

報告番号 Z 第 2436 号

# 弾性円管と流体の連成波動

浦田喜彦

図 本館

# 弾性円管と流体の連成波動

名古屋大学図書  
和 908378

浦田喜彦

# 目 次

第1章 緒 論 .....	1
記 号 .....	4
第1編 解 析 的 研 究 .....	7
第2章 流体が非粘性の場合の基礎的解析 .....	8
2.1 緒 言 .....	8
2.2 解 析 .....	8
2.2.1 基 礎 式 .....	8
2.2.2 無限長管における波動解 .....	11
2.3 計算結果と考察 .....	15
2.3.1 管単独の波動 .....	15
2.3.2 連成波動 .....	16
2.4 伝ば速度の近似式の検討 .....	23
2.5 結 言 .....	26
第3章 流体に粘性がある場合の基礎的解析 .....	28
3.1 緒 言 .....	28
3.2 解 析 .....	28
3.2.1 基 礎 式 .....	28
3.2.2 無限長管における波動解 .....	30
3.2.3 数 値 計 算 .....	33
3.3 計算結果と考察 .....	35
3.3.1 剛管内粘性流体の波動 .....	35
3.3.2 連成波動 .....	39
3.4 結 言 .....	44
第4章 管路の振動数応答の近似計算式 .....	47
4.1 緒 言 .....	47
4.2 近似式の誘導 .....	47

4.3	近似式の精度と応用例	52
4.3.1	近似式の精度	52
4.3.2	近似式の応用例	56
4.4	管材の内部摩擦の影響	58
4.5	結 言	59
第5章	管の境界条件に関する検討	61
5.1	緒 言	61
5.2	伝ば項と非伝ば項	61
5.3	流体が非粘性の場合の連成波動	64
	—— 境界条件との関連 ——	
5.3.1	波数スペクトル	64
5.3.2	数値計算例	67
5.4	流体に粘性がある場合の連成波動	69
	—— 境界条件との関連 ——	
5.5	結 言	71
第6章	非軸対称波動モードに関する検討	72
6.1	緒 言	72
6.2	解 析	72
6.3	計算結果と考察	73
6.4	結 言	77
第2編	実 験 的 研 究	78
第7章	伝ば速度の振動数依存性	79
7.1	緒 言	79
7.2	実験の方法	79
7.2.1	実験装置	79
7.2.2	試 料	82
7.3	実験結果と考察	82
7.4	結 言	87

第 8 章 連成波動の減衰 .....	88
8.1 緒 言 .....	88
8.2 減衰率の測定法 .....	88
8.3 管内空気を伝わる音波の減衰 .....	89
8.3.1 実験装置 .....	90
8.3.2 実験結果 .....	92
8.3.3 気体に対する理論の補足 .....	94
8.4 連成波動の減衰 .....	100
8.4.1 実験装置 .....	101
8.4.2 実験結果 .....	102
8.5 結 言 .....	104
第 9 章 結 論 .....	106
付録 I 円管に三次元弾性論を用いた連成波の解析 .....	109
付録 II 管外壁に接する物質の連成波への影響 .....	112
II.1 解 析 .....	112
II.2 計算結果 .....	116
文 献 .....	122
謝 辞 .....	126

# 第 1 章 緒 論

流体輸送，圧力伝達などのための管路が種々の機械や施設に広く用いられている。これらの流体管路では水撃，油撃あるいは脈動などと呼ばれる波動現象が発生することがある。これを積極的に利用する水撃ポンプ，パルスジェットなどの例もあるが，ほとんどの場合には機械などの性能や安全性の面から見て波動は有害である。いずれにしても波の発生を予測し，その振舞を適切に制御する必要があるので多くの研究が波の発生機構と伝ばの両面について行われてきた。しかしながら，さらに詳しく検討すべき問題が残されていることも事実で，その一つに弾性管内の波の伝ば問題がある。<sup>(1)</sup>

流体の圧縮性と慣性に基づく波動が弾性管内で起きると波の伝ばの様子は剛管の場合とは異なったものになることはよく知られており，管の弾性を考慮した波の伝ば速度の近似式も広く用いられている。しかしながら，それ以上のことについては，若干の研究がなされているが，まだ十分に整理されているとは言いがたく，確実な知識が得られてはいないと言っても過言ではない状況にあると思われる。弾性管内の流体の波動を調べるためには管と流体のそれぞれが振動，波動の媒質であり得るのであるから両者が相互に影響しあう連成現象としてとらえる立場が不可欠のように思われる。ところが従来は問題の発端が管内流体の波動であるためにとくに流体に重点をおいた検討が多くなされてきた。それでは広い範囲にわたって波の性質を調べる時統一的に理解することが困難になる場合もある。そこで，本研究では弾性管と管内流体の系に生じる波動をとくに連成波動と呼ぶことにし，その性質を管と流体の双方の運動に注意を払いながら解析的に詳しく調べ，その結果の一部については実験的な確認も行うことにした。

ここで管の弾性を考慮した波動のこれまでの主な研究について簡単に振り返っておきたい。この問題が具体的にとりあげられたのは Young<sup>(2)</sup> (1808) の頃からと見てよいと思われる。Young は管が非常にやわらかい場合の伝ば速度の公式を導いているが，これは血管内の血液の流動という医学的な問題への関心からだったようである。このような医学的な関心からの研究は現在でも行われていて，<sup>(3)</sup> 岡によって解説がされている。Young 以後，管の剛性が少し増して管の弾性と流体の圧縮性を同時に考慮しなければならない場合の伝ば速度を Korteweg<sup>(4)</sup> (1878) が導いている。この Korteweg の式は簡単でもあるにもかかわらず，合理的なもので実用性が高く，現在でもよく用いられているものである。Korteweg は音響学的方法でこの式を導いたのであるが，同じ式が水撃問題にも適用できることが Joukovsky<sup>(5)</sup> (1898) によって見出されている。それでこの式の発見が Joukovsky に帰せられることもある。<sup>(6)(7)</sup> それから少し遅れて Boyle, Froman, Field は超

音波域にある特定の振動数帯域で管内流体の波が管の肉厚が薄いときに限って顕著な分散性を示す<sup>(8)~(13)</sup>ことを実験的に見出し、管壁の振動も関与しているとして簡単な解析も行っている。(1930~1939)

しかし、非常にせまい範囲だけを対象しているので十分な研究と言うことはできない。このBoyleらの研究あたりまでが、いわば古典的な研究に属すると見られ、それ以降は計算機の発達とともに<sup>(15)</sup>解析を精密、かつ、複雑にする傾向が顕著になる。このうち、DeArmondら(1972)は本論文の第3章に述べるものとやや類似の解析を行っているが、円筒かくのせん断変形を考慮する一方で曲げ剛性を無視するなど細部については検討の余地を残しており、結果も見通しよく整理されている<sup>(17) (18)</sup>とは言えない。そのほかは過渡現象についての研究が多く、実験も水撃や衝撃について行われて<sup>(19)~(21)</sup>いる。近年の研究で重要なのはむしろ剛管内粘性流体の波動に関するものであろう。この分野では<sup>(1)</sup>理論が体系化され、実験的にも確認されて、確立されたものになりつつあると考えられる。

さて、管路の波動の最近の研究では過渡応答や振動数応答を直接の対象としたものが比較的多いようである。これはもちろん工学的な要請に基づくことであり、本研究でも最終的には同じ目標を持つものであるが、その前の段階として波の性質を詳しく調べ、その知識を基準にしながら実際問題の近似的な処理の方法を検討した方が一般性のある確実な結果が得られるように考えられる。そこで、本論文では第一の目標を弾性円管と流体の連成波動の基本的な性質を調べることに置き、それとあわせて実用的問題への対応として近似計算法などの検討をでき得る範囲で行うこととした。

本論文を便宜上、第1編 解析的研究(第2章~第6章)と第2編 実験的研究(第7章,第8章)とに分ける。

<sup>(22)(23)</sup>  
第1編のうち、まず、第2章では流体を非粘性としたときの連成波動の性質、とくに各波動モードの分散性について解析的に調べる。また、従来から用いられている伝ば速度の近似式の精度と適用限界についても調べる。

<sup>(24)(25)</sup>  
第3章では流体の粘性を考慮した場合の連成波の解析を行い、とくに流体の粘性と連成波の減衰との関係について検討する。

<sup>(25)</sup>  
第4章では第3章の解析法を単純化して管路の振動数応答の近似計算式を導き、その精度を検討し、応用例についても述べる。また、得られた近似式を用いて管材の内部摩擦が連成波の減衰に対して及ぼす影響についても調べる。

<sup>(26)</sup>  
第5章では、一般の波動系において方程式の解が波数の偏角によって伝ばモードと非伝ばモードとに分類できることを示し、任意に与えられた境界条件を満たすためには通常の波動解である伝ばモードだけでなく、波としての性質を持たない非伝ばモードも一般解の構成に必要なことを示す。また、数値的検討によって連成波では非伝ばモードを省略した解析が近似的に可能であることも示

す。

(27)

第 6 章では連成波の非軸対称モードを無視できるための理論的な根拠を第 5 章で導入する波動モードの伝ば，非伝ばの性質の面から検討する。

(28)

第 2 編，第 7 章では第 1 編の解析結果のうち，第 2 章で調べた連成波の分散性についてパルス法を用いた実験によって確認を行う。

(29)(30)

第 8 章では，第 3 章，第 4 章で調べた連成波の減衰に関する性質を，管内空気中を伝わる音波と粘性液体を封入した円管の縦振動についての実験によって確認する。また，この実験によって流体が気体の場合には粘性だけではなく，熱伝導も減衰の原因になることが明らかになったので，それを考慮した理論の補足も行う。

第 9 章は本研究の結論である。

本論文で用いる主な記号はつぎのとおりである。

- $t$  : 時 間
- $x, r, \theta$  : 円筒座標系。ただし,  $\theta$  は 8.3.3 項において気体の温度の意味に用いる。
- $e_x, e_r, e_\theta$  : 円筒座標系における単位ベクトル。
- $a$  : 管の平均半径
- $h$  : 管の肉厚
- $b$  : 管の内半径
- $b'$  : 管の外半径
- $\phi, w, u, v$  : 円筒かく理論における管の変位成分〔図 2.2, 図 6.1〕
- $\Psi, W, U, V$  :  $\phi, w, u, v$  の振幅
- $E$  : 管材のヤング係数
- $\nu$  : 管材のポアソン比
- $\rho_p$  : 管材の密度
- $\kappa$  : 管のせん断剛性の補正係数。ただし, 8.3.3 項では気体の温度伝導率
- $D = Eh^3 / 12 (1 - \nu^2)$                       管の曲げ剛性
- $k_T = Eh / (1 - \nu^2)$                       管の引張り剛性
- $k_s = \kappa Eh / 2 (1 + \nu)$                       管のせん断剛性
- $I = \rho_p h^3 / 12$
- $M = \rho_p h$
- $M_x$  : 管の曲げモーメント
- $T_x$  : 管の軸方向引張り力
- $T_\theta$  : 管の周方向引張り力
- $Q_x$  : 管の軸に垂直な断面におけるせん断力
- $H$  : 管の回転慣性モーメント
- $F_x$  : 管の軸方向慣性力
- $F_r$  : 管の半径方向慣性力
- $p_r$  : 管内壁で流体から管に作用する  $r$  方向の圧力
- $\tau_r$  : 管内壁で流体から管に作用する  $x$  方向のせん断力

