

511 線形弾性変形を利用したメカニズムの創生

Creation of Mechanism Using Linear Elastic Deformation

○正 畔上 秀幸 (豊橋技科大) 学 佐竹 晶宙 (豊橋技科大)
児玉 和美 (東レ)

Hideyuki AZEGAMI, Toyohashi University of Technology, 1-1 Hibarigaoka, Tempaku-cho, Toyohashi

Akihiro SATAKE, Toyohashi University of Technology

Kazumi KODAMA, Toray Industries, Inc.

This paper presents a numerical analysis method for boundary shape optimization problems of elastic continua to maximize the displacement on prescribed sub-boundaries by given external loads while maintaining stiffness. Mean displacement defined by integral of product of displacement and virtual boundary force on the prescribed sub-boundary is chosen as an objective functional. To maintain the stiffness, constraints for external works in two linear elastic problems are added to volume constraint. The shape gradient function of the problem is derived using the Lagrange multiplier method and the formula of material derivative. Reshaping was accomplished by the traction method. The Lagrange multipliers are determined based on the Kuhn-Tucker conditions by the Newton-Raphson method while the derivatives of the constraint functionals with respect to the Lagrange multipliers are evaluated using the finite differences. The presented method was applied to a three-dimensional gripper problem.

Key Words: Optimum Design, Numerical Analysis, Finite-Element Method, Traction Method

1. はじめに

線形弾性体の変形によって所望のメカニズムを実現するアイデアは製作やリサイクルの容易さにおいて優れている場合がある。特にマイクロマシンに対しては有効であると考えられる。本研究では、与えられた外力に対して所望の変形を最大限に生み出す線形弾性体の境界形状を求める問題に取り組んだ。本研究ではこの形状決定問題を、剛性に制約を付けた下で指定した部分境界の平均変位を最大化する問題として定式化した。解法には境界値問題の定義された領域を設計対象にした領域最適化問題の統一的な解法である力法⁽¹⁾を適用した。理論の詳細は前報⁽²⁾を参照されたい。本報では、3次元連続体に対しても解析可能であることを紹介する。

2. 線形弾性問題

外力に対して所望の変形を実現する問題を定式化するために、次に示す3つの線形弾性問題を準備する。

2.1 原問題 実際の外力が作用した場合の線形弾性問題である。部分境界 $\Gamma_0 \subset \Gamma$ 上の指定された方向では変位が拘束され、部分境界 $\Gamma_P \subset \Gamma$ 上の変位が拘束されていない方向に非零の境界力 P が作用すると仮定する。所望の変位は部分境界 $\Gamma_D \subset \Gamma$ 上の指定した方向で実現したいと仮定する。このときの変位 $u \in U$ は次の弱形式で与えられる。

$$a(\Omega; u, v) = l(\Omega; v) \quad \forall v \in U \quad (1)$$

ただし、 $a(\Omega; \cdot, \cdot)$, $l(\Omega; \cdot)$ および U は次のように定義する。

$$a(\Omega; u, v) = \int_{\Omega} C_{ijkl} u_{k,i} v_{j,l} dx \quad (2)$$

$$l(\Omega; v) = \int_{\Gamma_P} P_i v_i d\Gamma \quad (3)$$

$$U = \{u \in (H^1(\Omega))^n \mid \Gamma_0 \text{ 上の強制変位の方向を拘束}\} \quad (4)$$

C_{ijkl} , $i, j, k, l = 1, 2, \dots, n$, は剛性テンソルである。なお、 $(\cdot) \setminus (\cdot)$ は差集合を表す。また、本稿では、添字表示において総和規約と空間に関する偏微分表記法 $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial x_i$ を

