

主 論 文

報告番号※甲第 461 号

初期ねじれを有する各種断面
形の棒の引張りおよびねじり

安 田 仁 彦



初期ねじれを有する各種断面形の棒の

引張りおよびねじり

安田 仁彦

名古屋大学図書	
和	474228

目 次

第1章	緒 論	1
第2章	初期ねじれと有する円形 断面棒の引張りおよびねじり	4
第1節	引張り	4
第2節	ねじり	22
第3章	初期ねじれと有する長方形 断面棒の引張りおよびねじり	35
第1節	引張り	35
第2節	ねじり	48
第4章	初期ねじれと有する二軸対称 断面棒の引張りおよびねじり	57
第1節	引張り	57
第2節	ねじり	70
第5章	初期ねじれと有する長方形 断面棒の引張りおよびねじり に関する光弾性実験	79
第1節	引張り	79
第2節	ねじり	89
第6章	結 論	99

第 1 章 緒 論

初期ねじれを有する一様な断面の棒の強度に関する研究は、タービン・圧縮機の翼、航空機のプロペラ、船のスクリューなどの機械部品や構造要素の設計資料を得るための基礎的な研究として工学上重要なものである。したがって、この種の問題は従来多くの研究者によって理論的に取扱われてきた。円形断面棒の引張りおよびねじりに対しては、初期ねじれのない場合を扱った久保の研究⁽¹⁾、⁽²⁾があり、薄肉の十字形断面棒の曲げに対しても、断面の主軸の曲げを初期ねじれの量で補正して求めた Zickel の近似解⁽³⁾、断面のねじれ変形との相互作用を考慮しエネルギー法によって導いた Maunder の近似解⁽⁴⁾などがある。また、長方形断面棒の曲げに対しても、薄肉の弾性かく理論を応用して近似的に扱った Maunder と Reissner の研究⁽⁵⁾、円形断面棒の曲げ問題の解を二重振動法によって導いた清家の研究⁽⁶⁾などが挙げられる。しかし、これらの研究のほとんどが、初期ねじれ量がきわめてわずかな場合を扱っており、また、特定の断面個々について解かれたものであって断面形状の変化が応力および変形に及ぼす影響について検討を加えた研究はあまり見当たらない。さらに、この種の問題に対する実験的研究はほとんど報告されていないようである。

この論文は、初期ねじれを有する各種断面形の棒が引張りおよびねじれを受けるときの場合の応力および変形を理論的ならびに実験的に解析し、初期ね

じれ量が応力および変形に及ぼす影響を詳細に検討したもので、上述の機械部品・構造要素の設計に関する基礎的な資料として有用なものである。

第2章ではだ円形断面棒の引張りおよびねじり問題を理論的に解析した。この問題は既に大久保⁽¹⁾が取扱っているが、初期ねじれが十分小さいものと仮定して基礎方程式の簡略化を行ない、閉じ型の解を導いた。これに対して、この章では初期ねじれ量をパラメータと可変級数の形で解を導き、初期ねじれ量の広い範囲にわたって十分な精度を持つ結果を得ることができた。

第3章では長方形断面棒の問題を理論的に解析した。この問題に対する従来の研究としては、だ円形断面の解を近似的に細長い長方形断面の解に適用した大久保の結果⁽¹⁾があるにすぎない。本章では一般の長方形断面の棒に対して棒の側面における境界条件を厳密に満足する解を導いた。しかしながら計算が非常に複雑になるため、初期ねじれ量が十分小さいものと仮定し、基礎方程式を簡略化して取扱った。

第4章では二つの対称軸を持つ各種断面の棒の問題を理論的に解析した。解の誘導には初期ねじれ量および断面の主軸の比をパラメータと可変二重摂動法を採用し、細長い断面に適用できる近似解を導いた。この解は初期ねじれ量が比較的大きい場合にも実用上十分な精度を持つばかりでなく、二つの対称軸を持つ各種断面に対して容易に適用することができて便利である。具体例としてだ円形、長方形およびひし形断面の棒の応力を求め、だ円形断面および長方形断面についてそれぞれ第2章および第3章の結果と比較を行った。

第5章では細長い長方形断面棒の引張りおよびねじり問題を凍結法光弾性実験によって三次元的に解析した。エポキシ樹脂を素材として用い、注型によって初期ねじれを有しかつ初期応力の存在しない試験片を製作した。初期ねじれ量および断面の寸法を種々変えて断面の境界における応力を測定し、第3章および第4章の理論結果と比較して理論解の適用限界を検討した。

第2章 初期ねじれを有する円形 断面棒の引張りおよびねじり

中心軸に沿って一定の割合の初期ねじれを有する円形断面の棒が、軸方向に引張りを受けるとき、および軸のまわりにねじりを受けるときを線形弾性問題として理論的に解析した。棒に生ずる応力および変位を求め、これらに及ぼす初期ねじれの影響を検討した。この問題はすでに下久保^{(1), (2)}によって取組まれ、初期ねじれとともに回転する回転座標軸を導入することによって三次元問題を二次元問題に変換して取扱っている。本章では下久保の導いた基礎方程式から出発し、解の誘導には Ancker と Goodier^{(7), (8)} がコイルばねの問題に用いた手法と類似のものを用いて、応力および変位を初期ねじれ量をパラメータとするべき級数の形で求めた。下久保は初期ねじれ量が十分小さい場合の解を求めているが、本章で導いた応力および変位は、初期ねじれ量がさらに大きい場合にも十分な精度で適用できるものである。

第1節 引張り^(a)

1.1 基礎式 図2.1に示すように、初期ねじれを有する一様な断面の棒の中心軸を Z 軸とし、これに垂直な一つの断面の主軸を X および Y 軸に選んで、これを固定座標軸とする。この断面から任意の距離 Z の断面は角 θ だけ回転するものとし、これの主軸 X' および Y' 軸を回転座標軸とする。

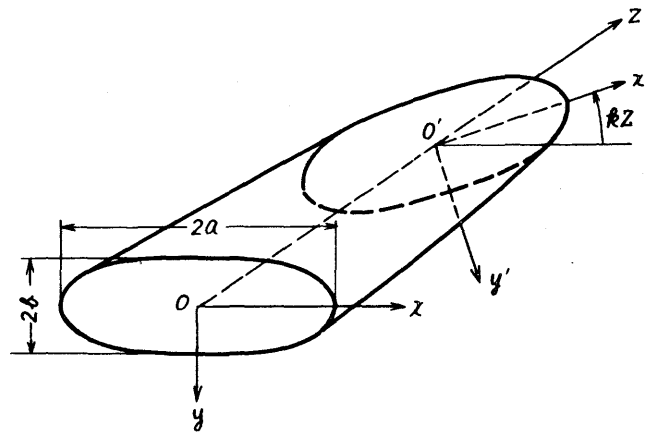


図2.1 初期ねじれを有する円形断面の棒

ここに、 k は軸方向の単位長さあたりの初期ねじれの量とあり、図示のように向きのねじれを正にとる。固定座標と回転座標の間には次の関係が成立する。

$$x' + iy' = e^{ikz}(x + iy) \quad (2.1)$$

座標軸をこのように選ぶとき、大久保の結果⁽¹⁾に従えば次の各式が導かれる。

x' , y' および z 軸方向の変位をそれぞれ u' , v' , w とすれば、これは次のようにおくことができる。

$$\left. \begin{aligned} u' &= u_1(x', y') - \alpha y' z, \\ v' &= v_1(x', y') + \alpha x' z, \\ w &= w_1(x', y') + \beta z \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

ここに、 u_1 , v_1 , w_1 は x' , y' の未知関数、 α , β は未知定数である。変位を式(2.2)のようにおけば、回転座標で表わされた平衡方程式は

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial \Delta}{\partial x'} + G \{ \nabla_1^2 u_1 + k^2 D_1(u_1) + 2k^2 D_2(v_1) \} &= 0, \\ (\lambda + G) \frac{\partial \Delta}{\partial y'} + G \{ \nabla_1^2 v_1 + k^2 D_1(v_1) - 2k^2 D_2(u_1) \} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

$$k(\lambda + G)D_2(\Delta) + G\{v_1^2 w_1 + k^2 D_1(w_1) + k^2 w_1\} = 0$$

ここに、 $\lambda = \nu E / \{(1 + \nu)(1 - 2\nu)\}$ であり、 E 、 G および ν はそれぞれ縦弾性係数、横弾性係数、ポアソン比を表わす。また、上式に含まれる記号は

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= y'^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2x'y' \frac{\partial^2}{\partial x' \partial y'} + x'^2 \frac{\partial^2}{\partial y'^2} - x' \frac{\partial}{\partial x'} - y' \frac{\partial}{\partial y'} - 1, \\ D_2 &= -y' \frac{\partial}{\partial x'} + x' \frac{\partial}{\partial y'}, \quad v_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2}, \\ \Delta &= \frac{\partial u_1}{\partial x'} + \frac{\partial v_1}{\partial y'} + k D_2(w_1) + \beta \end{aligned} \right\}$$

応力と変位の間に以下の関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x'} &= \lambda \Delta + 2G \frac{\partial u_1}{\partial x'}, \\ \sigma_{y'} &= \lambda \Delta + 2G \frac{\partial v_1}{\partial y'}, \\ \sigma_z &= \lambda \Delta + 2G [\beta + k D_2(w_1)], \\ \tau_{x'y'} &= G \left[\frac{\partial u_1}{\partial y'} + \frac{\partial v_1}{\partial x'} \right], \\ \tau_{x'z} &= G \left[\frac{\partial w_1}{\partial x'} + k D_2(u_1) + k v_1 - \alpha y' \right], \\ \tau_{y'z} &= G \left[\frac{\partial w_1}{\partial y'} + k D_2(v_1) - k u_1 + \alpha x' \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

棒の断面の方程式を $F(x', y') = 0$ とすれば、棒の側面における境界条件式は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x'} l' + \tau_{x'y'} m' + \tau_{x'z} n' &= 0, \\ \tau_{x'y'} l' + \sigma_{y'} m' + \tau_{y'z} n' &= 0, \\ \tau_{x'z} l' + \tau_{y'z} m' + \sigma_z n' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

ここに、 l' 、 m' 、 n' はそれぞれ $\partial F / \partial x'$ 、 $\partial F / \partial y'$ 、 $k D_2(F)$ に比例する。棒が軸方向に張力 P_u を受ける場合ならば、各断面に作用する応力は次式を満足しなければならない。

$$\left. \begin{aligned}
 (a) : \iint \sigma_z dx'dy' &= P_u, \\
 (b) : \iint (x'\tau_{yz} - y'\tau_{xz}) dx'dy' &= 0, \\
 (c) : \iint y'\sigma_z dx'dy' &= 0, \\
 (d) : \iint x'\sigma_z dx'dy' &= 0, \\
 (e) : \iint \tau_{xz} dx'dy' &= 0, \\
 (f) : \iint \tau_{yz} dx'dy' &= 0
 \end{aligned} \right\} (2.6)$$

∴ ∴ ∴, 積分領域は断面全体である。

かくして問題は基礎方程式(2.3)~(2.6)を満足する未知関数 u, v, w および未知定数 α, β を求めることに帰着する。 k が十分小さいものとして定めて k の二次以上の σ, τ の微小量を無視し、基礎式(2.3), (2.4) および (2.5) を簡略化して解いたのが大久保の結果⁽¹⁾ である。

1.2 基礎式の無次元化 断面のた円の長軸および短軸の長さそれぞれ $2a, 2b$ を表わし、次の無次元量を導入する。

$$\left. \begin{aligned}
 x'/a &= \xi, \quad y'/b = \eta, \quad b/a = \varepsilon, \quad ka = \kappa, \\
 a\alpha &= \gamma, \quad u_1/a = U, \quad v_1/a = V, \quad w_1/a = W, \\
 \varepsilon\sigma_{x'}/G &= X_x, \quad \varepsilon\sigma_{y'}/G = Y_y, \quad \varepsilon\sigma_z/G = Z_z, \\
 \varepsilon\tau_{x'y'}/G &= X_y, \quad \varepsilon\tau_{x'z}/G = X_z, \quad \varepsilon\tau_{yz}/G = Y_z
 \end{aligned} \right\} (2.7)$$

これらの諸量を平衡方程式(2.3)に代入すれば

$$\left. \begin{aligned}
 E1 : (1-2\nu)U_{\eta\eta} + \varepsilon V_{\xi\eta} + \varepsilon^2 2(1-\nu)U_{\xi\xi} \\
 = \kappa [\varepsilon^3 \eta W_{\xi\xi} - \varepsilon W_\eta - \varepsilon \xi W_{\xi\eta}] - (1-2\nu)\kappa^2 [D_3(U) + 2\varepsilon D_4(V)], \\
 E2 : 2(1-\nu)V_{\eta\eta} + \varepsilon U_{\xi\eta} + \varepsilon^2 (1-2\nu)V_{\xi\xi}
 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \kappa \left[\varepsilon^2 \eta \overline{W}_{\xi\eta} + \varepsilon^2 \overline{W}_{\xi} - \xi \overline{W}_{\eta\eta} \right] - (1-2\nu) \kappa^2 \left[D_3(\overline{V}) - 2\varepsilon D_4(\overline{U}) \right], \\
 E3: (1-2\nu) \left[\varepsilon^2 \overline{W}_{\xi\xi} + \overline{W}_{\eta\eta} \right] \\
 &= -\kappa \left[\varepsilon D_4(\overline{U}_{\xi}) + D_4(\overline{V}_{\eta}) \right] - 2(1-\nu) \kappa^2 \left[D_3(\overline{W}) + \varepsilon^2 \overline{W} \right]
 \end{aligned} \quad (2.8)$$

∴ ∴ ∴ = ,

$$\begin{aligned}
 D_3 &= \varepsilon^4 \eta^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2\varepsilon^2 \xi \eta \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \xi^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \varepsilon^2 \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \varepsilon^2 \eta \frac{\partial}{\partial \eta} - \varepsilon^2 \\
 D_4 &= -\varepsilon^2 \eta \frac{\partial}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial}{\partial \eta}
 \end{aligned}$$

また、添字 ξ, η はそれぞれ ξ, η に関する偏微分を表わす。

同様に x, y, z の変位の間の関係式 (2.4) は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 X_x &= \frac{2\nu}{1-2\nu} \left\{ \overline{V}_{\eta} + \varepsilon \frac{1-\nu}{\nu} \overline{U}_{\xi} + \varepsilon \beta + \kappa D_4(\overline{W}) \right\}, \\
 Y_y &= \frac{2\nu}{1-2\nu} \left\{ \frac{1-\nu}{\nu} \overline{V}_{\eta} + \varepsilon \overline{U}_{\xi} + \varepsilon \beta + \kappa D_4(\overline{W}) \right\}, \\
 Z_z &= \frac{2\nu}{1-2\nu} \left\{ \varepsilon \overline{U}_{\xi} + \overline{V}_{\eta} + \frac{1-\nu}{\nu} [\varepsilon \beta + \kappa D_4(\overline{W})] \right\}, \\
 X_y &= \overline{U}_{\eta} + \varepsilon \overline{V}_{\xi}, \\
 X_z &= \varepsilon \overline{W}_{\xi} + \kappa D_4(\overline{U}) + \varepsilon \kappa \overline{V} - \varepsilon^2 \gamma \eta, \\
 Y_z &= \overline{W}_{\eta} + \kappa D_4(\overline{V}) - \varepsilon \kappa \overline{U} + \varepsilon \gamma \xi
 \end{aligned} \quad (2.9)$$

断面の方程式は $F(x', y') = x'^2/a^2 + y'^2/b^2 - 1 = 0$ で表わされるから、境界条件式 (2.5) を無次元量で表わせば、

$$\begin{aligned}
 B1: & \varepsilon \xi \left\{ \overline{V}_{\eta} + \varepsilon \frac{1-\nu}{\nu} \overline{U}_{\xi} + \varepsilon \beta \right\} + \eta \frac{1-2\nu}{2\nu} \left\{ \overline{U}_{\eta} + \varepsilon \overline{V}_{\xi} \right\} \\
 &= -\kappa \varepsilon \xi D_4(\overline{W}) - \kappa \xi \eta (1-\varepsilon^2) \frac{1-2\nu}{2\nu} \left\{ \varepsilon \overline{W}_{\xi} + \kappa D_4(\overline{U}) \right. \\
 & \quad \left. + \varepsilon \kappa \overline{V} - \varepsilon^2 \gamma \eta \right\}, \\
 B2: & \varepsilon \xi \frac{1-2\nu}{2\nu} \left\{ \overline{U}_{\eta} + \varepsilon \overline{V}_{\xi} \right\} + \eta \left\{ \frac{1-\nu}{\nu} \overline{V}_{\eta} + \varepsilon \overline{U}_{\xi} + \varepsilon \beta \right\} \\
 &= -\kappa \eta D_4(\overline{W}) - \kappa \xi \eta (1-\varepsilon^2) \frac{1-2\nu}{2\nu} \left\{ \overline{W}_{\eta} + \kappa D_4(\overline{V}) \right\}
 \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}
 & -\epsilon\kappa\sigma + \epsilon\gamma\xi \}, \\
 B3: & \epsilon\xi \frac{1-2\nu}{2\nu} \{ \epsilon W_\xi - \epsilon^2 \gamma \eta \} + \eta \frac{1-2\nu}{2\nu} \{ W_\eta + \epsilon\gamma\xi \} \\
 & = -\kappa\epsilon\xi \frac{1-2\nu}{2\nu} \{ D_+(U) + \epsilon V \} - \kappa\eta \frac{1-2\nu}{2\nu} \{ D_+(V) - \epsilon U \} \\
 & \quad - \kappa\xi\eta(1-\epsilon^2) \left\{ \epsilon U_\xi + V_\eta + \frac{1-\nu}{\nu} [\epsilon\beta + \kappa D_+(W)] \right\}
 \end{aligned}$$

\therefore に、境界の方程式は $\xi^2 + \eta^2 = 1$ で与えられる。
 合応力方程式 (2.6) の (a) および (b) を無次元表示すれば、

$$\begin{aligned}
 R1: & \iint_{\xi^2 + \eta^2 \leq 1} \left[\epsilon U_\xi + V_\eta + \frac{1-\nu}{\nu} \epsilon\beta \right] d\xi d\eta = \frac{1-2\nu}{2\nu} \frac{\pi \epsilon \sigma_0}{G} \\
 & \quad - \frac{1-\nu}{\nu} \kappa \iint_{\xi^2 + \eta^2 \leq 1} D_+(W) d\xi d\eta, \\
 R2: & \iint_{\xi^2 + \eta^2 \leq 1} \left[\xi \{ W_\eta + \epsilon\gamma\xi \} - \epsilon\eta \{ \epsilon W_\xi - \epsilon^2 \gamma \eta \} \right] d\xi d\eta \\
 & \quad = -\kappa \iint_{\xi^2 + \eta^2 \leq 1} \left[\xi \{ D_+(V) - \epsilon U \} - \epsilon\eta \{ D_+(U) + \epsilon V \} \right] d\xi d\eta
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

\therefore に、 $\sigma_0 = P_u / \pi ab$ は断面上的平均応力を表わす。式 (2.6) の残りの方程式は、後述のように応力成分の x', y' に対する偶奇性を考慮すれば恒等的に満足される。

1.3 解の誘導法 未知関数 U, V, W の初期値は量 ξ および座標 η に対する偶奇性ならびに未知定数 β, γ の κ に対する偶奇性と、荷重条件および棒に対する幾何学的考察からあらかじめ検討しておけば、解の誘導が簡単になる。まず ξ に対する偶奇性を調べると、 U, V および β は偶関数、 W および γ は奇関数であることが容易にわかる。次に未知関数の η および η に対する偶奇性を検討すれば U は ξ に奇、 η に偶、 V は ξ に偶、

η は奇, また W は両者に對して奇なる関数であることがわかる。 U, V および W の ξ , η に對する偶奇性がわかれば式 (2.4) から応力成分の ξ, η に對する偶奇性も容易に決定される。

未知関数および未知定数が κ に關するべき級数に展開できるときも a と仮定し, κ に對する偶奇性を考慮すれば, これら 15 次式の F_j に κ として置き。

$$\left. \begin{aligned} U &= \sum_{r=0}^{\infty} U^{(2r)} \kappa^{2r}, & V &= \sum_{r=0}^{\infty} V^{(2r)} \kappa^{2r}, \\ W &= \sum_{r=0}^{\infty} W^{(2r+1)} \kappa^{2r+1}, & \beta &= \sum_{r=0}^{\infty} \beta^{(2r)} \kappa^{2r}, \\ \gamma &= \sum_{r=0}^{\infty} \gamma^{(2r+1)} \kappa^{2r+1} \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

ここに, $U^{(2r)}, V^{(2r)}, W^{(2r+1)}$ は κ に依るべき関数, η の関数, $\beta^{(2r)}, \gamma^{(2r+1)}$ は κ に依るべき定数を表わす。式 (2.12) を式 (2.8), (2.10) および (2.11) に代入し, κ に關する各同べきの係数を等置すれば次の一連の方程式群を得る。

$$\left. \begin{aligned} E1: & (1-2V)U_{\eta\eta}^{(2r)} + \varepsilon V_{\xi\xi}^{(2r)} + \varepsilon^2 \cdot 2(1-V)U_{\xi\xi}^{(2r)} \\ & = \varepsilon^3 \eta W_{\xi\xi}^{(2r-1)} - \varepsilon W_{\eta\eta}^{(2r-1)} - \varepsilon \xi W_{\xi\eta}^{(2r-1)} \\ & \quad - (1-2V) \{ D_3(U^{(2r-2)}) + 2\varepsilon D_4(V^{(2r-2)}) \}, \\ E2: & 2(1-V)V_{\eta\eta}^{(2r)} + \varepsilon U_{\xi\xi}^{(2r)} + \varepsilon^2 (1-2V)V_{\xi\xi}^{(2r)} \\ & = \varepsilon^2 \eta W_{\xi\xi}^{(2r-1)} + \varepsilon^2 W_{\xi\xi}^{(2r-1)} - \xi W_{\eta\eta}^{(2r-1)} \\ & \quad - (1-2V) \{ D_3(V^{(2r-2)}) - 2\varepsilon D_4(U^{(2r-2)}) \}, \\ B1: & \varepsilon \xi \left\{ V_{\eta\eta}^{(2r)} + \varepsilon \frac{1-V}{V} U_{\xi\xi}^{(2r)} + \varepsilon \beta^{(2r)} \right\} + \eta \frac{1-2V}{2V} \left\{ U_{\eta\eta}^{(2r)} + \varepsilon V_{\xi\xi}^{(2r)} \right\} \\ & = -\varepsilon \xi D_4(W^{(2r-1)}) - \xi \eta (1-\varepsilon^2) \frac{1-2V}{2V} \left\{ \varepsilon W_{\xi\xi}^{(2r-1)} + D_4(U^{(2r-2)}) \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon V^{(2r-2)} - \varepsilon^2 \gamma^{(2r-1)} \eta \right\}, \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 B2: & \quad \epsilon \xi \frac{1-2\nu}{2\nu} \left\{ \mathcal{U}_\eta^{(2r)} + \epsilon \mathcal{V}_\xi^{(2r)} \right\} + \eta \left\{ \frac{1-\nu}{\nu} \mathcal{V}_\eta^{(2r)} + \epsilon \mathcal{U}_\xi^{(2r)} \right. \\
 & \quad \left. + \epsilon \beta^{(2r)} \right\} = -\eta \mathcal{D}_4(\mathcal{W}^{(2r-1)}) - \xi \eta (1-\epsilon^2) \frac{1-2\nu}{2\nu} \left\{ \mathcal{W}_\eta^{(2r-1)} \right. \\
 & \quad \left. + \mathcal{D}_4(\mathcal{V}^{(2r-2)}) - \epsilon \mathcal{U}^{(2r-2)} + \epsilon \gamma^{(2r-1)} \xi \right\} \\
 R1: & \quad \iint_{\xi^2 + \eta^2 \leq 1} \left[\epsilon \mathcal{U}_\xi^{(2r)} + \mathcal{V}_\eta^{(2r)} + \frac{1-\nu}{\nu} \epsilon \beta^{(2r)} \right] d\xi d\eta \\
 & \quad = \delta_{0r} \frac{1-2\nu}{2\nu} \frac{\pi \epsilon \sigma_0}{G} - \frac{1-\nu}{\nu} \kappa \iint_{\xi^2 + \eta^2 \leq 1} \mathcal{D}_4(\mathcal{W}^{(2r-1)}) d\xi d\eta
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
 E3: & \quad (1-2\nu) \left\{ \epsilon^2 \mathcal{W}_{\xi\xi}^{(2r+1)} + \mathcal{W}_{\eta\eta}^{(2r+1)} \right\} = - \left\{ \epsilon \mathcal{D}_4(\mathcal{U}_\xi^{(2r)}) \right. \\
 & \quad \left. + \mathcal{D}_4(\mathcal{V}_\eta^{(2r)}) \right\} - 2(1-\nu) \left\{ \mathcal{D}_3(\mathcal{W}^{(2r-1)}) + \epsilon^2 \mathcal{W}^{(2r-1)} \right\}, \\
 B3: & \quad \epsilon \xi \frac{1-2\nu}{2\nu} \left\{ \epsilon \mathcal{W}_\xi^{(2r+1)} - \epsilon^2 \gamma^{(2r+1)} \eta \right\} + \eta \frac{1-2\nu}{2\nu} \left\{ \mathcal{W}_\eta^{(2r+1)} \right. \\
 & \quad \left. + \epsilon \gamma^{(2r+1)} \xi \right\} = -\epsilon \xi \frac{1-2\nu}{2\nu} \left\{ \mathcal{D}_4(\mathcal{U}^{(2r)}) + \epsilon \mathcal{V}^{(2r)} \right\} \\
 & \quad - \eta \frac{1-2\nu}{2\nu} \left\{ \mathcal{D}_4(\mathcal{V}^{(2r)}) - \epsilon \mathcal{U}^{(2r)} \right\} - \xi \eta (1-\epsilon^2) \left\{ \epsilon \mathcal{U}_\xi^{(2r)} \right. \\
 & \quad \left. + \mathcal{V}_\eta^{(2r)} + \frac{1-\nu}{\nu} [\epsilon \beta^{(2r)} + \mathcal{D}_4(\mathcal{W}^{(2r-1)})] \right\}, \\
 R2: & \quad \iint_{\xi^2 + \eta^2 \leq 1} \left[\xi \left\{ \mathcal{W}_\eta^{(2r+1)} + \epsilon \gamma^{(2r+1)} \xi \right\} - \epsilon \eta \left\{ \epsilon \mathcal{W}_\xi^{(2r+1)} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \epsilon^2 \gamma^{(2r+1)} \eta \right\} \right] d\xi d\eta = \iint_{\xi^2 + \eta^2 \leq 1} \left[\xi \left\{ \mathcal{D}_4(\mathcal{V}^{(2r)}) + \epsilon \mathcal{U}^{(2r)} \right\} \right. \\
 & \quad \left. - \epsilon \eta \left\{ \mathcal{D}_4(\mathcal{U}^{(2r)}) - \epsilon \mathcal{V}^{(2r)} \right\} \right] d\xi d\eta
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

ただし、 $r \geq 0$ とし、 $\mathcal{W}^{(-1)} = \mathcal{U}^{(-2)} = \mathcal{V}^{(-2)} = 0$ とする。

また、

$$\delta_{00} = 1, \quad \delta_{0r} = 0 \quad (r \neq 0)$$

とある。式(2.13)、(2.14)を逐次解くことにより、 $\mathcal{U}^{(2r)}$ 、 $\mathcal{V}^{(2r)}$ 、 $\beta^{(2r)}$ および $\mathcal{W}^{(2r+1)}$ 、 $\gamma^{(2r+1)}$ が $r=0$ から高次まで順次求められる。これは式(2.12)に代入可能な形で求められる解と見なされる。

1.4 解の決定

κ の 0 次: U, V の ξ, η に対応する偶奇性を考慮に入れ, $U^{(0)}, V^{(0)}$ を次式のようにおく.

$$U^{(0)} = A_{00}^{(0)} \xi, \quad V^{(0)} = B_{00}^{(0)} \eta \quad (2.15)$$

ただし, $A_{00}^{(0)}, B_{00}^{(0)}$ は未定係数である. これを式 (2.13) の $r=0$ の場合に代入すれば, $A_{00}^{(0)}, B_{00}^{(0)}$ および $\beta^{(0)}$ に関する連立方程式を得る. これを解けば

$$U^{(0)} = -\frac{\sigma_0 \nu}{E} \xi, \quad V^{(0)} = -\frac{\sigma_0 \nu \varepsilon}{E} \eta, \quad \beta^{(0)} = \frac{\sigma_0}{E} \quad (2.16)$$

式 (2.16) に対応する変位および応力を求めれば, 次式のようになる.

$$\left. \begin{aligned} u' &= -\frac{\sigma_0 \nu}{E} x', & v' &= -\frac{\sigma_0 \nu}{E} y', & w &= \frac{\sigma_0}{E} z \\ \sigma_{x'} &= 0, & \sigma_{y'} &= 0, & \sigma_z &= \sigma_0, & \tau_{x'y'} &= \tau_{x'z} = \tau_{y'z} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

これは引張りを受けず真直な棒の変位や応力と同じものであり, 以下に続く κ の 1 次以上の項が初期ねじれの影響を示すものである.

κ の 1 次: $W^{(1)}$ を次式のようにおく.

$$W^{(1)} = C_{00}^{(1)} \xi \eta \quad (2.18)$$

ただし, $C_{00}^{(1)}$ は未定係数である. これを式 (2.14) の $r=0$ の場合に代入すれば, $C_{00}^{(1)}$ および $\gamma^{(1)}$ に関する連立方程式を得る. これを解けば

$$W^{(1)} = -\frac{\sigma_0}{4G} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon^3 \right) \xi \eta, \quad \gamma^{(1)} = \frac{\sigma_0}{4G} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 2 + \varepsilon^2 \right) \quad (2.19)$$

以下同様にして, 一般に κ の $(2r)$ 次および $(2r+1)$ 次の解を次のようにして求めることができる.

κ の $(2r)$ 次 ($r \geq 1$): $U^{(2r)}, V^{(2r)}$ を次式のように

に お く .