- $\mathbf{q}$  : 流体の粒子速度  
 $q_x, q_r, q_\theta$  :  $\mathbf{q}$  の  $x, r, \theta$  方向成分  
 $q_{xo}$  : 管内平均流れの速度  
 $q_1$  :  $\mathbf{q}$  の非回転成分  
 $q_2$  :  $\mathbf{q}$  の回転成分  
 $p$  : 流体圧力の変動分  
 $K$  : 流体の体積弾性率  
 $\rho_L$  : 流体の密度  
 $c$  : 流体中の音速  $c = \sqrt{K/\rho_L}$   
 $\mu$  : 流体の粘度  
 $N$  : 流体の動粘度  
 $\alpha$  :  $x$  方向に進む波の位相速度  
 $\alpha_g$  :  $x$  方向の群速度  
 $\alpha^*$  : 散逸性の波における  $\alpha$  に対応する複素量  
 $\beta$  :  $x$  方向の波数  
 $\beta^*$  : 散逸性の波における  $\beta$  に対応する複素量  
 $\lambda$  : 波 長  
 $\omega$  : 角振動数  
 $f$  : 振 動 数  
 $\delta$  : 時間的対数減衰率  
 $\delta'$  : 空間的対数減衰率  
C1, C2, C3 …… : 連成波の第 1 次, 第 2 次 …… モード  
F1, F2, F3 …… : 剛管内流体の第 1 次, 第 2 次, …… 波動モード  
T1, T2, T3 : 管単独の波動モード  
 $j$  : 虚数単位  
 $\pi$  : 円 周 率  
 $e$  : 自然対数の底  
Re : 複素数の実部  
Im : 複素数の虚部  
log : 常用対数

$\ln$  : 自然対数

$\text{grad}$  : こう配

$\text{div}$  : 発散

$\text{rot}$  : 回転

$\nabla^2$  : ラプラシアン

$J_n(z)$  :  $n$  次の第 1 種ベッセル関数

$I_n(z)$  :  $n$  次の第 1 種変形ベッセル関数

$$g(z) = J_0(z) / z J_1(z) \quad \text{〔式 (2.24) 〕}$$

$$F(z) = J_1(z) / z J_0(z) \quad \text{〔式 (4.13) 〕}$$

以下は無次元量の定義である。

$$\eta = a/h$$

$$\bar{b} = b/a = 1 - 1/2\eta$$

$$S = K/E$$

$$\bar{\rho} = \rho_r / \rho_L$$

$$\bar{\alpha} = \alpha / c$$

$$\bar{\alpha}_s = \alpha_s / c$$

$$\bar{\beta} = \beta \cdot a$$

$$\bar{\lambda} = \lambda / a$$

$$\bar{\omega} = \omega a / c$$

$$\bar{f} = f a / c = \omega a / 2\pi c$$

$$\bar{N} = N / b c$$

## 第1編 解析的研究

本編では弾性内管と流体の連成波動の解析法および数値計算の結果について述べる。連成波という用語は管と流体の連成の効果の大小にはかかわりなく、管と流体の基礎式を連立させて得られるすべての波動解を意味するものとする。計算結果の整理にあたっては連成波と非連成の管と流体の波動の比較をできる限り行って、やや複雑な連成波の性質がどのようにもたらされるのかという物理的な考察を中心に検討をする。

本編の内容を類型化すれば三つに分けられる。第2章は流体を非粘性とした場合で、分散性を中心とする連成波の性質が検討の対象であり、本論文を通しての基礎である。第3章、第4章は流体粘性を考慮した精密および近似の解析で、波動の減衰にすることがらが検討の中心である。第5章、第6章では基礎式の解のうち、波としての性質を持たないものの意味を検討し、境界条件の与えられた問題の解析法を調べる。これによって無限長系の解析と有限長系の解析との理論的なつながりを明確にできる。

## 第 2 章 流体が非粘性の場合の基礎的解析<sup>(2)(3)</sup>

### 2.1 緒 言

本章では管内流体を非粘性とし、また管を無限長と仮定して解析を行い、分散性など連成波の基本的な性質を調べる。そして、その結果を基礎にして従来から用いられている伝ば速度の近似式の精度や適用限界の検討も行う。本章での検討は後の各章における議論の基礎にもなるべきものである。

### 2.2 解 析

#### 2.2.1 基礎式

管と流体の連成波動を広い範囲にわたって調べるためには、用いる基礎式は精度のよいものでなくてはならない。そこで、管の運動方程式には Herrmann - Mirsky<sup>(3)</sup> の円筒かく理論を用いることにする。これは回転慣性とせん断変形も考慮したもので、最低次の軸対称波動モードに対して全波長域で三次元弾性論によるものとよく一致する計算結果を与えることが確認されている。一方、流体については半径方向の運動を考慮する必要があるので、三次元の運動方程式と連続の式を用いる。

はじめに管内壁に流体力が作用する場合に対して管の運動方程式を Herrmann らの考えに従って導いておく、この場合、粘性を考慮していないので管にはたらく流体力は管壁に垂直な圧力だけである。図 2.1 は管の微小要素における力とモーメントのつりあい関係を示したものである。軸方向引張り力  $T_x$ 、周方向引張り力  $T_\theta$ 、軸に垂直なせん断力  $Q_x$ 、および曲げモーメント  $M_x$  は管の平均半径  $r = a$  面上での単位長さあたりの値であり、慣性力  $F_x$ 、 $F_r$  および回転慣性モーメント

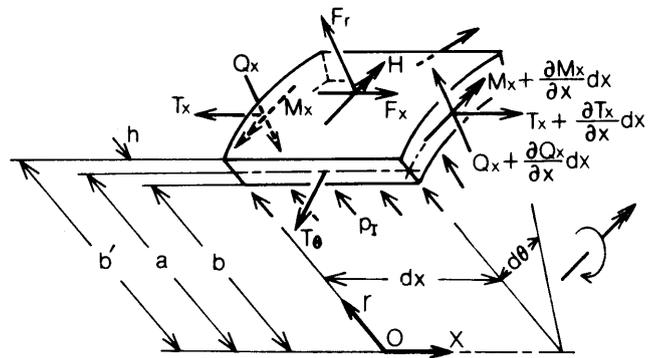


図 2.1 管のつりあい関係

$H$  は  $r = a$  面上での単位面積あたりの値である。また、 $p_l$  が流体による圧力である。図 2.1 に示した関係を式で表わせば

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x + H &= 0 \\ \frac{\partial T_x}{\partial x} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{T_\theta}{a} + F_r + \frac{b}{a} p_l &= 0 \end{aligned} \right\} (2.1)$$

式(2.1)の各項は、 $p_1$ の項を除いて図2.2に示した管の変位成分  $u$ ,  $w$ ,  $\psi$  で表わすことができる。まず、弾性に関するものに対しては  $\sigma_x$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\tau_{xr}$  をそれぞれ  $T_x$ ,  $T_\theta$ ,  $Q_x$  に対応する方向の応力成分とすれば次式が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} T_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \left(1 + \frac{\zeta}{a}\right) d\zeta, & T_\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta d\zeta \\ Q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xr} \left(1 + \frac{\zeta}{a}\right) d\zeta, & M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \left(1 + \frac{\zeta}{a}\right) \zeta d\zeta \end{aligned} \right\} (2.2)$$

ここに  $\zeta$  は  $r = a$  を原点とする  $r$  方向の局所座標である。各応力成分はひずみ成分と次式で関係づけられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_\theta), & \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_x) \\ \tau_{xr} &= \frac{\kappa E}{2(1+\nu)} r_{xr} \end{aligned} \right\} (2.3)$$

ところが、ひずみ成分は

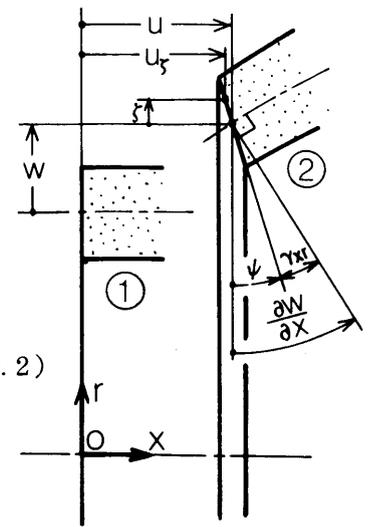
$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_\zeta}{\partial x}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{w}{a+\zeta}, \quad r_{xr} = \frac{\partial u_\zeta}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.4)$$

であるから、式(2.4)を式(2.3)に、式(2.3)を式(2.2)に代入して積分を実行すれば式(2.2)の各式は管の変位成分で表わされる。なお、式(2.4)に含まれる  $u_\zeta$  は  $\zeta$  の位置における軸方向変位であるが、変位を直線的に仮定するために、 $u$  を  $r = a$  ( $\zeta = 0$ ) における軸方向変位として

$$u_\zeta = u - \zeta \psi \quad (2.5)$$

となる。さて、式(2.3)の第3式のせん断の応力とひずみの間の比例係数は横弾性係数に定係数  $\kappa$  を乗じたものになっている。この  $\kappa$  は、変位分布を式(2.5)のように直線的に仮定した結果、三次元理論によれば断面上で一様な値をとるはずのない  $\tau_{xr}$  や  $r_{xr}$  が円筒かく理論では一様な値になるために必要とされるせん断剛性の補正係数である。  $\kappa$  はポアソン比  $\nu$  だけの関数であって、 $\sqrt{\kappa}$  が弾性体中の横波の速度に対する Rayleigh 波の速度の比に等しくなるように定められる。とくに本論文で計算例に用いた  $\nu = 0.3$  のときには  $\kappa = 0.860$  である。

つぎに慣性力と回転慣性モーメントは



- ① Original state
- ② Displaced state

図2.2 管の変位

$$\left. \begin{aligned}
 F_x &= -\rho_r \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial^2 u_\zeta}{\partial t^2} \left(1 + \frac{\zeta}{a}\right) d\zeta \\
 F_r &= -\rho_r \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \left(1 + \frac{\zeta}{a}\right) d\zeta \\
 H &= -\rho_r \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial^2 u_\zeta}{\partial t^2} \left(1 + \frac{\zeta}{a}\right) \zeta d\zeta
 \end{aligned} \right\} (2.6)$$

から求められる。式(2.2), (2.6)の積分結果を式(2.1)に代入して整理すれば次式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
 \left(-D \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_s + I \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \psi + \left(\frac{D}{a} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{I}{a} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u - k_s \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \\
 \left(\frac{D}{a} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{I}{a} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \psi - \left(k_r \frac{\partial^2}{\partial x^2} - M \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u - \frac{\nu k_r}{a} \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \\
 -k_s \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\nu k_r}{a} \frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{k_r}{a^2} + \frac{D}{a^4} - k_s \frac{\partial^2}{\partial x^2} + M \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) w + \frac{b}{a} p_i &= 0
 \end{aligned} \right\} (2.7)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned}
 D &= \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}, \quad k_r = \frac{E h}{1-\nu^2}, \quad k_s = \frac{\kappa E h}{2(1+\nu)} \\
 I &= \frac{\rho_r h^3}{12}, \quad M = \rho_r h
 \end{aligned} \right\} (2.8)$$

である。また, 式(2.7)の第3式においては

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{d\zeta}{a+\zeta} = \left[ \ln \left(1 + \frac{\zeta}{a}\right) \right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{h}{a} + \frac{h^3}{12a^3} \quad (2.9)$$

という近似が用いられている。式(2.7)が, 管内流体からの圧力  $p_i$  が作用するときの管の基礎式である。

つぎに流体については線形化された運動方程式

$$\rho_L \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -\text{grad } p \quad (2.10)$$

と線形化された連続の式

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -K \text{div } \mathbf{q} \quad (2.11)$$

を用いる。式(2.10), (2.11)から  $\mathbf{q}$  を消去すれば, 圧力  $p$  に関する波動方程式が得られる

が、これを軸対称の場合について円筒座標系で表わせば

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p = 0 \quad (2.12)$$

ただし、 $c^2 = K/\rho_L$  である。

以上の管と流体の基礎式を連立させるための条件は

$$p_r = [p]_{r=b} \quad (2.13)$$

と管内壁における管と流体の半径方向の速度の連続条件

$$[q_r]_{r=b} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (2.14)$$

である。

### 2.2.2 無限長管における波動解

基礎式の解として  $x$  軸に沿って進む正弦波を考え、

つぎのようにおく。

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \Psi \sin \beta(x - \alpha t) \\ u &= U \sin \beta(x - \alpha t) \\ w &= W \cos \beta(x - \alpha t) \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

$$p = R(r) \cos \beta(x - \alpha t) \quad (2.16)$$

式 (2.15), (2.16) は可能な解表現のうちの一つにすぎず、 $\sin$ と $\cos$ の役割を入れ替えた形にしたものや定常波の形にしたものなども考えることができるのであるが、本質的な違いはない。まず、式 (2.16) を式 (2.12) に代入して整理すれば

