

# 311 規定した変形を生む異種材料境界面の形状設計

## Shape Design of Joint boundary between Different Materials Conforming to Prescribed Deformation

○ 正 畔上 秀幸 (名大院)

小山 悟史 (名大院)

Hideyuki AZEGAMI, Graduate School of Information Science, Nagoya University, 1 Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya 464-8601

Satoshi KOYAMA, Graduate School of Information Science, Nagoya University

**Key Words:** Shape Optimization, Inverse Problem, Joint Boundary, Finite-Element Method, Traction Method

### 1. はじめに

身障者用座位保持装置の設計を考えてみよう。座面形状を使用者の形状に合わせることは通常行われているが、使用者が着座した際の変形が使用者の運動機能や治療を考慮した望みの変形となるような工夫は設計者の勘に頼らざるを得なかった。

この保持部の構造を硬質材と軟質材の貼り合わせによって製作すると仮定して、異種材料の境界面形状は任意に決定できると考えれば、使用者が着座した際に望みの変形を生ずる境界面形状を見つける問題を提起することができる。この問題は一種の形状同定問題を形成する。すなわち、幾何学的非線形性あるいは材料非線形性を無視した簡略化を行えば、異種材料で構成された線形弾性体がある拘束条件の下で、ある部分境界に外力が作用したとき、指定した部分境界で指定した変位を生ずるように、異種材料の境界面形状を決定する形状同定問題を考えることができる。

本研究では、その形状同定問題を、指定した部分境界における指定した変位と実際の変位の 2 乗誤差積分を目的汎関数に選んだ異種材料境界面形状最適化問題として定式化し、手法<sup>(1),(2)</sup>による解法を開発した。本稿ではその解法と簡単な座位保持具の設計に適用した結果を紹介する。

### 2. 2種類の材料からなる線形弾性問題

硬質材の上に軟質材が接合された座位保持具を想定して、2種類の材料で構成された図1のような有界な  $d$  次元領域  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $\mathbb{R}$  は実数), その境界  $\Gamma$ , で定義された線形弾性体を考えよう。ここで、 $\Omega$  の部分領域  $\Omega_A$ , その境界  $\Gamma_A$ , は材料 A で構成され、残りの部分領域  $\Omega_B$ , その境界  $\Gamma_B$ , は材料 B で構成されていると仮定する。材料 A と材料 B の接合境界を  $\Gamma_{AB} = \Gamma_A \cap \Gamma_B$  とする。

この線形弾性体は、部分境界  $\Gamma_0$  で変位が拘束され、別の部分境界  $\Gamma_P$  に零でない境界力  $P = \{P_i\}_{i=1}^d : \Gamma_P \mapsto \mathbb{R}^d$  が作用したとき、変位  $u = \{u_i\}_{i=1}^d : \Omega \mapsto \mathbb{R}^d$  を生ずるものと仮定する。

この線形弾性問題の釣り合い方程式を変分形式で示すと次のようになる。

$$a_A(u, v) - h_A(u, v) + a_B(u, v) - h_B(u, v) = l(v) \quad \forall v \in U \quad (1)$$

ただし、 $\Omega_A$  と  $\Omega_B$  の値を区別する必要がある場合には上付きの A, B で区別することにして、ひずみ  $\epsilon_{ij}^m(u) = \frac{1}{2}(u_{ij}^m + u_{ji}^m)$  と応力  $\sigma_{ij}^m(u) = C_{ijkl}^m \epsilon_{ij}^m(u)$  ( $C_{ijkl}^m$  は剛性) ( $m = A, B$ ) を用いて、双 1 次形式  $a_m(\cdot, \cdot)$ ,  $h_m(\cdot, \cdot)$  ( $m = A, B$ ) および 1 次形式  $l(\cdot)$  を次のように定義する。