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{U}^{(2r)} &= \sum_{i,j} \sum_{(0 \leq i+j \leq r)} A_{ij}^{(2r)} \xi^{2i+1} \eta^{2j}, \\ \mathcal{V}^{(2r)} &= \sum_{i,j} \sum_{(0 \leq i+j \leq r)} B_{ij}^{(2r)} \xi^{2i} \eta^{2j+1} \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

こゝに式 (2.13) に代入し, 式 (B1), (B2) では $\eta^2 = 1 - \xi^2$ とおいた上, 未定係数 $A_{ij}^{(2r)}$, $B_{ij}^{(2r)}$ および未定数 $\beta^{(2r)}$ を決定するための次の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} E1: & (1-2\nu)(2j+2)(2j+1)A_{i,j+2}^{(2r)} + \varepsilon(2i+1)(2j+1)B_{i+1,j}^{(2r)} \\ & + \varepsilon^2 2(1-\nu)(2i+3)(2i+2)A_{i+1,j}^{(2r)} = f_{ij}^{(2r-1)} - (1-2\nu)(a_{ij}^{(2r-2)} \\ & - 2\varepsilon e_{ij}^{(2r-2)}), \quad (i, j = 0, 1, \dots, r-1; i+j \leq r-1) \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} E2: & 2(1-\nu)(2j+3)(2j+2)B_{i,j+1}^{(2r)} + \varepsilon A_{i,j+1}^{(2r)} \\ & + \varepsilon^2(1-2\nu)(2i+2)(2i+1)B_{i+1,j}^{(2r)} = h_{ij}^{(2r-1)} - (1-2\nu)(h_{ij}^{(2r-2)} \\ & + 2\varepsilon d_{ij}^{(2r-2)}), \quad (i, j = 0, 1, \dots, r-1; i+j \leq r-1) \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$B1: \phi_s(\bar{A}_{ij}^{(r)}) = \phi_s(\bar{a}_{ij}^{(r)}), \quad (s = 0, 1, 2, \dots, r) \quad (2.23)$$

$$B2: \phi_s(\bar{B}_{ij}^{(r)}) = \phi_s(\bar{b}_{ij}^{(r)}), \quad (s = 0, 1, 2, \dots, r) \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} R1: & \sum_{i,j} \sum_{(0 \leq i+j \leq r)} \left[\frac{(2i)!(2j)!}{2^{2(i+j)} i! j! (i+j+1)!} \left\{ \varepsilon(2i+1)A_{ij}^{(2r)} \right. \right. \\ & \left. \left. + (2j+1)B_{ij}^{(2r)} \right\} + \frac{1-\nu}{\nu} \varepsilon \beta^{(2r)} \right] = \frac{1-\nu}{\nu} \sum_{i,j} \sum_{(0 \leq i+j \leq r)} \\ & \frac{(2i)!(2j)!}{2^{2(i+j)} i! j! (i+j+1)!} f_{ij}^{(2r-1)} \end{aligned} \quad (2.25)$$

こゝに,

$$\phi_s(A_{ij}^{(r)}) = \sum_{k=0}^s \sum_{j=0}^{r-s} A_{k,j+s-k}^{(r)} (-1)^{s-k} \binom{j+s-k}{s-k},$$

$$a_{ij}^{(2r)} = \varepsilon^4(2i+3)(2i+2)A_{i+1,j-1}^{(2r)} - 2\varepsilon^2 \{ (2i+1)2j+i+j+1 \} A_{ij}^{(2r)}$$

$$+ (2j+2)(2j+1)A_{i-1,j+1}^{(2r)}$$

$$b_{ij}^{(2r)} = \varepsilon^4(2i+2)(2i+1)B_{i+1,j-1}^{(2r)} - 2\varepsilon^2\{(2i)(2j+1)+i+j+1\}B_{ij}^{(2r)}$$

$$+ (2j+3)(2j+2)B_{i-1,j+1}^{(2r)},$$

$$d_{ij}^{(2r)} = \varepsilon^2(2i+1)A_{ij}^{(2r)} - (2j+1)A_{i-1,j+1}^{(2r)},$$

$$e_{ij}^{(2r)} = \varepsilon^2(2i+1)B_{i+1,j-1}^{(2r)} - (2j+1)B_{ij}^{(2r)},$$

$$f_{ij}^{(2r+1)} = \varepsilon^2(2i+1)C_{i,j-1}^{(2r+1)} - (2j+1)C_{i-1,j}^{(2r+1)},$$

$$g_{ij}^{(2r+1)} = \varepsilon^3(2i+3)(2i+2)C_{i+1,j-1}^{(2r+1)} - \varepsilon(2i+2)(2j+1)C_{ij}^{(2r+1)},$$

$$h_{ij}^{(2r+1)} = \varepsilon^2(2i+1)(2j+2)C_{ij}^{(2r+1)} - (2j+3)(2j+2)C_{i-1,j+1}^{(2r+1)},$$

$$\bar{a}_{ij}^{(r)} = -d_{i,j-1}^{(2r-2)} + \varepsilon f_{ij}^{(2r-1)} + \varepsilon B_{i,j-1}^{(2r-2)} - \varepsilon(1-\varepsilon^2)\frac{1-2\nu}{2\nu}(2i+1)C_{i,j-1}^{(2r-1)} \\ - \varepsilon^2 \tilde{\gamma}_{i,j-1}^{(2r-1)},$$

$$\bar{b}_{ij}^{(r)} = -e_{i-1,j}^{(2r-2)} + f_{ij}^{(2r-1)} - \varepsilon A_{i-1,j}^{(2r-2)} - (1-\varepsilon^2)\frac{1-2\nu}{2\nu}(2j+1)C_{i-1,j}^{(2r-1)} \\ + \varepsilon \tilde{\gamma}_{i-1,j}^{(2r-1)},$$

$$\bar{A}_{ij}^{(r)} = \left\{ \varepsilon^2 \frac{1-\nu}{\nu}(2i+1) + \frac{1-2\nu}{2\nu}(2j) \right\} A_{ij}^{(2r)} + \varepsilon(2j+1)B_{ij}^{(2r)} \\ + \varepsilon \frac{1-2\nu}{2\nu}(2i+2)B_{i+1,j-1}^{(2r)} + \varepsilon^2 \beta_{ij}^{(2r)},$$

$$\bar{B}_{ij}^{(r)} = \left\{ \varepsilon^2 \frac{1-2\nu}{2\nu}(2i) + \frac{1-\nu}{\nu}(2j+1) \right\} B_{ij}^{(2r)} + \varepsilon(2i+1)A_{ij}^{(2r)} \\ + \varepsilon \frac{1-2\nu}{2\nu}(2j+2)A_{i-1,j+1}^{(2r)} + \varepsilon \beta_{ij}^{(2r)}$$

$T = T^L$,

$$A_{i,-1}^{(2r)} = A_{-1,j}^{(2r)} = A_{r+1,j}^{(2r)} = A_{i,r+1}^{(2r)} = 0,$$

$$B_{i,-1}^{(2r)} = B_{-1,j}^{(2r)} = \beta_{r+1,j}^{(2r)} = \beta_{i,r+1}^{(2r)} = 0,$$

$$C_{i,-1}^{(2r+1)} = C_{-1,j}^{(2r+1)} = C_{r+1,j}^{(2r+1)} = C_{i,r+1}^{(2r+1)} = 0,$$

$$\beta_{00}^{(2r)} = \beta^{(2r)}, \quad \tilde{\gamma}_{00}^{(2r-1)} = \tilde{\gamma}^{(2r-1)},$$

$$\beta_{ij}^{(2r)} = \tilde{\gamma}_{ij}^{(2r-1)} = 0 \quad (i \neq 0 \neq T-1 \neq j \neq 0)$$

式(2.21)および(2.22)の方程式の数はそれぞれ
 $\frac{1}{2}r(r+1)$ 個, 式(2.23)および(2.24)の方程式の数は
 それぞれ $(r+1)$ 個あり, さらに式(2.25)の1個
 を加えると, 方程式の数は全部で (r^2+3r+3) 個と
 なる. これは未知数 $A_{ij}^{(2r)}$, $B_{ij}^{(2r)}$ ($i, j=1, 2, \dots, r; i+j$
 $\leq r$) および $\beta^{(2r)}$ の個数と一致する. したがって式
 (2.21) ~ (2.25) から r の各値における未知数をす
 べて決定可能とがとらえる.

γ の $(2r+1)$ 次 ($r \geq 1$): $W^{(2r+1)}$ を次のように仮
 定する.

$$W^{(2r+1)} = \sum_{i,j} \sum_{(0 \leq i+j \leq r)} C_{ij}^{(2r+1)} \varepsilon^{2i+1} \gamma^{2j+1} \quad (2.26)$$

これを式(2.14)に代入すれば未知係数 $C_{ij}^{(2r+1)}$ および
 未知定数 $\gamma^{(2r+1)}$ を決定するための次の方程式が得
 られる.

$$\begin{aligned} E3: & (1-2\gamma) \left\{ \varepsilon^2 (2i+3)(2i+2) C_{i+1,j}^{(2r+1)} + (2j+3)(2j+2) C_{i,j+1}^{(2r+1)} \right\} \\ & = \varepsilon l_{ij}^{(2r)} + m_{ij}^{(2r)} - 2(1-\gamma) \left\{ c_{ij}^{(2r-1)} + \varepsilon^2 C_{ij}^{(2r-1)} \right\}, \\ & (i, j = 0, 1, \dots, r-1; i+j \leq r-1) \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$B3: \phi_s(\bar{C}_{ij}^{(r)}) = \phi_s(\bar{c}_{ij}^{(r)}), \quad (s=0, 1, \dots, r) \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} R2: & \sum_{i,j} \sum_{(0 \leq i+j \leq r)} \frac{(2i+1)!(2j+1)!}{2^{(i+j+1)} i! j! (i+j+2)!} (1-\varepsilon^2) C_{ij}^{(2r+1)} \\ & + \frac{1}{4} \varepsilon (1+\varepsilon^2) \gamma^{(2r+1)} = \sum_{i,j} \sum_{(0 \leq i+j \leq r)} \left\{ \frac{(2i+1)!(2j)!}{2^{(i+j+1)} i! j! (i+j+2)!} \right. \\ & \left. \times (c_{ij}^{(2r)} + \varepsilon A_{ij}^{(2r)}) - \varepsilon \frac{(2i)!(2j+1)!}{2^{(i+j+1)} (i+j+2)!} (d_{ij}^{(2r)} - \varepsilon B_{ij}^{(2r)}) \right\} \end{aligned} \quad (2.29)$$

∴ 1 = ,

$$\begin{aligned} C_{ij}^{(2r+1)} & = \varepsilon^4 (2i+3)(2i+2) C_{i+1,j-1}^{(2r+1)} - \varepsilon^2 \left\{ 2(2i+1)(2j+1) + 2i+2j+3 \right\} C_{ij}^{(2r+1)} \\ & + (2j+3)(2j+2) C_{i-1,j+1}^{(2r+1)}, \end{aligned}$$

$$l_{ij}^{(2r)} = \varepsilon^2(2i+3)(2i+2)A_{i+1,j}^{(2r)} - (2i+1)(2j+2)A_{i,j+1}^{(2r)},$$

$$m_{ij}^{(2r)} = \varepsilon^2(2i+2)(2j+1)B_{i+1,j}^{(2r)} - (2j+3)(2j+2)B_{i,j+1}^{(2r)},$$

$$\begin{aligned} \bar{c}_{ij}^{(r)} = & \varepsilon \frac{1-2\nu}{2\nu} d_{ij}^{(2r)} + \frac{1-2\nu}{2\nu} e_{ij}^{(2r)} + (1-\varepsilon^2) \frac{1-\nu}{\nu} f_{ij}^{(2r-1)} \\ & + \left\{ \varepsilon \frac{1-2\nu}{\nu} - \varepsilon(1-\varepsilon^2)(2i+1) \right\} A_{ij}^{(2r)} - \left\{ \varepsilon^2 \frac{1-2\nu}{2\nu} + (1-\varepsilon^2)(2j+1) \right\} B_{ij}^{(2r)} \\ & - \varepsilon(1-\varepsilon^2) \frac{1-\nu}{\nu} \beta_{ij}^{(2r)}, \end{aligned}$$

$$\bar{c}_{ij}^{(r)} = \frac{1-2\nu}{2\nu} \left\{ \varepsilon^2(2i+1) + (2j+1) \right\} C_{ij}^{(2r+1)} + \frac{1-2\nu}{2\nu} \varepsilon(1-\varepsilon^2) \gamma_{ij}^{(2r+1)}$$

前述と同様にし、式(2.27)~(2.29)を解けば、 r の各値における未知数をすべて決定することができ、

かくして式(2.21)~(2.25)および式(2.27)~(2.29)と交互に逐次解いて行けば、未知関数 $U^{(2r)}$, $V^{(2r)}$, $W^{(2r+1)}$ および未知定数 $\beta^{(2r)}$, $\gamma^{(2r+1)}$ を K の所要の次数まで求めることができ、式(2.12)から所要の解が与えられる。もし、初期値として K が小さい値ならば、式(2.12)の最初の数項を決定すれば十分である。

1.5 数値例 ポアソン比 $\nu=0.3$ とし、 $\varepsilon=0.1, 0.2$ および 0.4 の各場合について K の4次までの未知関数および未知定数を求めた。一例として $\varepsilon=0.2$ の場合の応力成分および α , β を示せば次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_x'}{\sigma_0} = & (-1.234 + 1.234\varepsilon^2 + 0.416\eta^2)K^2 + (1.606 \\ & + 2.472\varepsilon^2 - 3.947\varepsilon^4 - 1.996\eta^2 - 2.755\varepsilon^2\eta^2 + 0.055\eta^2)K^4, \\ \frac{\sigma_y'}{\sigma_0} = & (0.450 - 0.390\varepsilon^2 - 0.450\eta^2)K^2 + (-1.703 + 2.842\varepsilon^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & -6.789\xi^4 + 1.789\eta^2 + 6.335\xi^2\eta^2 - 0.086\eta^4) \kappa^4, \\
 \frac{\sigma_z}{\sigma_0} &= 1 + (3.833 - 15.971\xi^2 + 0.639\eta^2) \kappa^2 + (-15.779 \\
 & + 54.200\xi^2 + 24.827\xi^4 - 2.166\eta^2 - 8.166\xi^2\eta^2 \\
 & + 0.069\eta^4) \kappa^4, \\
 \frac{\tau_{xz}}{\sigma_0} &= -2.400\eta\kappa + (9.081\eta + 7.692\xi^2\eta - 0.198\eta^3) \kappa^3, \\
 \frac{\tau_{yz}}{\sigma_0} &= -0.480\xi\kappa + (-3.253\xi + 11.551\xi^3 - 2.816\xi\eta^2) \kappa^3, \\
 \frac{\tau_{xy}}{\sigma_0} &= 2.002\xi\eta\kappa^2 + (-9.418\xi\eta - 6.844\xi^3\eta + 0.958\xi\eta^3) \kappa^4, \\
 \frac{\beta}{\sigma_0/E} &= 1 + 4.068\kappa^2 - 15.75\kappa^4 \\
 \frac{\alpha a}{\sigma_0 E} &= 14.976\kappa - 63.254\kappa^3
 \end{aligned}$$

.....(2.30)

式(2.30)を用いて $\kappa = 0.25$ の場合に x' 軸上および y' 軸上の応力成分を求めれば、図 2.2 および図 2.3 に示すようになる。 σ_z は x' 軸上で著しく変化し、 y' 軸上でほぼほとんど変化しない。図示のように主要な応力は σ_z と τ_{xz} であり、両者ともその絶対値は円筒の短軸端で最大値をとる。これらの値の初期ねじれ量に対する変化を示したのが図 2.4 と図 2.5 である。初期ねじれが大きくなるにしたがって、 σ_z は平均応力に比して著しく大きくなり、また、 τ_{xz} も無視できない値を示すようになる。

β は中心軸の単位長さあたりの伸びを表わす値である。中心軸の伸びが初期ねじれの量によってどのように変化するかを図 2.6 に示した。初期ねじれが大きくなるにしたがって、中心軸の伸びが著しくなる。

図 2.7 には、軸方向の単位長さに対する中心軸まわりのねじれ量 α と初期ねじれ量 β の関係を示した。初期ねじれを有する棒が引張りを受けるときには真直な棒と異なつてねじれを伴うことがわかる。図に於いて α と β は同じ符号を持つが、始めの仮定でそれぞれ正の方向が逆であるから、引張りに伴うねじれは初期ねじれを減少する方向である。

以上述べた初期ねじれが変位および応力に及ぼす影響は、断面が細長いほど著しく、円に近づくにつれて小さくなる。完全な円の場合 ($\epsilon=1$) には、変位および応力を表わす式に於いて β の 1 次以上の項がすべて 0 となり、初期ねじれの影響がなくなる。

以上の各図には、比較のために大久保の結果⁽¹⁾を破線で示した。初期ねじれが小さい場合には両者はよく一致する。

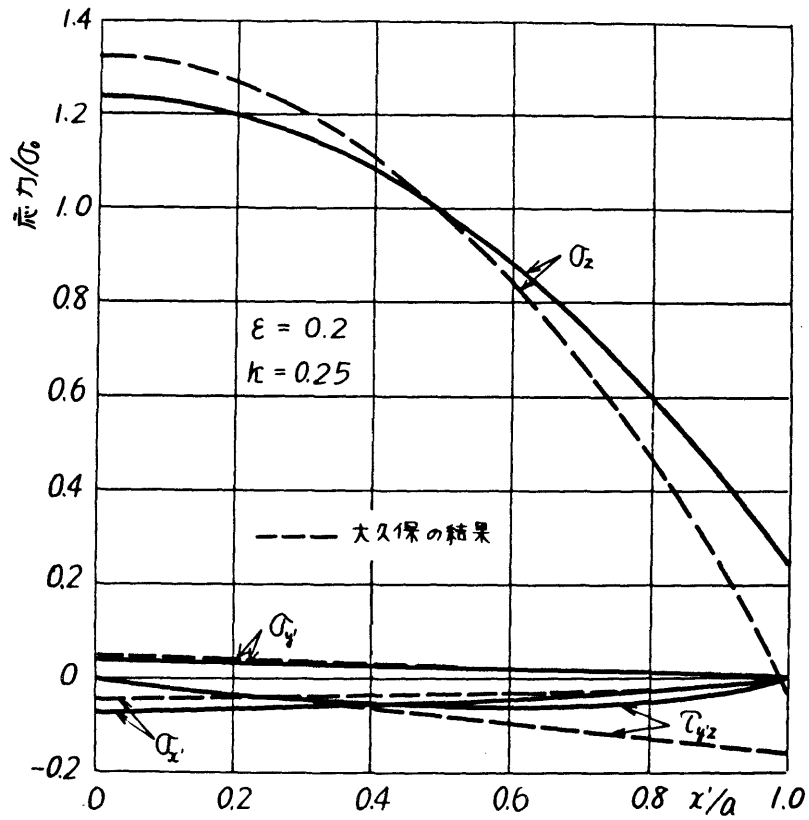


図 2.2 x' 軸上の応力分布

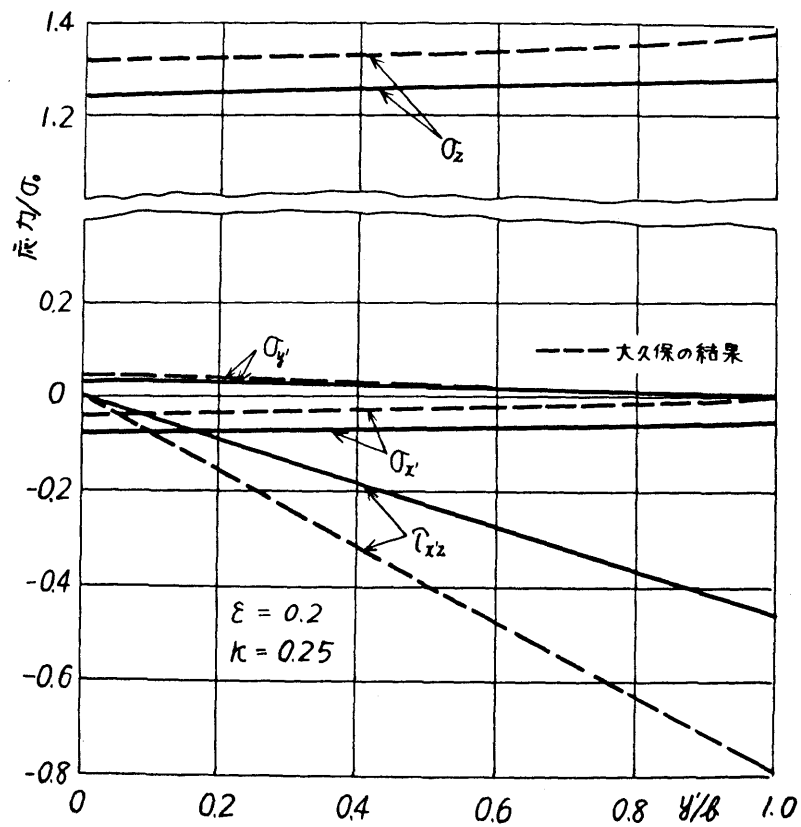


図 2.3 y' 軸上の応力分布

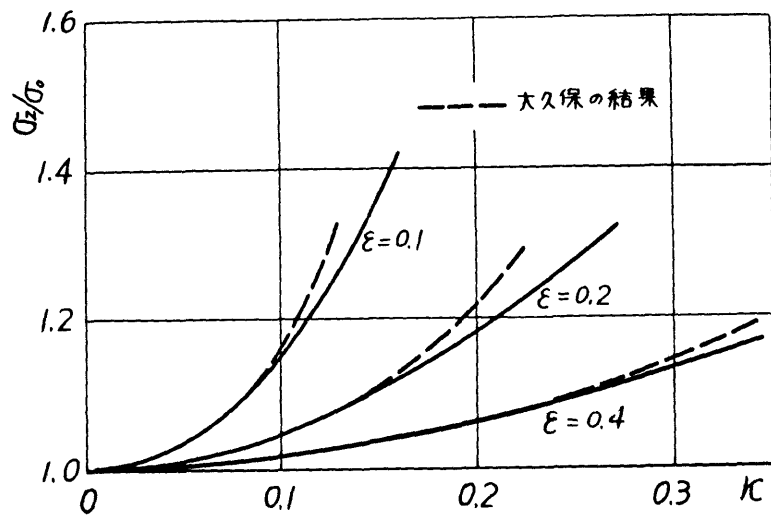


図 2.4 短軸曲端における σ_z

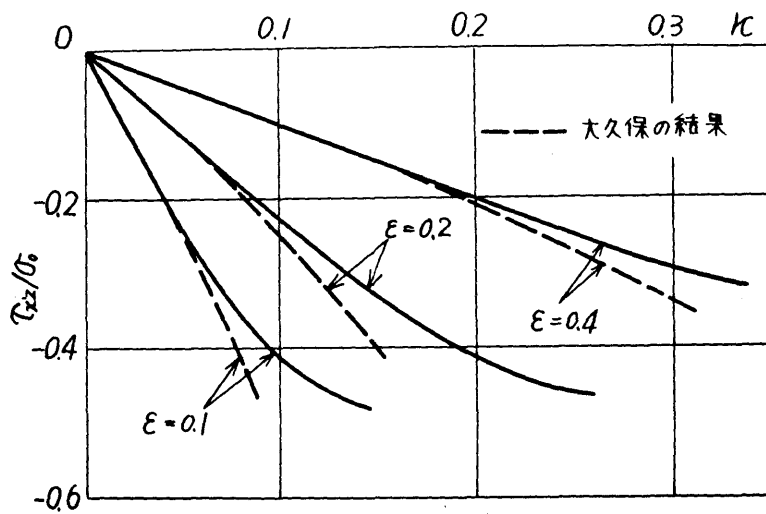


図 2.5 短軸曲端における τ_{xz}

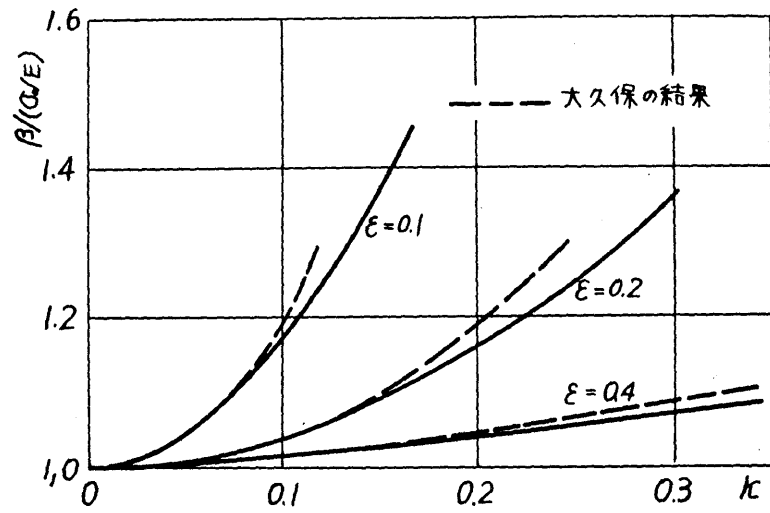


図 2.6 中心軸の伸び

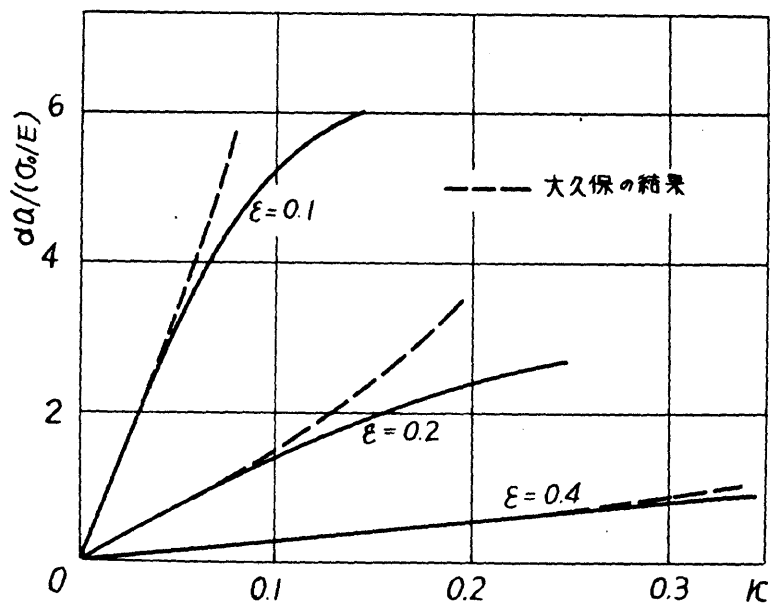


図 2.7 中心軸まわりのねじれ

第2節 ねじり^(b)

2.1 基礎式 変位成分 u', v', w を式 (2.2) で表わせば, ねじり問題の基礎方程式は合応力方程式と除いた式 (2.8), (2.9) および (2.10) と与えられる。棒に作用するねじりモーメント M_t とすれば, この場合の合応力方程式は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} (a): \iint \sigma_z dx'dy' &= 0, \\ (b): \iint (x'\tau_{yz} - y'\tau_{xz}) dx'dy' &= M_t, \\ (c): \iint y'\sigma_z dx'dy' &= 0, \\ (d): \iint x'\sigma_z dx'dy' &= 0, \\ (e): \iint \tau_{xz} dx'dy' &= 0, \\ (f): \iint \tau_{yz} dx'dy' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

上式の (a), (b) を無次元量で表わせば

$$\left. \begin{aligned} R1: \iint_{\xi^2+\eta^2 \leq 1} [\epsilon U_\xi + V_\eta + \frac{1-\nu}{\nu} \epsilon \beta] d\xi d\eta &= -\frac{1-\nu}{\nu} \kappa \iint_{\xi^2+\eta^2 \leq 1} D_4(W) d\xi d\eta, \\ R2: \iint_{\xi^2+\eta^2 \leq 1} [\xi \{W_\eta + \epsilon \gamma \xi\} - \epsilon \eta \{ \epsilon W_\xi - \epsilon^2 \gamma \eta \}] d\xi d\eta \\ &= M_{t0} - \kappa \iint_{\xi^2+\eta^2 \leq 1} [\xi \{D_4(V) - \epsilon U\} - \epsilon \eta \{D_4(U) + \epsilon V\}] d\xi d\eta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.32)$$

こゝに, $M_{t0} = M_t/Ga^3$ である。式 (2.31) の残りの方程式は, 応力成分の x', y' に対する偶奇性を考慮すれば恒等的に満足されることは前節の場合と同様である。

かくして問題は基礎方程式 (2.8), (2.9), (2.10)

および合意な方程式 (2.32) を満たす未知関数 U, V, W および未知定数 β, γ を求めることに帰着する。

2.2 解の誘導法 κ じり問題の場合には、未知関数 U, V, W の初期値 ξ, η 量 κ および座標 ξ, η に対応する偶奇性および未知定数 β, γ の κ に対応する偶奇性は次のようになる。すなわち、 κ に対応して U, V および β は奇関数、 W および γ は偶関数であり、また U は ξ に奇、 η に偶、 V は ξ に偶、 η に奇、 W は両者に対応して奇なる関数である。

未知関数 U, V, W および未知定数 β, γ が κ に関するべき級数に展開できると仮定すれば、これらは次のようにおくことができる。

$$\left. \begin{aligned} U &= \sum_{r=0}^{\infty} U^{(2r+1)} \kappa^{2r+1}, & V &= \sum_{r=0}^{\infty} V^{(2r+1)} \kappa^{2r+1}, \\ W &= \sum_{r=0}^{\infty} W^{(2r)} \kappa^{2r}, & \beta &= \sum_{r=0}^{\infty} \beta^{(2r+1)} \kappa^{2r+1}, \\ \gamma &= \sum_{r=0}^{\infty} \gamma^{(2r)} \kappa^{2r} \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

ここに、 $U^{(2r+1)}, V^{(2r+1)}, W^{(2r)}$ は κ に独立な ξ, η の関数、 $\beta^{(2r+1)}, \gamma^{(2r)}$ は κ に独立な定数である。式 (2.33) を式 (2.8), (2.10), (2.32) に代入し、 κ に関する同べきの係数を等置すれば次の一連の方程式群を得る。

$$\left. \begin{aligned} E3: & (1-2V) \left\{ \epsilon^2 W_{\xi\xi}^{(2r)} + W_{\eta\eta}^{(2r)} \right\} = - \left\{ \epsilon D_4(U_{\xi}^{(2r-1)}) + D_4(V_{\eta}^{(2r-1)}) \right\} \\ & - 2(1-V) \left\{ D_3(W^{(2r-2)}) + \epsilon^2 W^{(2r-2)} \right\} \\ B3: & \epsilon \xi \frac{1-2V}{2V} \left\{ \epsilon W_{\xi}^{(2r)} - \epsilon^2 \gamma^{(2r)} \eta \right\} + \eta \frac{1-2V}{2V} \left\{ W_{\eta}^{(2r)} + \epsilon \gamma^{(2r)} \xi \right\} \\ & = - \epsilon \xi \frac{1-2V}{2V} \left\{ D_4(U^{(2r-1)}) + \epsilon V^{(2r-1)} \right\} - \eta \frac{1-2V}{2V} \left\{ D_4(V^{(2r-1)}) \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 & -\varepsilon \sigma^{(2r-1)} \left\{ -\varepsilon \eta (1-\varepsilon^2) \left\{ \varepsilon \sigma_{\xi}^{(2r-1)} + \tau_{\eta}^{(2r-1)} + \frac{1-\nu}{\nu} \left\{ \varepsilon \beta^{(2r-1)} + D_4(W^{(2r-2)}) \right\} \right\} \right\}, \\
 R2: & \iint \left[\xi \left\{ \tau_{\eta}^{(2r)} + \varepsilon \tau_{\xi}^{(2r)} \right\} - \varepsilon \eta \left\{ \varepsilon W_{\xi}^{(2r)} - \varepsilon^2 \tau_{\eta}^{(2r)} \right\} \right] d\xi d\eta \\
 & = \delta_{or} M_{to} - \iint \left[\xi \left\{ D_4(\tau^{(2r-1)}) - \varepsilon \sigma^{(2r-1)} \right\} \right. \\
 & \quad \left. - \varepsilon \eta \left\{ D_4(\sigma^{(2r-1)}) + \varepsilon \tau^{(2r-1)} \right\} \right] d\xi d\eta \\
 & \dots\dots (2.34) \\
 E1: & (1-2\nu) \sigma_{\eta\eta}^{(2r+1)} + \varepsilon \tau_{\xi\eta}^{(2r+1)} + \varepsilon^2 \cdot 2(1-\nu) \sigma_{\xi\xi}^{(2r+1)} \\
 & = \left(\varepsilon^3 \eta W_{\xi\xi}^{(2r)} - \varepsilon W_{\eta}^{(2r)} - \varepsilon \xi W_{\xi\xi}^{(2r)} \right) - (1-2\nu) \left\{ D_3(\sigma^{(2r-1)}) \right. \\
 & \quad \left. + 2\varepsilon D_4(\tau^{(2r-1)}) \right\}, \\
 E2: & 2(1-\nu) \tau_{\eta\eta}^{(2r+1)} + \varepsilon \sigma_{\xi\eta}^{(2r+1)} + \varepsilon^2 (1-2\nu) \tau_{\xi\xi}^{(2r+1)} \\
 & = \left(\varepsilon^2 \eta W_{\xi\eta}^{(2r)} + \varepsilon^2 W_{\xi}^{(2r)} - \xi W_{\eta\eta}^{(2r)} \right) - (1-2\nu) \left\{ D_3(\tau^{(2r-1)}) \right. \\
 & \quad \left. - 2\varepsilon D_4(\sigma^{(2r-1)}) \right\}, \\
 B1: & \varepsilon \xi \left\{ \tau_{\eta}^{(2r+1)} + \varepsilon \frac{1-\nu}{\nu} \sigma_{\xi}^{(2r+1)} + \varepsilon \beta^{(2r+1)} \right\} + \eta \frac{1-2\nu}{2\nu} \left\{ \sigma_{\eta}^{(2r+1)} \right. \\
 & \quad \left. + \varepsilon \tau_{\xi}^{(2r+1)} \right\} = -\varepsilon \xi D_4(W^{(2r)}) - \xi \eta (1-\varepsilon^2) \frac{1-2\nu}{2\nu} \left\{ \varepsilon W_{\xi}^{(2r)} \right. \\
 & \quad \left. + D_4(\sigma^{(2r-1)}) + \varepsilon \tau^{(2r-2)} - \varepsilon^2 \tau_{\eta}^{(2r-1)} \right\}, \\
 B2: & \varepsilon \xi \frac{1-2\nu}{2\nu} \left\{ \sigma_{\eta}^{(2r+1)} + \varepsilon \tau_{\xi}^{(2r+1)} \right\} + \eta \left\{ \frac{1-\nu}{\nu} \tau_{\eta}^{(2r+1)} + \varepsilon \sigma_{\xi}^{(2r+1)} \right. \\
 & \quad \left. + \varepsilon \beta^{(2r+1)} \right\} = -\eta D_4(W^{(2r)}) - \xi \eta (1-\varepsilon^2) \frac{1-2\nu}{2\nu} \left\{ W^{(2r)} \right. \\
 & \quad \left. + D_4(\tau^{(2r-1)}) - \varepsilon \sigma^{(2r-1)} + \varepsilon \tau^{(2r-1)} \xi \right\}, \\
 R1: & \iint \left[\varepsilon \sigma_{\xi}^{(2r+1)} + \tau_{\eta}^{(2r+1)} + \frac{1-\nu}{\nu} \varepsilon \beta^{(2r+1)} \right] d\xi d\eta \\
 & = -\frac{1-\nu}{\nu} \iint D_4(W^{(2r)}) d\xi d\eta \\
 & \dots\dots (2.35)
 \end{aligned} \right\}$$

