

## 403 脊柱有限要素モデルの個体別モデリング

## Individual modeling of spine finite-element models

○ 正 笹岡 竜 (名古屋大学)

正 畔上 秀幸 (名古屋大学)

Ryu Sasaoka, Nagoya University, 1 Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya 464-8601  
Hideyuki AZEGAMI, Nagoya University*Key Words:* Shape Optimization, Finite-Element Method, Traction Method, Morphing Method, Fitting Method

## 1. はじめに

近年, 有限要素法を用いて人体の振舞いや疾患の病態あるいは成因を解析する試みがなされている. この試みを臨床に応用するためには, 患者固有の有限要素モデルを構築する個体別モデリングの方法を見出すことが課題となる.

これまで, 提案されてきた個体別モデリングの主な方法は, ボクセル要素を直接解析に用いる方法, CT などから得られる二次元断層画像から輪郭線を抽出し, それらの積層によって表面データを作成し, 内部を自動メッシュの方法で四面体に分割する方法, 同様に作成された表面の内部に核となる有限要素モデルを作成し, それを一律な力で膨張させながら, 表面での接触判定によって形状拘束を加えていく方法, ベーシスベクトルを利用する方法であった.

一方, 我々は脊柱特発性側彎症の成因に関する研究において, 市販の骨格表面データから脊柱有限要素モデルを構築し, それを用いた解析によって, 脊柱特発性側彎症の力学的成因が椎体の成長に伴う 4 次あるいは 6 次の座屈現象であるとする仮説を示してきた. さらに, この座屈説に基づけば, 最適な治療部位の特定も最適化理論の適用によって可能となることを示してきた.

この成因や治療部位の特定に関する成果を臨床に応用する場合, 座屈解析が可能な脊柱有限要素モデルを患者固有の病態にごとに作成する必要がある. しかしながら, 既存の方法では, 形状精度の高いモデルを構築するためには大量の CT データが必要であること, あるいは大規模なモデルになってしまうこと, 構造化されたメッシュではないこと, 接触判定が容易でないこと, 形状の自由度が制限されることなどの問題がある.

本論文では, 脊柱特発性側彎症患者への適用を目指して, 座屈解析で実績のある脊柱有限要素モデルを変形させることで患者固有の脊柱有限要素モデルを作成するための 2 つの方法を提案する. それらを本稿ではモーフィング法とフィッティング法と呼ぶ.

## 2. モーフィング法

既存の有限要素モデル上で指定した有限個の節点が参照領域上のそれぞれの目標位置に移動する形状最適化問題を考えよう. 本論文では, 次のようなモーフィング問題の形状勾配を用いた方法によって有限要素モデルを変形させる方法をモーフィング法として提案する.

**2.1 モーフィング問題** 有界な領域  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n = 2, 3$ ), その境界  $\Gamma$ , で定義された連続体が, 参照領域  $\Omega^{\text{ref}} \subset \mathbb{R}^n$  に一致するように変動させたい. 特に, 連続体内の指定した  $q$  個の点  $\mathbf{x}_k \in \Omega$  ( $k = 1, 2, \dots, q$ ) はそれぞれ参照領域内の点  $\mathbf{x}_k^{\text{ref}} \in \Omega^{\text{ref}}$  ( $k = 1, 2, \dots, q$ ) に移動すること, 連続体の領域の大きさが参照領域の大きさと一致するが必須であると仮定する. このときの連続体の形状最適化問題は次のように定式化される.

$$\min_{\Omega \subset \mathbb{R}^n} \int_{\Omega} \sum_{k=1}^q \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \left\| \mathbf{x}_k^{\text{ref}} - \mathbf{x} \right\|^2 dx \quad (1)$$

$$\text{such that } \int_{\Omega} dx = \int_{\Omega^{\text{ref}}} dx \quad (2)$$

$\delta(\cdot)$  は Dirac の  $\delta$  関数である.