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + m^2 \right) R(r) = 0 \quad (2.17)$$

$$m = \beta \sqrt{(\alpha/c)^2 - 1} \quad (2.18)$$

式 (2.17) は零次のベッセルの微分方程式であるが、 $r = 0$  で  $R(r)$  が有限な値をとるべきことから解は次のようになる。

$$R(r) = P J_0(mr) \quad (2.19)$$

これを式 (2.16) に代入すれば

$$p = P J_0(mr) \cos \beta(x - \alpha t) \quad (2.20)$$

これを流体の運動方程式 (2.10) に代入して、 $q$  の成分について解くと

$$\left. \begin{aligned} q_x &= P \frac{J_0(mr)}{\rho_L \alpha} \cos \beta(x - \alpha t) \\ q_r &= -P \frac{mJ_1(mr)}{\rho_L \beta \alpha} \sin \beta(x - \alpha t) \end{aligned} \right\} (2.21)$$

式(2.15)の第3式, 式(2.21)の第2式を管と流体の速度の連続条件式(4)に代入すれば, 圧力の振幅を意味する係数  $P$  を管の半径方向変位振幅  $W$  で表わすことができる。

$$P = -W \frac{\rho_L \beta^2 \alpha^2}{mJ_1(mb)} \quad (2.22)$$

これを式(2.20)に代入して  $r = b$  とすれば, 式(2.13)から

$$p_l = -W b \rho_L \beta^2 \alpha^2 g(mb) \cos \beta(x - \alpha t) \quad (2.23)$$

ただし

$$g(z) \equiv \frac{J_0(z)}{zJ_1(z)} \quad (2.24)$$

式(2.23)を式(2.15)とともに管の基礎式(2.7)に代入すれば, 管の変位振幅  $\Psi$ ,  $U$ ,  $W$  に関する同次の一次代数方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} (D\beta^2 + k_s - I\beta^2\alpha^2)\Psi - \left(\frac{D}{a}\beta^2 - \frac{I}{a}\beta^2\alpha^2\right)U + k_s\beta W &= 0 \\ -\left(\frac{D}{a}\beta^2 - \frac{I}{a}\beta^2\alpha^2\right)\Psi + (k_r\beta^2 - M\beta^2\alpha^2)U + \frac{\nu k_r}{a}\beta W &= 0 \\ k_s\beta\Psi + \frac{\nu k_r}{a}\beta U + \left\{\frac{k_r}{a^2} + \frac{D}{a^4} + k_s\beta^2 - M\beta^2\alpha^2 + \frac{b^2}{a}\rho_L\beta^2\alpha^2 g(mb)\right\}W &= 0 \end{aligned} \right\} (2.25)$$

この方程式を行列を用いて表わせば

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ & A_{22} & A_{23} \\ \text{対称} & & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi \\ U \\ W \end{bmatrix} = 0 \quad (2.26)$$

式(2.26)が自明ではない解を持つためには

$$\Gamma(\alpha, \beta) \equiv \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ & A_{22} & A_{23} \\ \text{対称} & & A_{33} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.27)$$

でなければならない。これが連成波動の波数  $\beta$  と位相速度  $\alpha$  の関係を定める方程式である。この方

程式は  $A_{33}$  に  $g(mb)$  という超越関数を含むので代数的に解くことはできず、 $\beta - \alpha$  関係は数値的にしか求められない。 $\beta - \alpha$  関係を求めると、 $\omega = \beta\alpha$ 、 $\lambda = 2\pi / \beta$  などの関係を用いて、 $\omega - \beta$  関係、 $\lambda - \alpha$  関係などに変換することができる。

さて、位相速度  $\alpha$  は波のある特定の位相の点が移動する速さであり、波の性質にかかわる最も重要な量の一つであるが、波動現象では別の速度の概念が必要になることも多い。とくに、パルス性の波<sup>(32)</sup> などでは群速度  $\alpha_g$  が必要になるが、これは次式で定義される。

$$\alpha_g = \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = \alpha + \frac{\partial \alpha}{\alpha \beta} \beta = \alpha - \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} \lambda \quad (2.28)$$

$\alpha_g$  を  $\beta$  の関数として求める場合には、式 (2.27) によって  $\beta - \alpha$  関係を定めた後に、同じ式 (2.27) に陰関数の微分の定理を用いて

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \beta} = - \frac{\partial \Gamma}{\partial \beta} / \frac{\partial \Gamma}{\partial \alpha} \quad (2.29)$$

を計算して  $\alpha$  とともに式 (2.28) に代入すればよいが、 $\Gamma$  は実際には行列式の形で与えられているから、式 (2.29) の分子と分母は行列式の微分の定理を用いて計算しなければならない。 $\alpha_g$  は単一の波長成分だけを含む波のエネルギーの搬送速度を意味するほか、卓越した成分波が存在するようなパルス性の波の伝ば速度の近似値でもある。

ところで、 $\alpha < c$  であれば式 (2.18) によって  $m$  は虚数になるので、 $g(mb)$  の計算には式 (2.24) によって変数が虚数になるようなベッセル関数を扱う必要が生じる。この場合には、

$$J_n(jz) = j^n I_n(z) \quad (2.30)$$

<sup>(33)</sup>なる関係を用いて  $g(mb)$  を変形ベッセル関数で表わしておけば計算を実数の範囲内ですませることができる。

以上は管と流体の連成がある場合であるが、非連成の管と流体の波動についてはつぎのように計算すればよい。まず、流体がないときの管の波動に対しては、式 (2.25) 第 3 式の  $W$  の係数のうち流体力に基づく最後の項を省略すればよいが、この場合には式 (2.27) と同形の方程式を展開すると  $\alpha^2$  に関する三次方程式になる。つぎに、管が剛体であるときの管内流体の波動に対しては、管内壁  $r = b$  で  $q_r = 0$  であるから、式 (2.21) の第 2 式より

$$J_1(mb) = 0 \quad (2.31)$$

<sup>(33)</sup>が満たされなければならない。ところが、 $J_1(z)$  の零点は  $z$  の実軸上に無限個存在するので、このうち負でないものを  $z_1 = 0$ 、 $z_1 = 3.8317$ 、 $\dots$ 、 $z_i$ 、 $\dots$  とすれば、式 (2.31) は次式と同じである。

$$mb = z_i \quad (2.32)$$

これに式(2.18)を代入して整理すれば

$$\alpha = c \sqrt{1 + (z_i / \beta b)^2} \quad (2.33)$$

特別な場合として、 $z_i$  に  $z_i = 0$  を代入すれば  $\alpha = c$  となるが、これが剛管内の流体の最低次の波動モードの位相速度で、自由空間を伝わる平面波と全く同じになる。

これまでの議論は流体に軸方向の平均流れがない場合についてであったが、平均流れがあってもそれが管断面上で一様な速度分布を持つと仮定できれば連成波の解析はこれまでと同様に行える。

$q_{x0}$  を平均流れの速度とすれば、波としての流体粒子速度  $\mathbf{q}$  との合成速度は  $q_{x0} \mathbf{e}_x + \mathbf{q}$  である。

このことを考慮して流体の基礎式(2.10)、(2.11)を書き直すと

$$\left. \begin{aligned} \rho_L \left( \frac{\partial}{\partial t} + q_{x0} \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{q} &= -\text{grad } p \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + q_{x0} \frac{\partial}{\partial x} \right) p &= -K \text{div } \mathbf{q} \end{aligned} \right\} (2.34)$$

また、管と流体の速度の連続条件は式(2.14)の代わりに

$$[q_r]_{r=b} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + q_{x0} \frac{\partial}{\partial x} \right) w \quad (2.35)$$

となる。これは境界面が変形するときの非粘性の流れの境界条件の一般式を適用して線形化することによって導かれる。基礎式としては以上が異なるが、ほかは  $q_{x0} = 0$  の場合と同じであり、解析手順もほとんど変わらない。管内壁にはたらく流体の圧力  $p_i$  の計算結果は

$$p_i = -W b \rho_L (\alpha - q_{x0})^2 \cdot g(m' b) \cos \beta(x - \alpha t) \quad (2.36)$$

ただし、

$$m' = \beta \sqrt{(\alpha - q_{x0})^2 / c^2 - 1} \quad (2.37)$$

$g(m' b)$  の計算は式(2.24)の定義による。式(2.36)を式(2.15)とともに管の基礎式(2.7)に代入して整理すれば、平均流れのある場合の  $\beta - \alpha$  関係を定める方程式が式(2.27)と同様の形で得られる。

## 2.3 計算結果と考察

### 2.3.1 管単独の波動

管と流体の連成波動は後に示すように独特の性質を持っているが、非連成の管と流体のそれぞれの波動の性質を受け継いでいる面もかなりある。非連成の流体の波動は、位相速度の計算式が簡単な式(2.33)となることから明らかなように、単純な性質を持っているが、管単独の波動はそれに比較してやや複雑である。それゆえ、管単独の波動についてはその性質をあらかじめ簡単に整理しておくことが必要である。また、この解析で用いている円筒かく理論は精度のよいものであるが、それはもちろん制限された範囲内におけることなので適用可能な範囲を評価しておくことも必要である。これらのことから、Herrmann らの論文にも述べられているのであるが、短波長域だけが強調されていることや高次モードに言及されていないことなどから、本研究に対してはやや不十分なので、ここで改めて検討しておきたい。

Herrmann - Mirsky の理論では管単独の波動に対して三つの波動モードが計算できるが、その位相速度と波長の関係の計算例を三次元弾性論や他の円筒かく理論による結果と比較して図 2.3 に示す。縦軸は弾性横波の速度で無次元化した位相速度であり、横軸は無次元波長  $\bar{\lambda} = \lambda/a$  の逆数である。Herrmann らの理論以外の計算式は三次元理論については付録 I に示したが、他はつぎのとおりである。まず、Flügge の理論は

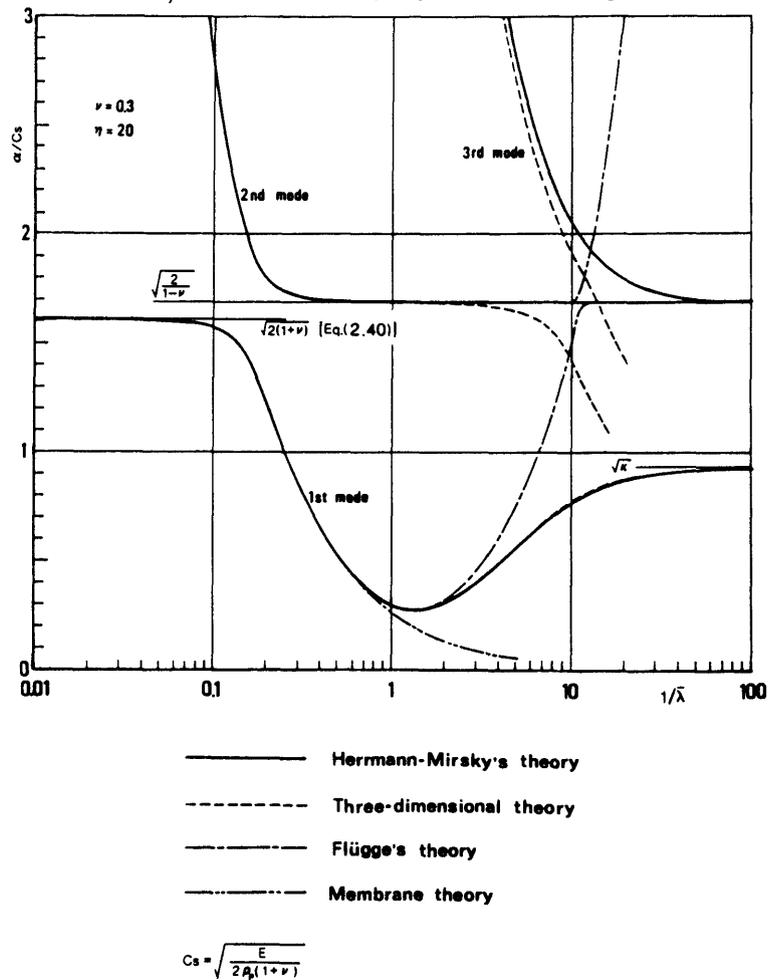


図 2.3 各種理論による管の非連成波動の位相速度

$$\left. \begin{aligned} \left( k_T \frac{\partial^2}{\partial x^2} - M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u + \left( -\frac{D}{a} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{\nu k_T}{a} \frac{\partial}{\partial x} \right) w &= 0 \\ \left( -\frac{D}{a} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{\nu k_T}{a} \frac{\partial}{\partial x} \right) u + \left( D \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{k_T}{a^2} + \frac{D}{a^4} + M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) w &= 0 \end{aligned} \right\} (2.38)$$