$T = T^* L$, $r \geq 0$ として、 $\sigma^{(-1)} = \tau^{(-1)} = W^{(-2)} = 0$ とする。式 (2.34), (2.35) を交差して解いて、 T と W を得る。

$W^{(2r)}$, $\gamma^{(2r)}$ および $U^{(2r+1)}$, $V^{(2r+1)}$, $\beta^{(2r+1)}$ が $r=0$ から高次まで順次決定される。これを式 (2.33) に代入すれば求める解となる。

2.3 解の決定

$r=0$ の場合: $W^{(0)}$ を次式のようにおく。

$$W^{(0)} = C_{00}^{(0)} \xi \eta \quad (2.36)$$

ただし, $C_{00}^{(0)}$ は未定係数である。これを式 (2.34) の $r=0$ の場合に代入すれば, $C_{00}^{(0)}$ および $\gamma^{(0)}$ に関する連立方程式を得る。これを解けば

$$W^{(0)} = -\frac{1}{\pi \varepsilon^2} (1-\varepsilon^2) M_{t0} \xi \eta, \quad \gamma^{(0)} = \frac{1}{\pi \varepsilon^3} (1+\varepsilon^2) M_{t0} \quad (2.37)$$

これを対応する応力を求めれば

$$\tau_{xz} = -\frac{2M_{t0} \gamma'}{\pi a b^3}, \quad \tau_{yz} = \frac{2M_{t0} x'}{\pi a^3 b} \quad (2.38)$$

これは真直円形断面の棒と同じ $r=0$ の場合の応力と同じものであり, 以下に続く r の 1 次以上の項が初期ねじれの影響を示すものである。

r の 1 次: $U^{(1)}$, $V^{(1)}$ を次式のようにおく。

$$U^{(1)} = (A_{00}^{(1)} + A_{10}^{(1)} \xi^2 + A_{01}^{(1)} \eta^2) \xi, \quad V^{(1)} = (B_{00}^{(1)} + B_{10}^{(1)} \xi^2 + B_{01}^{(1)} \eta^2) \eta$$

..... (2.39)

これを式 (2.35) の $r=0$ の場合に代入し, 式 (B1), (B2) では $\eta^2 = 1 - \xi^2$ とおけば, 未定係数 $A_{ij}^{(1)}$, $B_{ij}^{(1)}$ および未知定数 $\beta^{(1)}$ に関する次の連立方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} (1-2\nu)A_{01}^{(1)} + \varepsilon B_{10}^{(1)} + 6(1-\nu)\varepsilon^2 A_{10}^{(1)} &= \frac{1}{\pi \varepsilon} (1-\varepsilon^2) M_{t0}, \\ 6(1-\nu)B_{01}^{(1)} + \varepsilon A_{01}^{(1)} + (1-2\nu)\varepsilon^2 B_{10}^{(1)} &= -\frac{1}{\pi} (1-\varepsilon^2) M_{t0}, \\ \nu B_{00}^{(1)} + \nu B_{10}^{(1)} + \varepsilon(1-\nu)A_{00}^{(1)} + 3\varepsilon(1-\nu)A_{10}^{(1)} + \nu \varepsilon \beta^{(1)} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\nu}{\pi \varepsilon^2} (1 - \varepsilon^2) M_{t0}, \\
&- \nu \varepsilon B_{10}^{(1)} + 3 \nu \varepsilon B_{01}^{(1)} - 3 \varepsilon^2 (1 - \nu) A_{10}^{(0)} + \varepsilon^2 (1 - \nu) A_{01}^{(1)} + (1 - 2\nu) A_{01}^{(0)} \\
&\quad + (1 - 2\nu) \varepsilon B_{10}^{(0)} = \frac{1}{\pi \varepsilon} (1 - \varepsilon^2) (1 - 3\nu - \nu \varepsilon^2) M_{t0}, \\
&(1 - \nu) (B_{00}^{(0)} + 3 B_{01}^{(1)}) + \nu \varepsilon (A_{00}^{(0)} + A_{01}^{(0)}) + \nu \varepsilon \beta^{(1)} = -\frac{\nu}{\pi \varepsilon} (1 - \varepsilon^2) M_{t0}, \\
&\varepsilon (1 - 2\nu) (A_{01}^{(0)} + \varepsilon B_{10}^{(0)}) + (1 - \nu) (B_{10}^{(0)} - 3 B_{01}^{(0)}) + \nu \varepsilon (3 A_{10}^{(0)} - A_{01}^{(0)}) \\
&= \frac{1}{\pi \varepsilon^2} (1 - \varepsilon^2) (\nu - \varepsilon^2 + 3 \nu \varepsilon^2) M_{t0}, \\
&\nu \varepsilon A_{00}^{(0)} + \nu B_{00}^{(0)} + (1 - \nu) \varepsilon \beta^{(1)} + \frac{1}{4} \nu (3 \varepsilon A_{10}^{(0)} + B_{10}^{(0)} + \varepsilon A_{01}^{(0)} + 3 B_{01}^{(0)}) \\
&= \frac{1 - \nu}{4 \pi \varepsilon^2} (1 - \varepsilon^2) M_{t0}
\end{aligned}$$

..... (2.40)

これと解ITは κ の1次の場合の解が得られる。

以下同様にして、一般に κ の $(2r)$ 次および $(2r+1)$ 次の解と次のようにして求めることができる。

κ の $(2r)$ 次 ($r \geq 1$): $W^{(2r)}$ ε 次式のようである。

$$W^{(2r)} = \sum_{i,j} \sum_{(0 \leq i+j \leq r)} C_{ij}^{(2r)} \varepsilon^{2i+1} \eta^{2j+1} \quad (2.41)$$

$T = T^0$ とし、 $C_{ij}^{(2r)}$ は未定係数である。これと式 (2.34) に代入すれば $C_{ij}^{(2r)}$ および $\gamma^{(2r)}$ を決定する T の 9 次連立方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
E3: & (1 - 2\nu) [\varepsilon^2 (2i+3)(2i+2) C_{i+1,j}^{(2r)} + (2j+3)(2j+2) C_{i,j+1}^{(2r)}] \\
&= \varepsilon l_{ij}^{(2r-1)} + m_{ij}^{(2r-1)} - 2(1 - \nu) [C_{ij}^{(2r-2)} + \varepsilon^2 C_{i,j}^{(2r-2)}], \\
&(i, j = 0, 1, 2, \dots, r-1; i+j \leq r-1) \quad (2.42)
\end{aligned}$$

$$B3: \phi_s(\bar{C}_{ij}^{(r)}) = \phi_s(\bar{C}_{ij}^{(r)}), \quad (s = 0, 1, \dots, r) \quad (2.43)$$

$$R2: \sum_{i,j} \sum_{(0 \leq i+j \leq r)} \frac{(2i+1)!(2j+1)!}{2^{2(i+j+1)} i! j! (i+j+2)!} (1 - \varepsilon^2) C_{ij}^{(2r)}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \varepsilon (1 + \varepsilon^2) \gamma^{(2r)} = \sum_{i,j} \sum_{(0 \leq i+j \leq r-1)} \left[\frac{(2i+1)! (2j)!}{2^{2(i+j+1)} i! j! (i+j+2)!} \right. \\
& \times (e_{ij}^{(2r-1)} + \varepsilon A_{ij}^{(2r-1)}) - \varepsilon \frac{(2i)! (2j+1)!}{2^{2(i+j+1)} i! j! (i+j+1)!} (d_{ij}^{(2r-1)} - \varepsilon B_{ij}^{(2r-1)}) \\
& \dots\dots (2.44)
\end{aligned}$$

$\therefore = 1,$

$$\bar{C}_{ij}^{(r)} = \frac{1-2\nu}{2\nu} \left\{ \varepsilon^2 (2i+1) + (2j+1) \right\} C_{ij}^{(2r)} + \frac{1-2\nu}{2\nu} \varepsilon (1-\varepsilon^2) \gamma_{ij}^{(2r)},$$

$$\bar{C}_{ij}^{(r)} = \varepsilon \frac{1-2\nu}{2\nu} d_{ij}^{(2r-1)} + \frac{1-2\nu}{2\nu} e_{ij}^{(2r-1)} + (1-\varepsilon^2) \frac{1-\nu}{\nu} f_{ij}^{(2r-2)}$$

$$+ \left\{ \varepsilon \frac{1-2\nu}{2\nu} - (1-\varepsilon^2) \varepsilon (2i+1) \right\} A_{ij}^{(2r-1)} - \left\{ \varepsilon^2 \frac{1-2\nu}{2\nu} + (1-\varepsilon^2) (2j+1) \right\} B_{ij}^{(2r-1)}$$

$$- (1-\varepsilon^2) \varepsilon^2 \frac{1-\nu}{\nu} \beta_{ij}^{(2r-1)},$$

$$d_{ij}^{(2r-1)} = \varepsilon^2 (2i+1) A_{ij}^{(2r-1)} - (2j+1) A_{i-1, j+1}^{(2r-1)},$$

$$e_{ij}^{(2r-1)} = \varepsilon^2 (2i+2) B_{i+1, j-1}^{(2r-1)} - (2j+1) B_{i, j-1}^{(2r-1)},$$

$$f_{ij}^{(2r-2)} = \varepsilon^2 (2i+1) C_{i, j-1}^{(2r-2)} - (2j+1) C_{i-1, j}^{(2r-2)},$$

$$l_{ij}^{(2r-1)} = \varepsilon^2 (2i+3)(2i+2) A_{i+1, j}^{(2r-1)} - (2i+1)(2j+2) A_{i, j+1}^{(2r-1)},$$

$$m_{ij}^{(2r-1)} = \varepsilon^2 (2j+1)(2i+2) B_{i+1, j}^{(2r-1)} - (2j+3)(2j+2) B_{i, j+1}^{(2r-1)}$$

$T = T'' L,$

$$A_{-1, j}^{(2r-1)} = A_{i, -1}^{(2r-1)} = A_{r, j}^{(2r-1)} = A_{i, r}^{(2r-1)} = 0,$$

$$B_{-1, j}^{(2r-1)} = B_{i, -1}^{(2r-1)} = B_{r, j}^{(2r-1)} = B_{i, r}^{(2r-1)} = 0,$$

$$C_{-1, j}^{(2r-2)} = C_{i, -1}^{(2r-2)} = C_{r, j}^{(2r-2)} = C_{i, r}^{(2r-2)} = 0$$

$$\gamma_{00}^{(2r)} = \gamma^{(2r)}, \quad \beta_{00}^{(2r-1)} = \beta^{(2r-1)},$$

$$\gamma_{ij}^{(2r)} = 0, \quad \beta_{ij}^{(2r-1)} = 0 \quad (i \neq 0 \text{ 或 } i \neq j \neq 0)$$

式 (2.42) ~ (2.44) の方程式の数は, 未知量 $C_{ij}^{(2r)}$ ($i, j = 0, 1, \dots, r; i+j \leq r$) および $\gamma^{(2r)}$ の数と同じであり, これらを解けば r の各値に對する未知量をすべて決定することができ.

κ の $(2r+1)$ 次 ($r \geq 1$): $\sigma^{(2r+1)}, \nabla^{(2r+1)}$ を次式のようにおく.

$$\left. \begin{aligned} \sigma^{(2r+1)} &= \sum_{i,j} \sum_{(0 \leq i+j \leq r)} A_{ij}^{(2r+1)} \xi^{2i+1} \eta^{2j}, \\ \nabla^{(2r+1)} &= \sum_{i,j} \sum_{(0 \leq i+j \leq r)} B_{ij}^{(2r+1)} \xi^{2i} \eta^{2j} \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

$T = T^{\text{III}}$, $A_{ij}^{(2r+1)}, B_{ij}^{(2r+1)}$ は未定係数である. これらを式 (2.35) に代入すれば $A_{ij}^{(2r+1)}, B_{ij}^{(2r+1)}$ および $\beta^{(2r+1)}$ を決定する T の q 次の方程式が得られる.

$$\begin{aligned} E1: & (1-2\nu)(2j+2)(2j+1)A_{i,j+2}^{(2r+1)} + \varepsilon(2i+1)(2j+1)B_{i+1,j}^{(2r+1)} \\ & + \varepsilon^2 \cdot 2(1-\nu)(2i+3)(2i+2)A_{i+1,j}^{(2r+1)} = q_{ij}^{(2r)} - (1-2\nu)[a_{ij}^{(2r-1)} \\ & - 2\varepsilon d_{ij}^{(2r-1)}], \quad (i, j = 0, 1, \dots, r-1; i+j \leq r-1) \quad (2.46) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E2: & 2(1-\nu)(2j+3)(2j+2)B_{i,j+1}^{(2r+1)} + \varepsilon A_{i,j+1}^{(2r+1)} \\ & + \varepsilon^2(1-2\nu)(2i+2)(2i+1)B_{i+1,j}^{(2r+1)} = h_{ij}^{(2r)} - (1-2\nu)[b_{ij}^{(2r-1)} \\ & + 2\varepsilon d_{ij}^{(2r-1)}], \quad (i, j = 0, 1, \dots, r-1; i+j \leq r-1) \quad (2.47) \end{aligned}$$

$$B1: \phi_s(\bar{A}_{ij}^{(r)}) = \phi_s(\bar{a}_{ij}^{(r)}), \quad (s = 0, 1, \dots, r) \quad (2.48)$$

$$B2: \phi_s(\bar{B}_{ij}^{(r)}) = \phi_s(\bar{b}_{ij}^{(r)}), \quad (s = 0, 1, \dots, r) \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} R1: & \sum_{i,j} \sum_{(0 \leq i+j \leq r)} \frac{(2i)!(2j)!}{2^{2(i+j)} i! j!} \left\{ \varepsilon(2i+1)A_{ij}^{(2r+1)} + (2j+1)B_{ij}^{(2r+1)} \right\} \\ & + \frac{1-\nu}{\nu} \varepsilon \beta^{(2r+1)} = \frac{1-\nu}{\nu} \sum_{i,j} \sum_{(0 \leq i+j \leq r)} \frac{(2i)!(2j)!}{2^{2(i+j)} (i+j+1)!} f_{ij}^{(2r)} \quad (2.50) \end{aligned}$$

$\therefore \vdots =$,

$$\bar{A}_{ij}^{(r)} = \left\{ \varepsilon^2 \frac{1-\nu}{\nu} (2i+1) + \frac{1-2\nu}{2\nu} (2j) \right\} A_{ij}^{(2r+1)} + \varepsilon (2j+1) B_{ij}^{(2r+1)} \\ + \varepsilon \frac{1-2\nu}{\nu} (i+1) B_{i+1, j-1}^{(2r+1)} + \varepsilon^2 \beta_{ij}^{(2r+1)},$$

$$\bar{B}_{ij}^{(r)} = \left\{ \varepsilon^2 \frac{1-2\nu}{\nu} i + \frac{1-\nu}{\nu} (2j+1) \right\} B_{ij}^{(2r+1)} + \varepsilon (2i+1) A_{ij}^{(2r+1)} \\ + \varepsilon \frac{1-2\nu}{\nu} (j+1) A_{i-1, j+1}^{(2r+1)} + \varepsilon \beta_{ij}^{(2r+1)},$$

$$\bar{a}_{ij}^{(r)} = -d_{i, j-1}^{(2r-1)} + \varepsilon f_{ij}^{(2r)} + \varepsilon B_{i, j-1}^{(2r-1)} - \varepsilon (1-\varepsilon^2) \frac{1-2\nu}{2\nu} (2i+1) C_{i, j-1}^{(2r)} - \varepsilon^2 \tilde{\gamma}_{i, j-1}^{(2r)},$$

$$\bar{b}_{ij}^{(r)} = -e_{i-1, j}^{(2r-1)} + f_{ij}^{(2r)} - \varepsilon A_{i-1, j}^{(2r-1)} - (1-\varepsilon^2) \frac{1-2\nu}{2\nu} (2j+1) C_{i-1, j}^{(2r)} + \varepsilon \tilde{\gamma}_{i-1, j}^{(2r)},$$

$$a_{ij}^{(2r+1)} = \varepsilon^4 (2i+3)(2i+2) A_{i+1, j-1}^{(2r+1)} - 2\varepsilon^2 \{ (2i+1)2j + i+j+1 \} A_{ij}^{(2r+1)} \\ + (2j+2)(2j+1) A_{i-1, j+1}^{(2r+1)},$$

$$b_{ij}^{(2r+1)} = \varepsilon^4 (2i+2)(2i+1) B_{i+1, j-1}^{(2r+1)} - 2\varepsilon^2 \{ 2i(2j+1) + i+j+1 \} B_{ij}^{(2r+1)} \\ + (2j+3)(2j+2) B_{i-1, j+1}^{(2r+1)},$$

$$c_{ij}^{(2r)} = \varepsilon^4 (2i+3)(2i+2) C_{i+1, j-1}^{(2r)} - \varepsilon^2 \{ 2(2i+1)(2j+1) + 2i+2j+3 \} \\ \times C_{ij}^{(2r)} + (2j+3)(2j+2) C_{i-1, j+1}^{(2r)},$$

$$g_{ij}^{(2r)} = \varepsilon^3 (2i+3)(2i+2) C_{i+1, j-1}^{(2r)} - \varepsilon (2i+2)(2j+1) C_{ij}^{(2r)},$$

$$h_{ij}^{(2r)} = \varepsilon^2 (2i+1)(2j+2) C_{i, j}^{(2r)} - (2j+3)(2j+2) C_{i-1, j+1}^{(2r)}$$

前同様の場合と同様にして、式(2.46)～(2.50)を解けば、 r の各値に對する未知量をすべて決定することができる。

以上の方法によつて、未知関数 $W^{(2r)}$, $U^{(2r+1)}$, $V^{(2r+1)}$ および未知定数 $\gamma^{(2r)}$, $\beta^{(2r+1)}$ を K の所要の次数まで決定することができる。これらの値を用ゐれば式(2.33)および(2.9)から変位および応力を求めることができる。

2.4 数値例 ポアソン比 $\nu=0.3$ とし, $\xi=0.2, 0.3$ および 0.4 の各場合について κ の 4 次までの未知関数および未知定数を求めた。一例として $\xi=0.3$ の場合の応力成分および α, β を示せば次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_{x'}}{M_t/a^2b} &= (-0.230 + 0.230\xi^2 + 0.687\eta^2)\kappa + (0.887 + 1.853\xi^2 \\ &\quad - 2.739\xi^4 - 1.178\eta^2 - 3.511\xi^2\eta^2 + 0.170\eta^4)\kappa^3, \\ \frac{\sigma_{y'}}{M_t/a^2b} &= (0.559 - 1.674\xi^2 - 0.559\eta^2)\kappa + (-0.894 - 1.140\xi^2 \\ &\quad + 0.822\xi^4 + 1.115\eta^2 + 5.705\xi^2\eta^2 - 0.221\eta^4)\kappa^3, \\ \frac{\sigma_z}{M_t/a^2b} &= (2.002 - 8.802\xi^2 + 0.792\eta^2)\kappa + (-3.866 + 12.878\xi^2 \\ &\quad + 10.143\xi^4 - 1.159\eta^2 - 8.481\xi^2\eta^2 + 0.173\eta^4)\kappa^3, \\ \frac{\tau_{xz}}{M_t/a^2b} &= -2.122\eta + (2.357\eta + 5.011\xi^2\eta - 0.350\eta^3)\kappa^2 + (-7.076\eta \\ &\quad - 11.771\xi^2\eta - 3.493\xi^4\eta + 0.636\eta^3 + 4.099\xi^2\eta^3 - 0.228\eta^5)\kappa^4, \\ \frac{\tau_{yz}}{M_t/a^2b} &= 0.637\xi + (-0.327\xi + 4.035\xi^3 - 3.088\xi\eta^2)\kappa^2 + (1.690\xi \\ &\quad - 11.185\xi^3 - 1.233\xi^5 + 5.849\xi\eta^2 + 12.403\xi^3\eta^2 - 1.169\xi\eta^4)\kappa^4, \\ \frac{\tau_{x'y'}}{M_t/a^2b} &= 1.793\xi\eta\kappa + (-4.271\xi\eta - 2.934\xi^3\eta + 1.662\xi\eta^3)\kappa^3, \\ \frac{\alpha a}{M_t/Ga^3} &= 12.850 - 18.641\kappa^2 + 42.127\kappa^4, \\ \frac{\beta}{M_t/Ga^3} &= 2.441\kappa - 4.953\kappa^3 \end{aligned} \right\} \dots\dots (2.51)$$

式 (2.51) を用いて $\kappa=0.3$ の場合に對する x' 軸上および y' 軸上の応力成分を求めれば, 図 2.8 および図 2.9 に示すようになる。このうち主要な応

力は σ_z と τ_{xz} であり, $|\tau_{xz}|$ および $|\sigma_z|$ の最大値はそれぞれ円の短軸端 ($x'=0, y'=\pm b$), 長軸端 ($x'=\pm a, y'=0$) に生ずる。これらの応力値の ν に対する関係を示したのが図 2.10 および 2.11 である。

中心軸の単位長さあたりの伸びを表わす量 β の ν に対する関係を示せば, 図 2.12 のようになる。初めの仮定によつて初期ねじれの正の方向と棒に作用するねじりモーメントの正の方向が逆であるから, 初期ねじれと反対の方向にねじり場合には中心軸が伸び, 同じ方向にねじり場合には縮むことがわかる。

以上述べた初期ねじれが応力および変位に及ぼす影響は, 断面が細長いほど著しく, 円に近づくにつれて小さくなる。完全な円になると初期ねじれの影響がなくなり, 単なる丸棒をねじった状態になるとは前節の場合と同様に確かめることができる。

以上の各図には, 比較のために大久保の結果⁽¹⁾を破線で示した。初期ねじれが小さい場合には両者はよく一致することがわかる。

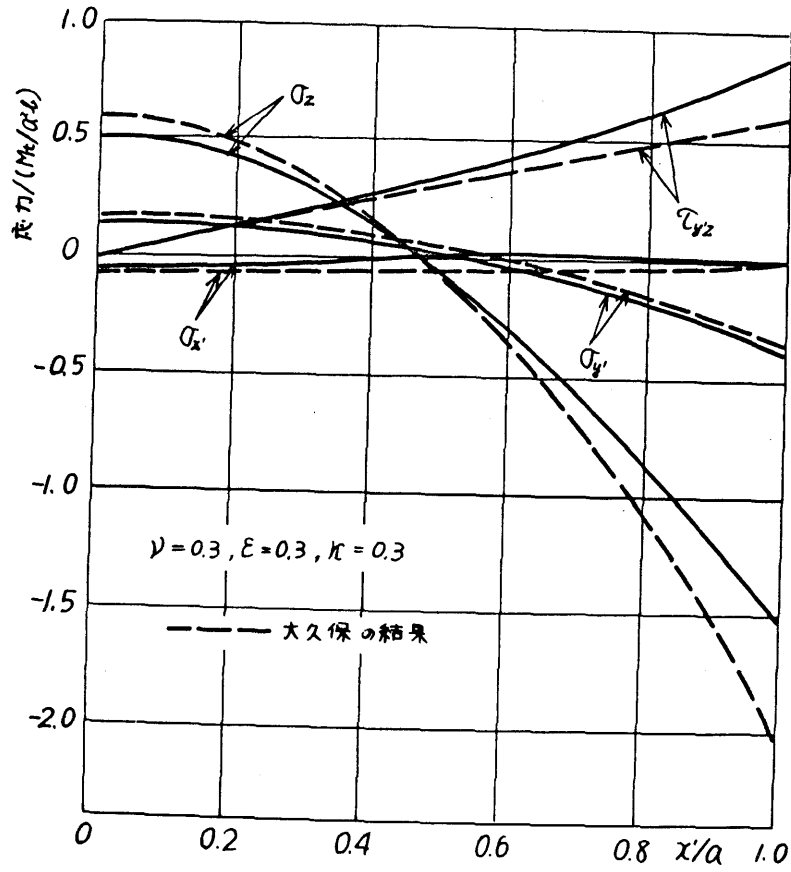


図 2.8 x' 軸上の応力分布

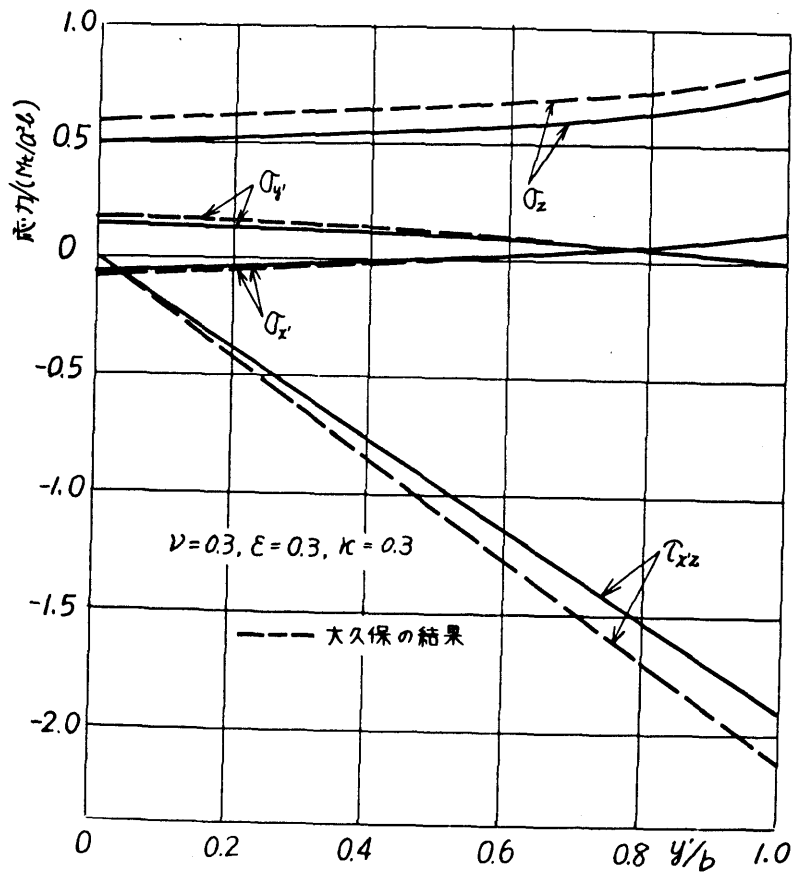


図 2.9 y' 軸上の応力分布

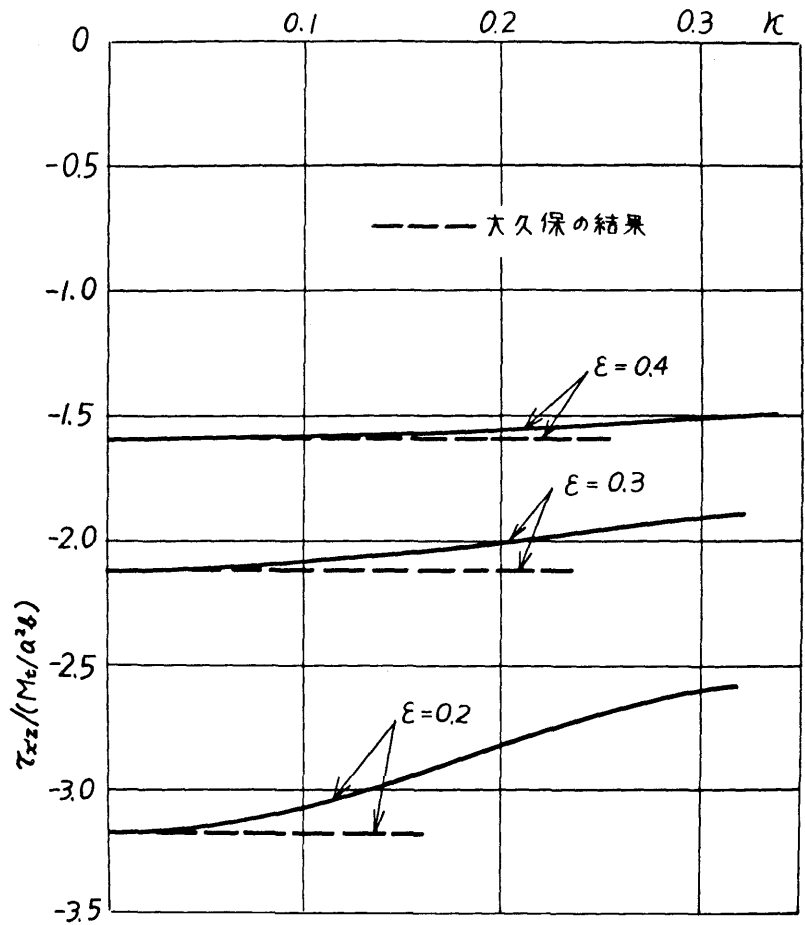


図 2.10 短軸端における τ_{xz}

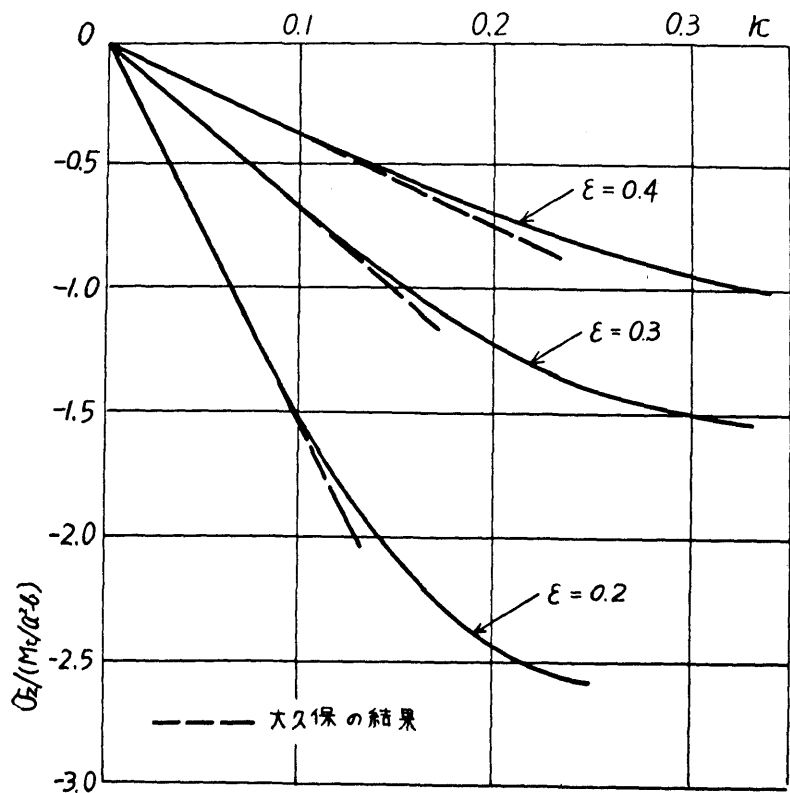


図 2.11 長軸端における σ_z

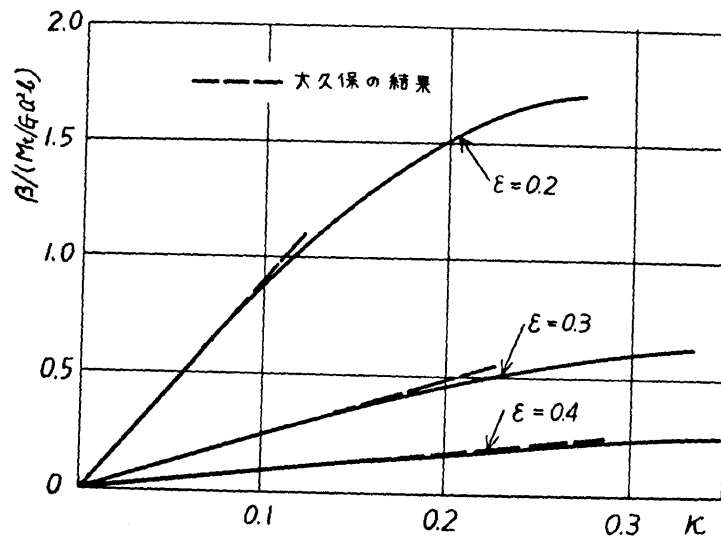


図 2-12 中心軸の伸び

第3章 初期ねじれを有する長方形断面棒の引張りおよびねじり

初期ねじれを有する長方形断面棒の引張りおよびねじり問題に対する従来の研究としては、円形断面棒の解を修正して細長い長方形断面の場合に適用した大久保の解⁽¹⁾が挙げられるにすぎず、一般の長方形断面の棒に対する解はまだ示されていない。本章では、一般の長方形断面棒に対して、棒の側面に与える境界条件を満たす解を導いた。ただし、棒の初期ねじれが大きい場合には計算が非常に複雑になるので、初期ねじれ量が十分小さいものとして、大久保の解法⁽¹⁾と同じように基礎方程式を簡略化して問題を扱った。

第1節 引張り

1.1 基礎式 図3.1に示すような辺の長さ $2a$ および $2b$ の長方形断面の棒に、軸方向の引張り力 P_u が作用するものとする。図示のように座標

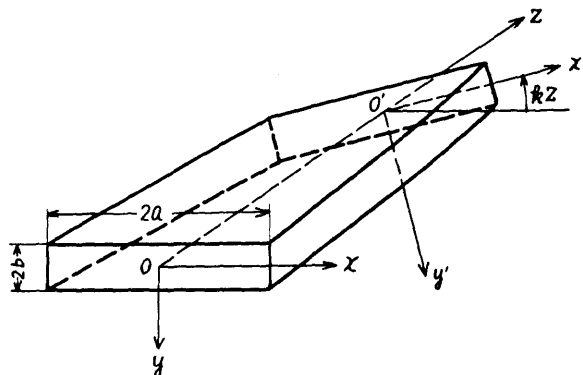


図3.1 初期ねじれを有する長方形断面の棒

軸 z とり, x' , y' および z 軸方向の変位 u' , v' および w を次のようにおく.

$$\left. \begin{aligned} u' &= u_1(x', y') - \frac{\sigma_0}{E} \nu x' - \alpha y' z, \\ v' &= v_1(x', y') - \frac{\sigma_0}{E} \nu y' + \alpha x' z, \\ w &= w_1(x', y') + \left(\beta + \frac{\sigma_0}{E} \right) z \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

ここに, $u_1(x', y')$, $v_1(x', y')$, $w_1(x', y')$ は未知関数, α , β は未知定数であり, σ_0 は断面上の平均応力 $P_0/4ab$ を表わす. このときスエーデンの結果⁽¹⁾に従えば, 1 に対して $(ka)^2$ が無視できるような小さい初期ねじれの棒に対して, 平衡方程式および応力と変位の関係式がそれぞれ次のように表わされる.

