

1448 脊柱特発性側彎症の治療法に関する検討 (座屈説に基く感度解析)

Study on Treatment with Respect to Idiopathic scoliosis
(Sensitivity Analysis based on Buckling Theory)

○正 竹内 謙善 (豊橋技科大院) 学 笹岡 竜 (豊橋技科大院)
正 畔上 秀幸 (豊橋技科大) 川上 紀明 (名城病院)

Kenzen TAKEUCHI, Ryu SASAOKA, Graduate school of Toyohashi University of Technology,
1-1 Hibarigaoka, Tempaku-cho, Toyohashi
Hideyuki AZEGAMI, Toyohashi University of Technology
Noriaki Kawakami, Meijyo Hospital

In the previous work, the authors presented a hypothesis using numerical simulations with a finite element model of spine that thoracic idiopathic scoliosis is a buckling phenomenon of the fourth mode induced by growth of the thoracic vertebral bodies. In this study, a sensitivity function with respect to the maximization problem of the critical growth of thoracic vertebral bodies to the fourth buckling mode was derived based on the Lagrange multiplier method. Accepting the buckling hypothesis, the numerical result of the sensitivity function denotes that the high parts in sensitivity function indicate significant parts to prevent the occurrence of thoracic idiopathic scoliosis.

Key Words: Sensitivity Analysis, Buckling, Finite Element Method, Medical Engineering

1. はじめに

脊柱の生理的彎曲に異常が生じ、側方に彎曲する疾患は側彎症と呼ばれる。その中でも特に脊柱に関連する組織に際立った異常が認められないにも関わらず思春期に発症する側彎症は(思春期型の)特発性側彎症に分類される。側彎症の治療は側彎変形の矯正と進行の抑制を目的として、軽度の場合には装具治療、より重度の場合に対しては手術治療が行われる。手術治療ではある範囲の脊椎が固定されるが、固定部位の成長停止の問題等を考慮すると最小限度の固定部位で十分な治療効果を得ることが望まれている。

著者らは脊柱有限要素モデルを用いた座屈解析を通して、思春期特発性側彎症の成因は胸椎椎体の成長に伴う4次モード(あるいは側屈の2次モード)の座屈現象であるとする仮説(座屈説)を提唱した⁽¹⁾。一方、著者らは連続体の形状最適化問題の解法として方法を提案し、線形弾性体の外力に対する剛性最大化問題、座屈荷重最大化問題等に適用した⁽²⁾。方法は領域変動を写像で表現した場合の感度関数(形状勾配関数)に基いて形状を更新する手法である。

本研究では脊柱有限要素モデルを用いて4次座屈モードに対応する座屈荷重の最大化問題の感度関数を求めた。座屈説に基けば、感度の高い部位を補強することにより、特発性側彎症の力学的成因である座屈現象を効果的に抑制できると考えられる。従って、求められた感度分布より、特発性側彎症の効果的な治療法を検討する上での有益な情報が得られることが期待できる。

2. 座屈荷重最大化問題

領域 $\Omega \in R^n, n = 2, 3$ とその境界 Γ で定義される線形弾性連続体が、1媒介変数写像族 $T_s(\cdot)$ を用いて、 $T_s(\Omega) \equiv \Omega_s, T_s(\Gamma) \equiv \Gamma_s$ に変動すると仮定する。

胸椎椎体の成長をその線形弾性体に与えられる熱ひずみ ε^B と仮定すると、座屈荷重最大化問題は以下のように定式化される。

$$\min_{T_s \in D} -\zeta \text{ such that} \quad (1)$$

$$a(\mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{v}^{(0)}) = a_\varepsilon(\varepsilon^B, \mathbf{v}^{(0)}), \quad \mathbf{u}^{(0)} \in U, \forall \mathbf{v}^{(0)} \in U \quad (2)$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \zeta d(\mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{u} \in U, \forall \mathbf{v} \in U \quad (3)$$

ただし、双一次形式 $a(\cdot, \cdot), a_\varepsilon(\cdot, \cdot), d(\cdot, \cdot, \cdot)$ は次式で定義する。

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_s} e_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j} dx \quad (4)$$

$$a_\varepsilon(\varepsilon^B, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_s} e_{ijkl} \varepsilon_{kl}^B v_{i,j} dx \quad (5)$$

$$d(\mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_s} e_{ijkl} u_{k,l}^{(0)} u_{m,i} v_{m,j} dx \quad (6)$$

式(1)は座屈荷重係数の負値、式(2)は初期変位 $\mathbf{u}^{(0)}$ の釣り合い方程式の弱形式、式(3)は座屈モードを \mathbf{u} とする座屈に対する固有値方程式の弱形式である。 $\mathbf{v}^{(0)}, \mathbf{v}$ は、 $\mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{u}$ に対する随伴関数(随伴初期変位と随伴座屈モード)である。なお、本稿ではボールド体によるベクトル表示と添字表示 $(\cdot)_i$ を併用し、添字表記では総和規約と空間に関する偏微分表記法 $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial x_i$ を使用する。

この問題にLagrange乗数法を適用すると、Lagrange乗数形式 $L(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{v}^{(0)}, T_s)$ は次式で与えられる。

$$L = -\zeta - a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \zeta d(\mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{v}^{(0)}) - a_\varepsilon(\varepsilon^B, \mathbf{v}^{(0)}) \quad (7)$$