この理論では曲げ剛性は考慮されているが、回転慣性とせん断変形は無視されていて、二つの波動モードが得られる。また、膜力理論はさらに曲げ剛性を無視したもので、形式的には式(2.38)において  $D = 0$  としたものに等しい。

$$\left. \begin{aligned} \left( k_r \frac{\partial^2}{\partial x^2} - M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u + \frac{\nu k_r}{a} \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\nu k_r}{a} \frac{\partial u}{\partial x} + \left( \frac{k_r}{a^2} + M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

最後に、式(2.39)の第2式から半径方向の慣性力を除き、二つの式をまとめて  $u$  について表わすと、棒を伝わる縦波の式に一致する。

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho_p \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (2.40)$$

さて、図2.3において Herrmann らの理論は第一次モードでは全波長域で三次元理論とよく一致しているが、二、三次モードの短波長域では一致の程度が悪くなり、妥当性が失われる。これは、高次モードの短波長域では変位分布の直線性の仮定が無理になるためと見られ、連成波動への応用もこの領域ではできない。

つぎに最も重要な一次モードの性質を各波長域ごとに調べてみる。長波長域では式(2.40)による結果とよく一致することからも明らかなように管の運動はほとんど縦波になっている。波長が短くなると位相速度は低下するが、この領域でもよく一致する式(2.39)の膜力理論と式(2.40)の差から、半径方向の慣性力の影響によるものであることは明らかである。つまり、管の運動は波長が短くなるにつれ半径方向の成分が大きくなるのである。さらに波長が短くなると位相速度は極小値を経て再び増加するが、これは主に波長と管の肉厚が接近することによって曲げ剛性の効果が現われるためである。しかし、これを考慮した Flügge 理論も脱落し、せん断変形と回転慣性を考慮した Herrmann らの理論だけが最後まで妥当性を保つ結果になっている。以上のように、波長が短くなるほど、すなわち振動数が大きくなるほど管の運動や変形状態は複雑になり、考慮すべき要因が多くなる。

**2.3.2 連成波動**                      管と流体の連成波動の位相速度の計算結果を管単独および剛管内流体の波動と比較して図2.4に示す。横軸は  $1/\bar{\lambda}$  としたが、これは分散性が波長と管断面寸法の比によって支配されているという事情がある反面で、実際面では振動数で整理せざるを得ないことも多いのでそれと表現を近づけることを考慮したためである。図2.4は管の平均半径と肉厚の比を20とし、そのほかのデータはほぼ鋼管と水を想定したものになっている。各波動モードの名称を

記号で示してあるが、C 1, C 2, ……は連成波, F 1, F 2, ……は非連成の流体波動, すなわち管が剛体の場合, T 1, ……は管だけの場合を表わし, 数字はもちろん各場合の波動モードの次数を意味する。この記号は本論文を通して用いられる。図 2.4 では実は図示範囲内に存在する C 6 以上, F 6 以上のモードが省略されているが, それらについては第 5 章で波動モードの性質を別の角度から検討する際に表現法を変えて示される。

さて, 連成波の各モードは図 2.4 から明らかなように独特の分散傾向を持っているが, 波長域ごとに非連成の管あるいは流体の波動モードの

いずれかの特徴をかなり受け継いでいる。管単独の波動の性質は前述したので, ここで剛管内流体の波について簡単に触れておく。F 1, F 2, ……などの最大の特徴は管断面上での圧力分布にある。そこで F 3 までの圧力分布を図 2.5 に示す。F 1 は平面波と同じで, 圧力は全断面で同位相であるが, 高次モードでは節円で区切られた位相が互いに反対の領域が現われる。節

円の数 はモードの次数から 1 を引いたものに等しい。図 2.5 の分布形は  $\bar{\lambda}$  によらない。圧力分布は式 (2.19) によって計算されるのであるが, ベッセル関数の変数に含まれる  $m$  の値が式 (2.32) によって不変となるからである。連成波の圧力分布はもっと変化に富んだものになるが, 圧力分布の計算式はやはり式 (2.19) であり,  $m$  の定義も剛管の場合と同じく式 (2.18) であることからわかるように連成波の位相速度が非連成の流体のあるモードのものに近ければ圧力分布も類似したものになる。

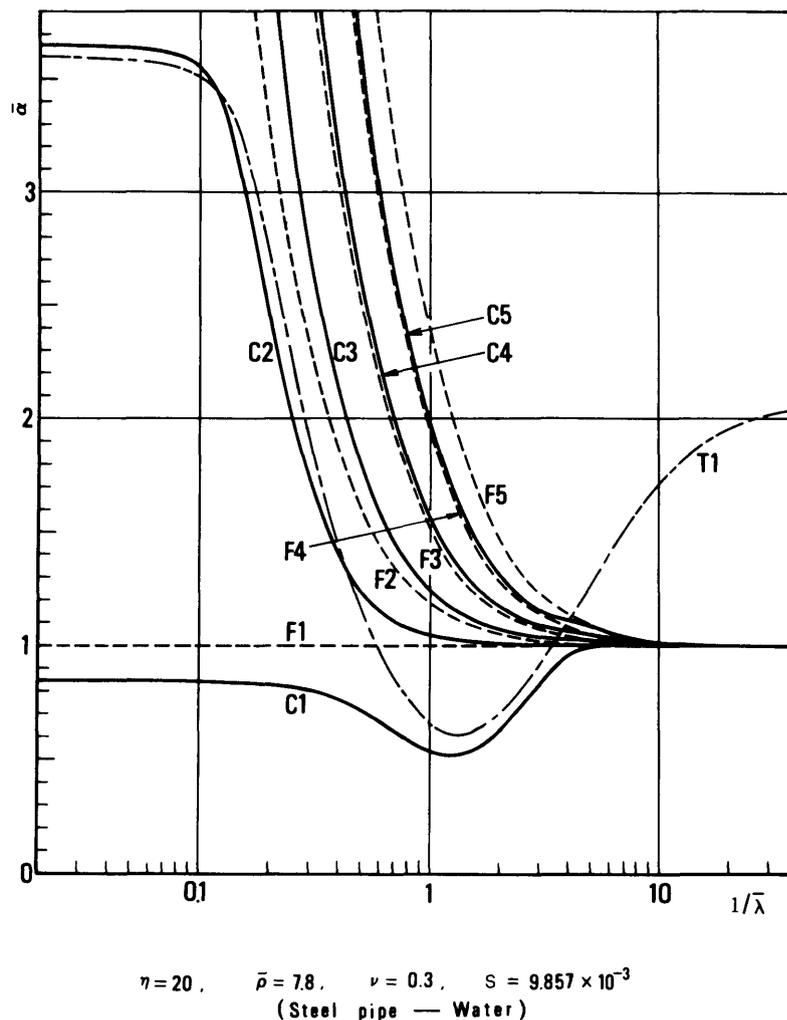


図 2.4 連成波および管と流体の非連成波の位相速度

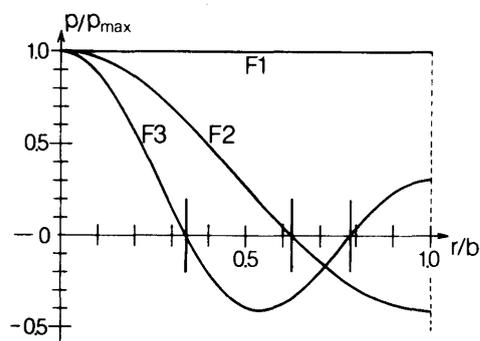


図 2.5 剛管内流体の波動モードの管断面上での圧力分布

ここで連成波の各モードの性質を波長域ごとに検討する。まず、最低次のC1は大まかには剛管の場合のF1が管の弾性によって変化したものと言うことができる。しかし、管の影響は波長域ごとに異なった形をとる。長波長域では管は流体圧力に対する応答として主に半径方向の変位を生じ、応力成分としては周方向のいわゆるフープ応力が主になる。また、管の慣性力は小さい。このとき、管の変形に伴う内容積の変化が流体の柱の軸方向の圧縮に対する剛性を見かけ上低下させるように作用するので位相速度はF1（ $c$ に等しい）より小さくなるが、ほとんど非分散的である。波長が管径の数倍から数分の一の範囲ではC1は著しい分散性を示すが、これは明らかに管の半径方向の運動とそれに伴う流体の運動が大きくなることによるものである。この領域では流体が管の運動に対して付加質量的に作用しているとも見られる。短波長域ではC1は再び非分散的になるが、長波長域と異なって位相速度は剛管の場合に非常に近くなる。これは波長が短いと管の変形に際してフープ応力だけでなく軸に垂直な断面でのせん断応力も大きくなるので、流体圧力に対する変形の抵抗が大きくなり、結果的に剛管に近くなるためであろう。

図2.4から明らかなようにC2モードの長波長域では管の縦波が主であり、短波長域では流体の運動が主になるものに変化する。管の縦波はその運動様式から非粘性流体との相互作用は小さく、それゆえC2の長波長域では位相速度はT1に近くなるのであるが、C2の方がわずかながら大きくなる。管材のポアソン比 $\nu$ が零でない限り、管の軸方向の伸縮に伴って半径方向の変位も生じる。このとき、内部に流体が含まれていると、C2モードの長波長域では流体の圧力 $p_r$ は管の半径方向変位 $w$ とは位相が反対なので、流体は管の運動を妨げるように作用する。これが結果的に管の軸方向の剛性を見かけ上増大させ、位相速度も流体がないときより大きくなるのである。 $p_r$ と $w$ の位相関係は後に理論的に調べることにする。

C3以上のモードでは、位相速度の値はやや異なるが、その変化の傾向は管が剛体の場合の高次モードによく似ていて、流体が主な役割を果たしていることを示している。

ところで図2.4に示した範囲ではある任意の波長に着目すると各モードの位相速度の大小関係がつぎのように見出される。

$$\left. \begin{aligned} C_1 < F_1, & \quad C_1 < T_1, \\ F_1 < C_2 < F_2, & \quad F_2 < C_3 < F_3, \quad \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

この式では各モードの名称がその位相速度を表わしている。式(2.41)の関係は連成波の位相速度が管単独の高次モード(T2以上)より小さい範囲で一般的に成立するが、その理論的な説明はつぎのようである。式(2.27)において要素 $A_{33}$ を次のように二つに分ける。

$$\left. \begin{aligned}
 A_{33} &= A'_{33} + A''_{33} \\
 A'_{33} &= \frac{k_r}{a^2} + \frac{D}{a^4} + k_s \beta^2 - M \beta^2 \alpha^2, \quad A''_{33} = \frac{b^2}{a} \rho_L \beta^2 a^2 g(mb)
 \end{aligned} \right\} (2.42)$$

すると方程式 (2.27) はつぎのように変形できる。

$$A''_{33} = - \left| \begin{array}{ccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ & A_{22} & A_{23} \\ \text{対称} & & A'_{33} \end{array} \right| / \left| \begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{array} \right| \quad (2.43)$$