この問題に Lagrange 乗数法を適用して形状勾配を導出する. 体積制約に対する Lagrange 乗数  $\Lambda$  を用いて, 本問題の Lagrange 乗数形式  $L$  は次式のように表せる.

$$L = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^q \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \left\| \mathbf{x}_k^{\text{ref}} - \mathbf{x} \right\|^2 dx + \Lambda \left( \int_{\Omega} dx - \int_{\Omega^{\text{ref}}} dx \right) \quad (3)$$

また,  $L$  の領域変動に対する物質導関数  $\dot{L}$  は次式のようになる.

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \int_{\Omega} \sum_{k=1}^q \dot{\delta}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \left\| \mathbf{x}_k^{\text{ref}} - \mathbf{x} \right\|^2 dx \\ &\quad - 2 \int_{\Omega} \sum_{k=1}^q \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) (\mathbf{x}_k^{\text{ref}} - \mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}} dx \\ &\quad + \Lambda \int_{\Gamma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{V} d\Gamma + \dot{\Lambda} \left( \int_{\Omega} dx - \int_{\Omega^{\text{ref}}} dx \right) \\ &= -2 \int_{\Omega} \sum_{k=1}^q \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) (\mathbf{x}_k^{\text{ref}} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{V} dx \\ &\quad + \Lambda \int_{\Gamma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{V} d\Gamma + \dot{\Lambda} \left( \int_{\Omega} dx - \int_{\Omega^{\text{ref}}} dx \right) \end{aligned} \quad (4)$$

ここで,  $(\cdot)$  は物質導関数,  $\boldsymbol{\nu}$  は外向き法線ベクトル  $\mathbf{V}$  は領域変動に対する速度である. 式 (4) において,  $\dot{\delta}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) = 0$  と,  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{V}$  の関係式を用いた.

領域の大きさ制約を満たすように  $\Lambda$  が決定されていれば, Lagrange 汎関数の物質導関数は次式のようになる.

$$\begin{aligned} \dot{L}|_{\Lambda} &= \int_{\Omega} \mathbf{G}_0 \cdot \mathbf{V} dx + \int_{\Gamma} \mathbf{G}_1 \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{V} d\Gamma \\ &\equiv (\mathbf{G}_0, \mathbf{V}) + \Lambda (\mathbf{G}_1 \boldsymbol{\nu}, \mathbf{V}) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\mathbf{G}_0 \equiv -2 \sum_{k=1}^q \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) (\mathbf{x}_k^{\text{ref}} - \mathbf{x}), \quad \mathbf{G}_1 \equiv 1 \quad (6)$$

ここで,  $\mathbf{G}_0$  は目的汎関数の形状勾配,  $\mathbf{G}_1 \boldsymbol{\nu}$  は領域の大きさに対する形状勾配を与える.

**2.2 法を用いたモーフィング法** モーフィング問題の形状勾配を用いた方法で形状修正を行えば, 目的関数は減少することが予想される. しかしながら,  $\mathbf{G}_0$  が Dirac の  $\delta$  関数として与えられているために, 法を 1 回適用しただけでは滑らかな境界は得られない. 実際, 図 1(a) のように両端固定の境界条件で第 8 胸椎を右方へ移動する問題では, 法によって得られる形状は図 1(b) となる.

そこで, 次のようにバネ付力法<sup>(1)</sup>を繰り返し適用する方法を提案する. ただし,  $\Delta s$  は 1 回の形状更新の大きさを微小変形の範囲に抑えるための増分,  $\alpha$  は境界のバネ定数である.

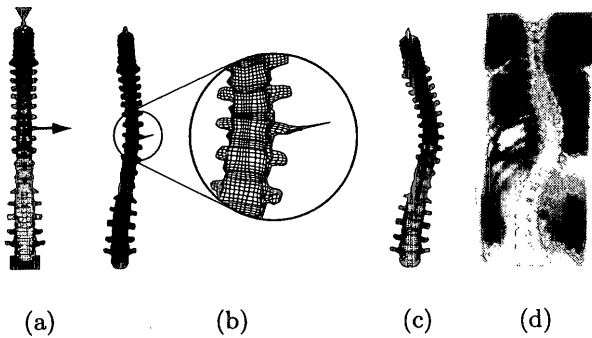


Fig. 1 Morphing of a finite-element model of the spine to agree with that of a patient with idiopathic scoliosis