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad \frac{\partial \Delta}{\partial x'} + (1-2\nu) \nabla_1^2 u_1 &= 0, \\ (b) \quad \frac{\partial \Delta}{\partial y'} + (1-2\nu) \nabla_1^2 v_1 &= 0, \\ (c) \quad \nabla_1^2 w_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x'} &= \frac{2\nu G}{1-2\nu} \Delta_1 + 2G \frac{\partial u_1}{\partial x'}, \\ \sigma_{y'} &= \frac{2\nu G}{1-2\nu} \Delta_1 + 2G \frac{\partial v_1}{\partial y'}, \\ \sigma_z &= \frac{2\nu G}{1-2\nu} \Delta_1 + 2G \left\{ k D_2(w_1) + \beta \right\} + \sigma_0, \\ \tau_{xy} &= G \left(\frac{\partial u_1}{\partial y'} + \frac{\partial v_1}{\partial x'} \right), \\ \tau_{xz} &= G \left(\frac{\partial w_1}{\partial x'} - \alpha y' \right), \\ \tau_{yz} &= G \left(\frac{\partial w_1}{\partial y'} + \alpha x' \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

ここに,

$$\begin{aligned} \nabla_1^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2}, \quad D_2 = -y' \frac{\partial}{\partial x'} + x' \frac{\partial}{\partial y'}, \\ \Delta &= \Delta_1 + \frac{\sigma_0}{E} (1-2\nu), \quad \Delta_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x'} + \frac{\partial v_1}{\partial y'} + k D_2(w_1) + \beta \end{aligned}$$

棒の断面の境界は $x' = \pm a$ および $y' = \pm b$ であり、
 られから、棒の側面における境界条件は式(2.5)
 から次のようになる。

境界 $x' = \pm a$ において

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad \sigma_{x'} - k y' \tau_{x'z} &= 0, \\ (b) \quad \tau_{x'y'} - k y' \tau_{y'z} &= 0, \\ (c) \quad \tau_{x'z} - k y' \sigma_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

境界 $y' = \pm b$ において

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad \tau_{x'y'} + k x' \tau_{x'z} &= 0, \\ (b) \quad \sigma_{y'} + k x' \tau_{y'z} &= 0, \\ (c) \quad \tau_{y'z} + k x' \sigma_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

各断面に作用する合力は次式を満足しなければならない。

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad \int_{-a}^a \int_{-b}^b \sigma_z dx' dy' &= 4ab \sigma_0, & (b) \quad \int_{-a}^a \int_{-b}^b (x' \tau_{y'z} - y' \tau_{x'z}) dx' dy' &= 0, \\ (c) \quad \int_{-a}^a \int_{-b}^b y' \sigma_z dx' dy' &= 0, & (d) \quad \int_{-a}^a \int_{-b}^b x' \sigma_z dx' dy' &= 0, \\ (e) \quad \int_{-a}^a \int_{-b}^b \tau_{x'z} dx' dy' &= 0, & (f) \quad \int_{-a}^a \int_{-b}^b \tau_{y'z} dx' dy' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3.6)$$

かくして、問題は式(3.2)～(3.6)を満足する未知関数 u , v , w および未知定数 α , β を求めることに帰着する。

1.2 解の誘導

[1] w および α の決定 境界条件(3.4)の(c)
 および(3.5)の(c)に式(3.3)を代入し、上と同

この省略を行つたば、境界条件として次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} (a) \left[\frac{\partial w_1}{\partial x'} \right]_{x'=\pm a} &= \left(\alpha + \frac{k\sigma_0}{G} \right) y', \\ (b) \left[\frac{\partial w_1}{\partial y'} \right]_{y'=\pm b} &= - \left(\alpha + \frac{k\sigma_0}{G} \right) x' \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

w_1 は次式のようにおけば、これは平衡方程式 (3.2) の (c) と恒等的に満足する。

$$w_1 = -\frac{16}{\pi^3} \left(\alpha + \frac{k\sigma_0}{G} \right) \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[a^2 C_n \sin\left(\frac{n\pi x'}{2a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y'}{2a}\right) - b^2 C_n^* \sinh\left(\frac{n\pi x'}{2b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right) \right] \quad (3.8)$$

ここに、 C_n および C_n^* は境界条件 (3.7) から決定される未定係数である。式 (3.8) を式 (3.7) の (a) に代入し、右辺にフーリエ展開

$$y' = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{8b}{\pi^2} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right), \quad [-b \leq y' \leq b] \quad (3.9)$$

を用いれば

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{8b}{\pi^2} \left(\alpha + \frac{k\sigma_0}{G} \right) n C_n^* \cosh\left(\frac{n\pi a}{2b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right) \\ &= \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\alpha + \frac{k\sigma_0}{G} \right) \frac{8b}{\pi^2} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right) \end{aligned}$$

これから

$$C_n^* = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^3 \cosh(n\pi a/2b)} \quad (3.10)$$

同様にして式 (3.7) の (b) から

$$C_n = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^3 \cosh(n\pi b/2a)} \quad (3.11)$$

次に α を定めるために式 (3.8) を式 (3.3) に代入して τ_{xz} および τ_{yz} を求め、これを適合条件方程式 (3.6) の (b) に代入すれば次式を得る。

$$\frac{1}{3} \alpha ab(a^2+b^2) + \frac{32}{\pi^4} \left(\alpha + \frac{k\sigma_0}{G} \right) ab(a^2+b^2) \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} - \frac{128}{\pi^5} \left(\alpha + \frac{k\sigma_0}{G} \right) \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \left\{ a^4 \tanh\left(\frac{n\pi b}{2a}\right) + b^4 \tanh\left(\frac{n\pi a}{2b}\right) \right\} = 0 \quad (3.12)$$

∴ z 次の係数を

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96} \quad (3.13)$$

を用いれば、 α は次のように求められる。

$$\alpha = \frac{k\sigma_0}{G} (K_1 - 1) \quad (3.14)$$

ただし、

$$K_1 = \frac{ab(a^2+b^2)}{2ab(a^2+b^2) - \frac{384}{\pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \left\{ a^4 \tanh\left(\frac{n\pi b}{2a}\right) + b^4 \tanh\left(\frac{n\pi a}{2b}\right) \right\}} \quad (3.15)$$

式 (3.10), (3.11), (3.14) および (3.15) を式 (3.8) に代入すれば、 w_1 とした z 次の式を得る。

$$w_1 = -\frac{16}{\pi^3} \frac{k\sigma_0}{G} K_1 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^3} \left[a^2 \frac{\sinh(n\pi y'/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} \sin\left(\frac{n\pi x'}{2a}\right) - b^2 \frac{\sinh(n\pi x'/2b)}{\cosh(n\pi a/2b)} \sin\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right) \right] \quad (3.16)$$

[2] u_1, v_1 および β の決定 式 (3.16) を用いば平衡方程式 (3.2) の (a) および (b) は次のように書きかえられる。

$$\left. \begin{aligned} 2(1-\nu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x' \partial y'} + (1-2\nu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial y'^2} &= K_1 \frac{k^2 \sigma_0}{G} \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \\ &\times \left[a \sin\left(\frac{n\pi x'}{2a}\right) \frac{\cosh(n\pi y'/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} - b \cos\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right) \frac{\sinh(n\pi x'/2b)}{\cosh(n\pi a/2b)} \right. \\ &+ \frac{\pi}{2} n x' \cos\left(\frac{n\pi x'}{2a}\right) \frac{\cosh(n\pi y'/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} - \frac{\pi}{2} n x' \cos\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right) \frac{\cosh(n\pi x'/2b)}{\cosh(n\pi a/2b)} \\ &\left. + \frac{\pi}{2} n y' \sin\left(\frac{n\pi x'}{2a}\right) \frac{\sinh(n\pi y'/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} + \frac{\pi}{2} n y' \sin\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right) \frac{\sinh(n\pi x'/2b)}{\cosh(n\pi a/2b)} \right], \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
(1-2\nu) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x' \partial y'} + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 v_1}{\partial y'^2} &= K_1 \frac{k^2 \sigma_0}{G} \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \\
&\times \left[-a \cos\left(\frac{n\pi x'}{2a}\right) \frac{\sinh(n\pi y'/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} + b \sin\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right) \frac{\cosh(n\pi x'/2b)}{\cosh(n\pi a/2b)} \right. \\
&+ \frac{\pi}{2} n x' \sin\left(\frac{n\pi x'}{2a}\right) \frac{\sinh(n\pi y'/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} + \frac{\pi}{2} n x' \sin\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right) \frac{\sinh(n\pi x'/2b)}{\cosh(n\pi a/2b)} \\
&\left. - \frac{\pi}{2} n y' \cos\left(\frac{n\pi x'}{2a}\right) \frac{\cosh(n\pi y'/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} + \frac{\pi}{2} n y' \cos\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right) \frac{\cosh(n\pi x'/2b)}{\cosh(n\pi a/2b)} \right]
\end{aligned}$$

..... (3.17)

境界条件式 (3.4) の (a), (b) と u (3.5) の (a), (b) と, 式 (3.3) と u (3.16) とを用いて書き直すと

$$\begin{aligned}
\left[(1-\nu) \frac{\partial u_1}{\partial x'} + \nu \frac{\partial v_1}{\partial y'} + \nu \beta \right]_{x'=\pm a} &= \frac{k^2 \sigma_0}{2G} (1-2\nu + 2\nu K_1) y'^2 \\
+ K_1 \frac{k^2 \sigma_0}{G} \frac{8\nu}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} &\left[a^2 \frac{\cosh(n\pi y'/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} - ab(-1)^{(n-1)/2} \tanh\left(\frac{n\pi a}{2b}\right) \cos\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right) \right]
\end{aligned}$$

..... (3.18)

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial u_1}{\partial y'} + \frac{\partial v_1}{\partial x'} \right]_{x'=\pm a} &= \pm (K_1 - 1) \frac{k^2 \sigma_0}{G} a y' \\
\pm K_1 \frac{k^2 \sigma_0}{G} \frac{8}{\pi^2} y' \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} &\left[-a \frac{\cosh(n\pi y'/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} + b(-1)^{(n-1)/2} \tanh\left(\frac{n\pi a}{2b}\right) \cos\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right) \right]
\end{aligned}$$

(複号同順) (3.19)

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial u_1}{\partial y'} + \frac{\partial v_1}{\partial x'} \right]_{y'=\pm b} &= \pm (K_1 - 1) \frac{k^2 \sigma_0}{G} b y' \\
\pm K_1 \frac{k^2 \sigma_0}{G} \frac{8}{\pi^2} x' \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} &\left[-b \frac{\cosh(n\pi x'/2b)}{\cosh(n\pi a/2b)} + a(-1)^{(n-1)/2} \tanh\left(\frac{n\pi b}{2a}\right) \cos\left(\frac{n\pi x'}{2a}\right) \right]
\end{aligned}$$

(複号同順) (3.20)

$$\begin{aligned}
\left[\nu \frac{\partial u_1}{\partial x'} + (1-\nu) \frac{\partial v_1}{\partial y'} + \nu \beta \right]_{y'=\pm b} &= \frac{k^2 \sigma_0}{2G} (1-2\nu + 2\nu K_1) x'^2 \\
+ K_1 \frac{k^2 \sigma_0}{G} \frac{8\nu}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} &\left[b^2 \frac{\cosh(n\pi x'/2b)}{\cosh(n\pi a/2b)} - ab(-1)^{(n-1)/2} \tanh\left(\frac{n\pi b}{2a}\right) \cos\left(\frac{n\pi x'}{2a}\right) \right]
\end{aligned}$$

..... (3.21)

u_1, v_1 は次のように与えられる。

$$u_1 = K_1 \frac{k^2 \sigma_0}{G} \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ \sin\left(\frac{n\pi x'}{2a}\right) \left\{ D_n \cosh\left(\frac{n\pi y'}{2a}\right) + E_n y' \sinh\left(\frac{n\pi y'}{2a}\right) \right\} \right. \\ \left. + \cos\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right) \left\{ D_n^* \sinh\left(\frac{n\pi x'}{2b}\right) + E_n^* x' \cosh\left(\frac{n\pi x'}{2b}\right) \right\} \right. \\ \left. + \frac{2b^2}{\pi} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^3} y' \sin\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right) \frac{\sinh(n\pi x'/2b)}{\cosh(n\pi a/2b)} \right. \\ \left. - [v\beta + (2K_1 - 1) \frac{k^2 \sigma_0}{2G} (a^2 - va^2 - vb^2)] x' + (2K_1 - 1) \frac{k^2 \sigma_0}{6G} x'^3 \right. \\ \left. - (2K_1 - 1) \frac{k^2 \sigma_0}{2G} x' y'^2 \right\}$$

$$v_1 = K_1 \frac{k^2 \sigma_0}{G} \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ \cos\left(\frac{n\pi x'}{2a}\right) \left\{ F_n \sinh\left(\frac{n\pi y'}{2a}\right) + G_n y' \cosh\left(\frac{n\pi y'}{2a}\right) \right\} \right. \\ \left. + \sin\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right) \left\{ F_n^* \cosh\left(\frac{n\pi x'}{2b}\right) + G_n^* x' \sinh\left(\frac{n\pi x'}{2b}\right) \right\} \right. \\ \left. + \frac{2a^2}{\pi} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^3} x' \sin\left(\frac{n\pi x'}{2a}\right) \frac{\sinh(n\pi y'/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} \right. \\ \left. - [v\beta + (2K_1 - 1) \frac{k^2 \sigma_0}{2G} (b^2 - vb^2 - va^2)] y' - (2K_1 - 1) \frac{k^2 \sigma_0}{2G} x'^2 y' \right. \\ \left. + (2K_1 - 1) \frac{k^2 \sigma_0}{6G} y'^3 \right\}$$

..... (3.22)

ここに、未定係数 D_n, E_n, F_n, G_n および $D_n^*, E_n^*, F_n^*, G_n^*$ は平衡方程式 (3.17) および境界条件式 (3.18) ~ (3.21) を満たすように定めらる。

式 (3.22) を式 (3.17) に代入すれば、平衡方程式を満たすための条件として次の式を得る。

$$E_n + G_n = - \frac{2a^2}{\pi} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^3} \frac{1}{\cosh(n\pi b/2a)}, \\ E_n^* + G_n^* = - \frac{2b^2}{\pi} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^3} \frac{1}{\cosh(n\pi a/2b)},$$

$$\left. \begin{aligned} nD_n - \frac{2a}{\pi}(3-4\nu)E_n + nF_n &= \frac{4a^3}{\pi^2} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^3} \frac{1}{\cosh(n\pi b/2a)}, \\ nD_n^* + \frac{2b}{\pi}(3-4\nu)E_n^* + nF_n^* &= -\frac{8b^3}{\pi^2} (1-2\nu) \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^3} \frac{1}{\cosh(n\pi a/2b)} \end{aligned} \right\} \dots\dots (3.23)$$

式(3.22)に境界条件(3.18)を代入し、式(3.9)を用いれば次式を得る。

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ (1-\nu)D_n^* + \nu F_n^* \right\} \frac{n\pi}{2b} \cosh\left(\frac{n\pi a}{2b}\right) + (1-\nu)E_n^* \cosh\left(\frac{n\pi a}{2b}\right) \\ & + \left\{ (1-\nu)E_n^* + \nu G_n^* \right\} \frac{n\pi a}{2b} \sinh\left(\frac{n\pi a}{2b}\right) \cos\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right) \\ & = -\nu ab \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \tanh\left(\frac{n\pi a}{2b}\right) \cos\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right) \end{aligned}$$

式(3.23)を用いれば、上式から、境界条件(3.18)を満足するための条件として次式を得る。

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{n\pi}{b} D_n^* + 2(1-2\nu)E_n^* \right\} \cosh\left(\frac{n\pi a}{2b}\right) + \frac{n\pi a}{b} E_n^* \sinh\left(\frac{n\pi a}{2b}\right) \\ & = \frac{8b^2\nu}{\pi} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^3} \end{aligned} \quad (3.24)$$

同様にして、境界条件(3.21)を満足するための

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{n\pi}{a} F_n + 2(1-2\nu)G_n \right\} \cosh\left(\frac{n\pi b}{2a}\right) + \frac{n\pi b}{a} G_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{2a}\right) \\ & = \frac{8a^2\nu}{\pi} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^3} \end{aligned} \quad (3.25)$$

式(3.22)に境界条件(3.19)を代入し、式(3.23)を用いれば

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[(-1)^{(n-1)/2} \left\{ 4(1-\nu)G_n + \frac{n\pi}{a} F_n \right\} \sinh\left(\frac{n\pi y'}{2a}\right) + (-1)^{(n-1)/2} \frac{n\pi}{a} G_n y' \cosh\left(\frac{n\pi y'}{2a}\right) \right. \\ & \left. + \left\{ \left(\frac{n\pi}{b} D_n^* + 4(1-\nu)E_n^* \right) \sinh\left(\frac{n\pi a}{2b}\right) + \frac{n\pi a}{b} E_n^* \cosh\left(\frac{n\pi a}{2b}\right) \right\} \sin\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right) \right] \end{aligned}$$

$$= -\frac{\pi^2}{8} \frac{5K_1 - 3}{K_1} ay' - \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[\frac{4a^2(1-2\nu)}{\pi} \frac{1}{n^3} \frac{\sinh(n\pi y'/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} \right. \\ \left. + \left\{ \frac{4b^2}{\pi} (1-2\nu) \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^3} \tanh\left(\frac{n\pi a}{2b}\right) + ab \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \right\} \sin\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right) \right]$$

上式に式(3.24)および式(3.25)の関数係数を代入し、さらに式(3.9)および式

$$\left. \begin{aligned} \sinh\left(\frac{m\pi y'}{2a}\right) &= \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{ab(-1)^{(n-1)/2} m}{m^2 b^2 + n^2 a^2} \cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right), \\ y' \cosh\left(\frac{m\pi y'}{2a}\right) &= \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{8}{\pi^2} \frac{a^2 b (-1)^{(n-1)/2} (n^2 a^2 - m^2 b^2)}{(m^2 b^2 + n^2 a^2)^2} \cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{\pi} \frac{ab^2 m (-1)^{(n-1)/2}}{m^2 b^2 + n^2 a^2} \sinh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right) \right\} \sin\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right), \quad [-b \leq y' \leq b], \\ \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2(m^2 b^2 + n^2 a^2)} &= \frac{\pi^2}{8} \frac{1}{a^2 n^2} \left[1 - \frac{2b}{an\pi} \tanh\left(\frac{n\pi a}{2b}\right) \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.26)$$

を用いて整理すれば

$$\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[\left\{ \sinh\left(\frac{n\pi a}{2b}\right) + \frac{n\pi a}{2b} \operatorname{sech}\left(\frac{n\pi a}{2b}\right) \right\} E_n^* \right. \\ \left. - \frac{8a^3 b}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m+n)/2} m n^2}{(m^2 b^2 + n^2 a^2)^2} G_m \cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right) \\ = -\frac{8K_1 - 3}{2K_1} ab \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right)$$

この式から、式(3.22)が境界条件(3.19)を満足するための条件として

$$E_n^* \left\{ \sinh\left(\frac{n\pi a}{2b}\right) + \frac{n\pi a}{2b} \operatorname{sech}\left(\frac{n\pi a}{2b}\right) \right\} - \frac{8a^3 b}{\pi} \\ \times \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m+n)/2} m n^2}{(m^2 b^2 + n^2 a^2)^2} G_m \cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right) = -\frac{8K_1 - 3}{2K_1} ab \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \\ \dots\dots\dots (3.27)$$

を得る。同様にして、境界条件(3.20)を満足する

すなわち $l = 1\pi$,

$$G_n \left\{ \sinh\left(\frac{n\pi b}{2a}\right) + \frac{n\pi b}{2a} \operatorname{sech}\left(\frac{n\pi b}{2a}\right) \right\} - \frac{8ab^3}{\pi} \\ \times \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m+n)/2} m n^2}{(m^2 a^2 + n^2 b^2)^2} E_m^* \operatorname{cosh}\left(\frac{m\pi a}{2b}\right) = -\frac{8K_1-3}{2K_1} ab \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \dots\dots\dots (3.28)$$

かくして式 (3.24) ~ (3.28) を用いれば、式 (3.22) に含まれる未定係数がすべて決定される。このうち式 (3.27) および (3.28) から E_n^* および G_n を定めたい。

$$E_n^* = \frac{(-1)^{(n-1)/2} b^2 e_n^*}{n^2 \operatorname{cosh}(n\pi a/2b)}, \quad G_n = \frac{(-1)^{(n-1)/2} a^2 g_n}{n^2 \operatorname{cosh}(n\pi b/2a)} \quad (3.29)$$

と仮定すると都合がよい。これを式 (3.27) および (3.28) に代入すれば、 e_n^* および g_n に関する連立方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} e_n^* \left\{ \tanh\left(\frac{n\pi a}{2b}\right) + \frac{n\pi a}{2b} \operatorname{sech}^2\left(\frac{n\pi a}{2b}\right) \right\} + \frac{8a^5}{\pi b} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{n^4}{m(m^2 b^2 + n^2 a^2)^2} g_m \\ = -\frac{8K_1-3}{2K_1} \frac{a}{b} \\ g_n \left\{ \tanh\left(\frac{n\pi b}{2a}\right) + \frac{n\pi b}{2a} \operatorname{sech}^2\left(\frac{n\pi b}{2a}\right) \right\} + \frac{8b^5}{\pi a} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{n^4}{m(m^2 a^2 + n^2 b^2)^2} e_m^* \\ = -\frac{8K_1-3}{2K_1} \frac{b}{a} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.30)$$

式 (3.30) に逐次近似法⁽⁹⁾ を採用すれば、 e_n^* および g_n は容易に定められる。

次に未知定数 β は合意の方程式 (3.6) の (a) から定められる。すなわち、式 (3.16) および (3.22) を式 (3.3) に代入して σ_2 を算出し、これを式 (3.6) の (a) に代入すれば

$$\beta = \frac{k^2 \sigma_0}{G} K_2 \quad (3.31)$$

$T = T = L$,

$$\begin{aligned} K_2 = & \frac{1}{6(1+\nu)} (a^2 + b^2) (6\nu K_1 - 3\nu - 2K_1) \\ & + \frac{\nu K_1}{1+\nu} \frac{1}{ab} \frac{64}{\pi^4} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} \left\{ a^4 g_n \tanh\left(\frac{n\pi b}{2a}\right) + b^4 e_n^* \tanh\left(\frac{n\pi a}{2b}\right) \right\} \\ & + K_1 \frac{1}{ab} \frac{128}{\pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \left\{ a^4 \tanh\left(\frac{n\pi b}{2a}\right) + b^4 \tanh\left(\frac{n\pi a}{2b}\right) \right\} \quad (3.32) \end{aligned}$$

なお、合応力方程式 (3.6) の (c) ~ (f) は、式 (3.3) から導かれる応力成分を代入すれば恒等的に満足される。

[3] 応力成分 未知関数 u_1, v_1, w_1 および未知定数 α, β がすでに与えられたので、式 (3.3) から応力成分を導くことができる。主要な応力成分 σ_z と τ_{xz} と示せば次式のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_z}{\sigma_0} = & 1 + k^2 \left[2(1+\nu)K_2 - \nu(2K_1 - 1)(a^2 + b^2) \right. \\ & - \frac{32}{\pi^2} \nu K_1 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1/2}}{n^2} \left\{ a^2 \left(g_n + \frac{2}{n\pi} \right) \cos\left(\frac{n\pi x'}{2a}\right) \frac{\cosh(n\pi y'/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} \right. \\ & \left. \left. + b^2 \left(e_n^* + \frac{2}{n\pi} \right) \cos\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right) \frac{\cosh(n\pi x'/2b)}{\cosh(n\pi a/2b)} \right\} \right. \\ & + \frac{16}{\pi^2} K_1 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{a(-1)^{n-1/2}}{n^2} \left(y' \cos\left(\frac{n\pi x'}{2a}\right) \frac{\sinh(n\pi y'/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} \right. \right. \\ & \left. \left. - x' \sin\left(\frac{n\pi x'}{2a}\right) \frac{\cosh(n\pi y'/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} \right) - \frac{b(-1)^{n-1/2}}{n^2} \left(y' \sin\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right) \frac{\cosh(n\pi x'/2b)}{\cosh(n\pi a/2b)} \right. \right. \\ & \left. \left. - x' \cos\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right) \frac{\sinh(n\pi x'/2b)}{\cosh(n\pi a/2b)} \right) \right\} \left. \right] \\ \frac{\tau_{xz}}{\sigma_0} = & -k \left[(K_1 - 1) y' + \frac{8}{\pi^2} K_1 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{a(-1)^{n-1/2}}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi x'}{2a}\right) \frac{\sinh(n\pi y'/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} \right. \right. \end{aligned}$$

$$\left. \left. - \frac{b(-1)^{n-1/2}}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi x'}{2b}\right) \frac{\cosh(n\pi x'/2b)}{\cosh(n\pi a/2b)} \right\} \right\} \dots\dots (3.33)$$

ただし，式(3.33)に含まれる係数 g_n および e_n^* は式(3.30)から計算される。

つまり，他の応力成分の表示は割愛したが，これらに上述の2成分と比較して小さい値である。

1.3 数値例 ポアソン比 $\nu=0.3$ とし， $\varepsilon = b/a = 0.2, 0.3$ および 0.4 の各場合に対して数値計算を行ない，棒に生ずる変位および応力を求めた。未定係数 e_n^* および g_n は，それぞれはじめの5個を連立方程式(3.30)に逐次近似計算を6回繰返すことにより求めた。一例として $\varepsilon = 0.2$ の場合の係数値を表3.1に示す。

表3.1 係数表 ($\nu=0.3, \varepsilon=0.2$)

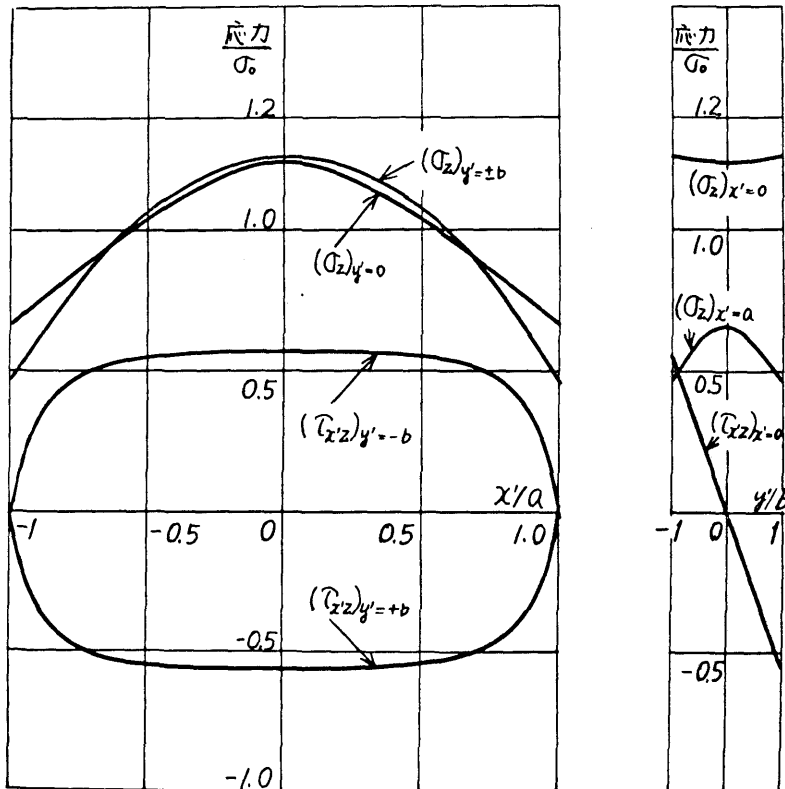
n	g_n	e_n^*
1	-1.2862	-2.1851
3	-0.5839	0.7854
5	-0.4140	1.2425
7	-0.2560	1.3878
9	-0.1175	1.4524

表3.2には軸方向の単位長 L に対する中心軸まわりのねじれ量 α および初期ねじれによつて生ずる中心軸の伸びの補正量 β をそれぞれ初期ねじれ量 $\alpha = ka$ の関数として示した。初期ねじれによつて棒の中心軸は伸びやうくたふること，また，引張りにはねじれを伴うことがわかる。棒の変形に及ぼす初期ねじれの影響は断面が細長いほど著し

表 3.2 α および β ($\nu = 0.3$)

b/a	α	β
0.2	$16.710 \kappa \sigma_0 / EA$	$5.795 \kappa^2 \sigma_0 / E$
0.3	$7.098 \kappa \sigma_0 / EA$	$2.545 \kappa^2 \sigma_0 / E$
0.4	$3.692 \kappa \sigma_0 / EA$	$1.433 \kappa^2 \sigma_0 / E$
0.5	$2.132 \kappa \sigma_0 / EA$	$0.889 \kappa^2 \sigma_0 / E$

次に断面上の応力分布の例として $\varepsilon = 0.2$, $\kappa = 0.2$ の場合をとりあげ、 σ_z および τ_{xz} の x' 軸上 ($y' = 0$), y' 軸上 ($x' = 0$) および断面の境界上 ($x' = \pm a, y' = \pm b$) の変化を図 3.2 に示した。図示のように σ_z, τ_{xz} は



(a) x' 軸方向

(b) y' 軸方向

図 3.2 応力分布 ($\varepsilon = 0.2, \kappa = 0.2$)

いづれも長辺の中央で最大値をとることがわかる。表3.3には、これらの最大値とその他の各値に対して初期ねじれ量の関数として示した。初期ねじれが増加すると σ_z は平均応力 σ_0 に比較して小さくなり、 τ_{xz} も無視できない値になる。このような傾向は断面が細長いほど顕著である。

表 3.3 応力 ($\nu=0.3$)

b/a	$(\sigma_z)_{x'=0, y'=\pm b}$	$(\tau_{xz})_{x'=0, y'=\mp b}$
0.2	$(1+6.528\kappa^2)\sigma_0$	$\pm 2.798\kappa\sigma_0$
0.3	$(1+3.365\kappa^2)\sigma_0$	$\pm 1.933\kappa\sigma_0$
0.4	$(1+1.596\kappa^2)\sigma_0$	$\pm 1.483\kappa\sigma_0$
0.5	$(1+0.750\kappa^2)\sigma_0$	$\pm 1.201\kappa\sigma_0$

第2節 ねじり

2.1 基礎式 図3.1に示すような長方形断面の棒が中心軸のまわりにねじりモーメント M_t を受けるときには、変位成分 u' , v' および w' が、式(3.1)で $\sigma_0=0$ とあいたものによって与えられるものとする。