使用する。 $H^m(\Omega)$ は m 階の導関数まで領域 Ω で2乗可積分な関数空間 (Sobolev 空間) を表す。

2.2 負荷境界拘束問題 剛性を評価するために次の問題を定義する。原問題の変位拘束に加えて、原問題で非零の境界力を作用させた方向にも変位を拘束し、所望の変位を実現したい部分境界 $\Gamma_D \subset \Gamma$ 上の指定した方向に反力を想定した非零の境界力 P_D が作用すると仮定した問題である。この問題における外力仕事を制限すれば変位評価境界近傍の剛性を確保できることになる。この問題の変位 $u_D \in U_D$ は次の弱形式で与えられる。

$$a(\Omega; u_D, v_D) = l_D(v_D) \quad \forall v_D \in U_D \quad (5)$$

ただし、 $l_D(\cdot)$ および U_D は次のように定義する。

$$l_D(\Omega; v) = \int_{\Gamma_D} P_{D,i} v_i d\Gamma \quad (6)$$

$$U_D = \{u_D \in (H^1(\Omega))^n \mid \Gamma_0 \text{ 上の強制変位の方向と} \\ \Gamma_P \text{ 上の非零境界力の方向を拘束}\} \quad (7)$$

2.3 変位評価境界拘束問題 さらに、剛性を評価するために別の問題を定義する。原問題の変位拘束に加えて、原問題で所望の変位を実現したい部分境界 Γ_D 上の指定した方向の変位も拘束した問題である。この問題の外力仕事を制限すれば負荷境界近傍の剛性を確保できることになる。このときの変位 $u_P \in U_P$ は次の弱形式で与えられる。

$$a(\Omega; u_P, v_P) = l(\Omega; v_P) \quad \forall v_P \in U_P \quad (8)$$

ただし、 U_P は次のように定義する。

$$U_P = \{u_P \in (H^1(\Omega))^n \mid \Gamma_0 \text{ 上の強制変位の方向と} \\ \Gamma_D \text{ 上の所望変位の方向を拘束}\} \quad (9)$$

3. 剛性を規定した変位最大化問題

本論文では、外力に対して所望の変形を実現する問題を、原問題の変位 u に仮想境界力 $P_W = P_{wnw}$ を乗じて規定部

分境界 Γ_D 上で積分した平均変位

$$E(\Omega; u) = \int_{\Gamma_D} Pw_i u_i d\Gamma \quad (10)$$

を最大化する問題 ($-E(u)$ を最小化する問題) として定式化する。その際、剛性を確保するために、負荷境界拘束問題の外力仕事 $l_D(u_D)$ および変位評価境界拘束問題の外力仕事 $l_P(u_P)$ をそれぞれ \bar{l}_D, \bar{l}_P 以下に制限する。さらに、体積も M を上回らないように制限する。この問題は、次のように定式化される。

$$\min_{\Omega \in \mathbb{R}^n} -E(\Omega; u) \quad \text{such that Eqs. (1), (5), (8) and} \quad (11)$$

$$l_D(\Omega; u_D) \leq \bar{l}_D \quad (12)$$

$$l(\Omega; u_P) \leq \bar{l}_P \quad (12)$$

$$M(\Omega) = \int_{\Omega} dx \leq \bar{M} \quad (13)$$

ただし、簡単のために、非零の境界力や変位拘束が与えられた境界では法線方向に形状変動しないと仮定する。

この問題の形状勾配密度関数 G は次のように得られる。

$$G = -C_{ijkl} u_{k,l} u_{i,j} - \Lambda_D C_{ijkl} u_{Dk,l} u_{Di,j} - \Lambda_P C_{ijkl} u_{Pk,l} u_{Pi,j} + \Lambda \quad (14)$$

ただし、外力仕事制約式 (11), (12) に対する Lagrange 乗数をそれぞれ Λ_D, Λ_P , 体積制約式 (13) に対する Lagrange 乗数を Λ とした。

