

# 507 音場を対象とした形状最適化問題の解法 (コンサートホール問題)

## Solution Shape Optimization Problem for Sound Field (Concert Hall Problem)

正 畔上 秀幸 (豊橋技科大)

○松浦 易広 (豊橋技科大院)

Hideyuki AZEGAMI, Toyohashi University of Technology, 1-1 Hibarigaoka, Tempaku-cho, Toyohashi  
Yasuhiro MATSUURA, Graduate school of Toyohashi University of Technology

This paper presents a numerical analysis method for boundary shape optimization problems of steady state sound field to uniformize sound pressure distribution in response to sound source in bass register on prescribed sub-domain. Squared gradient of sound pressure on prescribed sub-domain is chosen as an objective functional. The shape gradient function of the problem is derived using the Lagrange multiplier method and the formula of material derivative. Reshaping was accomplished by the traction method. The presented method was applied to a design problem of a simple concert hall.

*Key Words:* Optimum Design, Numerical Analysis, Finite-Element Method, Traction Method

### 1. はじめに

コンサートホールなどの音響設計において音場を予測するために、通常、音のエネルギーの伝搬や反射、屈折が幾何学的に行われると仮定した幾何音響の手法が用いられてきた。しかしながら、低音域では、音の干渉や回折、共鳴によって特定の音色が強調される現象が問題となる。このような現象は音の波動性を考慮しなければ予測不可能である。特に、小さな室内においてはその問題は顕著となる。

このような音の波動性を考慮した室内音場の設計を行うためには、壁面における境界条件の下で音場の波動方程式を解析し、所望の音響特性が実現されるように境界条件や室内形状を修正していく手法が必要となる。

一方、著者は、偏微分方程式の境界値問題が定義された領域の境界を変動させることによって、境界値問題の解関数で与えられた目的汎関数を与えられた制約の下で最小化する問題を対象とした汎用的な解法として、力法を開発してきた<sup>(1),(2)</sup>。力法は、領域変動に対する形状勾配関数が評価可能であるという前提で、領域を線形弾性体と仮定して、領域変動の境界条件の下で形状勾配関数に比例した境界力を作用させたときの弾性変形(変位)を解析し、その変形を使って領域を変動させていく方法として提案されている。

本論文では、音場の定在波(波動方程式の変数分離型の解)に着目し、要求される低音域での定在波に関する音響特性を室内の幾何学的形状を変更することによって改善する問題に対して、力法が適用可能であることを紹介する。音源の場所(ステージ上)とパワースペクトル密度分布を与えて、指定された部分領域(客席)の二乗音圧勾配を最小化する問題が解かれている。

### 2. 音場の境界値問題

音場の境界値問題を定義する。音圧  $p(x, t)$  の定義領域を Euclid 空間の有界部分開集合  $x \in \Omega \in \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$  ( $\mathbb{R}$  は実数を表す), その境界  $\Gamma$ , と時間の開集合  $t \in \mathbb{R}$  とする。部分境界  $x \in \Gamma_0 \subset \Gamma$  では音圧が  $p(x, t) = p_0(x, t)$  (既知関数) のように規定され、残りの境界  $\Gamma \setminus \Gamma_0$  ( $\setminus$  は集合の差を表す) では法線方向(外向き単位法線ベクトルを  $\nu(x)$  と表す)への音圧勾配が  $p_{,i}(x, t)\nu_i(x) = g(x, t)$  (既知関数)(本稿では  $\mathbb{R}^n$  における勾配  $\partial(\cdot)/\partial x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , を  $(\cdot)_{,i}$  と表し、

さらに添字表記において総和規約を使用する) のように規定されていると仮定する。もしも、完全反射の壁面では  $g(x, t) = 0$  である。壁面が法線方向  $\nu(x, t)$  に速度  $u_{i,t}(x, t)\nu_i(x)$  で振動している場合には  $g(x, t) = -\rho u_{i,t}(x, t)\nu_i(x)$  (本論文では時間  $t$  に対する導関数を  $(\cdot)_{,t}$  で表す) となる。ただし、 $\rho$  は媒質(空気)の密度である。さらに、媒質(空気)の体積弾率を  $K$ 、音速を  $c = \sqrt{K/\rho}$  と表す。このような定義に基づけば、音源  $f(x, t)$ ,  $x \in \Omega$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , に対する音場の境界値問題は次式で与えられる。

$$-p_{,ii}(x, t) + \frac{1}{c^2} p_{,tt}(x, t) = f(x, t) \quad x \in \Omega \quad t \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$p(x, t) = p_0(x, t) \quad x \in \Gamma \quad t \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$p_{,i}(x, t)\nu_i(x) = g(x, t) \quad x \in \Gamma \setminus \Gamma_0 \quad t \in \mathbb{R} \quad (3)$$

また、随伴音圧を  $q(x, t)$  と表せば、この境界値問題の弱形式は次式となる。

$$\int_0^T \left( a(\Omega; p, q) - \frac{1}{c^2} b(\Omega; p, t, q, t) \right) dt = \int_0^T l(\Omega; q) dt \quad p - p_0 \in P \quad p_0 \in P_0 \quad \forall q \in P \quad (4)$$