波数  $\beta$  を固定すると式 (2.43) は  $\alpha$  だけに依存することになるから、形式的につぎのように書く。

$$X(\alpha) = -Y(\alpha) / Z(\alpha) \quad (2.44)$$

ここで  $Y(\alpha) = 0$  は管単独の  $\alpha$  を定める方程式であり、 $\alpha = 0$  のとき  $Y > 0$  となることが確かめられる。また、 $Z(0) > 0$  であること、 $Z(\alpha) = 0$  の根のうち小さなものを  $\alpha_c$  とすれば  $\alpha_c = \sqrt{E/\rho_P(1-\nu^2)}$  であることも計算によって確かめられる。この  $\alpha_c$  の値は図 2.3 から明らかなように管単独の高次モード (T2, T3) の  $\alpha$  の Herrmann - Mirsky の近似における下限値であり、T1 モードの  $\alpha$  の上限値より大きいから  $Y(\alpha)/Z(\alpha) = 0$  の根は  $0 < \alpha < \alpha_c$  の範囲に必ず 1 個だけ存在する。一方、 $1/X(\alpha) = 0$  は式 (2.31) に同値であるから、 $X(\alpha)$  の特異点が剛管内流体の各波動モードの位相速度となる。これらの点に注意して式 (2.44) の関係を図示すれば図 2.6 のようになる。

$X_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) は  $X(\alpha)$  の各分枝である。式 (2.41) の関係はこの図によって明らかである。式 (2.41) の関係は管と流体の物性値の組合せなどには無関係に成立する。実は図 2.4 の短波長域では連成波のあらゆるモードの位相速度が互いに接近するのでそのままでは計算しにくいのであるが、F1, F2, …… の位相速度が既知であることから連成波の  $\alpha$  の存在範囲を式 (2.41) で知ってから数値計算すれば容易に解が得られる。

つぎに管内壁上の流体圧力  $p_l$  と管の半径方向変位  $w$  との位相関係を調べてみる。式 (2.23) を式 (2.15) の第 3 式で割れば

$$\frac{p_l}{w} = -b \rho_L \beta^2 \alpha^2 g(mb) \quad (2.45)$$

この式の右辺は式 (2.42) の  $A''_{33}$  すなわち式 (2.44) の左辺の  $X(\alpha)$  に  $(-a/b)$  を掛けたも

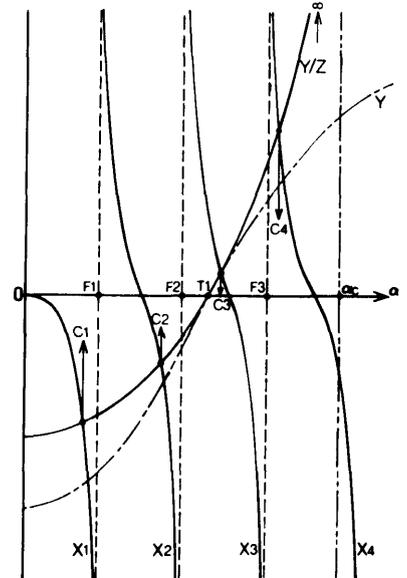


図 2.6 連成波の位速度分布の説明図

のになっている。つまり

$$\frac{p_1}{w} = -\frac{a}{b} X(\alpha) \quad (2.46)$$

それゆえ、 $X(\alpha) < 0$  ならば  $p_1$  と  $w$  は同位相、 $X(\alpha) > 0$  ならば反対位相である。ところが、図(2.6)から明らかなように連成波の各モードの位相速度を代入したときの  $X(\alpha)$  の符号は、 $\alpha$  が T1 モードの位相速度より大きいか小さいかだけで定まる。つまり、連成波の位相速度が同じ波長の管単独の場合の位相速度より小さければ  $p_1$  と  $w$  は同位相、大きければ反対位相である。このことは連成波動を流体圧力によって管を励振する現象とみなせば、一般の線形の強制振動系で共振点をはさんで励振力と変位応答の位相関係が逆転することと同じ現象と考えることができる。いま仮りに、 $p_1$  と  $w$  が同位相の場合を I 型、反対位相の場合を II 型と名づけると、図 2.4 において T1 との位相速度の比較から C1 は全域で I 型、C2 では長波長域から II, I, II, I と変化し、C3 以上では長波長域では II 型、短波長域では I 型になっていることがわかる。

つぎに、エネルギー的に検討してみる。連成波のエネルギーが管と流体にどのよな割合で分布しているかを知ることは波の性質を明らかにするための有力な手段となるからである。1 波長あたりのポテンシャルエネルギーを  $\mathcal{V}$ 、運動エネルギーを  $\mathcal{F}$  とし、添字  $P, L$  で管と流体を区別して  $\mathcal{V}$  と  $\mathcal{F}$  を管と流体に分ければ、これらは次式で計算される。

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{V}_P &= 2\pi a \int_0^\lambda dx \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \tau_{xr} \gamma_{xr}) \left(1 + \frac{\zeta}{a}\right) d\zeta \\ \mathcal{V}_L &= 2\pi \int_0^\lambda dx \int_0^b \frac{p^2}{2K} r dr \\ \mathcal{F}_P &= 2\pi a \int_0^\lambda dx \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\rho_P}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u_\zeta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 \right\} \left(1 + \frac{\zeta}{a}\right) d\zeta \\ \mathcal{F}_L &= 2\pi \int_0^\lambda dx \int_0^b \frac{\rho_P}{2} \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} r dr \end{aligned} \right\} (2.47)$$

(33)

$\mathcal{V}_L, \mathcal{F}_L$  の計算にはベッセル関数の積分に関する Lommel の定理を適用することができる。ところで次式が成立する。

$$\mathcal{V}_P + \mathcal{V}_L = \mathcal{F}_P + \mathcal{F}_L \equiv \mathcal{E} \quad (2.48)$$

式(2.48)の略証はつぎのようである  $x$  軸の正、負の方向に進む性質も振幅も全く同じ二つの波を考えると、これらの  $\mathcal{V}_L, \mathcal{V}_P$  などはもちろんおのおの等しくなる。これら二つの波を重ね合わせると定常波ができるが、この定常波の 1 波長あたりのポテンシャル、運動エネルギーの 1 周期中の

最大値を  $\mathcal{V}^{max}$ ,  $\mathcal{I}^{max}$  とすれば  $\mathcal{V}^{max} = 2(\mathcal{V}_P + \mathcal{V}_L)$ ,  $\mathcal{I}^{max} = 2(\mathcal{I}_P + \mathcal{I}_L)$  であることが確認される。ところが、定常波ではエネルギー保存則によって  $\mathcal{V}^{max} = \mathcal{I}^{max}$  となるので結局、式(2.48)が成立することになる。さて、重要性の大きい C 1, C 2 の二つのモードについて各エネルギーのうちの流体の分担率  $\mathcal{V}_L/\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{I}_L/\mathcal{E}$  の波長による変化を計算した結果を図 2.7 に示す。

この図からも図 2.4 に関連して述べた各波長域でのこれら二つのモードの特徴が再確認される。C 1 モードでは、長波長域で運動エネルギーのほとんどを流体が持ち、管はポテンシャルエネルギーの一部を持っているにすぎないが、中間の波長域では管の役割が顕著に増大していることがわかる。また、C 2 モードでは長波長域で管が、短波長域で流体が主になっていることがエネルギーの面からも明らかである。ところで C 1 モードでは全域で  $\mathcal{I}_L > \mathcal{V}_L$  となっているのに、C 2 モードではこの大小関係が交互に逆転している。そこで実際に  $\mathcal{V}_L$  と  $\mathcal{I}_L$  の差を計算すると。

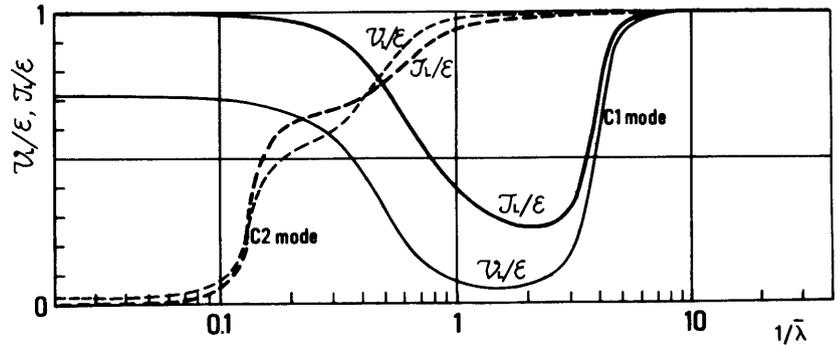


図 2.7 C 1, C 2 モードにおける流体のエネルギー分担率

ここで実際に  $\mathcal{V}_L$  と  $\mathcal{I}_L$  の差を計算すると。

$$\mathcal{V}_L - \mathcal{I}_L = \pi b^2 W^2 \int_0^\lambda \cos^2 \beta x dx \cdot \rho_L \beta^2 \alpha^2 g (mb) \quad (2.49)$$

この式の右辺は式(2.45)の右辺に負の係数を掛けたものになっている。それゆえ、 $p_r$  と  $w$  とが同位相のときには  $\mathcal{V}_L < \mathcal{I}_L$ , 反対位相のときには  $\mathcal{V}_L > \mathcal{I}_L$  となる。したがって、図 2.4 の説明に関連して述べた C 2 モードの長波長域における  $p_r$  と  $w$  の位相関係は図 2.7 から知ることもできる。

なお、式(2.48)の連成波のポテンシャルエネルギーと運動エネルギーが等しいという関係は波の性質のうちの一つにすぎないが、数値計算の結果が実際に十分な精度でこの関係を満足していることは計算が正しく行われたということの有力な傍証となる。本節に示した数値計算の結果はすべてこの方法で検証されている。

以上は  $\eta = 20$  の場合を例に調べた結果であるが、連成波では管の肉厚に関するパラメータ  $\eta$  の影響も大きいので、つぎにそれを C 1 モードについて調べてみる。図 2.8 は  $\eta$  をパラメー

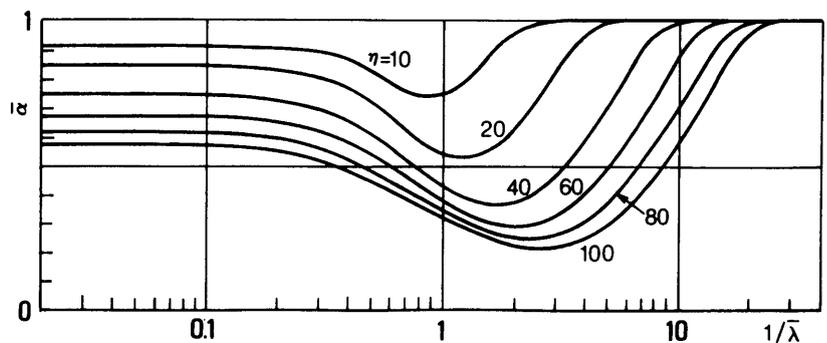


図 2.8 C 1 モードの位相速度の  $\eta$  による変化 (計算データは図 2.4 に同じ)

タとしたときの位相速度の変化である。管が薄いほど弾性管であることの影響が大きくなることは当然であるが、 $\eta$ の値によらず $\bar{\lambda} > 20$ であればほとんど非分散的とみなせる。C1モードの中間波長域での分散性の主因が管の半径方向の運動であることは前述したとおりであるが、図2.3に関連して述べたように波長が管径の数倍以上であれば管はほとんど膜力だけに支配されるので、連成波でも分散性が生じはじめる波長は肉厚との関係は小さく、ほぼ平均半径との関係だけで定まると考えられる。それとは逆に図2.8で位相速度の極小点は $\eta$ が大きいほど短波長側に移動するが、これは極小点が管の曲げやせん断などの影響を受けて生じるものなので波長と肉厚の比に大きく依存するためである。

図2.8に対応する群速度を図2.9に示す。C1モードの $\alpha_g$ は極小値と極大値を持つが、極大値の周辺で $\alpha_g > c$ となっていることが特徴的である。剛管内流体の波動では式(2.28)と式(2.33)から

$$\alpha_g = \frac{c}{\sqrt{1 + (z_i / \beta b)^2}} \tag{2.50}$$

となって、 $\alpha_g$ は $c$ を越えることはない。群速度については第7章で実験に関連して再び検討する。

つぎに平均流れがある場合の分散曲線を図2.10に示す。この図では $\bar{q}_{x0} \equiv q_{x0} / c = \pm 0.1$ としたときのC1, C2モードの位相速度を $q_{x0} = 0$ の場合と比較してあるが、 $|q_{x0}|$ を