$$a_m(u, v) = \int_{\Omega_m} \sigma_{ij}^m(u) \epsilon_{ij}^m(v) dx \quad (2)$$

$$h_m(u, v) = \int_{\Gamma_{AB}} \sigma_{ij}^m(u) n_j^m v_i d\Gamma \quad (3)$$

$$l(v) = \int_{\Gamma_P} P_i v_i d\Gamma \quad (4)$$

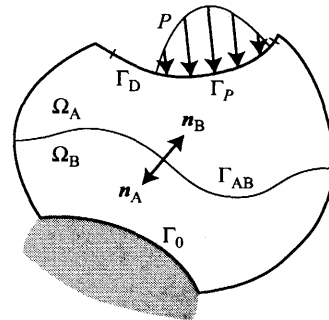


Fig. 1 Linear elastic problem consisting of two materials

領域  $\Omega_m$  の外向き単位法線を  $n^m = \{n_i^m\}_{i=1}^d$  ( $m = A, B$ ) とする。また、変位の拘束条件を満たす変位の集合  $U$  を次のように定義する。

$$U = \left\{ u \in (H^1(\Omega))^d \mid u = 0 \text{ on } \Gamma_0 \right\} \quad (5)$$

### 3. 境界面を設計対象とした変位規定問題

部分境界  $\Gamma_D$  (図1参照) 上で望みの変位  $u^D = \{u_i^D\}_{i=1}^d : \Gamma_D \mapsto \mathbb{R}^d$  が与えられたと仮定しよう。異種材料境界面  $\Gamma_{AB}$  を設計対象にして  $\Gamma_D$  上の  $u$  を  $u^D$  に近づける問題は、次のように定式化される。

$$\min_{\Gamma_{AB}, \alpha \in \mathbb{R}} \int_{\Gamma_D} (u - \alpha u^D) \cdot (u - \alpha u^D) d\Gamma \quad \text{such that Eq. (1)} \quad (6)$$

ただし、 $\alpha \in \mathbb{R}$  は  $u^D$  の大きさを任意にするために導入された。

この形状同定問題の形状勾配は随伴変数法によって導出される。Lagrange 乗数法の表現を用いて導出してみよう。この問題の Lagrange 乗数形式を次式で定義する。

$$L(u, v) = \int_{\Gamma_D} (u - \alpha u^D) \cdot (u - \alpha u^D) d\Gamma - a_A(u, v) + h_A(u, v) - a_B(u, v) + h_B(u, v) + l(v) \quad (7)$$

形状変動は  $\Gamma_{AB}$  のみで起こると仮定しよう。ただし、簡単のために、 $\Gamma_{AB}$  の境界は  $\Gamma_{AB}$  と外側境界  $\Gamma$  が直交したまま外側境界に沿って変動し、 $\Gamma$  は滑らかであると仮定する。そのような条件を満たす領域変動の速度  $V$  の集合を  $D$  とする。このとき、Lagrange

乗数形式の物質導関数は次式となる。

$$L = 2 \int_{\Gamma_D} (\mathbf{u} - \alpha \mathbf{u}^D) \cdot \mathbf{u}' d\Gamma - 2\alpha \int_{\Gamma_D} (\mathbf{u} - \alpha \mathbf{u}^D) \cdot \mathbf{u}^D d\Gamma - a_A(\mathbf{u}', \mathbf{v}) - a_A(\mathbf{u}, \mathbf{v}') + h_A(\mathbf{u}', \mathbf{v}) + h_A(\mathbf{u}, \mathbf{v}') - a_B(\mathbf{u}', \mathbf{v}) - a_B(\mathbf{u}, \mathbf{v}') + h_B(\mathbf{u}', \mathbf{v}) + h_B(\mathbf{u}, \mathbf{v}') + l(\mathbf{v}') + \int_{\Gamma_{AB}} (G_A \mathbf{n}^A + G_B \mathbf{n}^B) \cdot \mathbf{V} d\Gamma \quad \forall \mathbf{V} \in D \quad (8)$$

$$G_A = -\sigma_{ij}^A(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}^A(\mathbf{v}) + (\sigma_{ij}^A(\mathbf{u}) n_j^A v_i)_{,m} n_m^A + (\sigma_{ij}^A(\mathbf{u}) n_j^A v_i) \kappa^A \quad (9)$$

$$G_B = -\sigma_{ij}^B(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}^B(\mathbf{v}) + (\sigma_{ij}^B(\mathbf{u}) n_j^B v_i)_{,m} n_m^B + (\sigma_{ij}^B(\mathbf{u}) n_j^B v_i) \kappa^B \quad (10)$$