本研究では、Lagrange 乗数 $\Lambda_D, \Lambda_P, \Lambda$ は次の Kuhn-Tucker 条件式 (15), (16), (17) を満たすように決定する必要がある。本論文では、それぞれの Lagrange 乗数に対する制約関数の感度を差分で評価して、それを用いた Newton-Raphson 法によって解いた⁽³⁾。

$$\Lambda_D (l_D(\Omega; u_D) - \bar{l}_D) = 0, \quad l_D(\Omega; u_D) - \bar{l}_D \leq 0, \quad \Lambda_D \geq 0 \quad (15)$$

$$\Lambda_P (l(\Omega; u_P) - \bar{l}_P) = 0, \quad l(\Omega; u_P) - \bar{l}_P \leq 0, \quad \Lambda_P \geq 0 \quad (16)$$

$$\Lambda (M(\Omega) - \bar{M}) = 0, \quad M(\Omega) \leq \bar{M}, \quad \Lambda \geq 0 \quad (17)$$

4. 解析例

図 1 に示すようなグリッパー問題を取り上げた。中央部の左側面 Γ_P に左側の固定端に向う力 $P(\Gamma_P)$ を作用させたときに右側先端部内面 Γ_D に発生する閉じようとする変位 $u(\Gamma_D)$ について平均変位 $E(u)$ を最大化する問題である。境界力 $P(\Gamma_P) = 1, P_D(\Gamma_D) = Pw(\Gamma_D) = 1$ を仮定した。領域変動は非零の境界力や変位拘束が与えられた方向と外側境界を完全拘束した。外力仕事や体積の制約値はすべて初期値で与えた。変位評価境界近傍の剛性だけを考慮した (式 (12) を無視した) 場合の結果を図 2 に、負荷境界近傍の剛性も同時に考慮した場合の結果を図 3 に示す。平均変位は、それぞれの場合に、初期形状のときの 4.02 倍および 1.50 倍に増加した。なお、両解析とも、Kuhn-Tucker 条件を満たす Lagrange 乗数が見付け出せなくなった時点で終了した。解析の収束条件に関しては、アルゴリズムの改善が必要である。

文 献

- (1) 畔上秀幸. 領域最適化問題の一解法. 日本機械学会論文集 (A 編), Vol. 60, pp. 1479-1486, 1994.
- (2) 畔上秀幸, 児玉和美. 変形の最大化を目指した形状最適化問題の解法. 日本計算工学会計算工学講演会論文集, Vol. 4, No. 1, pp. 5311-534, 1999.

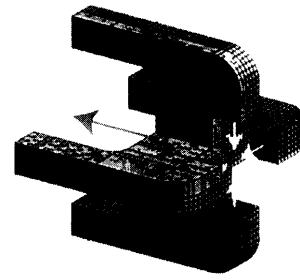


Fig. 1 Gripper problem

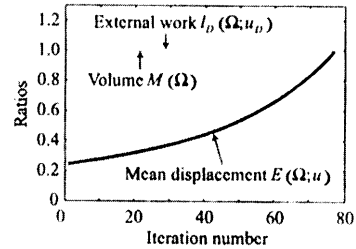
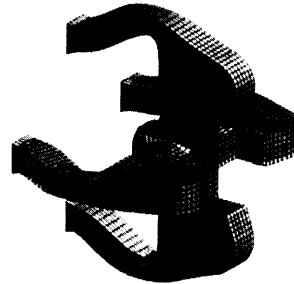


Fig. 2 Optimized shape (upper) without Eq. (12) and iteration history (lower)

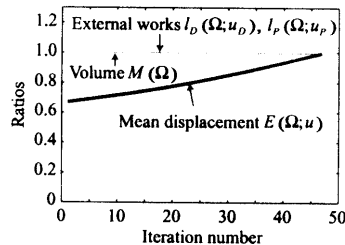
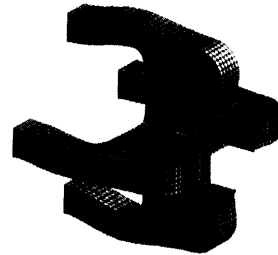


Fig. 3 Optimized shape (upper) and iteration history (lower)

- (3) 吳志強, 畔上秀幸, 下田昌利, 桜井俊明. 固有振動問題における領域最適化解析 (質量最小化問題). 日本機械学会論文集 (C 編), Vol. 61, pp. 2691-2696, 1995.