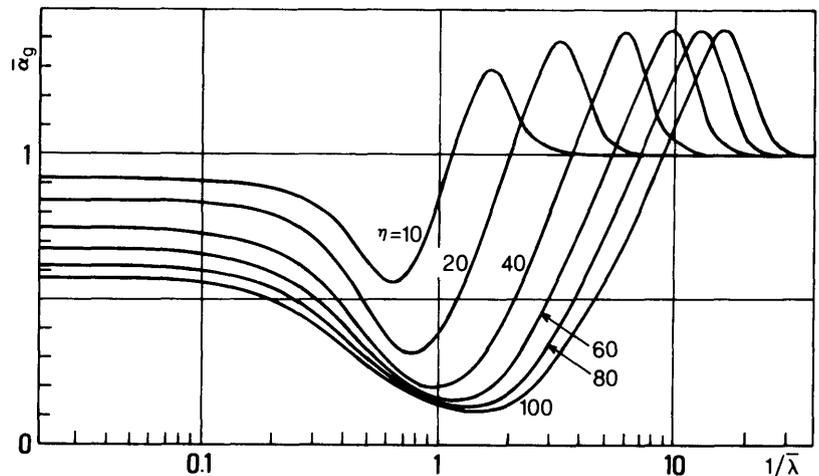


図2.9 C1モードの群速度の $\eta$ による変化  
(計算データは図2.4に同じ)

大きめにとったのはあくまでも平均流れの影響のしかたを明らかにするためであって、実際の管内流れでこれほどの平均流速を持つことはほとんどないであろう。図によれば、平均流れによる位相速度の変化の幅はC1, C2の短波長域では $q_{x0}$ にほぼ等しく、C1の長波長域でも $q_{x0}$ に近い、それに対してC1の中間波長域とC2の長波長域では平均流れによる変化は小さくなっている。図2.7に示した連成波のエネルギー配分などからみて流体が主である領域では位相速度は平均流れの影響をほとんど直接的に受けるのであるが、管が主になっている領域では影響を受けにくいのである。図示を省略したC3以上のモードも全域で流体の役割の方が大きいので位相速度は $q_{x0}$ に近い幅の

変化をすることが確認された。なお、管が剛体のときには位相速度は式(2.33)の右辺  $q_{x0}$  を加えたものになる。

#### 2.4 伝ば速度の近似式の検討

2.2節で述べた解析法はその目的から精密なものになったが、これを実際的な問題に適用するのは能率的ではない。一方、弾性管内の流体の波動に対しては古くから近似的な解析法が研究され、その結果は現在でもよく用いられているが、それらの近似式の精度や適用限界などは明確になっているとは言いがたい。そこで実用的な問題への対応として本節では従来から用いられている近似式の精度などについて検討

しておきたい。本節で調べる近似式はいずれも波を非分散的であると仮定したもので、図2.4との関連で言えばC1モードの、場合によってはC2モードも含めての長波長域だけを対象としたものになっている。これら二つのモードの長波長域、すなわち低振動数域ではほぼ非分散的であることから波の振舞は一次元の波動方程式で記述できることが期待され、そこから伝ば速度を精度よく、かつ簡単に近似することが関心事になるのである。

さて、精度の検討には基準が必要であるが、ここでは管に対しても三次元弾性論を用いて計算したいわば厳密な伝ば速度を用いることにする。2.2節の解析法は精密なものとは言え、円筒かく理論を用いたものである。円筒に限らず、かく理論は本来、かくの曲率半径に対して肉厚が小さい場合を対象にしたものであるが、実用されている管の中には薄肉とは言えないものも少なくない。このような場合に対しては定性的には問題がないにしても、円筒かく理論を用いた解析では定量的にどの程度の正確さで計算し得るのかが明らかになっていない。それゆえ、厳密値を基準にして精度を評価しなければならないのである。厳密な解析法は付録Iに記す。なお、厳密な解析によっても波の性質に関する前節の議論には何らの変更も要しないので、計算結果の直接的な提示は省略する。

(4)

近似式としてまず取上げなければならないのはC1モードに対する Korteweg の式であろう。

$$\alpha = \frac{c}{\sqrt{1 + 2Ka/Eh}} = \frac{c}{\sqrt{1 + 2S\eta}} \quad (2.51)$$

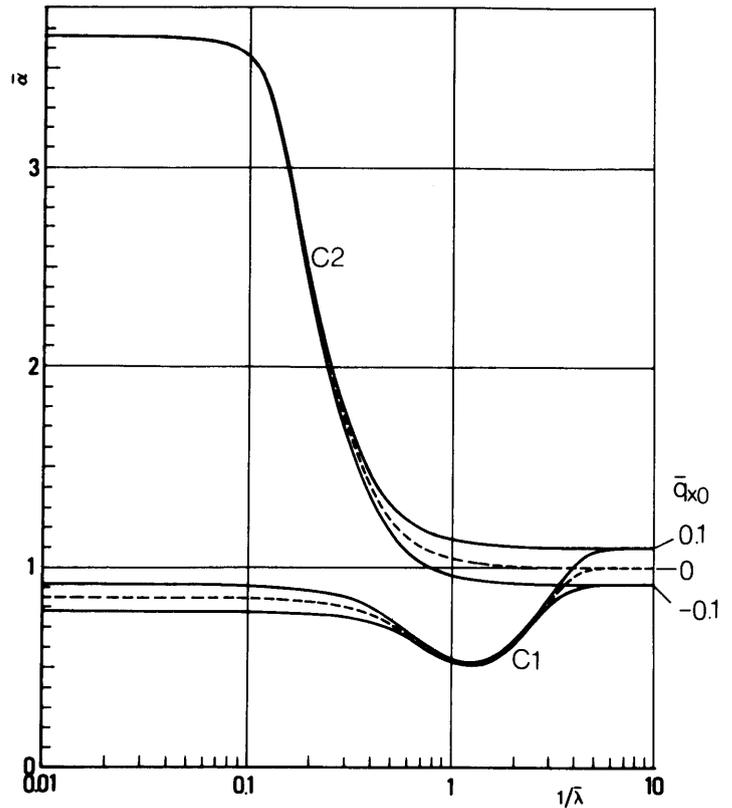


図 2.10 C1, C2モードの位相速度に対する流体の平均流速の影響 (計算データは図2.4に同じ)

この式は管の弾性と流体の圧縮性の双方を考慮したものとしては最も古いものに属する。管の肉厚が大きいときには式(2.51)を若干修正して次式が用いられる。

$$\alpha = \frac{c}{\sqrt{1 + 2K(D_o^2 + D_i^2)/E(D_o^2 - D_i^2)}} = \frac{c}{\sqrt{1 + 2S(\eta + 1/4\eta)}} \quad (2.52)$$

ここに  $D_o = 2a + h$

は管の外径,  $D_i =$

$2a - h$ は内径である。

式(2.51), (2.52)

による値の厳密値に

対する相対誤差を  $\Delta$

として,  $\Delta$ の波長に

対する変化を図2.11

に示す。図の(a)は鋼

管一水, (b)は硬質塩

化ビニル管一水を想

定したもので, いず

れも実線が式(2.

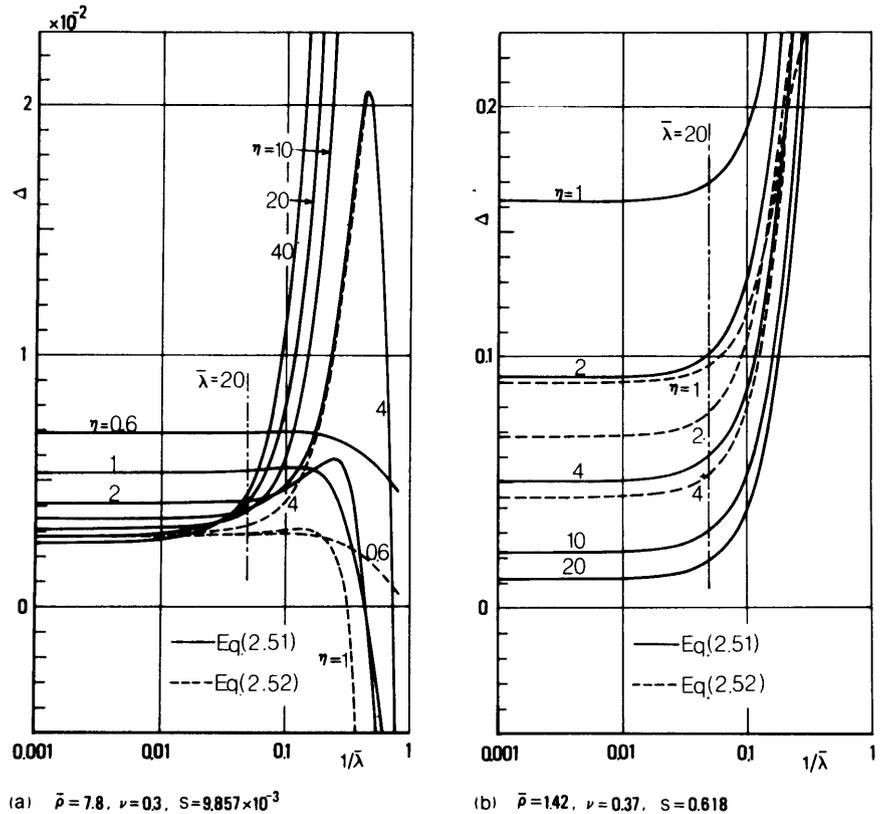


図2.11 近似式(2.51), (2.52)の精度

51) の, 破線が式(2.52)の誤差を示す。まず, 鋼管の場合には  $\eta = 0.6$  ( $D_o/D_i = 1.1$ ) というかなり極端な厚肉管であっても式(2.51), (2.52)の誤差は1%未満であってどちらの近似式も精度上の問題は少ない。逆に言えば式(2.52)の利点はほとんど発揮されない。これは  $S = K/E$  が小さいので  $\eta$  の効果が減殺されてしまうためである。ここでは鋼管と水を考えてたが, 通常の金属と液体の組合せでは  $S$  の値は小さくなるのでここにおけるのと同様の結果になると考えられる。一方, ビニル管を想定した図2.11(b)では式(2.52)の方が精度はよいが, いずれにしても鋼管の場合に比べると誤差は格段に大きくなっている。その原因を深くは追求していないが, 管材と流体の物性値が互いに接近していることがかかわっていることは確実である。それゆえ, 管材がプラスチック類の場合には式(2.51), (2.52)の結果は金属管の場合ほどよい精度を持たないことに注意しなければならない。

さて, 図2.11では  $\bar{\lambda}$  が20以下になるとこれらの近似式がほとんど意味を持たなくなっていることが明らかである。これはC1モードに分散性が現われるため, これによって近似式の高振動数側の限界が定まる。 $\bar{\lambda} > 20$ を式(2.51)を用いて振動数に変換すると

$$f < \frac{c}{20 a \sqrt{1 + 2S\eta}} \quad (2.53)$$

となる。これが振動数で表現された近似式の適用可能域である。ちなみに  $\eta = 20$  ,  $2a = 1 \text{ cm}$  とすると鋼管—水では 12.7 kHz 以下, ビニル管—水では約 3 kHz 以下が近似式の適用可能範囲であり, これらの近似式で処理できる問題は多い。