- (i)  $V_0^{[1]}, V_1 \in D$  を次式で解く.  
 $a(V_0^{[1]}, y) + \alpha \langle (V_0^{[1]} \cdot \nu) \nu, y \rangle = -\langle G_0, y \rangle \quad \forall y \in D,$   
 $a(V_1, y) + \alpha \langle (V_1 \cdot \nu) \nu, y \rangle = -\langle G_1, y \rangle \quad \forall y \in D.$
- (ii)  $m = 2$  として,  $V_0^{[m-1]}$  の  $\Gamma$  上トレースを  $G^{[m]}$  として,  $V_0^{[m]} \in D$  を次式で解く.  
 $a(V_0^{[m]}, y) + \alpha \langle (V_0^{[m]} \cdot \nu) \nu, y \rangle = \langle G^{[m]}, y \rangle \quad \forall y \in D.$   
 $m$  を  $m+1$  にしてこのステップを十分滑らかな形状が得られるまで繰り返す.
- (iii) Lagrange 乗数  $\Lambda$  を次式で計算し,  $I + \Delta s (V_0^{[m]} + \Lambda V_1)$  ( $I$  は恒等写像) で形状を更新する.  

$$\Lambda = - \frac{\langle G_1 \nu, \Delta s V_0^{[m]} \rangle + \left( \int_{\Omega} dx - \int_{\Omega^{ref}} dx \right)}{\langle G_1 \nu, \Delta s V_1^{[m]} \rangle}.$$
 ステップ (i) に戻り, 目的汎関数が十分小さくなるまでこの形状更新を繰り返す.

ただし, 双一次形式  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  と  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は式 (5) の定義に従う. 双一次形式  $a(\cdot, \cdot)$  は次式で定義する.

$$a(V, y) \equiv \int_{\Omega} C_{ijkl} V_{k,l} y_{i,j} dx \quad V, y \in D \quad (7)$$

ここで,  $\{C_{ijkl}\}_{i,j,k,l=1,2,\dots,n}$  は楕円性を有した剛性テンソルである. 式 (7) において, 総和規約と偏微分表記法  $(\cdot)_{,i} \equiv \partial(\cdot)/\partial x_i$  を使用した. 集合  $D$  は次のように定義される.

$$D = \{V \in (H^1(\Omega^n))^n \mid \text{shape constraints}\}. \quad (8)$$

**2.3 解析例** 図 1(a) の問題に力法を 2 回適用した結果を図 1(c) に示す. 図 1(d) は参照した患者 X 線写真と重ね合わせた図である. この結果は 1 点のみの移動であったが, 移動点の数を増やすことによって一致精度を高めることが可能である.

### 3. フィッティング法

既存の有限要素モデルが参照領域に向かって変動するような形状最適化問題を考えよう. 参照領域は CT データのようなボクセル形式で記述されている場合も許容する. 本論文では, 次のようなフィッティング問題の形状勾配を用いた力法によって有限要素モデルを変形させる方法をフィッティング法として提案する.

**3.1 フィッティング問題** 有界な領域  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n = 2, 3$ ), その境界  $\Gamma$ , で定義される連続体が, 参照限界領域  $\Omega^{limit} \subset \mathbb{R}^n$  に内包され, 参照領域  $\Omega^{ref} \subset \Omega^{limit} \subset \mathbb{R}^n$ , その境界  $\Gamma^{ref}$ , に一致させる形状最適化問題は次のように定式化される.