ただし、双1次形式  $a(\Omega; \cdot, \cdot)$ ,  $b(\Omega; \cdot, \cdot)$  および1次形式  $l(\Omega; \cdot)$  は次式で定義する。

$$a(\Omega; p, q) = \int_{\Omega} p_{,i} q_{,i} dx \quad (5)$$

$$b(\Omega; p, q) = \int_{\Omega} pq dx \quad (6)$$

$$l(\Omega; q) = \int_{\Omega} fq dx + \int_{\Gamma \setminus \Gamma_0} gq d\Gamma \quad (7)$$

$p_0$  と  $q$  の許容集合  $P_0$  と  $P$  は次のように定義する。

$$P_0 = \{p \in H^1(\Omega \times \mathbb{R}) \mid p(x, t) = 0, x \in \Gamma \setminus \Gamma_0, t \in \mathbb{R}\} \quad (8)$$

$$P = \{q \in H^1(\Omega \times \mathbb{R}) \mid q(x, t) = 0, x \in \Gamma_0, t \in \mathbb{R}\} \quad (9)$$

$H^m(\Omega \times \mathbb{R})$  は  $m$  階の導関数まで2乗可積分な  $\Omega \times \mathbb{R}$  を定義域とする関数空間 (sobolev 空間) である。

音源が  $f(x, t) = F(x) \cos \omega t = F(x)(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})/2$  ( $j = \sqrt{-1}$ ) のとき、音圧を  $p(x, t) = (\hat{p}(x, \omega)e^{j\omega t} + \hat{p}^*(x, \omega)e^{-j\omega t})/2$  ( $(\cdot)^*$  は複素共役を表す) と表して、随伴音圧を  $q(x, t) = \hat{q}(x, \omega)e^{j\omega t}$  と仮定すれば、次のような周波数応答に対する弱形式を得る。

$$(a(\Omega; \hat{p}, \hat{q}) + k^2 b(\Omega; \hat{p}, \hat{q})) + (a(\Omega; \hat{p}^*, \hat{q}^*) + k^2 b(\Omega; \hat{p}^*, \hat{q}^*)) = l(\Omega; \hat{q}) + l(\Omega; \hat{q}^*) \quad (\hat{p} - \hat{p}_0) + (\hat{p}^* - \hat{p}_0^*) \in P$$

$$\hat{p}_0 + \hat{p}_0^* \in P_0 \quad \forall \hat{q} + \hat{q}^* \in P \quad (10)$$

ただし、 $k = \omega/c$  である。

### 3. 二乗音圧勾配最小化問題

音源  $f(x, t)$  が変数分離型

$$f(x, t) = F(x)\phi(t) \quad x \in \Omega \quad t \in \mathbb{R} \quad (11)$$

で与えられた場合を仮定して、指定された部分領域  $\Omega_D \subset \Omega$  における二乗音圧勾配の時間平均

$$J(\Omega_D; p) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} a(\Omega_D; p, p) dt \quad (12)$$

を最小化する問題を考えよう。ただし、 $a(\Omega_D; \cdot, \cdot)$  は式 (5) の積分領域を変更した双 1 次形式である。

時間関数  $\phi(t)$  に関しては、次式の Wiener-Khintchine の関係で定義された自己相関関数  $C_{\phi\phi}(\tau)$  とパワースペクトル密度  $S_{\phi\phi}(\omega)$  が与えられていると仮定する。

$$C_{\phi\phi}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \phi(t)\phi(t+\tau) dt \quad (13)$$

$$S_{\phi\phi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{\phi\phi}(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (14)$$

このとき、式 (12) は、 $a(\Omega_D; \cdot, \cdot)$  の双線形性に注目して、Parseval の定理を用いれば、次式で書き換えられる。

$$J(\Omega_D; p) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\Omega_D; \hat{h}_p(x, \omega), \hat{h}_p(x, \omega)) S_{\phi\phi}(\omega) d\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \quad (15)$$

ただし、 $\hat{h}_p(x, \omega)$  および  $\hat{h}_q(x, \omega)$  は  $\phi(t)$  の Fourier 変換  $\hat{\phi}(\omega) = 1$  のときの音圧  $h_p(x, t)$  および随伴音圧  $h_q(x, t)$  (単位インパルス応答) の Fourier 変換である。

本論文では、領域の大きさを  $M_0$  以下に制限した下で、式 (12) あるいは (15) を最小化する次の問題を扱った。

$$\min_{\Omega \subset \mathbb{R}^n} J(\Omega; p) \text{ such that Eq. (10) at } \hat{\phi}(\omega) = 1$$

$$\text{in Eq. (11) and } M(\Omega) = \int_{\Omega} dx \leq M_0 \quad (16)$$

ただし、簡単のために、 $p_0(x, t) \neq 0$  の境界における法線方向への変動、および  $\Omega_D$  の変動は拘束されている仮定する。