流体を含む管の縦振動が問題になることもある。たとえば管端で管路は閉じているが管は軸方向に自由に動ける場合に振動する流体圧をかけたとすると閉端にかかる圧力で管の伸縮が生じる。これは C 2 モードが励起されているのである。このような場合を扱うために C 1, C 2 モードの  $1/\bar{\lambda} \rightarrow 0$  における極限の位相速度を近似式として用いることを考える。式 (2.27) の各要素に具体形を入れて展開し, 各項の共通因数である  $\beta^2$  で除した後に  $\beta \rightarrow 0$  とする。その際  $\beta$  が小さければ式 (2.18) によって明らかなように  $mb$  も小さくなるので, 式 (2.24) においてベッセル関数をそれぞれ第 1 項だけとって得られる  $g(mb)$  の近似値

$$g(mb) \approx \frac{2c^2}{\beta^2 (\alpha^2 - c^2) b^2} \quad (2.54)$$

を用いる。この式 (2.27) の  $\beta \rightarrow 0$  の極限は  $\alpha^2$  に関する二次方程式になるが, 具体的に書くと

$$\begin{aligned} M \left( \frac{k_T}{a^2} + \frac{D}{a^4} + \frac{2\rho_L c^2}{a} \right) \alpha^4 - \left[ k_T \left\{ \frac{k_T}{a^2} (1 - \nu^2) + \frac{D}{a^4} + \frac{2\rho_L c^2}{a} \right\} + M \left( \frac{k_T}{a^2} + \frac{D}{a^4} \right) c^2 \right] \alpha^2 \\ + \left\{ \frac{k_T^2}{a^2} (1 - \nu^2) + \frac{k_T D}{a^4} \right\} c^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.55)$$

ここで  $D/a^2 \ll k_T$  , すなわち  $1/12\eta^2 \ll 1$  として  $D/a^2$  を  $k_T$  との比較において無視して  $\alpha$  について解くと

$$\alpha = c \sqrt{\frac{1 + \bar{\rho} S + 2\eta S \mp \sqrt{(1 + \bar{\rho} S + 2\eta S)^2 - 4\bar{\rho} S \{1 + 2\eta S(1 - \nu^2)\}}}{2\bar{\rho} S \{1 + 2\eta S(1 - \nu^2)\}}} \quad (2.56)$$

根号内の複号は負が C 1, 正が C 2 モードに対応している。ここでは式 (2.56) を極限操作によって求めたが, 全く別の手順で同じ結果に到達することもできる。それは管の基礎式に半径方向の慣性力を省略した膜力理論を用い, 流体に関しては  $p$  と  $q_r$  が  $r$  に依存せず,  $q_r$  が  $r$  の一次式になっているとして連成波の解析をするもので, 式 (2.56) は物理的にはこのような意味の近似になっているのである。なお, 式 (2.56) で  $\nu = 0$  とすると C 1 の  $\alpha$  は式 (2.51) に一致し, C 2 の  $\alpha$  は弾性棒を伝わる縦波の速度  $\sqrt{E/\rho_r}$  に一致する。

式 (2.56) による  $\alpha$  の厳密値に対する誤差を鋼管—水, 塩化ビニル管—水の場合について  $\eta$  に対する変化として図 2.12 に示す。厳密値は  $\bar{\lambda} = 100$  におけるものを代表として用いた。C 1 に

については式(2.51)の精度と大差ないが、C2はそれよりよい精度で得られている。それゆえ、式(2.56)はC2モードも含めて検討するときに用いるべきもので、C1だけでよければ式(2.51)を用いる方がよい。式(2.56)の成立範囲も $\bar{\lambda} > 20$ とすればよい。C1に対しては式(2.53)で評価できるが、C2モードに対しては $\alpha$ を $\sqrt{E/\rho_P}$ で近似すれば $\bar{\lambda} > 20$ は

$$f < \frac{1}{20a} \sqrt{\frac{E}{\rho_P}} \quad (2.57)$$

となるから、これを目安にすればよい。

## 2.5 結 言

本章では管内流体を非粘性とし、円筒かく理論と流体の基礎式を連立させて連成波動の性質を解析的に調べ、つぎの結果を得た。

(1) 連成波の各モードは非連成の管単独および管

が剛体のときの管内流体の各波動モードの特徴を各波長域ごとに受け継ぎながら全体としては連成波に固有の分散傾向を示す。

(2) C1モードは長波長域では非分散的で流体が主な役割を果たすが、管の弾性の影響により位相速度は流体中の音速より小さくなる。波長が短くなって管径の数倍から数分の一までの領域になると管の半径方向の運動とそれに伴う流体の運動が激しくなるためにC1モードには著しい分散性が生じる。

(3) C2モードは長波長域ではほぼ管の縦波としての性質を示し、位相速度も管単体の縦波のものに非常に近いものとなり、C1モードと同様に非分散的である。波長が短くなると管の半径方向の運動を受けて位相速度は急激に小さくなり、短波長域では流体を主にした波動モードに変化する。

(4) C3以上の高次モードは位相速度の値がやや異なるが、剛管内流体の高次の波動モードに類似の性質を示す。

(5) 管内流体に一樣流があるときには、エネルギー分布などからみて流体が主な役割を果たす領域では連成波の位相速度は一樣流がない場合の値と一樣流の速度の和にほぼ等しくなるが、管が主で

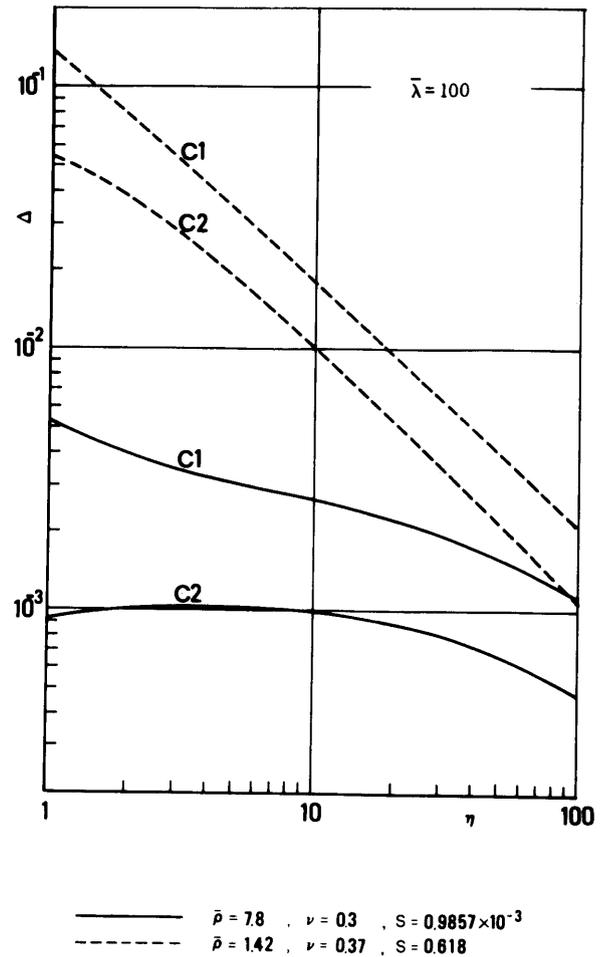


図 2.12 近似式(2.56)の精度

ある領域では位相速度に対する一様流の影響は小さい。

- (6) C 1, C 2 モードの長波長域 ( $\lambda > 20 a$ ) では伝ば速度の近似計算が可能である。このうち、C 1 モードに対しては Korteweg による式 (2. 51) が、C 1, C 2 モードを同時に扱うときには式 (2. 56) がかなりよい精度で成立する。ただし、管がプラスチック類で流体が液体の場合には近似の精度は若干劣ったものになる。

### 第3章 流体に粘性がある場合の基礎的解析<sup>(24)(25)</sup>

#### 3.1 緒 言

第2章では流体を非粘性と仮定して連成波動の解析を行った。この結果は連成波の性質を知るための基礎資料というだけでなく、流体粘性が小さい場合の実際の波の振舞もかなり正確に表わすものと考えられる。しかしながら、流体は程度の差はあれ必ず粘性を伴うものであり、また、実際面では粘性のかなり大きい流体を扱わなければならないことも多い。したがって、連成波動においてもその伝ばに対する流体粘性の影響を調べておく必要がある。そこで本章ではやはり管を無限長として線形の範囲で精密な解析を行い、減衰を中心にした流体粘性の連成波への作用を調べることにする。

#### 3.2 解 析

##### 3.2.1 基礎式

まず管の方程式について述べる。流体粘性がある場合には流体力として壁に垂直な圧力のほかに壁に平行なせん断力も考えなければならない。それゆえ、管の微小要素のつりあい関係は図3.

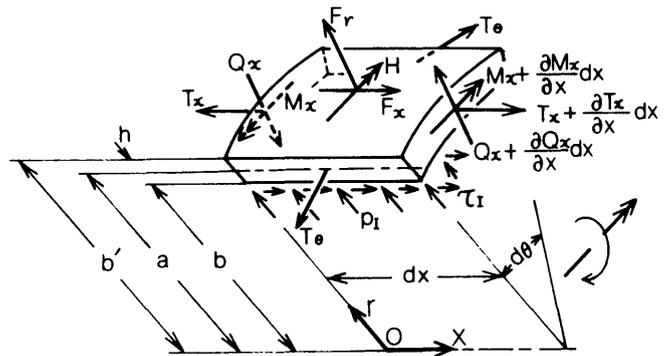


図3.1 管のつりあい関係

1 のようになるが、これを式で表わせば

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x + H - \frac{bh}{2a} \tau_l &= 0 \\ \frac{\partial T_x}{\partial x} + F_x + \frac{b}{a} \tau_l &= 0 \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{T_\theta}{a} + F_r + \frac{b}{a} p_l &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

2.2節で行ったのと同じ方法で式(3.1)を管の変位で表わすと

$$\left. \begin{aligned} \left( -D \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_s + I \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi + \left( \frac{D}{a} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{I}{a} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u - k_s \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{bh}{2a} \tau_l &= 0 \\ \left( \frac{D}{a} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{I}{a} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi - \left( k_r \frac{\partial^2}{\partial x^2} - M \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u - \frac{\nu k_r}{a} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{b}{a} \tau_l &= 0 \\ -k_s \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\nu k_r}{a} \frac{\partial u}{\partial x} - \left( \frac{k_r}{a^2} + \frac{D}{a^4} - k_s \frac{\partial^2}{\partial x^2} + M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) w + \frac{b}{a} p_l &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

つぎに流体については線形化したナビエ・ストークスの方程式と連続の式を用いる。

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_L} \text{grad } p + \frac{4}{3} N \text{grad div } \mathbf{q} - N \text{rot rot } \mathbf{q} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -K \text{div } \mathbf{q} \quad (3.4)$$

ここで流体粒子速度  $\mathbf{q}$  を非回転，回転の2成分に分解する。

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2, \quad \text{rot } \mathbf{q}_1 = 0, \quad \text{div } \mathbf{q}_2 = 0 \quad (3.5)$$

式(3.5)の分解によって，式(3.3)，(3.4)の二つの式が満たされるためにはつぎの二組の方程式が十分条件となる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{q}_1}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_L} \text{grad } p + \frac{4}{3} N \text{grad div } \mathbf{q}_1 \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= -K \text{div } \mathbf{q}_1 \end{aligned} \right\} (3.6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}_2}{\partial t} = -N \text{rot rot } \mathbf{q}_2, \quad \text{div } \mathbf{q}_2 = 0 \quad (3.7)$$

式(3.6)から  $\mathbf{q}_1$  を消去すれば

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \left( c^2 + \frac{4}{3} N \frac{\partial}{\partial t} \right) \text{div grad } p \quad (3.8)$$

つぎに管内壁に作用する流体力  $p_r$ ， $\tau_r$  を  $\mathbf{q}$  と  $p$  で表わせば

$$\left. \begin{aligned} p_r &= \left[ p + \frac{2}{3} \mu \text{div } \mathbf{q} - 2\mu \frac{\partial q_r}{\partial r} \right]_{r=b} \\ \tau_r &= \left[ -\mu \left( \frac{\partial q_r}{\partial x} + \frac{\partial q_x}{\partial r} \right) \right]_{r=b} \end{aligned} \right\} (3.9)$$

また，管内壁では管と流体の相対速度は各方向とも零であるから

$$\left. \begin{aligned} [q_x]_{r=b} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( u + \frac{h}{2} \psi \right) \\ [q_r]_{r=b} &= \frac{\partial w}{\partial t} \end{aligned} \right\} (3.10)$$

が満たされなければならない。以上が基礎式である。

さて，粒子速度  $\mathbf{q}$  を式(3.5)によって  $\mathbf{q}_1$  と  $\mathbf{q}_2$  に分けたが，これは求解の便宜のためである