初期ねじれが十分小さい場合を取扱うものとするれば、平衡方程式は式(3.2)で与えられ、また応力と変位間の関係式は式(3.3)において $\sigma_0=0$ とあいたものになる。棒の側面における境界条件は式(3.4)および(3.5)で与えられ、また、合応力の方程式は式(3.6)の(a), (b)を次のように書きかえたものになる。

$$(a) \int_{-a}^a \int_{-b}^b \sigma_z dx' dy' = 0,$$

$$(b) \int_{-a}^a \int_{-b}^b (x' \tau_{yz} - y' \tau_{xz}) dx' dy' = M_t \quad (3.34)$$

2.2 解の誘導

[1] w_1 および α の決定 境界条件 (3.4) の (c) および (3.5) の (c) は、応力と変位間の関係式を用いれば次のように書きかえられる。

$$\left. \begin{aligned} (a) \left[\frac{\partial w_1}{\partial x'} \right]_{x'=\pm a} &= \alpha y' \\ (b) \left[\frac{\partial w_1}{\partial y'} \right]_{y'=\pm b} &= -\alpha x' \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

未知量 w_1 を次式

$$w_1 = -\frac{16}{\pi^3} \alpha \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[a^2 C_n \sin\left(\frac{n\pi x'}{2a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y'}{2a}\right) - b^2 C_n^* \sinh\left(\frac{n\pi x'}{2b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right) \right] \quad (3.36)$$

とおけば、これは平衡方程式 (3.2) の (c) を恒等的に満たす。ここで、未定係数 C_n および C_n^* は前節と同様にし式 (3.35) の (a), (b) から決定され、それぞれ式 (3.11) および (3.10) と同じ形に与えられる。

次に α を定めるために、式 (3.36) を応力と変位間の関係式に代入して τ_{xz} および τ_{yz} を求め、これを式 (3.34) の (b) に代入すれば

$$\alpha = K_3 \frac{M_t}{G a^4} \quad (3.37)$$

ただし、

$$K_3 = \frac{0.75}{\frac{2b}{a} \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) - \frac{384}{\pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \left\{ \tanh\left(\frac{n\pi b}{2a}\right) + \frac{b^4}{a^4} \tanh\left(\frac{n\pi a}{2b}\right) \right\}} \quad \dots\dots\dots (3.38)$$

したがって式 (3.36) は次式のように記述される。

$$w_1 = -\frac{16}{\pi^3} K_3 \frac{M_0}{G a^4} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^3} \left[a^2 \sin\left(\frac{n\pi x'}{2a}\right) \frac{\sinh(n\pi y'/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} - b^2 \sin\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right) \frac{\sinh(n\pi x'/2b)}{\cosh(n\pi a/2b)} \right] \quad (3.39)$$

[2] u_1, v_1 および u, v の決定 平衡方程式 (3.2) の (a), (b) は、式 (3.39) を用いて次のように書きかえられる。

$$\left. \begin{aligned} 2(1-\nu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x' \partial y'} + (1-2\nu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial y'^2} &= \frac{8}{\pi^2} K_3 \frac{T k}{G a^4} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \\ &\times \left[a \sin\left(\frac{n\pi x'}{2a}\right) \frac{\cosh(n\pi y'/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} - b \cos\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right) \frac{\sinh(n\pi x'/2b)}{\cosh(n\pi a/2b)} \right. \\ &+ \frac{\pi}{2} n x' \cos\left(\frac{n\pi x'}{2a}\right) \frac{\cosh(n\pi y'/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} - \frac{\pi}{2} n x' \cos\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right) \frac{\cosh(n\pi x'/2b)}{\cosh(n\pi a/2b)} \\ &\left. + \frac{\pi}{2} n y' \sin\left(\frac{n\pi x'}{2a}\right) \frac{\sinh(n\pi y'/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} + \frac{\pi}{2} n y' \sin\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right) \frac{\sinh(n\pi x'/2b)}{\cosh(n\pi a/2b)} \right] \\ (1-2\nu) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x' \partial y'} + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 v_1}{\partial y'^2} &= \frac{8}{\pi^2} K_3 \frac{T k}{G a^4} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \\ &\times \left[-a \cos\left(\frac{n\pi x'}{2a}\right) \frac{\sinh(n\pi y'/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} + b \sin\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right) \frac{\cosh(n\pi x'/2b)}{\cosh(n\pi a/2b)} \right. \\ &+ \frac{\pi}{2} n x' \sin\left(\frac{n\pi x'}{2a}\right) \frac{\sinh(n\pi y'/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} + \frac{\pi}{2} n x' \sin\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right) \frac{\sinh(n\pi x'/2b)}{\cosh(n\pi a/2b)} \\ &\left. - \frac{\pi}{2} n y' \cos\left(\frac{n\pi x'}{2a}\right) \frac{\cosh(n\pi y'/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} + \frac{\pi}{2} n y' \cos\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right) \frac{\cosh(n\pi x'/2b)}{\cosh(n\pi a/2b)} \right] \\ &\dots\dots\dots (3.40) \end{aligned} \right\}$$

境界条件式 (3.4) の (a), (b) および (3.5) の (a), (b) は、式 (3.39) および u, v の応力と変位間の関係を用いて次式のように記述される。

$$\left[(1-\nu) \frac{\partial u_1}{\partial x'} + \nu \frac{\partial v_1}{\partial y'} + \nu \beta \right]_{x'=+a} = \nu K_3 \frac{M_0 k}{G a^4} \left[y'^2 \right]$$

$$+ \frac{8}{\pi^2} a \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left\{ a \frac{\cosh(n\pi y'/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} - b(-1)^{(n-1)/2} \tanh\left(\frac{n\pi a}{2b}\right) \cos\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right) \right\}$$

..... (3.41)

$$\left[\frac{\partial u_1}{\partial y'} + \frac{\partial v_1}{\partial x'} \right]_{x'=\pm a} = \pm K_3 \frac{M \pm k}{G a^3} y'$$

$$\pm \frac{8}{\pi^2} K_3 \frac{I k}{G a^4} y' \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[-a \frac{\cosh(n\pi y'/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} + b(-1)^{(n-1)/2} \tanh\left(\frac{n\pi a}{2b}\right) \cos\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right) \right],$$

(複号同) (複号同))

..... (3.42)

$$\left[\frac{\partial u_1}{\partial y'} + \frac{\partial v_1}{\partial x'} \right]_{y'=\pm b} = \pm K_3 \frac{M \pm k b}{G a^4} x'$$

$$\pm \frac{8}{\pi^2} K_3 \frac{M \pm k}{G a^4} x' \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[(-1)^{(n-1)/2} a \tanh\left(\frac{n\pi b}{2a}\right) \cos\left(\frac{n\pi x'}{2a}\right) - b \frac{\cosh(n\pi x'/2b)}{\cosh(n\pi a/2b)} \right].$$

(複号同) (複号同))

..... (3.43)

$$\left[\nu \frac{\partial u_1}{\partial x'} + (1-\nu) \frac{\partial v_1}{\partial y'} + \nu \beta \right]_{y'=\pm b} = \nu K_3 \frac{M \pm k}{G a^4} \left[x'^2 \right.$$

$$\left. + \frac{8b}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[-a(-1)^{(n-1)/2} \tanh\left(\frac{n\pi b}{2a}\right) \cos\left(\frac{n\pi x'}{2a}\right) + b \frac{\cosh(n\pi x'/2b)}{\cosh(n\pi a/2b)} \right] \right]$$

..... (3.44)

u_1, v_1, w_1, v_1, τ の 2 次 の 5 項 1 = 5 < .

$$u_1 = \frac{8}{\pi^2} K_3 \frac{M \pm k}{G a^4} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ \sin\left(\frac{n\pi x'}{2a}\right) \left[D_n \cosh\left(\frac{n\pi y'}{2a}\right) + E_n y' \sinh\left(\frac{n\pi y'}{2a}\right) \right] \right.$$

$$\left. + \cos\left(\frac{n\pi y'}{2a}\right) \left[D_n^* \sinh\left(\frac{n\pi x'}{2b}\right) + E_n^* x' \cosh\left(\frac{n\pi x'}{2b}\right) \right] \right\}$$

$$+ \frac{2b^2}{\pi} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^3} y' \sin\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right) \frac{\sinh(n\pi x'/2b)}{\cosh(n\pi a/2b)}$$

$$+ K_3 \frac{M \pm k}{G a^4} \left[-\{(1-\nu)a^2 - \nu b^2\} x' + \frac{1}{3} x'^3 - x' y'^2 \right] - \nu \beta x'$$

$$v_1 = \frac{8}{\pi^2} K_3 \frac{M \pm k}{G a^4} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ \cos\left(\frac{n\pi x'}{2a}\right) \left[F_n \sinh\left(\frac{n\pi y'}{2a}\right) + G_n y' \cosh\left(\frac{n\pi y'}{2a}\right) \right] \right.$$

$$\left. + \sin\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right) \left[F_n^* \cosh\left(\frac{n\pi x'}{2b}\right) + G_n^* x' \sinh\left(\frac{n\pi x'}{2b}\right) \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2a^2 (-1)^{(n-1)/2}}{\pi n^3} x' \sin\left(\frac{n\pi x'}{2a}\right) \frac{\sinh(n\pi y/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} \Bigg] \\
 & + K_3 \frac{M_t k}{G a^4} \left[-\{(1-\nu)b^2 - \nu a^2\} y' - x'^2 y' + \frac{1}{3} y'^3 \right] - \nu \beta y'
 \end{aligned}
 \tag{3.45}$$

ここに、未定係数 D_n, E_n, F_n, G_n および $D_n^*, E_n^*, F_n^*, G_n^*$ は前節と同じように、平衡方程式 (3.40) および境界条件式 (3.41) ~ (3.44) を満たすように定めらる。平衡方程式を満たすための条件として、式 (3.23) が得られ、 $T = \tau$ 、境界条件 (3.41) および (3.44) を満たすための条件として式 (3.24) および (3.25) が得られる。さらに境界条件 (3.42) および (3.43) を満たすための条件として以下次の連立方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned}
 e_n^* \left\{ \tanh\left(\frac{n\pi a}{2b}\right) + \frac{n\pi a}{2b} \operatorname{sech}^2\left(\frac{n\pi a}{2b}\right) \right\} + \frac{8a^5}{\pi b} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{n^4}{m(m^2 b^2 + n^2 a^2)^2} g_m &= -\frac{4a}{b} \\
 g_n \left\{ \tanh\left(\frac{n\pi b}{2a}\right) + \frac{n\pi b}{2a} \operatorname{sech}^2\left(\frac{n\pi b}{2a}\right) \right\} + \frac{8b^5}{\pi a} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{n^4}{m(m^2 a^2 + n^2 b^2)^2} e_m^* &= -\frac{4b}{a}
 \end{aligned} \right\}
 \tag{3.46}$$

ただし、未定係数 e_n^* および g_n は式 (3.29) で与えられる。かくして前節と全く同じ手続きにより未定係数 D_n, E_n, F_n, G_n および $D_n^*, E_n^*, F_n^*, G_n^*$ を求めることができ、式 (3.45) が決定される。

未知定数 β は合応力方程式 (3.34) の (a) から次のように定められる。

$$\beta = K_4 \frac{M_t k}{G a^2} \tag{3.47}$$

$T = \tau$ とし、

$$\begin{aligned}
 K_4 = & \frac{1}{1+\nu} \left[(\nu - \frac{1}{3})(1 + \frac{b^2}{a^2}) + \nu \frac{64}{\pi^4} \frac{a}{b} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} \left\{ g_n \tanh\left(\frac{n\pi b}{2a}\right) + \frac{b^4}{a^4} e_n^* \tanh\left(\frac{n\pi a}{2b}\right) \right\} \right. \\
 & \left. + (1+\nu) \frac{128}{\pi^5} \frac{a}{b} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \left\{ \tanh\left(\frac{n\pi b}{2a}\right) + \frac{b^4}{a^4} \tanh\left(\frac{n\pi a}{2b}\right) \right\} \right] \tag{3.48}
 \end{aligned}$$

[3] 応力成分 前節と同様に主要な応力成分 σ_z および τ_{xz} を示せば、次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_z}{M_t/a^2b} = & 2k \left[(1+\nu)K_4b - \nu \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) K_3b \right. \\ & - \frac{16}{\pi^2} \nu K_3b \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \left(g_n + \frac{2}{n\pi} \right) \cos\left(\frac{n\pi x'}{2a}\right) \frac{\cosh(n\pi y'/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} \right. \\ & \left. + \frac{b^2}{a^2} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \left(e_n^* + \frac{2}{n\pi} \right) \cos\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right) \frac{\cosh(n\pi x'/2b)}{\cosh(n\pi a/2b)} \right\} \\ & + \frac{8}{\pi^2} K_3 \frac{b}{a} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \left(y' \cos\left(\frac{n\pi x'}{2a}\right) \frac{\sinh(n\pi y'/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} \right. \right. \\ & \left. \left. - x' \sin\left(\frac{n\pi x'}{2a}\right) \frac{\cosh(n\pi y'/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} \right) \right. \\ & \left. - \frac{b}{a} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \left(y' \sin\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right) \frac{\cosh(n\pi x'/2b)}{\cosh(n\pi a/2b)} \right. \right. \\ & \left. \left. - x' \cos\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right) \frac{\sinh(n\pi x'/2b)}{\cosh(n\pi a/2b)} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{xz}}{M_t/a^2b} = & -K_3 \frac{b^2}{a^2} \left[\frac{y'}{b} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \right. \\ & \times \left\{ \frac{a}{b} \cos\left(\frac{n\pi x'}{2a}\right) \frac{\sinh(n\pi y'/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} \right. \\ & \left. \left. - \sin\left(\frac{n\pi y'}{2b}\right) \frac{\cosh(n\pi x'/2b)}{\cosh(n\pi a/2b)} \right\} \right] \end{aligned}$$

..... (3.49)

他の応力成分は上記2成分に比較して小さくはなすので、これらの表示は省略した。

- 2.3 数値例 ポアソン比 $\nu = 0.3$ とし、 $\varepsilon = b/a = 0.2, 0.3, 0.4$ および 0.5 の各場合に対し数値計算を行ない、棒に生ずる変位および応力を求めた。未定係数 e_n^* および g_n はそれぞれ最初の5個を、連立方程式(3.46)に逐次近似計算を6回繰返すことにより求めた。一例として $\varepsilon = 0.2$ の場合の係数値を表3.4に示す。

表3.4 係数表 ($\nu = 0.3, \varepsilon = 0.2$)

n	g_n	e_n^*
1	-1.3546	-2.3013
3	-0.6149	0.8271
5	-0.4360	1.3086
7	-0.2696	1.4616
9	-0.1237	1.5296

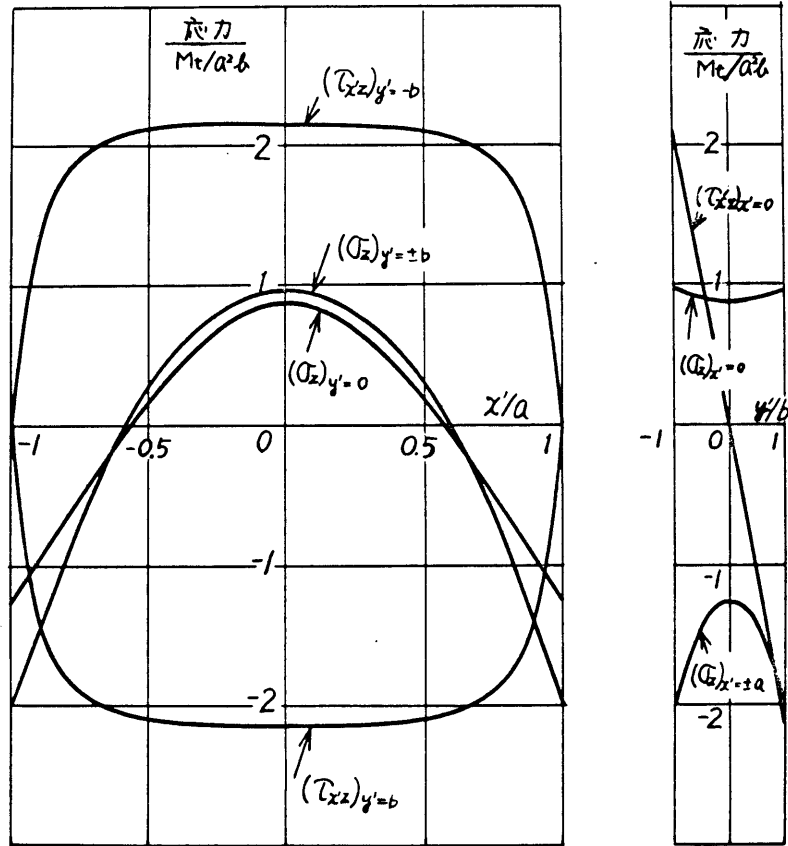
表3.5には、中心軸まわりのねじれ量 α および軸方向の伸び β の値を示した。棒がねじられる場合に中心軸の伸びが伴うこと、初期ねじれが棒の変形に及ぼす影響は断面が細長いほど著しいことがわかった。

表3.5 α および β ($\nu = 0.3$)

b/a	α	β
0.2	$26.78 Mt/Ga^4$	$8.035 \kappa Mt/Ga^3$
0.3	$8.56 Mt/Ga^4$	$2.242 \kappa Mt/Ga^3$
0.4	$3.91 Mt/Ga^4$	$0.891 \kappa Mt/Ga^3$
0.5	$2.19 Mt/Ga^4$	$0.411 \kappa Mt/Ga^3$

断面上の応力分布の例として $\varepsilon = 0.2$, $\kappa = b/a = 0.2$ の場合を選び、 x' 軸 ($y' = 0$), y' 軸 ($x' = 0$) および

断面の境界 ($x' = \pm a, y' = \pm b$) における σ_z および τ_{xz} を図 3.3 に示した。図示のように, σ_z の最大値および最小値はそれぞれ点 $(0, \pm b), (\pm a, \pm b)$ に, また τ_{xz} の最大値および最小値はそれぞれ点 $(0, -b), (0, b)$ に生ずることがわかる。表 3.6 はこれらの最大値および最小値を ε の種々の値について示したものである。断面が細長いほどこれらの値に及ぼす初期ねじれの影響は著しい。



(a) x' 軸方向

(b) y' 軸方向

図 3.3 応力分布 ($\varepsilon = 0.2, \nu = 0.2$)

表 3.6 応力 ($\nu=0.3$)

b/a	$(\bar{\sigma}_z)_{x'=0, y'=\pm b}$	$(\bar{\sigma}_z)_{x'=\pm a, y'=\pm b}$	$(\bar{\tau}_{xz})_{x'=0, y'=\pm b}$
0.2	$4.826 \kappa M_t / a^2 b$	$-9.870 \kappa M_t / a^2 b$	$\pm 2.156 M_t / a^2 b$
0.3	$2.430 \kappa M_t / a^2 b$	$-5.529 \kappa M_t / a^2 b$	$\pm 1.539 M_t / a^2 b$
0.4	$1.652 \kappa M_t / a^2 b$	$-3.792 \kappa M_t / a^2 b$	$\pm 1.216 M_t / a^2 b$
0.5	$1.250 \kappa M_t / a^2 b$	$-1.725 \kappa M_t / a^2 b$	$\pm 1.130 M_t / a^2 b$

第4章 初期ねじれを有する各種断面 形の棒の引張りおよびねじり

初期ねじれを有し、かつ二つの対称軸を持つ細長い各種断面形の棒が引張りおよびねじりを受けるとした場合の応力を線形問題として解析した。応力の項で表わされた基礎方程式から出発し、だ円形断面の曲げ⁽⁶⁾に対して用いられたものと類似の方法、すなわち初期ねじれ量および断面の主軸の比をパラメータとする二重摂動法により、解を誘導した。まず、二つの対称軸を有する一般の断面形の棒に対して級数解の最初の数項を求め、初期ねじれがあまり大きくない場合に成り立つ応力の一般的表現式を導いた。次にこれの具体的な応用例として、だ円形、長方形およびひし形断面の棒に対する応力を求め、初期ねじれ量との関係を検討した。特にだ円形および長方形断面の棒に対しては、それぞれ第2章および第3章の結果と比較した。

第1節 引張り^(c)

1.1 基礎式 初期ねじれを有し、二つの対称軸を持つ一様な断面の棒の中心軸をZ軸とし、任意断面の主軸 x' および y' 軸を回転座標軸に選んで座標間の関係式(2.1)を用いれば、応力の項で表わされた平衡方程式および適合条件式は大久保の結果⁽¹⁰⁾からそれぞれ次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x'}{\partial x'} + \frac{\partial \tau_{xy'}}{\partial y'} + k D_2 (\tau_{xz}) + k \tau_{yz} = 0, \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tau_{x'y'}}{\partial x'} + \frac{\partial \sigma_{y'}}{\partial y'} + k D_2(\tau_{y'z}) - k \tau_{x'z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{x'z}}{\partial x'} + \frac{\partial \tau_{y'z}}{\partial y'} + k D_2(\sigma_z) &= 0 \end{aligned} \right\} (4.1)$$

$$\left. \begin{aligned} (1+\nu) \left[(\nabla_1^2 + k^2 D_1 - k^2) \sigma_{x'} + 2k^2 \sigma_{y'} + 4k^2 D_2(\tau_{x'y'}) \right] + \frac{\partial^2 \Theta'}{\partial x'^2} &= 0, \\ (1+\nu) \left[(\nabla_1^2 + k^2 D_1 - k^2) \sigma_{y'} + 2k^2 \sigma_{x'} - 4k^2 D_2(\tau_{x'y'}) \right] + \frac{\partial^2 \Theta'}{\partial y'^2} &= 0, \\ (1+\nu) \left[(\nabla_1^2 + k^2 D_1 + k^2) \tau_{y'z} - 2k^2 D_2(\tau_{x'z}) \right] + k \left[D_2 \left(\frac{\partial \Theta'}{\partial y'} \right) - \frac{\partial \Theta'}{\partial x'} \right] &= 0, \\ (1+\nu) \left[(\nabla_1^2 + k^2 D_1) \tau_{x'z} + 2k^2 D_2(\tau_{y'z}) \right] + k \left[D_2 \left(\frac{\partial \Theta'}{\partial x'} \right) + \frac{\partial \Theta'}{\partial y'} \right] &= 0, \\ (1+\nu) \left[(\nabla_1^2 + k^2 D_1 - 3k^2) \tau_{x'y'} + 2k^2 D_2(\sigma_{y'} - \sigma_{x'}) \right] + \frac{\partial^2 \Theta'}{\partial x' \partial y'} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (4.2)$$

∴ ∴ ∴ = ,

$$\left. \begin{aligned} \nabla_1^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2}, \quad \Theta' = \sigma_{x'} + \sigma_{y'} + \sigma_z, \\ D_1 &= y'^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + x'^2 \frac{\partial^2}{\partial y'^2} - 2x'y' \frac{\partial^2}{\partial x' \partial y'} - y' \frac{\partial}{\partial x'} - x' \frac{\partial}{\partial y'} - 1, \\ D_2 &= -y' \frac{\partial}{\partial x'} + x' \frac{\partial}{\partial y'} \end{aligned} \right\}$$

棒の側面における境界条件は式(2.5)で、また棒が軸方向に張力 P_x を受ける場合の応力方程式は式(2.6)で与えられる。

1.2 解の誘導 第2章と同様にして、応力成分の初期値は量 k および断面の主軸 x' , y' に対する偶奇性を次のように決定することができ、また k に対しては、 $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$, σ_z および $\tau_{x'y'}$ は偶関数、 $\tau_{x'z}$, $\tau_{y'z}$ は奇関数である。また、 x' に対しては、 $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$, σ_z および $\tau_{x'z}$ は偶関数、 $\tau_{x'y'}$, $\tau_{y'z}$ は奇関数であり、 y' に対しては $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$, σ_z および $\tau_{y'z}$

ϵ は偶関数, T_{xy} , T_{xz} は奇関数である。

棒の断面が図4.1の(a)に示すように xz 平面上の対称軸を持つものとし, 簡単な T の次の無次元量を導入する。

$$\xi = \frac{x'}{a}, \quad \eta = \frac{y'}{b}, \quad \kappa = ka, \quad \epsilon = \frac{b}{a} \quad (4.3)$$

また, 応力成分を次式のように表わすことにする。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x'} &= EP(\xi, \eta), & \sigma_{y'} &= EQ(\xi, \eta), \\ \sigma_z &= ER(\xi, \eta), & T_{xy} &= ES(\xi, \eta), \\ T_{yz} &= ET(\xi, \eta), & T_{xz} &= EU(\xi, \eta) \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

ここに, E は縦弾性係数であり, P, Q, \dots は ξ, η の無次元の応力関数である。

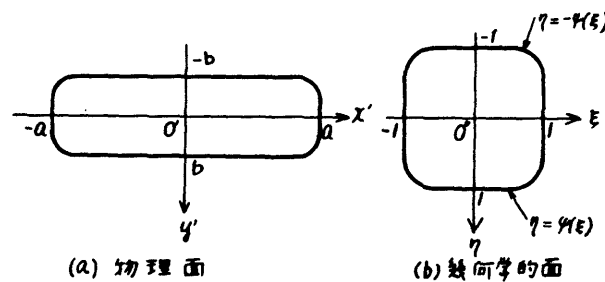


図4.1 棒の断面

式(4.3)および(4.4)を式(4.1)および(4.2)に代入すれば, 無次元で表わされた平衡方程式および適合条件式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon P_\xi + S_\eta &= -\kappa D_4(U) - \epsilon \kappa T, \\ Q_\eta + \epsilon S_\xi &= -\kappa D_4(T) + \epsilon \kappa U, \\ \epsilon U_\xi + T_\eta &= -\kappa D_4(R) \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned}
(1+\nu)[\varepsilon^2 P_{\xi\xi} + P_{\eta\eta}] + \varepsilon^2 \phi_{\xi\xi} &= -\kappa^2(1+\nu)[D_3(P) \\
&\quad + 4\varepsilon D_4(S) - 2\varepsilon^2(P-Q)], \\
(1+\nu)[\varepsilon^2 Q_{\xi\xi} + Q_{\eta\eta}] + \phi_{\eta\eta} &= -\kappa^2(1+\nu)[D_3(Q) \\
&\quad - 4\varepsilon D_4(S) + 2\varepsilon^2(P-Q)], \\
(1+\nu)[\varepsilon^2 R_{\xi\xi} + R_{\eta\eta}] &= -\kappa^2[(1+\nu)D_3(R) + D_3(\phi)], \\
(1+\nu)[\varepsilon^2 T_{\xi\xi} + T_{\eta\eta}] &= -\kappa[D_4(\phi_\eta) - \varepsilon^2 \phi_\xi] \\
&\quad - \kappa^2(1+\nu)[D_3(T) - 2\varepsilon D_4(U) - \varepsilon^2 T], \\
(1+\nu)[\varepsilon^2 U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta}] &= -\kappa[\varepsilon D_4(\phi_\xi) + \varepsilon \phi_\eta] \\
&\quad - \kappa^2(1+\nu)[D_3(U) + 2\varepsilon D_4(T) - \varepsilon^2 U], \\
(1+\nu)[\varepsilon^2 S'_{\xi\xi} + S'_{\eta\eta}] + \varepsilon \phi_{\xi\eta} &= -\kappa^2(1+\nu)[D_3(S) \\
&\quad - 4\varepsilon^2 S - 2\varepsilon D_4(P-Q)]
\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\therefore \phi = P + Q + R,$$

$$D_3 = \varepsilon^4 \eta^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \xi^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 2\varepsilon^2 \xi \eta \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} - \varepsilon^2 \eta \frac{\partial}{\partial \eta} - \varepsilon^2 \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \varepsilon^2,$$

$$D_4 = -\varepsilon^2 \eta \frac{\partial}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial}{\partial \eta}$$

また添字 ξ, η はそれぞれ ξ, η に関する偏微分を表わす。

図 4.1(b) に示すおのよりに、断面の境界が $\xi-\eta$ 面上で次式

$$F(\xi, \eta) = [\eta + \psi(\xi)][\eta - \psi(\xi)] \tag{4.7}$$

で表わすおのよりのとす。このとき境界条件式 (2.5) は次のよりに表す。

$$\left. \begin{aligned} -\varepsilon\psi\psi'P + \eta S + \kappa\eta[\varepsilon^2\psi\psi' + \xi]U &= 0, \\ -\varepsilon\psi\psi'S + \eta Q + \kappa\eta[\varepsilon^2\psi\psi' + \xi]T &= 0, \\ -\varepsilon\psi\psi'U + \eta T + \kappa\eta[\varepsilon^2\psi\psi' + \xi]R &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

合応力方程式 (2.6) の (a), (b) を式 (4.3) および (4.4) を用いて書きなおせば

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad \varepsilon \iint R d\xi d\eta &= \frac{P_u}{Ea^2}, \\ (b) \quad \iint (\xi T - \varepsilon\eta U) d\xi d\eta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

こゝに、積分領域は図形 $\eta^2 - \psi^2 = 0$ の内部であり。なお、式 (2.6) の残りの方程式は、含み応力成分の偶奇性を考慮すれば恒等的に満足される。

式 (4.5), (4.6), (4.8) および (4.9) に含まれる応力関数 P, Q, \dots は小正初期値の量および細い断面、すなわち κ および ε が小なる場合に κ および ε のべき級数に展開できるものと仮定する。さらに、すなわち述べた応力成分の各に対して偶奇性を考慮すれば、これらの関数は次式のようにおくことができる。

$$\left. \begin{aligned} P &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} {}^{(2r)}P^{(s)} \kappa^{2r} \varepsilon^s, & Q &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} {}^{(2r)}Q^{(s)} \kappa^{2r} \varepsilon^s, \\ R &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} {}^{(2r)}R^{(s)} \kappa^{2r} \varepsilon^s, & S &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} {}^{(2r)}S^{(s)} \kappa^{2r} \varepsilon^s, \\ T &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} {}^{(2r+1)}T^{(s)} \kappa^{2r+1} \varepsilon^s, & U &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} {}^{(2r+1)}U^{(s)} \kappa^{2r+1} \varepsilon^s \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

こゝに、 ${}^{(2r)}P^{(s)}, {}^{(2r)}Q^{(s)}, \dots$ は κ, ε に独立な関数であり。式 (4.10) を式 (4.5), (4.6), (4.8) および (4.9) に代入し、 κ および ε に関する各同べきの係数を等置すれば、次のように関係式を得る。

平衡方程式：

$$\left. \begin{aligned} (2r)P_{\xi}^{(s-1)} + (2r)S_{\eta}^{(s)} &= -D_6({}^{(2r-1)}U^{(s)}) - (2r-1)T^{(s-1)}, \\ (2r)Q_{\eta}^{(s)} + (2r)S_{\xi}^{(s-1)} &= -D_6({}^{(2r-1)}T^{(s)}) + (2r-1)U^{(s-1)} \end{aligned} \right\} (4.11)$$

適合条件式：

$$\left. \begin{aligned} (2r)P_{\xi\xi}^{(s-2)} + (2r)P_{\eta\eta}^{(s)} + (1+V)^{-1}({}^{(2r)}\phi_{\xi\xi}^{(s-2)}) &= -D_5({}^{(2r-2)}P^{(s)}) \\ &\quad - 4D_6({}^{(2r-2)}S^{(s-1)}) + 2({}^{(2r-2)}P^{(s-2)} - {}^{(2r-2)}Q^{(s-2)}), \\ (2r)Q_{\xi\xi}^{(s-2)} + (2r)Q_{\eta\eta}^{(s)} + (1+V)^{-1}({}^{(2r)}\phi_{\eta\eta}^{(s)}) &= -D_5({}^{(2r-2)}Q^{(s)}) \\ &\quad + 4D_6({}^{(2r-2)}S^{(s-1)}) + 2({}^{(2r-2)}Q^{(s-2)} - {}^{(2r-2)}P^{(s-2)}), \\ (2r)R_{\xi\xi}^{(s-2)} + (2r)R_{\eta\eta}^{(s)} &= -D_5({}^{(2r-2)}R^{(s)}) - (1+V)^{-1}D_5({}^{(2r-2)}\phi^{(s)}), \\ (2r)S_{\xi\xi}^{(s-2)} + (2r)S_{\eta\eta}^{(s)} + (1+V)^{-1}({}^{(2r)}\phi_{\xi\eta}^{(s-1)}) &= -D_5({}^{(2r-2)}S^{(s)}) \\ &\quad + 4({}^{(2r-2)}S^{(s-2)} - 2D_6({}^{(2r-2)}Q^{(s-1)} - {}^{(2r-2)}P^{(s-1)})) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.12)$$

境界条件式：

$$\left. \begin{aligned} -\psi\psi'({}^{(2r)}P^{(s-1)} + \eta({}^{(2r)}S^{(s)})) &= -\eta[\psi\psi'({}^{(2r-1)}U^{(s-2)} + \xi({}^{(2r-1)}U^{(s)}), \\ -\psi\psi'({}^{(2r)}S^{(s-1)} + \eta({}^{(2r)}Q^{(s)})) &= -\eta[\psi\psi'({}^{(2r-1)}T^{(s-2)} + \xi({}^{(2r-1)}T^{(s)})] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.13)$$