ただし、 $\kappa^m = n_{,i}^m$  ( $m = A, B$ ) は平均曲率の  $d-1$  倍である。また、 $(\cdot)' = (\cdot) - \nabla(\cdot) \cdot \mathbf{V}$  は形状導関数、 $(\cdot)$  は物質導関数を表す。外向き単位法線の境界以外への拡張は境界からの外向き距離関数の勾配が外向き単位法線になる関係を用いて拡張する。ここで、次の関係を用いれば、

$$\mathbf{n}^A = -\mathbf{n}^B, \quad \kappa^A = -\kappa^B, \quad \mathbf{v}^A = \mathbf{v}^B, \quad \sigma_{ij}^A n_j^A = -\sigma_{ij}^B n_j^B \quad (11)$$

式 (8) の最後の積分は次式となる。

$$\int_{\Gamma_{AB}} (G_A \mathbf{n}^A + G_B \mathbf{n}^B) \cdot \mathbf{V} d\Gamma = \int_{\Gamma_{AB}} G \mathbf{n}^A \cdot \mathbf{V} d\Gamma \quad (12)$$

$$G = -(\sigma_{ij}^A(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}^A(\mathbf{v}) - \sigma_{ij}^B(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}^B(\mathbf{v})) + \sigma_{ij}^A(\mathbf{u}) n_j^A (\varepsilon_{im}^A(\mathbf{v}) - \varepsilon_{im}^B(\mathbf{v})) n_m^A \quad (13)$$

式 (8) から、最適性の必要条件として、 $\mathbf{u}$  に対して式 (1) の関係を得る。また、 $\mathbf{v}$  に対して次式の随伴方程式を得る。

$$a_A(\mathbf{u}', \mathbf{v}) + a_B(\mathbf{u}', \mathbf{v}) - h_A(\mathbf{u}', \mathbf{v}) - h_B(\mathbf{u}', \mathbf{v}) = 2 \int_{\Gamma_D} (\mathbf{u} - \alpha \mathbf{u}^D) \cdot \mathbf{u}' d\Gamma \quad \forall \mathbf{u}' \in U \quad (14)$$

$\alpha$  に対して次式を得る。

$$\alpha = \frac{\int_{\Gamma_D} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^D d\Gamma}{\int_{\Gamma_D} \mathbf{u}^D \cdot \mathbf{u}^D d\Gamma} \quad (15)$$

したがって、式 (1), (14), (15) の解  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \alpha$  を用いたとき式 (13) の  $G$  は、 $\Gamma_{AB}$  上の  $\mathbf{n}^A$  を外向き単位法線としたときのこの問題に対する形状勾配密度の評価式を与える。

なお、有限要素法を用いた場合、随伴方程式 (14) は次のように近似される。

$$\left( \sum_e \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dx \right) \{\mathbf{v}\} = \left( 2 \sum_e \int_{\Gamma_D} [\mathbf{M}]^T [\mathbf{N}] d\Gamma \right) \{(\mathbf{u}) - \alpha (\mathbf{u}^D)\} \quad (16)$$

ただし、 $\Omega_e$  は有限要素  $e$  の部分領域、 $[\mathbf{B}]$  はひずみ-変位マトリックス、 $[\mathbf{D}]$  は剛性マトリックス、 $[\mathbf{M}]$  は形状関数、 $\{(\cdot)\}$  は  $(\cdot)$  の節点ベクトルを表す、 $(\cdot)^T$  は転置を表す。

形状勾配密度  $G$  が計算できれば、目的汎関数を最小化する滑らかな形状変動  $\mathbf{V}$  は力法<sup>(1),(2)</sup>を適用することで計算できる。