領域変動に対する Lagrange 乗数形式の停留条件は以下のように表される。

$$a(u, v') + \zeta d(u^{(0)}, u, v') = 0, \forall v' \in U \quad (8)$$

$$a(u', v) + \zeta d(u^{(0)}, u', v) = 0, \forall u' \in U \quad (9)$$

$$d(u^{(0)}, u, v) = -1 \quad (10)$$

$$a(u^{(0)}, v^{(0)'}) = a_\epsilon(\epsilon^B, v^{(0)'}) , \forall v^{(0)' } \in U \quad (11)$$

$$a(u^{(0)'}, v^{(0)}) = \zeta d(u^{(0)'}, u, v) , \forall u^{(0)' } \in U \quad (12)$$

$$l_G(V) = 0 \quad (13)$$

ただし、 $l_G(\cdot)$ は次式で定義される。

$$l_G(V) = \int_{\Gamma_s} G n_m V_m d\Gamma_s \quad (14)$$

$$G = -e_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j} - \zeta e_{ijkl} u_{k,l}^{(0)} u_{m,i} v_{m,j} + e_{ijkl} u_{k,l}^{(0)} v_{i,j} - e_{ijkl} \epsilon_{kl}^{(0)} v_{i,j} \quad (15)$$

n は外向き単位法線ベクトルである。式 (2) および式 (3) を満足するように、 $u, u^{(0)}$ を決定すれば、式 (8) および式 (11) が成立する。式 (8) と式 (9) を比較すると、 $u = v$ が成立している。式 (10) は座屈モード u の正規化条件を表し、式 (12) は $v^{(0)}$ に関する随伴方程式を表している。

式 (8) から (12) を満足するように、 $u^{(0)}, v^{(0)}, u, v, \zeta$ を決定すれば、領域変動に対する Lagrange 乗数形式の導関数は次式で与えられる。

$$\dot{L} \Big|_{u^{(0)}, v^{(0)}, u, v, \zeta} = l_G(V) \quad (16)$$

ここで、 V は領域変動に関する速度である。 Gn はその係数関数となっていることから、この問題の形状勾配関数であると言える。また、スカラー関数 G は形状勾配密度関数と呼ばれる。

3. 解析結果

感度解析には節点数 84603、要素数 68582 の胸郭付脊柱有限要素モデルを用いた。本研究では仙椎を完全拘束として、第 4 胸椎から第 10 胸椎の椎体が成長した際の 4 次座屈モードを解析対象とした。図 2(左) に解析対象のモードを示す。このモードは第 7 胸椎を頂椎とする側方の彎曲で、臨床で多く見られる胸椎型の側彎変形と良く一致している。座屈の支配方程式 (2)(3)、および随伴方程式 (12) の解析には汎用有限要素法プログラム (MSC/NASTRAN v.70) を使用した。

図 1 に、感度解析で得られた形状勾配密度関数 G の分布を示す。この結果より、椎間板、椎間関節、肋椎・肋横突関節、で感度が高いことがわかる。これらの部位について、各脊椎レベルで積分した値を図 2(右) に示す。この図は頂椎 (第 7 胸椎) 付近で感度が高いことを示しており、頂椎近傍の補強が座屈の抑制に効果があることを示唆している。

4. おわりに

本研究では特異性側彎症の成因と考えられている胸椎椎体の成長に伴う 4 次座屈モードを対象として、座屈荷

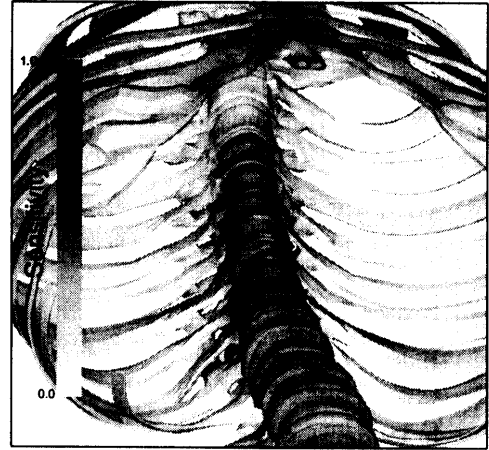


Fig. 1 Distribution of sensitivity function for fourth buckling mode with T4-T10 growth

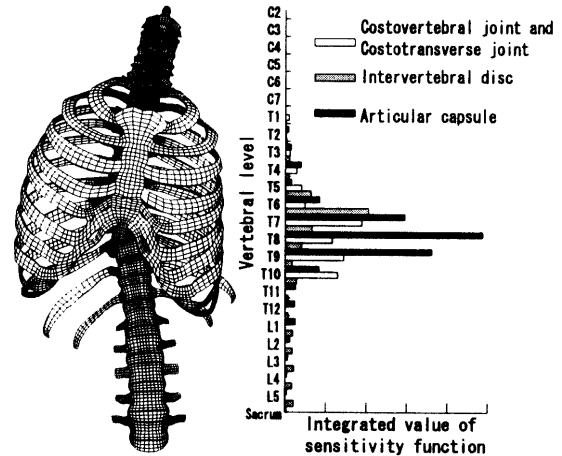


Fig. 2 Fourth buckling mode with T4-T10 growth (left) and integrated values of sensitivity function in each component for the mode (right)

重最大化問題の形状勾配関数を求めた。その結果、座屈を抑制するためには頂椎近傍の椎間板、椎間関節、肋椎・肋横突関節の補強が有効であることが示唆された。今後は、本研究での感度解析手法とその結果をもとに、特異性側彎症の治療方法についてより具体的な検討を行う必要がある。

文 献

- (1) H. Azegami, S. Murachi, J. Kitoh, Y. Ishida, N. Kawakami, and M. Makino. Etiology of idiopathic scoliosis: Computational study. *Clinical Orthopaedics and Related Research*, No. 357, pp. 229-236, 1998.
- (2) H. Azegami, Y. Sugai, and M. Shimoda. Shape optimization with respect to buckling. In *Computer Aided Optimization Design of Structures VI*, pp. 57-66. WIT Press, Southampton, 1999.