Lagrange 乗数法 (随伴変数法) と物質導関数の公式を用いれば、この問題の形状勾配密度関数  $G$  (形状勾配関数  $G_V$ ) は次式となる。

$$G = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\omega} S_{\phi\phi}(\omega) d\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \quad (17)$$

$$G_{\omega} = -2\text{Re}[\hat{h}_{p,i} \hat{h}_{q,i} + k^2 \hat{h}_p \hat{h}_q - F \hat{h}_q] + \Lambda \quad (18)$$

ただし、随伴音圧の複素振幅 (Fourier 変換)  $\hat{q}(x, \omega)$  と領域の大きさ制約式 (16) に対する Lagrange 乗数  $\Lambda$  に対する最適性の必要条件 (Kuhn-Tucker 条件の一部) は次式となる。

$$(a(\Omega; \hat{h}_p, \hat{h}_q) + k^2 b(\Omega; \hat{h}_p, \hat{h}_q) - a(\Omega_D; \hat{h}_p, \hat{h}_p^*)) + (a(\Omega; \hat{h}_p^*, \hat{h}_q^*) + k^2 b(\Omega; \hat{h}_p^*, \hat{h}_q^*) - a(\Omega_D; \hat{h}_p^*, \hat{h}_p^*)) = 0$$

$$\forall \hat{h}_p + \hat{h}_p^* \in P \quad (19)$$

$$\Lambda(M(\Omega) - M_0) = 0, \quad M(\Omega) \leq M_0, \quad \Lambda \geq 0 \quad (20)$$

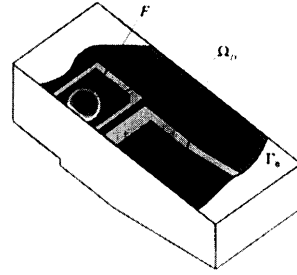


Fig. 1 Design problem of a simple concert hall

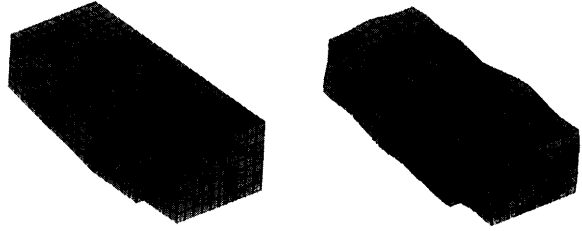


Fig. 2 Initial shape (left) and optimized shape (right)

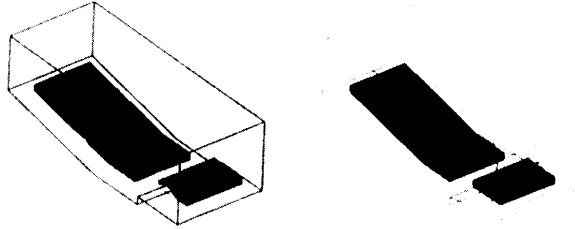


Fig. 3 Magnitude of sound pressure at 40 Hz for initial shape (left) and optimized shape (right)

形状勾配関数  $G_V$  が評価できれば、方法の適用が可能となる。

### 4. 解析例

コンサートホールを想定した問題設定を図 1 に示す。高さ 10m, 奥行 30m, 横幅 10m, ステージの高さ 1m とした。音速  $c=340$  m/s, 密度  $\rho=1.225$  kg/m<sup>3</sup> と仮定した。音源は、ステージの上 1.5m, ステージ背面から 3m, 横幅中央を中心とした半径 1m の球の表面上  $x$  に  $F(x) = 1$  Pa を与え、 $S_{\phi\phi}(\omega) = 1$  Pa ( $20 \text{ Hz} \leq \omega/(2\pi) \leq 40 \text{ Hz}$ ),  $S_{\phi\phi}(\omega) = 0$  Pa ( $\omega/(2\pi) \leq 20 \text{ Hz}$ ,  $40 \text{ Hz} \leq \omega/(2\pi)$ ) と仮定した。また、境界条件は全境界  $x \in \Gamma$  で  $g(x, t) = 0, t \in \mathbb{R}$ , と仮定した。音圧および随伴音圧の解析には汎用有限要素法・境界要素法プログラム LMS SYSNOISE Rev 5.4 を用いた。式 (17) の周波数領域積分は 5 Hz 刻みの階段近似で評価した。方法による領域変動は畔上研究室で開発した有限要素法プログラムを使用した。形状の解析結果を図 2 に示す。40 Hz のときの音圧振幅の分布を図 3 に示す。また、収束履歴は、体積一定の条件を満たしながら目的汎関数が単調に収束する結果となった。

### 文 献

- (1) 畔上秀幸. 領域最適化問題の 1 解法. 日本機械学会論文集 (A 編), Vol. 60, pp. 1479-1486, 1994.
- (2) 畔上秀幸. 形状最適化問題の解法. 計算工学, Vol. 2, pp. 239-247, 1997.