#### 4. 解析例

図 2 (a) に示すような硬質材と軟質材の貼り合わせからなる簡略化した座位保持具の有限要素モデル (四面体 1 次要素、節点数 15,488、要素数 67,126) を対象にして、使用者が着座した際のまっわり付く変形を抑えた異種材料境界面の解析例を紹介する。座位保持具モデルの底面を変位拘束部分境界  $\Gamma_0$  と仮定し、着座面 (図 2 (a) 中の太い実線) を境界力の作用する部分境界  $\Gamma_P$  と仮定した。境界力  $\mathbf{P}$  には、健康者が椅子に着座した際の圧力分布を圧力分布測定システムで計測し、合力が 350 [N] となるように換算することによって図 2 (b) のように与えた。変位を規定する部分境界  $\Gamma_D$  には  $\Gamma_P$  を含む保持具の内面 (図 2 (a) 中の破線) を仮定し、望みの変位  $\mathbf{u}^D$  には、まっわり付く変形を含まない上下方向の一

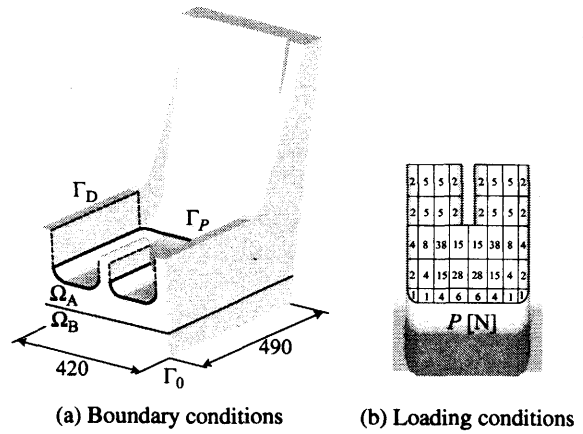


Fig. 2 Chair model

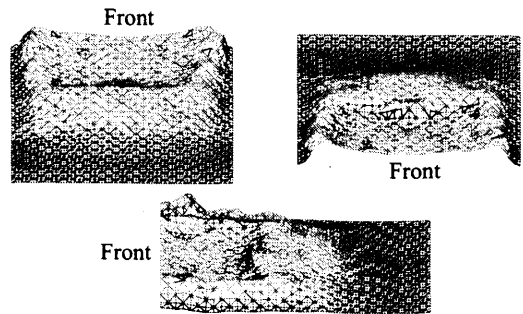


Fig. 3 Optimized joint boundary between two materials

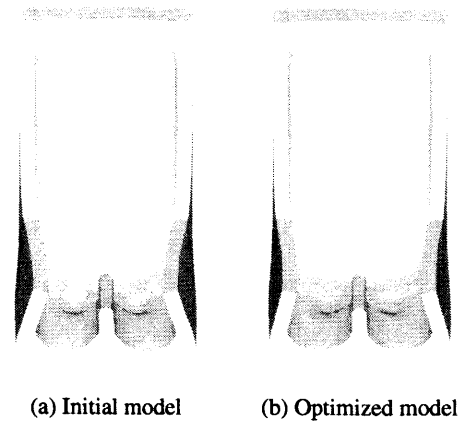


Fig. 4 Deformed shapes

様な変位を仮定した。硬さの異なる 2 種類の材料の弾性定数は、縮小模型を実際に制作すること考慮して、2 種類のシリコンゴムの引張り試験の結果から、軟質材 (材料 A) の Yung 率と Poisson 比を 0.28 [MPa], 0.33、硬質材 (材料 B) の Yung 率と Poisson 比を 0.455 [MPa], 0.41 と仮定した。

最適化された異種材料境界の形状を図 3 に示す。図 4 は着座時の変形を拡大した様子を示す。目的汎関数である  $\Gamma_D$  における変位の 2 乗誤差積分は初期形状のときに比べて 54% に減少した。実際に縮小模型を制作し、治具による負荷を与えたところ同様な変形が生ずることを確認した。

#### 文献

- (1) 畔上秀幸. 形状最適化問題の解法. 計算工学, Vol. 2, No. 4, pp. 239-247, 1997.
- (2) 畔上秀幸. 形状最適化問題の解法. 応用数理, Vol. 11, No. 3, pp. 49-52, 2001.