平衡方程式：

$$({}^{(2r+1)}U_{\xi}^{(s-1)} + (2r+1)T_{\eta}^{(s)}) = -D_6({}^{(2r)}R^{(s)}) \quad (4.14)$$

適合条件式：

$$\left. \begin{aligned} (2r+1)T_{\xi\xi}^{(s-2)} + (2r+1)T_{\eta\eta}^{(s)} &= -D_5({}^{(2r-1)}T^{(s)}) \\ &\quad + 2D_6({}^{(2r-1)}U^{(s-1)}) - (1+V)^{-1}[D_6({}^{(2r)}\phi_{\eta}^{(s)}) - (2r)\phi_{\xi}^{(s-2)}], \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} {}^{(2r+1)}\sigma_{\xi\xi}^{(s-2)} + {}^{(2r+1)}\sigma_{\eta\eta}^{(s)} &= -D_5({}^{(2r-1)}\sigma^{(s)}) \\ &- 2D_6({}^{(2r-1)}T^{(s-1)}) - (1+\nu)^{-1} [D_6({}^{(2r)}\phi_{\xi}^{(s-1)}) + {}^{(2r)}\phi_{\eta}^{(s-1)}] \end{aligned} \right\} \dots (4.15)$$

境界条件式:

$$-4\psi' {}^{(2r+1)}\sigma^{(s-1)} + \eta {}^{(2r+1)}T^{(s)} = -\eta [4\psi' {}^{(2r)}R^{(s-2)} + \xi {}^{(2r)}R^{(s)}] \dots (4.16)$$

$$\therefore \therefore 1, \quad {}^{(r)}\phi^{(s)} = {}^{(r)}P^{(s)} + {}^{(r)}Q^{(s)} + {}^{(r)}R^{(s)},$$

$$D_5({}^{(r)}\chi^{(s)}) = \eta^2 {}^{(r)}\chi_{\xi\xi}^{(s-2)} + \xi^2 {}^{(r)}\chi_{\eta\eta}^{(s)} - 2\xi\eta {}^{(r)}\chi_{\xi\eta}^{(s-2)} \\ - \eta {}^{(r)}\chi_{\eta}^{(s-2)} - \xi {}^{(r)}\chi_{\xi}^{(s-2)} - {}^{(r)}\chi^{(s-2)},$$

$$D_6({}^{(r)}\chi^{(s)}) = -\eta {}^{(r)}\chi_{\xi}^{(s-2)} + \xi {}^{(r)}\chi_{\eta}^{(s)},$$

$${}^{(r)}\chi^{(s)} = 0 \quad [r < 0 \text{ 及 } T = 1 \text{ 及 } s < 0]$$

式(4.11) ~ (4.13) および(4.14) ~ (4.16) の二組の方程式を交互に逐次解いていけば、式(5.10)に含まれる各関数 ${}^{(2r)}P^{(s)}$, ${}^{(2r)}Q^{(s)}$, ... がそれぞれ $r, s=0$ から高次まで順次決定される。解法の手順は、まず、これらの関数の η に対する偶奇性を考慮に入れて適合条件式を解き、各関数 ξ の未定関数を含む形で求める。次に、これらの未定関数の ξ に対する依存性を平衡方程式および境界条件式から決定し、さらにこの際含まれる積分定数を対応の方程式(5.9)によって定める。このようにして求められた関数 ${}^{(2r)}P^{(s)}$, ${}^{(2r)}Q^{(s)}$, ... は基礎方程式をすべて満足しており、式(4.10)は求める解となる。もし、 ν, ϵ が小さい値ならば、 r, s の最初の数項を決定すれば十分である。

1.3 解の決定 上述の解法の手順に従って式(4.11)~(4.13)を $r=0$ の場合について解けば

$$\left. \begin{aligned} {}^{(0)}P^{(s)} &= 0, \quad {}^{(0)}Q^{(s)} = 0, \\ {}^{(0)}R^{(s)} &= {}^{(0)}B^{(s)}, \quad {}^{(0)}S^{(s)} = 0 \quad [s \geq 0] \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

∴ $s=1$, ${}^{(0)}B^{(s)}$ は式(4.9)の第一式から定まる定数である。

式(4.10)の第三式を式(4.9)の第一式に代入すれば次式を得る。

$$\frac{P_u}{Ea^2} = \varepsilon \iint \left(\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} {}^{(2r)}R^{(s)} \kappa^{2r} \varepsilon^s \right) d\xi d\eta \quad (4.18)$$

このから張力 P_u は κ および ε のべき級数で表わされることかわかる。上式において張力 P_u が ε^4 の項を含む項と与えられるものとすれば、式(5.17)の定数は

$$\left. \begin{aligned} {}^{(0)}B^{(3)} &= P/AEa^2\varepsilon^4 = C_0, \quad {}^{(0)}B^{(s)} = 0 \quad [s \neq 3], \\ \text{したがって } A &= \iint_{\eta^2 - 4(\xi)^2 \leq 0} d\xi d\eta = 4 \int_0^1 \psi(\xi) d\xi \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

$T=1$ のとき、 $r=0$ に対応する応力関数は

$$\left. \begin{aligned} {}^{(0)}P &= \sum_{s=0}^{\infty} {}^{(0)}P^{(s)} \varepsilon^s = 0, \quad {}^{(0)}Q = \sum_{s=0}^{\infty} {}^{(0)}Q^{(s)} \varepsilon^s = 0, \\ {}^{(0)}R &= \sum_{s=0}^{\infty} {}^{(0)}R^{(s)} \varepsilon^s = C_0 \varepsilon^3, \quad {}^{(0)}S = \sum_{s=0}^{\infty} {}^{(0)}S^{(s)} \varepsilon^s = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

式(4.20)に対応する応力成分を求めれば、

$$\sigma_z = P_u/Aab = \sigma_0, \quad \sigma_{x'} = \sigma_{y'} = \tau_{x'y'} = 0 \quad (4.21)$$

つまり、真直な棒が張力 P_u を受ける場合の応力と同一であって、初期ねじれによる影響は以下に続く κ の1次以上の項で表わされる。ここからは、ねじれは初期ねじれを持つ細い断面の棒を考えると、 $\kappa^2 \varepsilon^s$

の乗べきが $r+s=4$ までの各応力関数を求めた。
 これらを用いて各応力成分を求め、式(4.21)の σ_0
 に対する比で表わせば次式のようにになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_x'}{\sigma_0} &= \left[C_1 \left(-\eta^2 + \frac{\psi^2}{3} \right) + \frac{1}{\psi} \int_0^{\xi} \psi \xi d\xi \right] \kappa^2, \\ \frac{\sigma_y'}{\sigma_0} &= \left[\xi^2 + C_1 (\eta^2 - 2\psi\psi'\xi - \psi^2) \right] \kappa^2, \\ \frac{\sigma_z}{\sigma_0} &= 1 + C_1 (1+\nu) (\xi^2 + C_2) E^{-2} \kappa^2, \\ \frac{\tau_{xy}'}{\sigma_0} &= -C_1 \xi \eta E^{-1} \kappa^2, \\ \frac{\tau_{yz}}{\sigma_0} &= (C_1 \psi \psi' - \xi) \kappa + C_1 (1+\nu) [C_3 \psi \psi' - \xi (\xi^2 + C_2)] E^{-2} \kappa^3, \\ \frac{\tau_{xz}}{\sigma_0} &= C_1 \eta E^{-1} \kappa + C_1 C_3 (1+\nu) \eta E^{-3} \kappa^3 \end{aligned} \right\} \dots\dots (4.22)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -\frac{3}{2} \int_0^1 \xi^2 \psi d\xi \left[\int_0^1 \psi^3 d\xi \right]^{-1}, \\ C_2 &= -\frac{4}{A} \int_0^1 \xi^2 \psi d\xi, \quad A = 4 \int_0^1 \psi d\xi, \\ C_3 &= -\frac{3}{2} \int_0^1 \left(\frac{\psi^5}{5} + \frac{C_2}{3} \psi^3 \right) d\xi \left[\int_0^1 \psi^3 d\xi \right]^{-1} \end{aligned} \right\} (4.23)$$

1.4 各種断面形の棒

(1) T 形断面の棒 T 形断面棒の場合
 には、式(4.22)および(4.23)に適用する

$$\psi = \sqrt{1 - \xi^2} \quad (4.24)$$

とすれば、応力成分は次のようにになる。

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\sigma_{x'}}{\sigma_0} &= \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2 - 1)\kappa^2, \\
 \frac{\sigma_{y'}}{\sigma_0} &= -\frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2 - 1)\kappa^2, \\
 \frac{\sigma_z}{\sigma_0} &= 1 - \frac{1}{2}(1+\nu)\left(\xi^2 - \frac{1}{4}\right)\varepsilon^{-2}\kappa^2, \\
 \frac{\tau_{xy'}}{\sigma_0} &= \frac{1}{2}\xi\eta\varepsilon^{-1}\kappa^2, \\
 \frac{\tau_{yz}}{\sigma_0} &= -\frac{1}{2}\xi\kappa - \frac{1}{2}(1+\nu)\left(\frac{3}{8}\xi - \xi^3\right)\varepsilon^{-2}\kappa^3, \\
 \frac{\tau_{xz}}{\sigma_0} &= -\frac{1}{2}\eta\varepsilon^{-1}\kappa + \frac{1}{16}(1+\nu)\eta\varepsilon^{-3}\kappa^3
 \end{aligned} \right\} (4.25)$$

これらの応力値は、第2章で求めた結果を κ および ε について昇べきの級数に展開した場合の最初の数項と一致する。

(2) 長方形断面の棒 長方形断面の棒の場合には、 η 軸に平行な境界において $\psi\psi'$ が無限大になるので、解(4.22)を直接使用する場合には長方形をなめらかな曲線で近似させることが必要である。しかし、式(4.23)から定数を決定する際には η 軸に平行な境界が容与しないから、細長い断面の形を次式

$$\psi = 1, \quad [-1 \leq \xi \leq 1] \quad (4.26)$$

と置いて定数を定めることができる。これらの定数を用いれば、応力成分は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\sigma_{x'}}{\sigma_0} &= \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2 - \frac{4}{3})\kappa^2, \\
 \frac{\sigma_{y'}}{\sigma_0} &= \frac{1}{2}(2\xi^2 - \eta^2 + 1)\kappa^2,
 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_z}{\sigma_0} &= 1 - \frac{1}{2}(1+\nu)\left(\xi^2 - \frac{1}{3}\right)\varepsilon^{-2}\kappa^2, \\ \frac{\tau_{x'y'}}{\sigma_0} &= \frac{1}{2}\xi\eta\varepsilon^{-1}\kappa^2, \\ \frac{\tau_{y'z}}{\sigma_0} &= -\xi\kappa + \frac{1}{2}(1+\nu)\xi\left(\xi^2 - \frac{1}{3}\right)\varepsilon^{-2}\kappa^3, \\ \frac{\tau_{xz}}{\sigma_0} &= -\frac{1}{2}\eta\varepsilon^{-1}\kappa + \frac{1}{15}(1+\nu)\eta\varepsilon^{-3}\kappa^3 \end{aligned} \right\} (4.27)$$

[3] 円形断面の棒 円形断面の棒の場合
合には

$$\psi = 1 - |\xi|, \quad [-1 \leq \xi \leq 1] \quad (4.28)$$

とおけば、主要な応力成分は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_z}{\sigma_0} &= 1 - \frac{1}{2}(1+\nu)\left(\xi^2 - \frac{1}{6}\right)\varepsilon^{-2}\kappa^2, \\ \frac{\tau_{xz}}{\sigma_0} &= -\frac{1}{2}\eta\varepsilon^{-1}\kappa + \frac{7}{120}(1+\nu)\eta\varepsilon^{-3}\kappa^3 \end{aligned} \right\} (4.29)$$

1.5 数値例 一例として $\nu = 0.3$, $\varepsilon = 0.2$, $\kappa = 0.2$ の場合を選び、円形、長方形および円形断面の棒に対する x' 軸上の σ_z の分布を図 4.2 に示した。比較のため、円形断面棒に対しては第 2 章第 1 節の結果と、長方形断面棒に対しては第 3 章第 1 節の結果とそれぞれ鎖線で示したが、両者はほぼ一致することがわかる。

主要な応力成分 σ_z および τ_{xz} の最大値はいずれも断面の短軸端 ($x' = 0$, $y' = \pm b$) に発生することはいずれも既に明らかなので、次に、 $\varepsilon = 0.2$ の場合を選び、これらが初期ねじれ量によって如何に変化するかとそれぞれ図 4.3 および 4.4 に示した。比較のため、第 2 章第 1 節および第 3 章第 1 節の結果を

それぞれ鎖線で併記した。但円形断面の場合には本解と第2章の結果が図示の初期ねじれ量の範囲内で実用上十分な精度で一致していることがわかる。これに対して、長方形断面の場合には、第3章の結果が初期ねじれ量のわずかな場合にのみ成立するものであり、また本解が短辺上の境界条件を満足しないことなどによって、初期ねじれ量の増加と共に両者には差異が生じてくる。

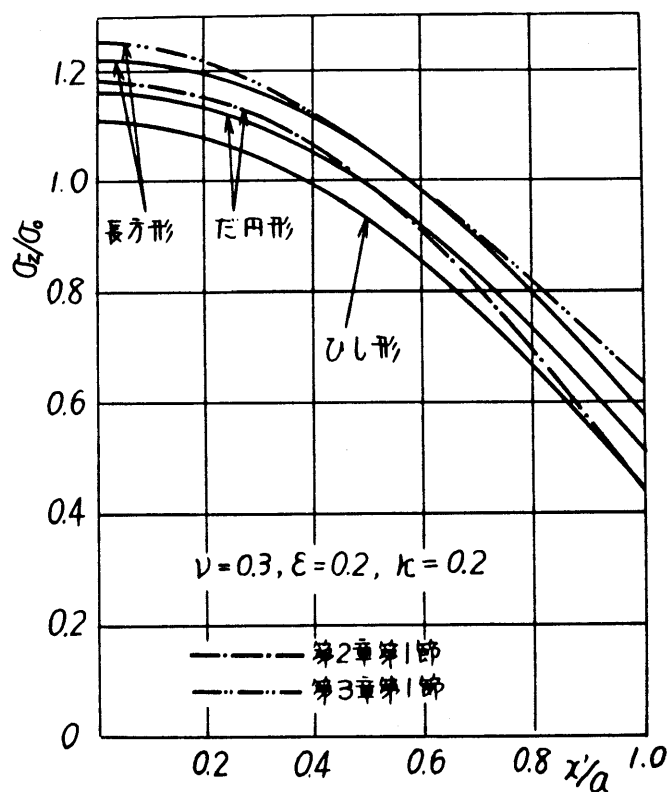


図4.2 σ_z の x' 軸上の応力分布

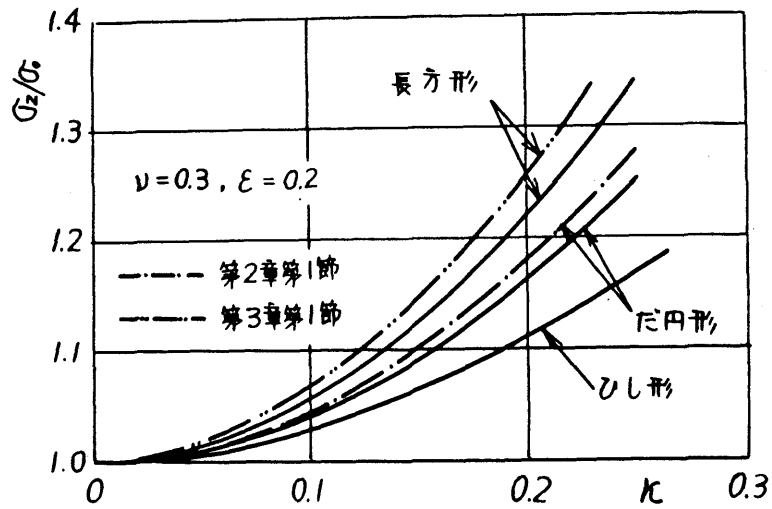


図 4.3 $(\sigma_z)_{x'=0, y'= \pm b}$ と κ の関係

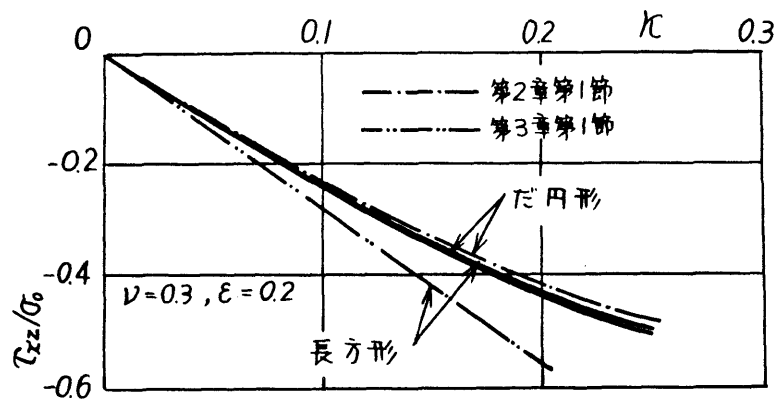


図 4.4 $(\tau_{xz})_{x'=0, y'=b}$ と κ の関係

第2節 ねじり (d)

2.1 基礎式および解の誘導 平衡方程式および適合条件式はそれぞれ前節の式(4.1), (4.2)で与えられ, 棒の側面における境界条件は第2章の式(2.5)で与えられる。また, ねじりモーメントを M_t とすれば, 断面の合応力方程式は式(2.31)で表わされる。

前節と同じ無次元量(4.3)および式(4.4)で示した無次元の応力関数 P, Q, \dots を導入すれば, 平衡方程式, 適合条件式および境界条件式はそれぞれ式(4.5), (4.6)および(4.8)で与えられる。また, 合応力方程式(2.31)の(a), (b)は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & \iint R \, d\xi d\eta = 0, \\ (b) \quad & \varepsilon \iint (\xi T - \eta U) \, d\xi d\eta = \frac{M_t}{G a^3} \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

こゝに, 積分領域は図形 $\eta^2 - \xi^2 = 0$ の内部である。かくして問題は(4.5), (4.6), (4.8)および(4.30)を満足する応力関数 P, Q, R, \dots を求めることである。

応力関数 P, Q, R, \dots の ξ および η に対する偶奇性を検討すれば, ξ に関して P, Q, R および S は奇関数, T, U は偶関数であり, また, η については P, Q, R および T は偶関数, S, U は奇関数となる。そこで, 応力関数 P, Q, \dots が小さい初期ねじり量および細長い断面の場合に ξ および η のべき級数に展開できるものと仮定し, ξ に対する偶奇性を考慮すれば, こゝからは次式のようにおくことができる。

$$\left. \begin{aligned} P &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} {}^{(2r+1)}P^{(s)} \kappa^{2r+1} \varepsilon^s, & Q &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} {}^{(2r+1)}Q^{(s)} \kappa^{2r+1} \varepsilon^s, \\ R &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} {}^{(2r+1)}R^{(s)} \kappa^{2r+1} \varepsilon^s, & S &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} {}^{(2r+1)}S^{(s)} \kappa^{2r+1} \varepsilon^s, \\ T &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} {}^{(2r)}T^{(s)} \kappa^{2r} \varepsilon^s, & U &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} {}^{(2r)}U^{(s)} \kappa^{2r} \varepsilon^s \end{aligned} \right\} (4.31)$$

こゝに, ${}^{(2r+1)}P^{(s)}, {}^{(2r+1)}Q^{(s)}, \dots$ は いづれも κ および ε に独立な関数である。式(4.31)と式(4.5), (4.6)および(4.8)に代入し, κ および ε に関する各同様の係数を等置すれば, 次のような関係式を得る。

平衡方程式:

$${}^{(2r)}U_{\xi}^{(s-1)} + {}^{(2r)}T_{\eta}^{(s)} = -D_6({}^{(2r-1)}R^{(s)}) \quad (4.32)$$

適合条件式:

$$\left. \begin{aligned} {}^{(2r)}T_{\xi\xi}^{(s-1)} + {}^{(2r)}T_{\eta\eta}^{(s)} &= -(1+\nu)^{-1} \left[D_6({}^{(2r-1)}\phi_{\eta}^{(s)}) \right. \\ &\quad \left. - {}^{(2r-1)}\phi_{\xi}^{(s-2)} \right] - D_5({}^{(2r-2)}T^{(s)}) + 2D_6({}^{(2r-2)}U^{(s-1)}) + {}^{(2r-2)}T^{(s-2)}, \\ {}^{(2r)}U_{\xi\xi}^{(s-2)} + {}^{(2r)}U_{\eta\eta}^{(s)} &= -(1+\nu)^{-1} \left[D_6({}^{(2r-1)}\phi_{\xi}^{(s-1)}) \right. \\ &\quad \left. + {}^{(2r-1)}\phi_{\eta}^{(s-1)} \right] - D_5({}^{(2r-2)}U^{(s)}) - 2D_6({}^{(2r-2)}T^{(s-1)}) + {}^{(2r-2)}U^{(s-2)} \end{aligned} \right\} \dots (4.33)$$

境界条件式:

$$-\psi\psi' {}^{(2r)}U^{(s-1)} + \eta {}^{(2r)}T^{(s)} = -\eta \left[\psi\psi' {}^{(2r-1)}R^{(s-2)} + \xi {}^{(2r-1)}R^{(s)} \right]$$

..... (4.34)

平衡方程式:

$$\left. \begin{aligned} {}^{(2r+1)}P_{\xi}^{(s-1)} + {}^{(2r+1)}S_{\eta}^{(s)} &= -D_6({}^{(2r)}U^{(s)}) - {}^{(2r)}T^{(s-1)}, \\ {}^{(2r+1)}Q_{\eta}^{(s)} + {}^{(2r+1)}S_{\xi}^{(s-1)} &= -D_6({}^{(2r)}T^{(s)}) + {}^{(2r)}U^{(s-1)} \end{aligned} \right\} (4.35)$$

適合条件式:

$$\left. \begin{aligned}
 (2r+1)P_{\xi\xi}^{(s-2)} + (2r+1)P_{\eta\eta}^{(s)} + (1+\nu)^{-1(2r+1)}\phi_{\xi\xi}^{(s-2)} &= -D_5^{(2r-1)}P^{(s)} \\
 &\quad -4D_6^{(2r-1)}S^{(s-1)} + 2^{(2r-1)}P^{(s-2)} - (2r-1)Q^{(s-2)}, \\
 (2r+1)Q_{\xi\xi}^{(s-2)} + (2r+1)Q_{\eta\eta}^{(s)} + (1+\nu)^{-1(2r+1)}\phi_{\eta\eta}^{(s)} &= -D_5^{(2r-1)}Q^{(s)} \\
 &\quad + 4D_6^{(2r-1)}S^{(s-1)} + 2^{(2r-1)}Q^{(s-2)} - (2r-1)P^{(s-2)}, \\
 (2r+1)R_{\xi\xi}^{(s-2)} + (2r+1)R_{\eta\eta}^{(s)} &= -D_5^{(2r-1)}R^{(s)} - (1+\nu)^{-1}D_5^{(2r-1)}\phi^{(s)}, \\
 (2r+1)S_{\xi\xi}^{(s-2)} + (2r+1)S_{\eta\eta}^{(s)} + (1+\nu)^{-1(2r+1)}\phi_{\xi\xi}^{(s-1)} &= -D_5^{(2r-1)}S^{(s)} \\
 &\quad + 4^{(2r-1)}S^{(s-2)} + 2D_6^{(2r-1)}P^{(s-1)} - (2r-1)Q^{(s-1)}
 \end{aligned} \right\} \dots (4.36)$$

境界条件式:

$$\left. \begin{aligned}
 -\psi\psi' (2r+1)P^{(s-1)} + \eta (2r+1)S^{(s)} &= -\eta [\psi\psi' (2r)T^{(s-2)} + \xi (2r)T^{(s)}], \\
 -\psi\psi' (2r+1)S^{(s-1)} + \eta (2r+1)Q^{(s)} &= -\eta [\psi\psi' (2r)T^{(s-2)} + \xi (2r)T^{(s)}]
 \end{aligned} \right\} \dots (4.37)$$

∴ ∴ ∴, $^{(r)}\phi^{(s)}$, D_5 および D_6 の意味は前節と同じである。式 (4.32) ~ (4.34), (4.35) ~ (4.37) の二組の方程式を前節と同じ手順に従って交互に逐次解いていけば, 式 (4.31) に含まれる各関数 $^{(2r)}T^{(s)}$, $^{(2r)}U^{(s)}$, \dots , $^{(2r+1)}P^{(s)}$, $^{(2r+1)}Q^{(s)}$, \dots がそれぞれ $r, s = 0$ から高次まで順次決定される。

2.2 解の決定 式 (4.32) ~ (4.34) を $r=0$ の場合について解けば,

$$\left. \begin{aligned}
 {}^{(0)}T^{(s)} &= B^{(s)}\psi\psi', \\
 {}^{(0)}U^{(s)} &= B^{(s+1)}\eta
 \end{aligned} \right\} [s \geq 0] \quad (4.38)$$

∴ ∴ ∴, $B^{(s)}$ は式 (4.30) の (b) から定まる定数である。

あり。

式 (4.31) と式 (4.30) の (b) に代入すれば次式を得る。

$$\frac{M_t}{G a^3} = \varepsilon \iint \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (\xi^{(2r)} T^{(s)} - \eta^{(2r)} U^{(s-1)}) \kappa^r \varepsilon^s d\xi d\eta \quad (4.39)$$

これからねじりモーメント M_t は κ および ε のべき級数で表わされる。ここで M_t は ε^4 の項を含む項によつて与えられるものとすれば、式 (4.38) の定数は

$$\left. \begin{aligned} B^{(3)} &= -\frac{3}{8} \frac{1}{\varepsilon^4} \frac{M_{t0}}{C_1}, \quad B^{(s)} = 0 \quad [s \neq 3] \\ T = T'' \quad M_{t0} &= \frac{M_t}{G a^3}, \quad C_1 = \int_0^1 \psi^3 d\xi \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

し $T = T''$ と $r=0$ に対する関数 ${}^{(0)}T$, ${}^{(0)}U$ は

$$\left. \begin{aligned} {}^{(0)}T &= \sum_{s=0}^{\infty} {}^{(0)}T^{(s)} \varepsilon^s = -\frac{3}{8\varepsilon} \frac{M_{t0}}{C_1} \psi \psi' \\ {}^{(0)}U &= \sum_{s=0}^{\infty} {}^{(0)}U^{(s)} \varepsilon^s = -\frac{3}{8\varepsilon^2} \frac{M_{t0}}{C_1} \eta \end{aligned} \right\} \quad (4.41)$$

特に $T = T''$ 円形断面の半径を r とし、式 (4.40) に $\psi = \sqrt{1-\xi^2}$ と代入して対応する応力成分を求めれば、

$$\tau_{xz} = -\frac{2M_t \eta'}{\pi a b^3}, \quad \tau_{yz} = \frac{2M_t x'}{\pi a^3 b} \quad (4.42)$$

これは真直円形断面の半径をねじりた場合の応力と同じものである。一般に式 (4.41) は真直円形断面をねじりた場合の応力を表わすものであり、初期ねじれによる影響は κ の 1 次以上の項で表わされる。ここで $T = T''$ と、ねじりた初期ねじれを持つ円形断面の半径を r とし、 $\kappa^r \varepsilon^s$ の乗べきが $r+s=3$ までの各項を逐次求めた。これらを用いて各応力成分を求めれば次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\sigma_{x'}}{M_t/a^3} &= 0, \\
 \frac{\sigma_{y'}}{M_t/a^3} &= 0, \\
 \frac{\sigma_z}{M_t/a^3} &= -\frac{3}{16}(2+\nu)\left(\xi^2 - \frac{4C_2}{A}\right) \frac{1}{C_1} \frac{\kappa}{\epsilon^3}, \\
 \frac{\tau_{x'y'}}{M_t/a^3} &= \frac{3}{8}\xi\eta \frac{1}{C_1} \frac{\kappa}{\epsilon^2} - \frac{3}{16}(2+\nu)\xi\eta \frac{C_3}{C_1} \frac{\kappa^3}{\epsilon^4}, \\
 \frac{\tau_{yz}}{M_t/a^3} &= -\frac{3}{8}\psi\psi' \frac{1}{C_1} \frac{1}{\epsilon} + \frac{3}{16}(2+\nu)\left[\xi\left(\xi^2 - \frac{4C_2}{A}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \psi\psi'C_3\right] \frac{1}{C_1} \frac{\kappa^2}{\epsilon^3}, \\
 \frac{\tau_{x'z}}{M_t/a^3} &= -\frac{3}{8}\eta \frac{1}{C_1} \frac{1}{\epsilon^2} + \frac{3}{16}(2+\nu)\eta \frac{C_3}{C_1} \frac{\kappa^2}{\epsilon^4}
 \end{aligned} \right\} (4.43)$$

∴ ∴ ∴,

$$\left. \begin{aligned}
 A &= \iint d\xi d\eta = 4 \int_0^1 \psi d\xi, \\
 C_1 &= \int_0^1 \psi^3 d\xi, \quad C_2 = \int_0^1 \xi^2 \psi d\xi, \\
 C_3 &= \frac{3}{2} \int_0^1 \xi^4 \psi d\xi \left[\int_0^1 \psi^3 d\xi \right]^{-1} - \frac{6}{A} \left[\int_0^1 \xi^2 \psi d\xi \right]^2 \left[\int_0^1 \psi^3 d\xi \right]^{-1}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.44)$$

2.3 各種断面形の棒

[1] 円形断面の棒 円形断面棒の場合
 に式(4.43)および(4.44)にあてはまる

$$\psi = \sqrt{1 - \xi^2} \quad (4.45)$$

とすれば、応力成分は次式のようになる。

$$\frac{\sigma_{x'}}{M_t/a^3} = 0,$$

$$\frac{\sigma_{x'}}{M_t/a^3} = 0,$$

$$\frac{\sigma_z}{M_t/a^3} = -\frac{1}{\pi}(2+\nu)\left(\xi^2 - \frac{1}{4}\right) \frac{\kappa}{\varepsilon^3},$$

$$\frac{\tau_{x'y'}}{M_t/a^3} = \frac{2}{\pi} \xi \eta \frac{\kappa}{\varepsilon^2} - \frac{1}{8\pi}(2+\nu) \xi \eta \frac{\kappa^3}{\varepsilon^4},$$

$$\frac{\tau_{yz}}{M_t/a^3} = \frac{2}{\pi} \xi \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\pi}(2+\nu)\left(\xi^3 - \frac{3}{8}\xi\right) \frac{\kappa^2}{\varepsilon^3},$$

$$\frac{\tau_{xz}}{M_t/a^3} = -\frac{2}{\pi} \eta \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{8\pi}(2+\nu) \eta \frac{\kappa^2}{\varepsilon^4}$$

(4.46)

[2] 長方形断面の棒 前節と同様にして $\varphi = 1$, $[-1 \leq \xi \leq 1]$ とおき式(4.43)の定数E定めれば, 応力成分として次式を得る.

$$\frac{\sigma_{x'}}{M_t/a^3} = 0,$$

$$\frac{\sigma_{y'}}{M_t/a^3} = 0,$$

$$\frac{\sigma_z}{M_t/a^3} = -\frac{3}{16}(2+\nu)\left(\xi^2 - \frac{1}{3}\right) \frac{\kappa}{\varepsilon^3},$$

$$\frac{\tau_{x'y'}}{M_t/a^3} = \frac{3}{8} \xi \eta \frac{\kappa}{\varepsilon^2} - \frac{1}{40}(2+\nu) \xi \eta \frac{\kappa^3}{\varepsilon^4},$$

$$\frac{\tau_{yz}}{M_t/a^3} = \frac{3}{16}(2+\nu) \xi \left(\xi^2 - \frac{1}{3}\right) \frac{\kappa^2}{\varepsilon^3},$$

$$\frac{\tau_{xz}}{M_t/a^3} = -\frac{3}{8} \eta \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{40}(2+\nu) \eta \frac{\kappa^2}{\varepsilon^4}$$

(4.47)

上式において $\kappa = 0$ とおけば, 細長い長方形断面の棒のねじりに対する既知の解⁽¹¹⁾と一致する.