距離関数  $d(x) : \Omega^{limit} \ni x \mapsto d \in \mathbb{R}$  を  $x \in \Omega^{limit}$  における  $\Gamma^{ref}$  からの距離を与える関数と定義して, 符号付距離関数  $\phi(x) : \Omega^{limit} \ni x \mapsto \phi \in \mathbb{R}$  を次式で定義する.

$$\phi(x) \equiv \chi_{\Omega^{ref}}(x)d(x), \quad \chi_{\Omega^{ref}}(x) = \begin{cases} -1 & (x \in \Omega^{ref}) \\ 1 & (x \notin \Omega^{ref}) \end{cases} \quad (9)$$

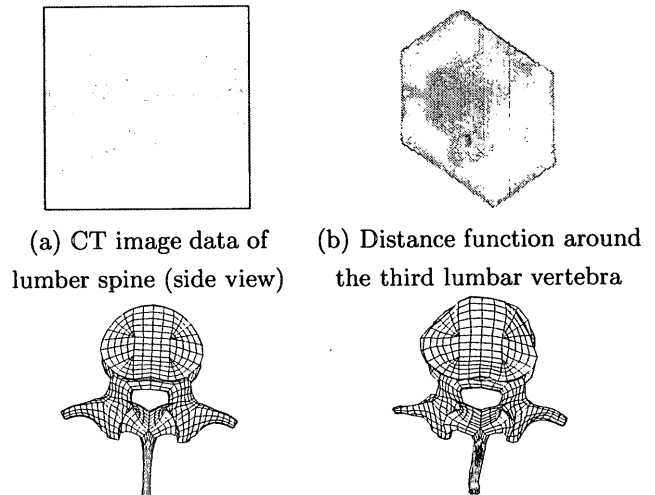


Fig. 2 Fitting a finite-element model of the third lumbar vertebra to a CT image data

フィッティング問題は  $\phi(x)$  を用いて次のように定式化される.

$$\min_{\Omega \subset \mathbb{R}^n} \left\{ J \equiv \int_{\Omega} \phi(x) dx \right\}. \quad (10)$$

領域変動に伴う目的汎関数の導関数  $J$  は, 物質導関数の公式を用いて次式となる.

$$J = \int_{\Gamma} \phi(x) \nu \cdot \nabla d \Gamma \equiv \langle G \nu, V \rangle, \quad G \equiv \phi(x) \quad (11)$$

ここで,  $G \nu$  はこの問題の形状勾配である.

**3.2 力法を用いたフィッティング法** フィッティング問題の形状勾配  $\phi(x) \nu$  は, 参照領域の境界  $\Gamma^{ref}$  が区分的に滑らかであれば, 区分的に滑らかになる. したがって,  $\Omega^{ref}$  が凸でなくても  $\Omega$  との距離が十分小さければ, 負の形状勾配の方向に境界を移動していくことで, 滑らかさが保持されながら収束すると予想される. しかしながら,  $\Omega^{ref}$  がボクセル形式で記述され, 距離をイメージデータ処理によりボクセルごとの離散値で評価した場合には,  $\phi(x)$  が階段状関数で与えられることになる.

そこで, 次のように力法を適用する方法を提案する.

- (i) ボクセルイメージデータの各断面ごとに輪郭抽出を行い, 輪郭となるボクセルに距離関数  $d = 0$  を代入する.
- (ii)  $d = 0$  のボクセルに隣接したボクセルに距離関数  $d = 1$  を代入する.  $d = 1$  のボクセルに隣接したボクセルに距離関数  $d = 2$  を代入する. 以下同様に, すべてのボクセルが距離関数の値を持つまで繰り返す.
- (iii) 有限要素モデルの変動速度  $V \in D$  を次式で解く.  $a(V, y) + \alpha \langle (V \cdot \nu) \nu, y \rangle = \langle \chi_{\Omega^{ref}}(x)d(x), y \rangle \quad \forall y \in D.$  適当な増分  $\Delta s$  を用いて,  $I + \Delta s V$  で形状を更新する. この形状更新を有限要素モデルの形状がボクセルデータイメージの輪郭に一致するまで繰り返す.

**3.3 解析例** フィッティング法を用いて第三腰椎の有限要素モデルを患者 CT 画像にフィッティングさせた解析例を図 2 に示す. 本解析において, 有限要素モデルの皮質骨部分を  $\Omega$  として仮定し, 海綿骨部分は皮質骨の形状修正に伴って変形させた.

### 文 献

- (1) 竹内謙善, 畔上秀幸. 力法による形状最適化スキームにおける収束性の改善. 日本機械学会 2001 年度年次大会講演論文集, Vol. 5, pp. 39-40, 2001.