパワースペクトル密度 $S_{\phi\phi}(\omega)$ が与えられていると仮定する．

$$C_{\phi\phi}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \phi(t)\phi(t+\tau)dt \tag{14}$$

$$S_{\phi\phi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{\phi\phi}(\tau)e^{-j\omega t}d\tau \tag{15}$$

このとき，式 (13) は，$b(\Omega_D;\cdot,\cdot)$ の双線形性に注目して，Parseval の定理を用いれば，次式で書き換えられる．

$$J(\Omega_D;p) = \int_{-\infty}^{\infty} b(\Omega_D;\hat{h}_p(x,\omega),\hat{h}_p^{\star}(x,\omega))S_{\phi\phi}(\omega)\,d\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \tag{16}$$

ただし，$\hat{h}_p(x,\omega)$ および $\hat{h}_q(x,\omega)$ は $\phi(t)$ の Fourier 変換 $\hat{\phi}(\omega) = 1$ のときの音圧 $h_p(x,t)$ および随伴音圧 $h_q(x,t)$（単位インパルス応答）の Fourier 変換である．

本論文では，領域の大きさを M_0 以下に制限した下で，式 (13) あるいは (16) を最小化する次の問題を扱った．

$$\min_{\Omega\subset\mathbb{R}^n} J(\Omega;p) \text{ such that Eq. (10) at } \hat{\phi}(\omega)=1$$

$$\text{in Eqs. (11), (12) and } M(\Omega) = \int_{\Omega} dx \le M_0 \tag{17}$$

ただし，簡単のために，$p_0(x,t) \neq 0$ あるいは $g(x,t) \neq 0$ の境界における法線方向への変動，Ω_D の変動は拘束する．

Lagrange 乗数法（随伴変数法）と物質導関数の公式を用いれば，この問題の形状勾配密度関数 G（形状勾配関数は $G\nu$）は次式となる．

$$G = \int_{-\infty}^{\infty} G_\omega S_{\phi\phi}(\omega)\,d\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \tag{18}$$

$$G_\omega = -2\mathrm{Re}[\hat{h}_{p,i}\hat{h}_{q,i} - k^2\hat{h}_p\,\hat{h}_q - F\hat{h}_q] + \Lambda \tag{19}$$

ただし，随伴音圧の複素振幅（Fourier 変換）$\hat{q}(x,\omega)$ と領域の大きさ制約式 (17) に対する Lagrange 乗数 Λ に対する最適性の必要条件（Kuhn-Tucker 条件の一部）は次式となる．

$$\begin{aligned}&(a(\Omega;\hat{h}_p',\hat{h}_q) - k^2b(\Omega;\hat{h}_p',\hat{h}_q) - b(\Omega_D;\hat{h}_p',\hat{h}_p))\\&+ (a(\Omega;\hat{h}_p^{\star\prime},\hat{h}_q^{\star}) - k^2b(\Omega;\hat{h}_p^{\star\prime},\hat{h}_q^{\star}) - b(\Omega_D;\hat{h}_p^{\star\prime},\hat{h}_p^{\star})) = 0\\&\quad\forall(\hat{h}_p' + \hat{h}_p^{\star\prime}) \in P\end{aligned} \tag{20}$$

$$\Lambda(M(\Omega) - M_0) = 0,\ M(\Omega) \le M_0,\ \Lambda \ge 0 \tag{21}$$

形状勾配関数 $G\nu$ が評価できれば，力法の適用が可能となる．

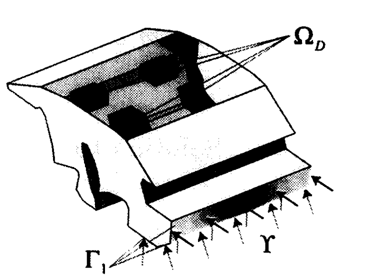

Fig. 1 Interior noise reduction problem of a car

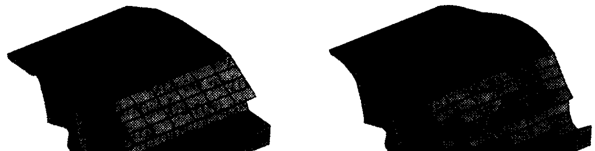

Fig. 2 Initial shape (left) and optimized shape (right)

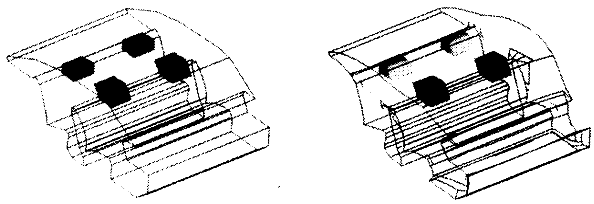

Fig. 3 Magnitude of sound pressure at 50 Hz for initial shape (left) and optimized shape (right)

4. 解析例

乗用車の車内を想定した問題設定を図 1 に示す．長さ 2.7m，横幅 1.8m とした．音速 c=340 m/s，密度 ρ=1.225 kg/m^3 を仮定した．音源は $F(x) = 0$, $x \in \Omega$，前方下部の部分境界を駆動壁面 Γ_1 として，粒子速度の大きさは $|\Upsilon(x)| = 1$ m/s, $x \in \Gamma_1$, $S_{\phi\phi}(\omega) = 1$ (20 Hz $\le \omega/(2\pi) \le$ 50 Hz)，$S_{\phi\phi}(\omega) = 0$ ($\omega/(2\pi) \le$ 20 Hz, 50 Hz $\le \omega/(2\pi)$) と仮定した．また，駆動壁面以外の境界 $x \in \Gamma \setminus \Gamma_1$ では完全反射 $g(x,t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$，を仮定した．部分領域 Ω_D には 4 人の乗客の頭部付近の 4 つの矩形領域を選んだ．音圧および随伴音圧の解析には汎用有限要素法・境界要素法プログラム LMS SYSNOISE Rev 5.4 を用いた．式 (18) の周波数領域積分は 5 Hz 刻みの階段近似で評価した．力法による領域変動は畔上研究室で開発した有限要素法プログラムを使用した．形状の解析結果を図 2 に示す．50 Hz のときの音圧振幅の分布を図 3 に示す．また，目的汎関数は，体積一定の条件を満たしながら単調に減少し，図 2 と 3 の結果においては 10 % の減少となった．

文献

(1) 畔上秀幸，松浦易広．音場を対象とした形状最適化問題の解法（コンサートホール問題）．日本機械学会 2000 年度年次大会講演論文集，Vol. 1, pp. 127–128, 2000.

(2) 畔上秀幸．領域最適化問題の一解法．日本機械学会論文集（A 編），Vol. 60, pp. 1479–1486, 1994.

(3) 畔上秀幸．形状最適化問題の解法．計算工学，Vol. 2, pp. 239–247, 1997.