[3] 円形断面の棒 式(4.43)および(4.44)において $\varphi = 1 - |\xi|$, $[-1 \leq \xi \leq 1]$ とおけば, 主要な応力成分は次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_z}{M_t/a^3} &= -\frac{3}{4}(1+\nu)\left(\xi^2 - \frac{1}{6}\right)\frac{\kappa}{\varepsilon^3} \\ \frac{\tau_{xz}}{M_t/a^3} &= -\frac{3}{2}\eta\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{7}{80}(2+\nu)\eta\frac{\kappa^2}{\varepsilon^4} \end{aligned} \right\} (4.48)$$

2.4 数値例 - 例として, $\nu=0.3$, $\varepsilon=0.2$, $\kappa=0.1$ の場合を選び, 円形, 長方形およびひし形断面の棒に生ずる主要な応力成分 σ_z の x' 軸上の分布および τ_{xz} の y' 軸上の分布をそれぞれ図 4.5 および 4.6 に示した。比較のため, 円形断面棒に対しては第 2 章第 2 節の結果を, 長方形断面棒に対しては第 3 章第 2 節の結果をそれぞれ鎖線以示した。これらは本章の結果とほぼ一致している。

図 4.7 は $\varepsilon=0.2$ および 0.3 に対する $(\tau_{xz})_{\max}$ と初期値 κ との関係を示したものである。円形断面および長方形断面に対しては第 2 章および第 3 章の結果を併記した。円形断面の場合には少くとも $\kappa < \varepsilon$ の範囲で本解と第 2 章の結果はきわめてよく一致している。これに対して, 長方形断面の場合には $\kappa=0$ においてすでに両者は一致しない。第 3 章の結果はむしろ初期値 κ の場合に成立するものがあり, $\kappa=0$ における値は厳密解⁽¹³⁾ と一致する。本解は $\kappa=0$ の近傍では絶対値に近づくにつれ小さな値を示すが, 後述する実験結果から κ の比較的広い範囲で妥当な結果を与えることがわかった。

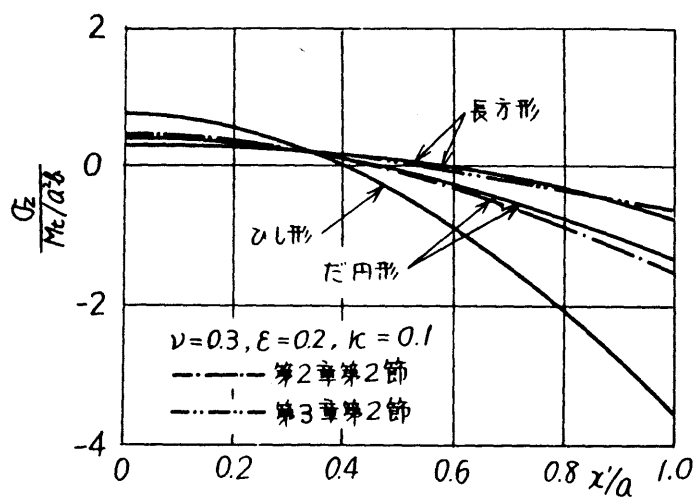


図 4.5 x' 軸上の σ_z

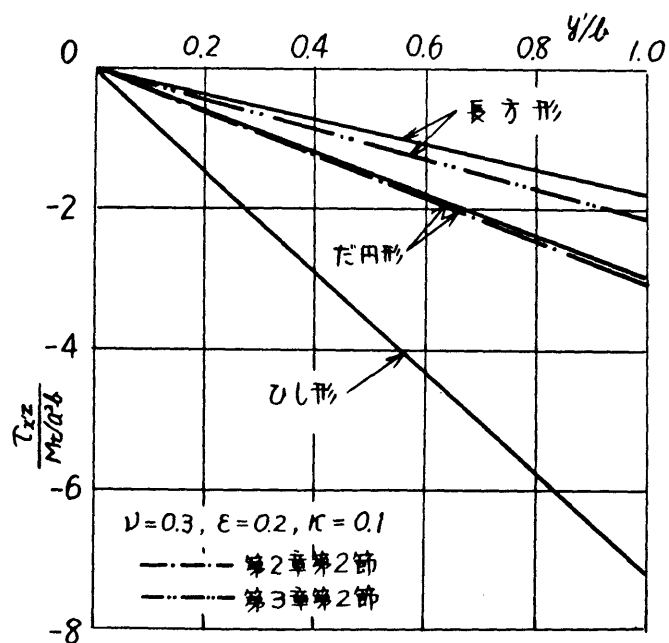


図 4.6 y' 軸上の T_{xz}

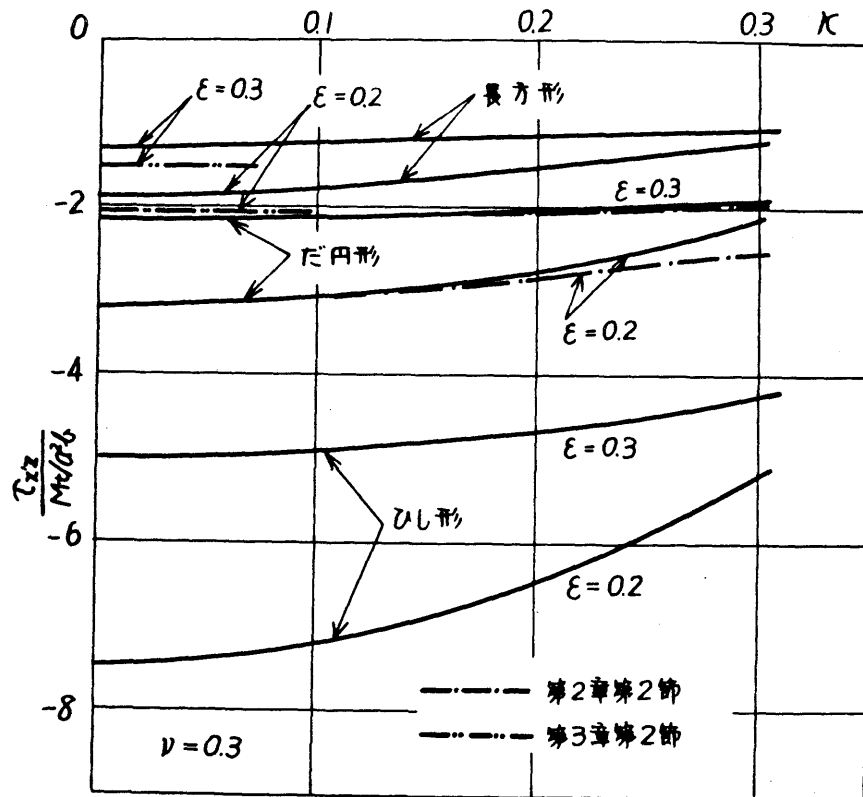


図 4.7 $(T_{x'z})_{max}$ と初期ねじれとの関係

第5章 初期ねじれを有する 長方形断面棒の引張りおよび ねじりに関する光弾性実験

これまでの各章で、初期ねじれを有する各種断面棒の引張りおよびねじり問題を理論的に取扱った。特に長方形断面の棒に対しては、ねじり角は初期ねじれを持つ場合に境界条件を厳密に満足する解および細長い断面の場合に成り立つ近似解を導いたが、これらの解の信頼度を検討するため、凍結法光弾性実験によって応力の解析を行なった。初期ねじれを有し、かつ初期応力の存在しない試験片とエポキシ樹脂によって製作し、凍結応力の解析には斜入射法⁽¹²⁾を採用した。断面の寸法および初期ねじれ量を種々変えた場合の断面の境界における応力を求めて理論結果と比較し、理論解の適用限界を検討した。

第1節 引張り^(c)

1.1 試験片の製作と応力の凍結 図5.1に示すような所要の初期ねじれ角を有し、しかも初期応力の存在しないエポキシ樹脂の試験片を注型によって製作した。注型のための鑄型は次のような方法で作った。すなわち、試験片の長さ L および幅 $2a$ よりもいくぶん大きな厚さ 3mm の2枚の軟鋼板の間には、 L の距離にわたって直径 $2b (=12\text{mm})$ の鋼製丸棒を敷きつめ(図5.2)、これの両端をジグで支持してねじり試験機にとりつけ、両端に相対的ねじり角 θ を与えた。この場合に、中心線

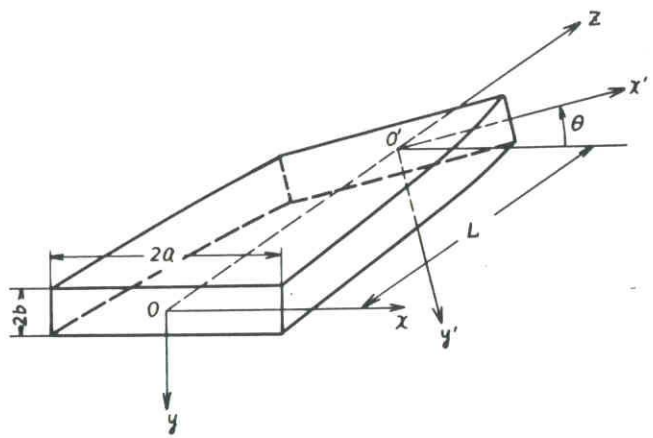


図5.1 試験片主要部分の形状

X-Xが試験機のねじりの軸と一致するように十分注意を払った。このようにしてねじられた2枚の鋼板を試験片表面に對する型板とし、鋳型を製作したのである。鋳型から取出した素材を幅が2aとなるように両側面を仕上げれば、初期ねじれを有する所要の試験片が得られる。図5.3は試験片の一例である。実験に供した

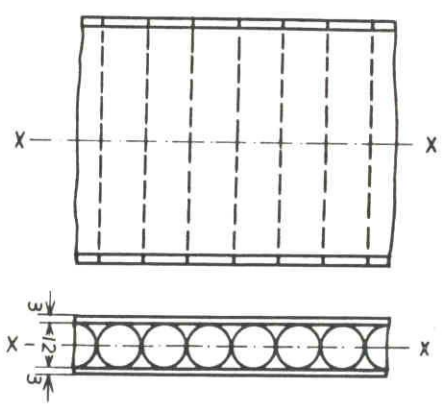


図5.2 鋳型の製作法



図5.3 試験片の一例

試験片の寸法の詳細を表 5.1 に示した。ここに、

表 5.1 試験片寸法

$\varepsilon=b/a$	No.	2a mm	2b mm	θ°	κ
0.20	1	59.3	11.7	16.6	0.09
	2	59.8	11.8	28.9	0.15
	3	59.0	11.7	40.5	0.21
	4	59.5	11.9	52.5	0.27
0.16	1	74.6	11.5	17.0	0.11
	2	75.7	11.7	23.8	0.16
	3	74.8	11.8	31.7	0.20
0.13	1	87.4	11.7	14.4	0.11
	2	86.7	11.6	18.5	0.14
	3	86.6	11.7	23.4	0.18

θ は軸方向の長さ 100 mm に対する相対的ねじれ角を表わす。また、 κ は第 2 章の κ と同じ意味を持ち、次式

$$\kappa = \frac{\pi a \theta}{100 \times 180}$$

により計算された。

応力凍結炉には熱風循環式恒温槽を使用した。応力凍結サイクルとしては、約 1 時間で試験片と素材の二次転移域以上の温度 135°C に上げ、引張荷重を加えてから約 1 時間同一温度に保った後、1 時間あたり 5°C の割合で温度を降下させた。図 5.4 には凍結操作中の実験装置ならびに試験片を示す。常温で荷重を除去し、試験片のスライス、応力の解析を順次行なった。なお引張荷重の作用によって試験片の初期ねじれ角は応力凍結の前後で若干変化するもので、表 5.1 における初期ねじれ

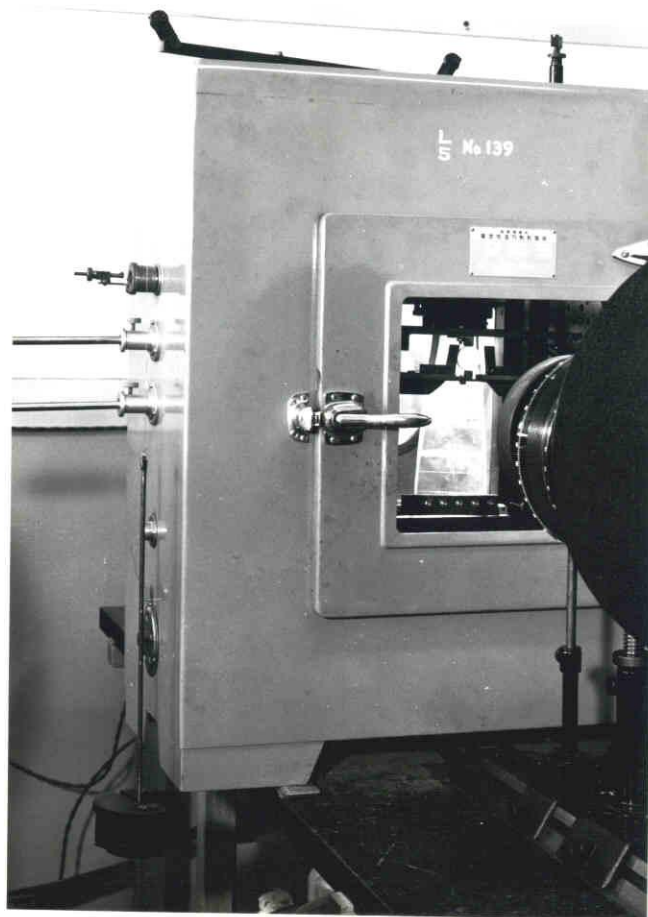


図5.4 凍結操作中の試験片

角 θ の値としては、凍結前後の平均値をとった。
ただし、試験片に加えた引張り荷重は7kg前後であつたが、これに對する初期ねじれ角の変には軸方向の長さ100mmあたり 2.5° 程度であつた。

1.2 応力解析の方法 断面の境界における
応力を求めるために、図5.5に示すような二種類
のスライス、すなわち
断面の長辺に垂直なス
ライスと短辺に垂直な
スライスを切り出した。
第一のスライス（以下
スライスIと名づける）

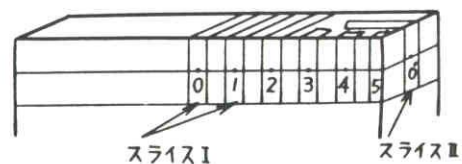


図5.5 スライスの方法

は長辺を10等分してそれぞれの等分点を中央に含むようにとり、また第二のスライス(スライスII)は短辺の中心を中央に含むようにとって、その厚さはいづれも約2.5mmに作りようにした。ただし、図示のように、スライスIにおいて最も外側のスライスは端から内側へ約2.5mmの厚さに作りように切り出した。断面の境界における主応力を求めるため、スライスI, IIに対して図5.6に示すように斜入射法⁽¹³⁾

を適用した。すなわち、まずスライス面を入射光線に垂直におき、次にこの面と境界面への垂線のまわりに回転して、スライス面への垂線と光線の軸との傾き角

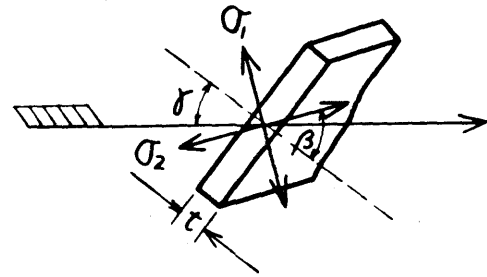


図5.6 斜入射法(浸し浴中)

を δ とす。境界ごの主応力を σ_1 および σ_2 、その中の一つの方向とスライス面垂線との傾き角を β 、スライス厚さを t 、素材の光弾性感度を C とすれば、 δ の一定値に対して観測される簡次数 N_δ は

$$N_\delta = C \{ \sigma_1 \cos^2(\beta - \delta) + \sigma_2 \sin^2(\beta - \delta) \} t / \cos \delta \quad (5.1)$$

で与えられる。三種類の δ に対する簡次数 N_δ を測定すれば、未知量 σ_1 , σ_2 および β が求められる。ここでは、 $\delta = -30^\circ \sim +30^\circ$ の範囲内で各スライスにおける簡次数の測定しやすい三通りの角度を選び、測定精度の向上を期した。

試片の簡次数を測定する際には浸し法を適用し、光線がスライス面に入射するとき起る屈折を防ぐようにした。整数次の簡次数はスライス試片の一

部をくさび状に削ることによって求め、端数の高次数の測定には Tardy の補正法を採用した。素材の光弾性感度は各試験片と同じ素材から円板の較正試験片を採出し、本実験と同一の凍結サイクルのもとで直径方向の集中圧縮荷重を加え、中心における高次数を測定して求めた。

1.3 結果および考察 図 5.7 は $\varepsilon = b/a = 0.2$, $\nu = 0.21$ の試験片に引張り荷重 7 kg を加えて応力を凍結した場合の全体の縞模様である。図 5.8 に

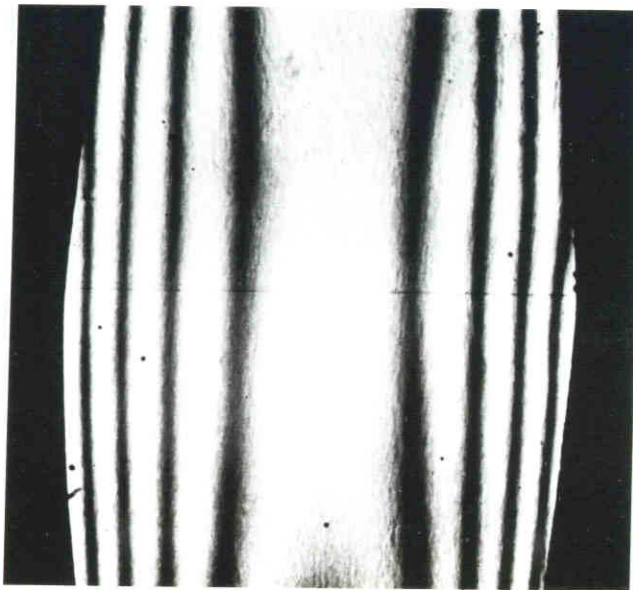


図 5.7 試験片全体の縞模様
($\varepsilon = 0.2, \nu = 0.21$)



$\delta = +20^\circ$



$\delta = 0^\circ$



$\delta = -20^\circ$

図 5.8 スライス II の縞模様
($\varepsilon = 0.2, \nu = 0.21$)

は同じ試験片から切り出したスライスIIの高模様を $\gamma = -20^\circ, 0^\circ, 20^\circ$ の各値に対して示した。図5.9は斜入射法によって得られた高次数の一例として、 $\varepsilon = 0.2$, $\kappa = 0.15$ の場合の各スライスに対し測定点の高次数を傾き角 γ の関数として示したものである。これらの高次数と式(5.1)を用いて測定点の主応力 σ_1 , σ_2 および応力成分 σ_x および τ_{xz} を求めてこれらの分布を示したのが図5.10である。ただし、図において σ_0 は断面上的の平均応力を表わす。図示のように主応力の最大値は長辺の中央に生ずる。なお、図には第4章の理論値を併せて示した。ただし、ポアソン比 $\nu = 0.5$ として算出した。

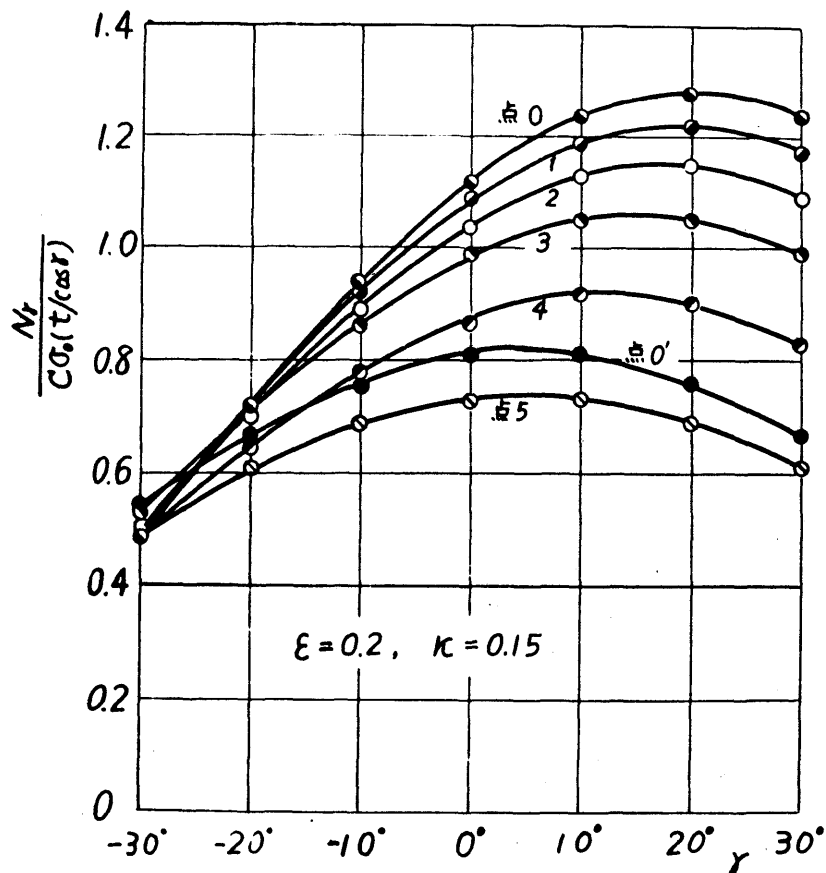


図5.9 各スライスにおける高次数

σ_z の理論値は実験値とよく一致するが、 τ_{xz} は長辺の中央部を除いて理論値と実験値が一致しなくなる。これは第4章の理論解が断面の短辺上の境界条件を満足しない近似解であることによるものであろう。

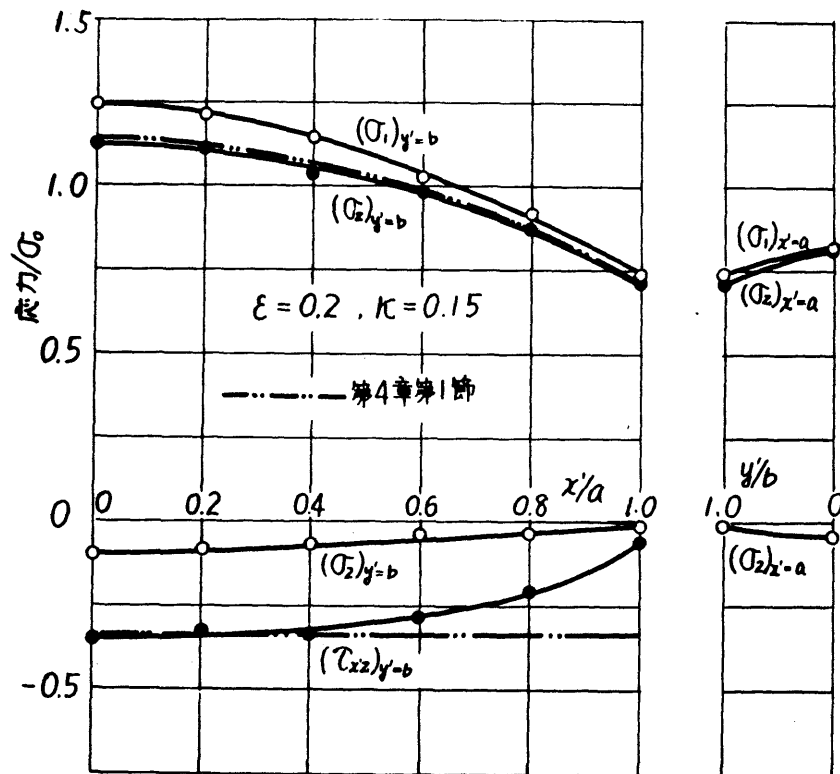


図 5.10 境界上の応力分布

図 5.11 ~ 5.14 には、初期ねじれ量および断面の寸法比を種々変えた場合の長辺の中心 (点 A) および短辺の中心 (点 B) に生ずる応力を示した。図 5.11 は点 A における主応力 $(\sigma_1)_A$ および $(\sigma_2)_A$ を求めたもので、真直な棒の場合に比較して初期ねじれの増加と共に $(\sigma_1)_A$ が著しく大きくなることが見られる。図 5.12 および 5.13 はそれぞれ同じ点 A における応力成分 σ_z , τ_{xz} を示した。図 5.14 は点

Bにおける主応力 $(\sigma_1)_B$ の κ による変化でありが、初期ねじれが増加と共に減少している。なお、この点におけるもう一つの主応力 $(\sigma_2)_B$ の値はほぼ0に等しかつた。したがって、強度的に問題になるのは常に点Aにおける応力でありことがわかった。以上の各図には、第3章および第4章の理論解から $\nu=0.5$ として求めた値をそれぞれ一点鎖線および二点鎖線で示した。図示のように第3章の結果は初期ねじれ κ が小さい場合のみ、また第4章の結果は κ の比較的小さい範囲に限られて妥当なものであることがわかる。

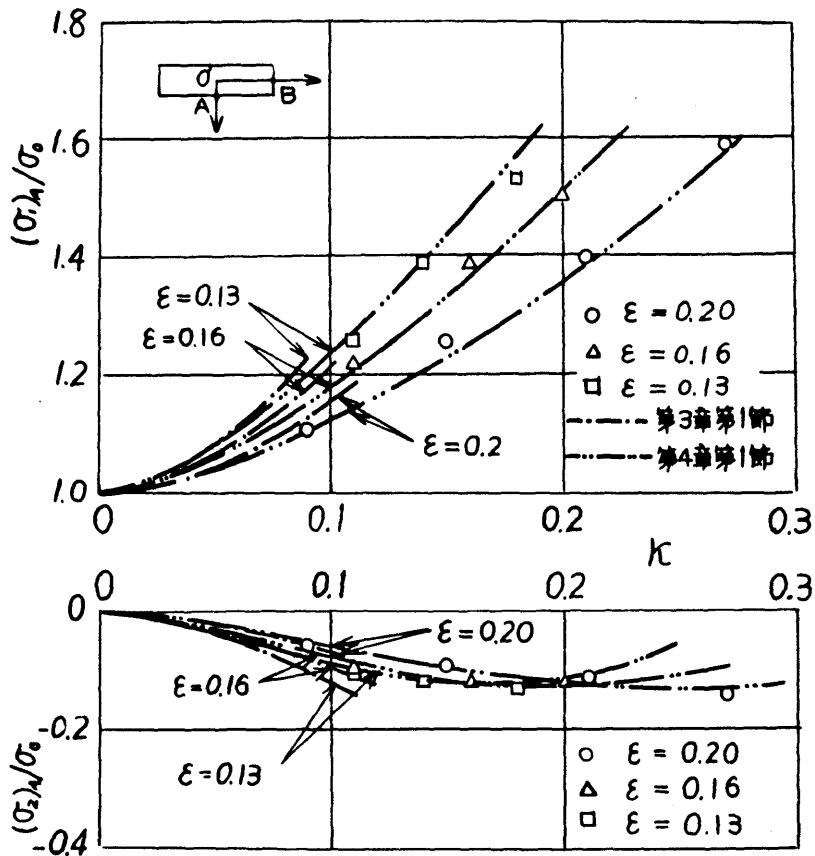


図 5.11 点 A における主応力

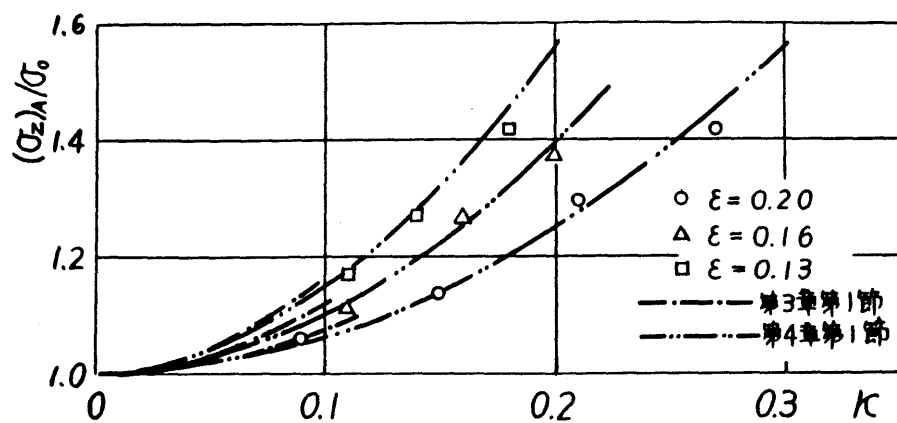


図 5.12 点 A にあつる σ_z

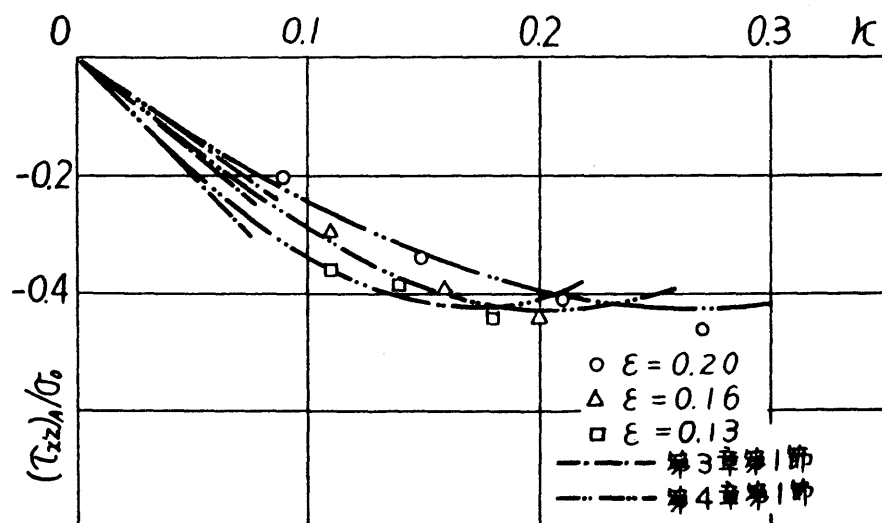


図 5.13 点 A にあつる τ_{xz}

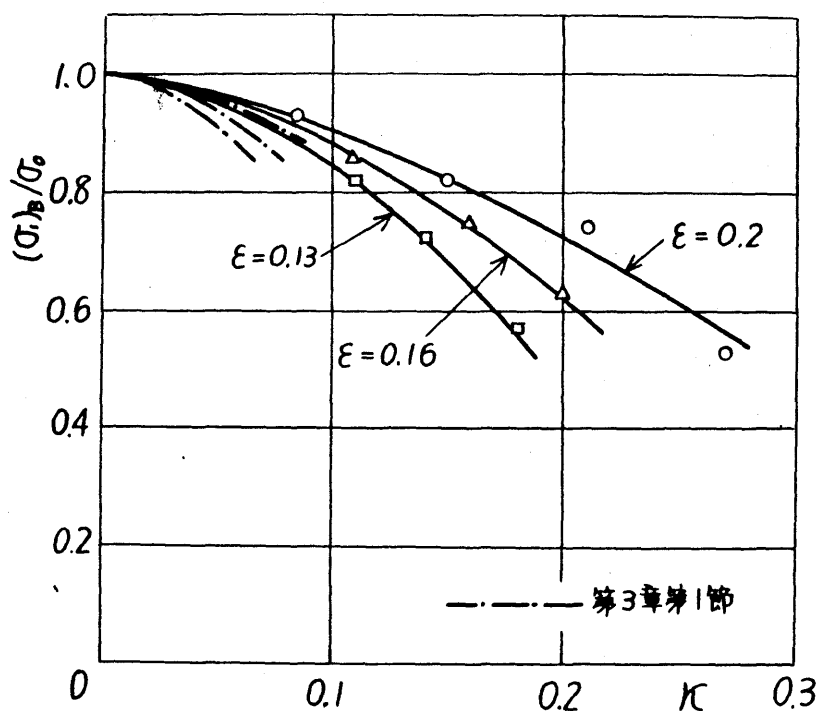


図5.14 点Bにおける主応力

第2節 ねじり^(d)

2.1 実験方法 試験片の製作，応力の凍結，試験片のスライスおよび応力の解析などはすべて前節と全く同じ方法を用い，断面の境界における応力を求めた。図5.15に示すような荷重装置により試験片にねじりモーメント ($M_t \cong 100 \text{ kg-mm}$) を加えた。実験に供した試験片の寸法を表5.2に示す。表において，初期ねじれ角 θ の値は前節と同様に軸方向の100mmに対する相対的ねじれ角を表わす。試験片の初期ねじれ角は，ねじりモーメントの作用により凍結の前後において若干変化する(軸方向の100mmに対して 15° 程度)ので， θ の値としては凍結前後の平均値をとり，前節と同様

にこの値を用いて κ の値を計算した。

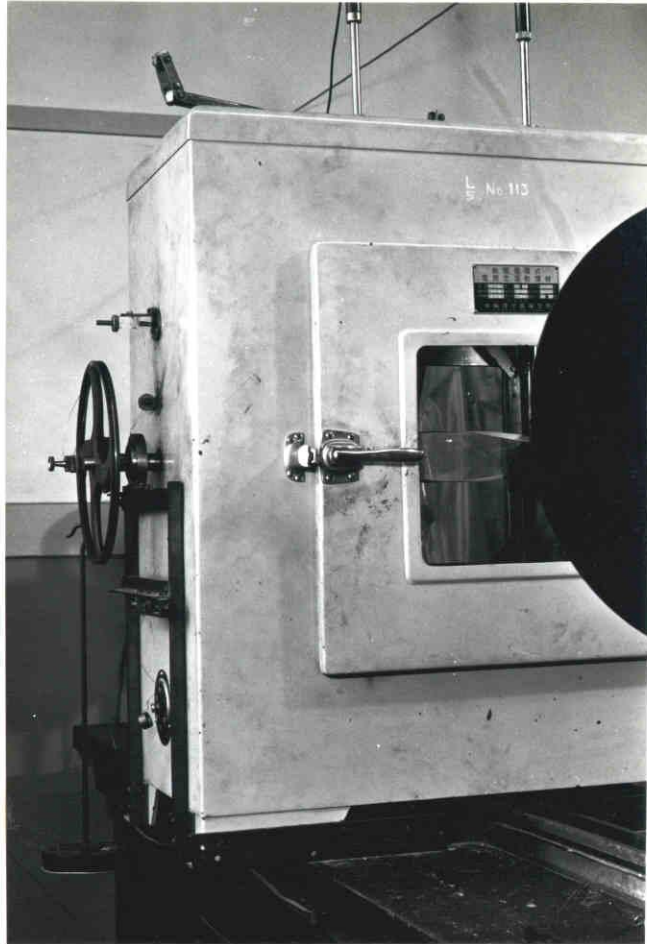


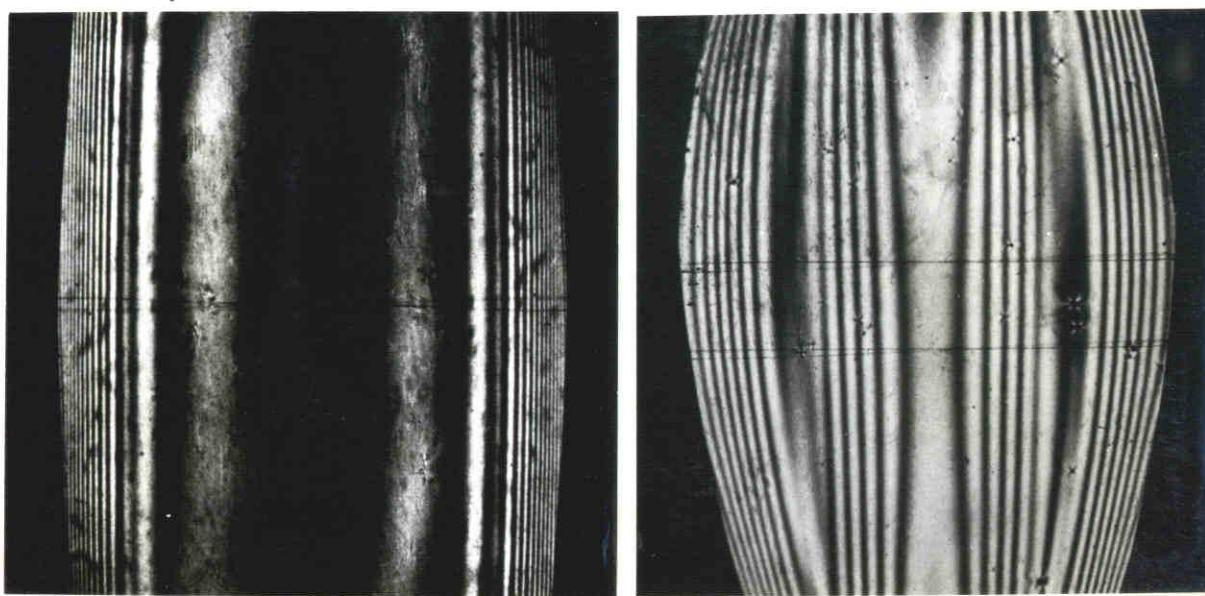
図5.15 凍結操作中の試験片

表 5.2 試験片寸法

$\varepsilon=b/a$	No.	2a mm	2b mm	θ°	κ
0.20	1	60.0	12.0	10.7	0.06
	2	59.6	12.0	17.5	0.10
	3	60.0	12.0	34.8	0.20
	4	59.4	11.8	54.8	0.28
	5	59.3	11.8	66.8	0.35
0.16	1	75.0	12.0	9.2	0.06
	2	74.4	11.7	25.2	0.16
	3	74.5	11.5	35.2	0.23
	4	74.3	11.7	41.7	0.27

0.13	1	90.0	12.0	7.0	0.06
	2	88.2	11.6	20.6	0.16
	3	87.0	11.6	26.6	0.20
	4	86.9	11.4	32.0	0.24

2.2 結果および考察 図 5.16 は $\varepsilon = 0.2$, $\kappa = 0.10$ および 0.35 の試験片にそれぞれねじりモーメント $M_t = 113 \text{ kg}\cdot\text{mm}$ を加え、応力を凍結したときの試験片全体の縮模様である。



(a) $\varepsilon = 0.2, \kappa = 0.10$

(b) $\varepsilon = 0.2, \kappa = 0.35$

図 5.16 試験片全体の縮模様

スライス試験片の縮模様の傾き角 θ による変化の一例として、図 5.17 および 5.18 には上述の試験片のスライス I における縮模様を、また図 5.19 にはスライス II における縮模様を示した。図 5.20 および 5.21 は、これらのスライス試験片の測定点における縮次数と傾き角との関係を示したものである。これらの縮次数と式 (5.1) から主応力 σ_1 および σ_2 を計算し、さらに応力成分 σ_2 および τ_{xz} を求めれば図 5.22 および 5.23 に示すようになる。これらの

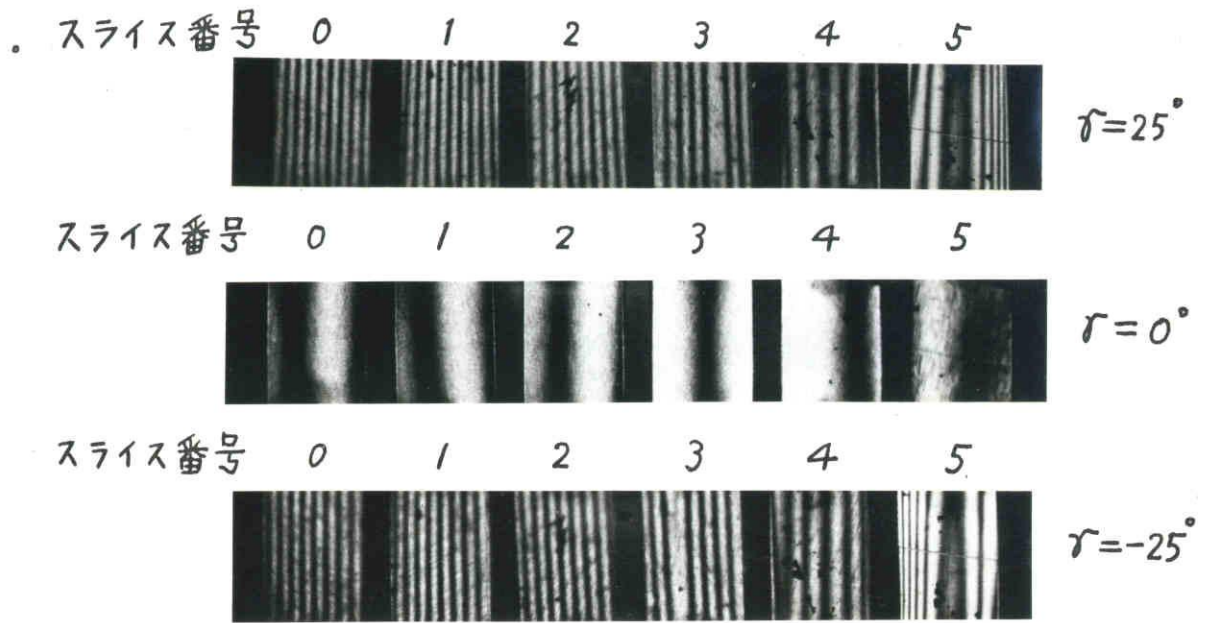


図 5.17 スライス I の高模様
($\varepsilon = 0.20, \kappa = 0.10$)

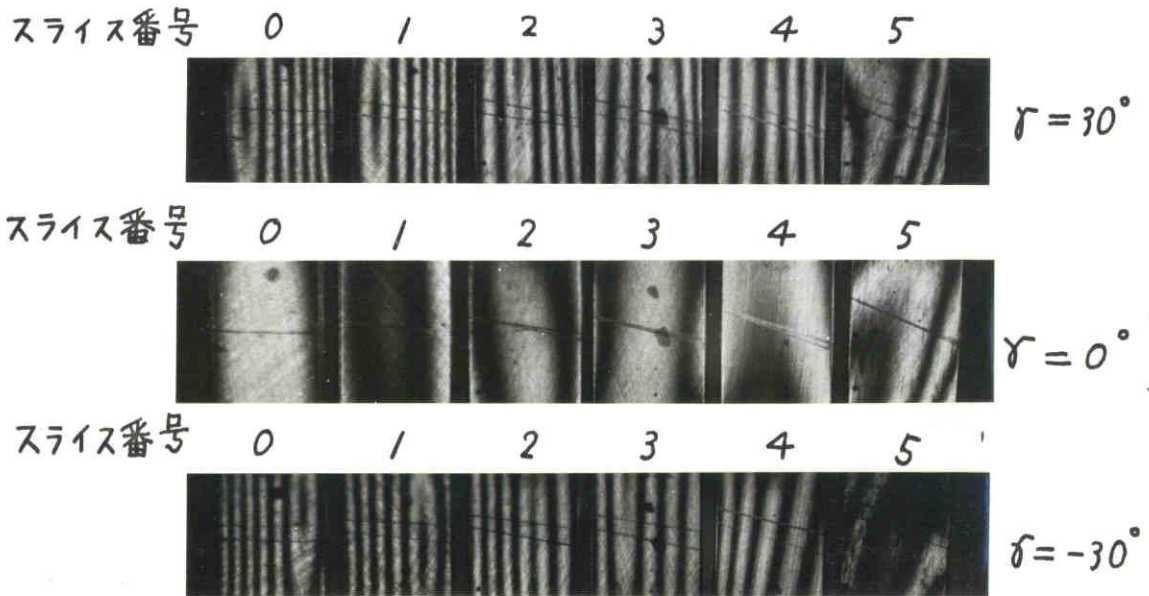


図 5.18 スライス I の高模様
($\varepsilon = 0.20, \kappa = 0.35$)

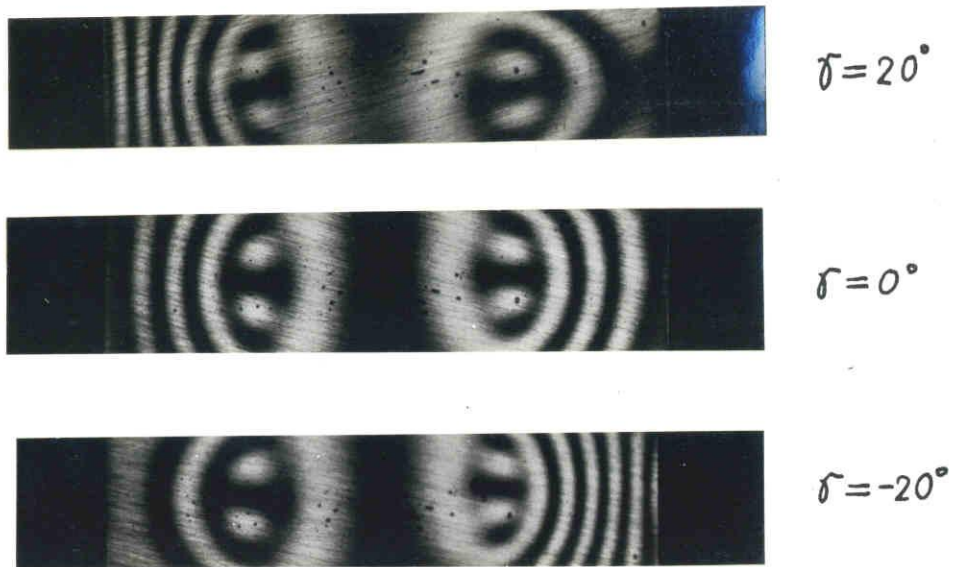


図 5.19 スライス II の高模様
($\epsilon = 0.20, \kappa = 0.35$)

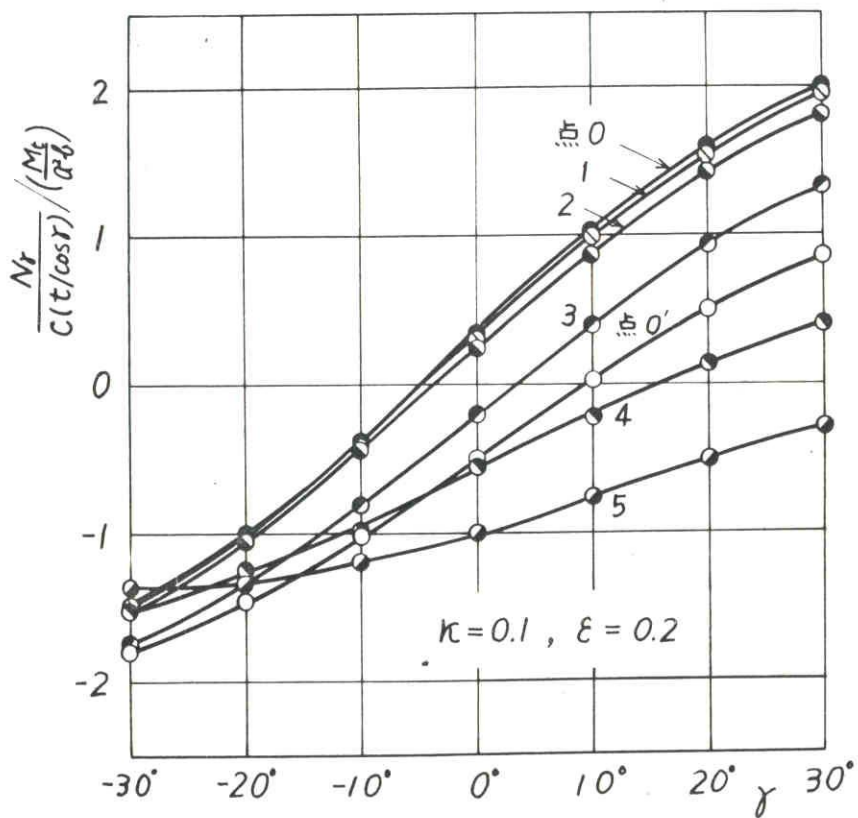


図 5.20 各スライスにおける高次数

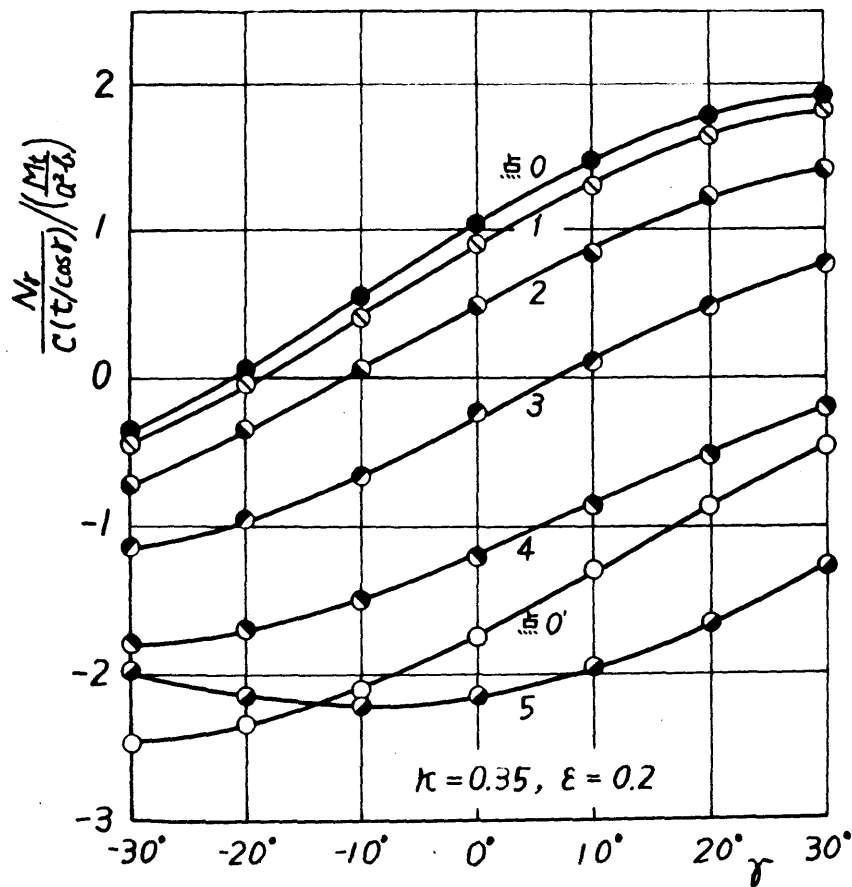


図 5.21 各スライスにおける簡次数

図から、主応力の絶対値は初期ねじれが小さい場合には長辺の中央で、大きくなると短辺の中央で最大となることがわかる。これらの図には第4章第2節の理論値 ($\nu=0.5$) を併記した。図 5.22 に示すように、初期ねじれが小さい場合 ($\nu=0.1$) には、長辺の中央部において理論値と実験値がよく一致し、端に近づくにしたがって両者の相違が著しくなる。これは理論解がその誘導の仮定から短辺の近傍では成立しない近似解であるからである。これに対し、図 5.23 に示すような大きな初期ねじれ角の場合 ($\nu=0.35$) には、長辺の中央部において理論値と実験値は一致したくなる。したがって

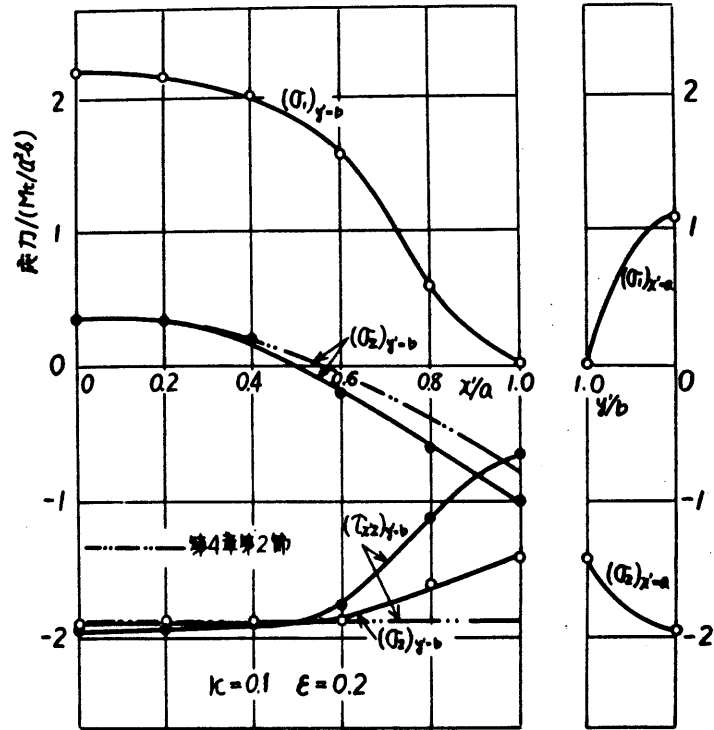


図 5.22 境界上の応力分布

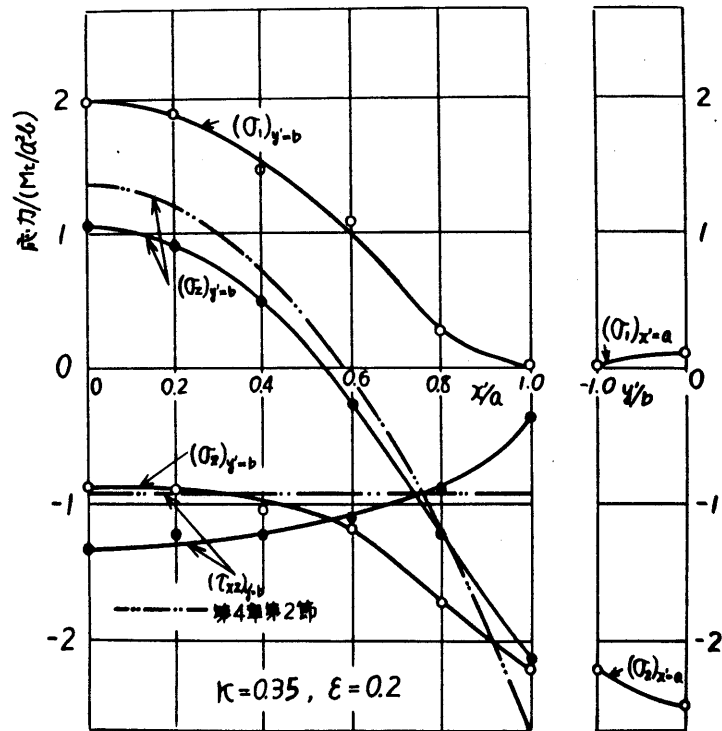


図 5.23 境界上の応力分布

て、第4章第2節において導いた理論解は上述のような大きな初期ねじれの場合には適用できないことを示すものである。

図5.24～5.27には、初期ねじれ量および断面の寸法比を種々変えた場合に、長辺の中心(点A)および短辺の中心(点B)に生ずる応力の変化を示した。図5.24は点Aにおける主応力 $(\sigma_1)_A$ および $(\sigma_2)_A$ を求めたものであるが、初期ねじれの大きいところでは真直な棒($\kappa=0$)に対する厳密解⁽¹⁴⁾と比較して、その絶対値はいずれも減少している。図には参考までに第3章第2節の理論値($\nu=0.5$)を併記した。図5.25および5.26はそれぞれ同じ点Aにおける応力成分 $(\sigma_2)_A$ および $(\tau_{xz})_A$ の κ による変化を示したものである。次に、点Bにおける主

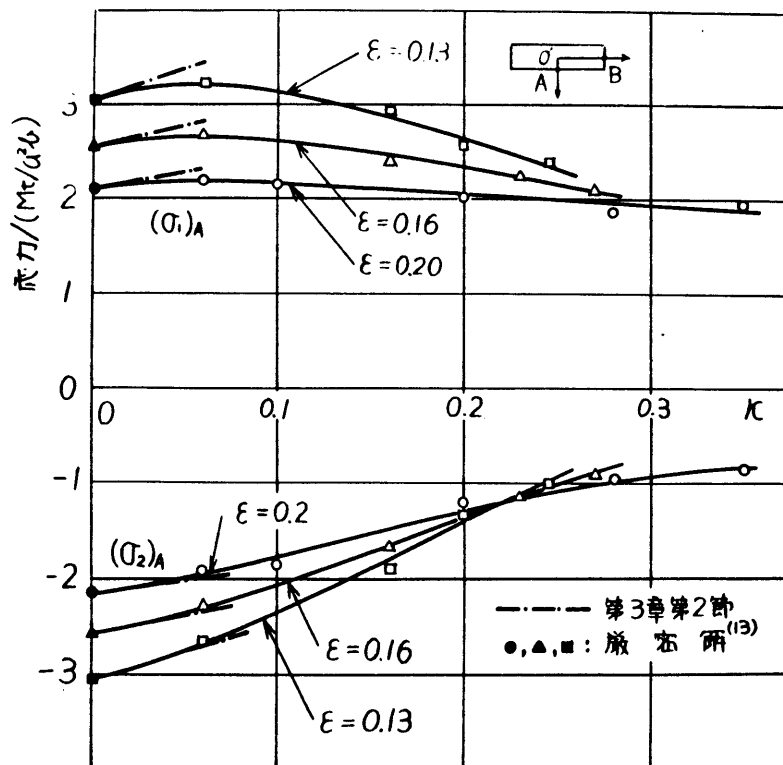


図5.24 点Aにおける主応力

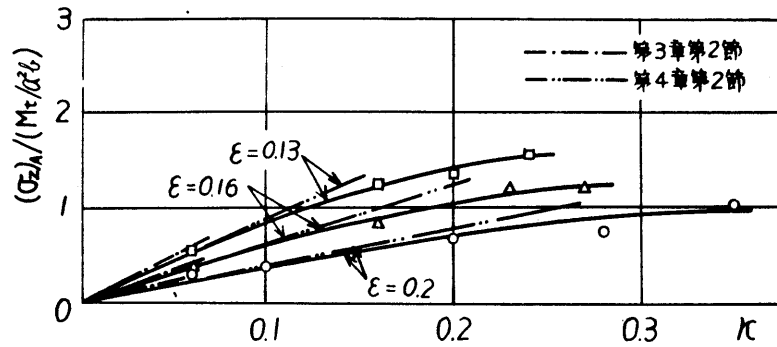


図 5.25 点 A における σ_2

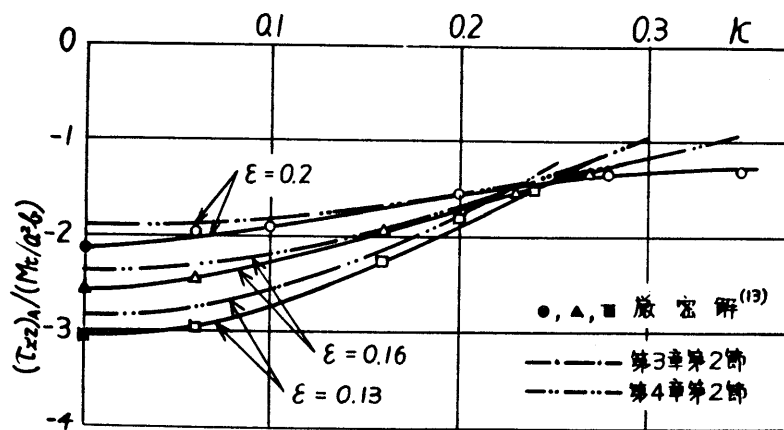


図 5.26 点 A における τ_{x2}

応力 $(\sigma_1)_B$ および $(\sigma_2)_B$ を示せば、図 5.27 のようになる。 $(\sigma_2)_B$ の絶対値は、初期値と共に増加し、図 5.24 と比較すれば、 κ がある値以上に達すると、点 A における最大主応力 $(\sigma_1)_A$ よりも大きくなる。そこで主応力の最大値が κ の増加によって如何に変化するを示せば図 5.28 のようになる。図 5.25 ~ 5.27 に、比較のため第 3 章第 2 節および第 4 章第 2 節で求めた理論値 ($\nu = 0.5$) を鎖線で示した。図示のように第 3 章の理論値は必ず

かた初期ねじれの場合にのみ適用できることがわか
 かり。また第4章の理論値は比の比較的大い範囲
 (比 $< 1.5\varepsilon$)でほぼ妥当な値を示すものといえる。

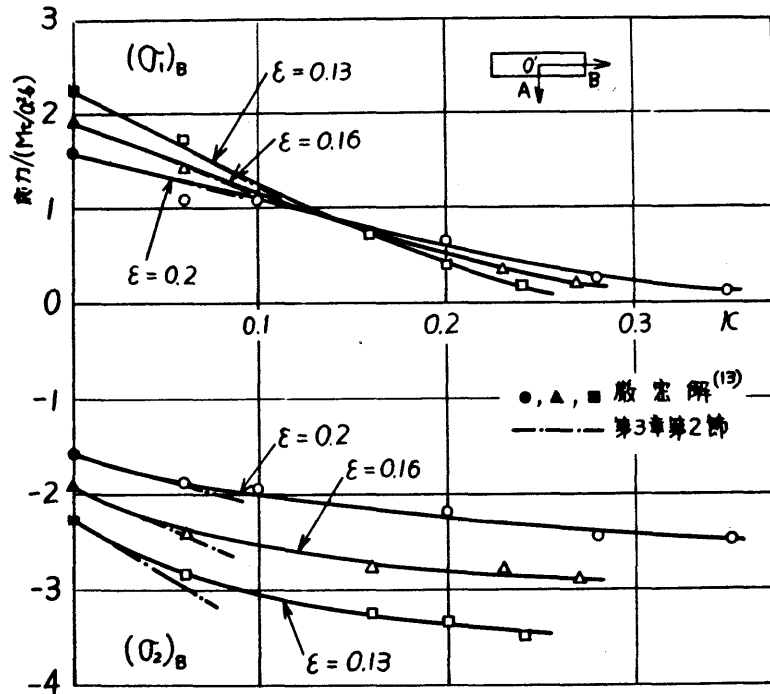


図 5.27 点 B における主応力

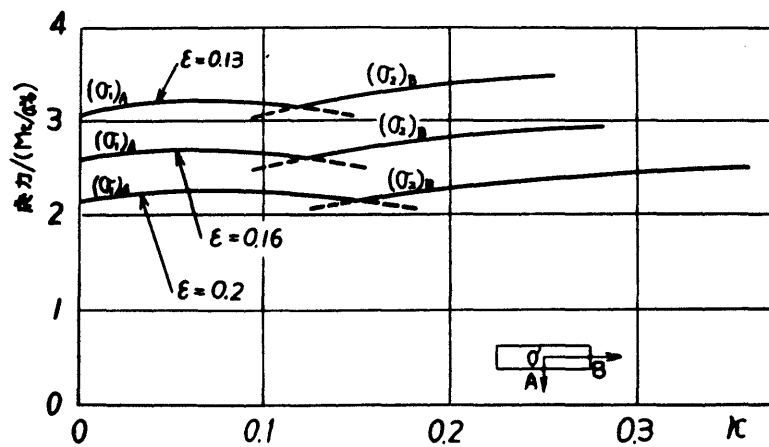


図 5.28 主応力の絶対値の最大値

第 6 章 結 論

初期ねじれを持つた円形，長方形，ひし形など各種断面の棒の引張りおよびねじり問題と線形理論ならびに光弾性実験によって解析し，棒の応力および変形に及ぼす初期ねじれの影響を検討した。円形断面の棒に對しては，従来の研究結果に比較して初期ねじれの大きい場合にも十分な精度で成り立つ理論解を求めた。長方形断面の棒に對しては，初期ねじれが十分小さい場合には，棒の側面における境界条件を満足する解を導いた。さらに，二つの対称軸を持つ細長い断面形の棒に成り立つ応力の近似解を導き，具体例として円形，長方形およびひし形断面に對する応力の簡単な表示式を求めた。円形断面の棒の場合に對しては上述の理論解と比較し，また長方形断面の場合には凍結法三次元光弾性による実験結果と比較して近似解の適用限界を検討したが，これは初期ねじれが比較的大きい場合にも十分妥当な結果を与えることがわかった。したがって，ここに導いた近似解は初期ねじれを有し，かつ，二つの対称軸を持つ細長い各種断面の棒の強度計算を行なう上に必要な公式として有効に利用できると考えらる。

本研究で取扱った初期ねじれ量の範囲内には，タービン翼やプロペラなどの機械部品に通常見られる大きさのものが含まれている。したがって本研究の結果は，これらの機械部品の強度設計の基礎的な資料として直接使用できるものと考えらる。

終りに，この研究を進めしにあたって終始御指導御鞭撻を賜わった大久保教授，清家助教授に厚

く感謝申し上げます。さらに実験を行なうにあたって御援助いただいた栗西技官はじめ応用力学研究室の諸氏にも感謝の意を表す。

参 考 文 献

- (1) H. Ōkubo, *Quart. Appl. Math.*, 9(1951), 263.
- (2) H. Ōkubo, *Quart. Appl. Math.*, 11(1954), 488.
- (3) J. Zickel, *J. Appl. Mech.*, 22(1955), 348.
- (4) L. Maunder, *J. Appl. Mech.*, 25(1958), 67.
- (5) L. Maunder & E. Reissner, *J. Mech. Phys. Solids*, 5(1957), 261.
- (6) 清家, 機械学会論文集, 30-209(昭39-1), 80.
- (7) C. J. Ancker & J. N. Goodier, *J. Appl. Mech.*, 25(1958), 471.
- (8) C. J. Ancker & J. N. Goodier, *J. Appl. Mech.*, 25(1958), 484.
- (9) Timoshenko & Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, (1959), 200, McGraw-Hill.
- (10) H. Ōkubo, *J. Appl. Mech.*, 20(1953), 273.

(11) Timoshenko & Goodier, *Theory of Elasticity*,
(1951), 272, Mc Graw - Hill.

(12) R.B. Heywood, *Designing by Photoelasticity*,
(1952), 135, Chapman and Hall.

(13) 文献(12), 275.

(a) 清家・安田, 機械学会論文集, 32-240
(昭41-8), 1195.

(b) 清家・安田, 機械学会論文集, 32-243
(昭41-11), 1653.

(c) 清家・安田・栗栖, 機械学会論文集, 32-
244 (昭41-12), 1777.

(d) 清家・安田, 機械学会第17期東海支部
講演前刷集, (昭43-3), 93.