と同時に物理的に意味のある分割にもなっている。非回転，回転成分は言い換えれば圧縮性，非圧縮性の成分でもある。したがって  $q_1$  は圧縮性の流体波動には不可欠である。しかし， $q_2$  が関与しない波動は存在する。たとえば自由空間における平面波では  $\text{rot } \mathbf{q} = 0$  であるから  $\mathbf{q}$  に  $q_2$  は含まれない。ところが，波が固体壁に接する空間で生じると  $q_1$  だけでは壁と流体の速度の連続条件を満たすことができず， $q_2$  が必要になる。つまり  $q_2$  は境界層を表わす成分とすることができる。管内という制限された空間で生じる波の場合には  $q_2$  は非常に大きな役割を演じる。

3.2.2 無限長管における波動解 はじめに減衰性の波を表わす解には二つの型があることに注意しておきたい。それらを流体圧力について表現すると

$$p(x, r, t) = P(r) \exp[j\beta(x - \alpha^*t)] \quad (3.11)$$

$$p(x, r, t) = P(r) \exp[j(\beta^*x + \omega t)] \quad (3.12)$$

ここに  $\alpha^*$ ， $\beta^*$  は複素量である。式(3.11)と(3.12)の違いの要点は指数関数で表わされている因数の中で  $t$  と  $x$  の係数のうちのいずれが複素数になっているかということである。式(3.11)では  $t$  を固定すれば  $p$  は  $x$  に関して完全に周期的になるが， $t$  の増大とともに  $p$  は減衰する。本論文ではこれを自由減衰解と呼ぶ。一方，式(3.12)では  $t$  に関しては周期的であるが， $p$  は  $x$  とともに振幅を変化させる。時間的減衰がないということは粘性による散逸を補うだけのエネルギーが外部から補給されていることにほかならず，式(3.12)は強制力のもとでの波動を表わすものである。ただし，強制力と言っても方程式が同次であるから分布的なものではなく， $x$  軸上のいずれかの点にある境界で集中的に加えられるものである。ここでは無限長管を考えているが，これは境界条件についての具体的な検討を含まないという意味である。式(3.12)の型の解を強制波動解と呼ぶことにする。二つの型の解の実的な意味は自由減衰解が管路の過渡現象に結びつき，強制波動解は振動数応答に関連する。これら二つの解の間には以上のような相違があるが，解析手順の面では大差がないので，以下においては自由減衰解を中心に述べていく。

さて，式(3.11)を式(3.8)に代入し， $P(r)$ について解いたものを改めて式(3.11)に代入すれば

$$p = AJ_0(mr) \exp[j\beta(x - \alpha^*t)] \quad (3.13)$$

$$m = \beta \sqrt{\frac{\alpha^{*2}}{c^2 - (4/3)jN\beta\alpha^*} - 1} \quad (3.14)$$

ここで  $p$  が  $r = 0$  で正則であることを考慮してある。式(3.13)を(3.6)の第1式に代入して  $q_1$  について解けば

$$\left. \begin{aligned} q_{1z} &= A' J_0(mr) \exp[j\beta(x - \alpha^*t)] \\ q_{1r} &= A' \frac{jm}{\beta} J_1(mr) \exp[j\beta(x - \alpha^*t)] \end{aligned} \right\} (3.15)$$

ただし

$$A' = A \frac{c^2 - (4/3)jN\beta\alpha^*}{K\alpha^*} \quad (3.16)$$

つぎに

$$q_2 = Q_2(r) \exp[j\beta(x - \alpha^*t)] \quad (3.17)$$

とにおいて  $Q_{2z}$ ,  $Q_{2r}$  を  $Q_2$  の成分として式 (3.7) の第 1 式を書き直すと

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + n^2 \right) Q_{2z}(r) &= 0 \\ Q_{2r}(r) &= \frac{N}{\alpha^* + jN\beta} \frac{d}{dr} Q_{2z}(r) \end{aligned} \right\} (3.18)$$

$$n = \beta \sqrt{\frac{j\alpha^*}{\beta N} - 1} \quad (3.19)$$

これを解いて式 (3.17) に代入し,  $q_2$  を成分ごとに表わせば

$$\left. \begin{aligned} q_{2z} &= B J_0(nr) \exp[j\beta(x - \alpha^*t)] \\ q_{2r} &= -B \frac{j\beta}{n} J_1(nr) \exp[j\beta(x - \alpha^*t)] \end{aligned} \right\} (3.20)$$

つぎに管の変位をつぎのようにおく。

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \Psi \exp[j\beta(x - \alpha^*t)] \\ u &= U \exp[j\beta(x - \alpha^*t)] \\ w &= W \exp[j\beta(x - \alpha^*t)] \end{aligned} \right\} (3.21)$$

$q = q_1 + q_2$  であることを考慮して, 式 (3.15) と (3.20) の和および式 (3.21) を式 (3.10) に代入して  $A'$  と  $B$  について解けば

$$\left. \begin{aligned} A' &= -\frac{\beta^2 \alpha^* h}{2nY} J_1(nb) \Psi - \frac{\beta^2 \alpha^*}{nY} J_1(nb) U + \frac{j\beta\alpha^*}{Y} J_0(nb) W \\ B &= -\frac{m\alpha^* h}{2Y} J_1(mb) \Psi - \frac{m\alpha^*}{Y} J_1(mb) U - \frac{j\beta\alpha^*}{Y} J_0(mb) W \end{aligned} \right\} (3.22)$$

ただし

$$Y = -\frac{j\beta}{n} J_0(mb) J_1(nb) - \frac{jm}{\beta} J_1(mb) J_0(nb) \quad (3.23)$$

さて、管内壁に作用する流体力  $p_1$  ,  $\tau_1$  を

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= R_1 \exp[j\beta(x-\alpha^*t)] \\ \tau_1 &= R_2 \exp[j\beta(x-\alpha^*t)] \end{aligned} \right\} (3.24)$$

とおく、ここで式(3.9)に  $p$  ,  $q$  の具体形を代入し、式(3.22)、および(3.16)の關係を用いて  $A$  ,  $A'$  ,  $B$  を消去すれば式(3.24)の  $R_1$  ,  $R_2$  が管の変位振幅を用いて表わされる。

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \frac{h}{2} \beta^2 \alpha^* [2\mu - j\rho_L \beta \alpha^* \Phi(nb) G] \Psi + \beta^2 \alpha^* [2\mu - j\rho_L \beta \alpha^* \Phi(nb) G] U \\ &\quad - \left[ \rho_L n \beta^2 \alpha^{*2} G + \frac{2j\mu\beta\alpha^*}{b} \right] W \\ R_2 &= \frac{h}{2} \rho_L m \beta^2 \alpha^{*2} \Phi(mb) \Phi(nb) G \cdot \Psi + \rho_L m \beta^2 \alpha^{*2} \Phi(mb) \Phi(nb) G \cdot U \\ &\quad - \beta^2 \alpha^* [2\mu - j\rho_L \beta \alpha^* \Phi(nb) G] W \end{aligned} \right\} (3.25)$$

ただし

$$\Phi(z) \equiv \frac{J_1(z)}{J_0(z)} \quad (3.26)$$

$$G = \frac{1}{m n \Phi(mb) + \beta^2 \Phi(nb)} \quad (3.27)$$

である。

式(3.25)を式(3.24)に代入した結果を式(3.21)とともに式(3.2)に代入すれば、 $\Psi$  ,  $U$  ,  $W$  に関する同次の連立一次方程式が式(2.27)と同様の形で得られる。ただし、係数行列の各要素は具体的にはつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= D\beta^2 + k_s - I\beta^2 \alpha^{*2} - \frac{bh^2}{4a} \rho_L m \beta^2 \alpha^{*2} \Phi(mb) \Phi(nb) G \\ A_{12} &= -\frac{D}{a} \beta^2 + \frac{I}{a} \beta^2 \alpha^{*2} - \frac{bh}{2a} \rho_L m \beta^2 \alpha^{*2} \Phi(mb) \Phi(nb) G \\ A_{13} &= -jk_s \beta + \frac{bh}{2a} \beta^2 \alpha^* [2\mu - j\rho_L \beta \alpha^* \Phi(nb) G] \\ A_{22} &= k_T \beta^2 - M\beta^2 \alpha^{*2} - \frac{b}{a} \rho_L m \beta^2 \alpha^{*2} \Phi(mb) \Phi(nb) G \\ A_{23} &= -\frac{\nu k_T}{a} j\beta + \frac{b}{a} \beta^2 \alpha^* [2\mu - j\rho_L \beta \alpha^* \Phi(nb) G] \\ A_{33} &= -\frac{k_T}{a^2} - \frac{D}{a^4} - k_s \beta^2 + M\beta^2 \alpha^{*2} - \frac{b}{a} \left[ \rho_L n \beta^2 \alpha^{*2} G + \frac{2j\mu\beta\alpha^*}{b} \right] \end{aligned} \right\} (3.28)$$

このように求めた連立方程式の係数行列の行列式を零に等置したものが  $\beta - \alpha^*$  関係を定める方程式であるが、これを形式的に

$$\Gamma(\alpha^*, \beta) = 0 \quad (3.29)$$

と表わしておく。

さて、 $\alpha^*$ には位相速度と減衰の二つの情報が含まれている。減衰の表現のしかたにはいくつかあるが、ここでは対数減衰率を用いることにすれば

$$\alpha = \text{Re}(\alpha^*), \quad \delta = -2\pi \frac{\text{Im}(\alpha^*)}{\text{Re}(\alpha^*)} \quad (3.30)$$

である。

強制波動解を計算するにはこれまでの解析で現われた  $\exp[j\beta(x - \alpha^*t)]$  という因数を  $\exp[j(\beta^*x + \omega t)]$  で置き換えればよい。これは式(3.29)において  $\beta \rightarrow \beta^*, -\beta\alpha^* \rightarrow \omega$  の置き換えをすることにほかならず、実数の  $\omega$  を与えて対応する複素波数  $\beta^*$  を求めることになる。 $\beta^*$  が定まれば強制波動解の位相速度  $\alpha'$  と対数減衰率  $\delta'$  は次式で計算される。

$$\alpha' = \frac{\omega}{\text{Re}(\beta^*)}, \quad \delta' = 2\pi \frac{\text{Im}(\beta^*)}{\text{Re}(\beta^*)} \quad (3.31)$$

$\delta'$  は式(3.30)による自由減衰解の  $\delta$  とは意味が異なる。 $\delta$  はもちろん時間的な減衰を表わすものであるが、 $\delta'$  は空間的な減衰を表わす。

剛管の場合には  $r = b$  で  $q_z = q_r = 0$  であるから、式(3.15)と(3.20)の和にこの条件を適用すると、式(3.23)で定義される  $Y$  を用いて

$$Y = 0 \quad (3.32)$$

が  $\beta - \alpha^*$  関係を定める方程式となる。

3.2.3 数値計算 方程式(3.29)は複素超越方程式である。これから  $\beta - \alpha^*$  関係を定めるのにここでは最急降下法を用いた。これは  $\beta$  にある実数値を与えたときに、式(3.29)から作ったスカラー関数

$$A(\alpha^*) = \{\text{Re}(\Gamma)\}^2 + \{\text{Im}(\Gamma)\}^2 \quad (3.33)$$

が極小になる  $\alpha^*$  の値を求める方法である。そのためには  $\alpha^* = \alpha_R + j\alpha_I$  として  $\alpha_R - \alpha_I$  平面上のある点から  $A$  が最も急速に値を減じる方向に距離  $\theta$  だけ移動したときに  $A$  が最小になるようにする操作を繰り返せばよい。 $A$  の最急降下の方向は  $-\text{grad} A$  の方向であり、 $\theta$  は

$$\frac{\partial}{\partial \theta} A(\alpha^* - \theta \text{grad} A) = 0 \quad (3.34)$$

において  $A$  をテーラー展開の二次の項までで近似したものから求められる。

$$\Theta = \left( \frac{\partial A}{\partial \alpha_R} \frac{\partial}{\partial \alpha_R} + \frac{\partial A}{\partial \alpha_I} \frac{\partial}{\partial \alpha_I} \right) A / \left( \frac{\partial A}{\partial \alpha_R} \frac{\partial}{\partial \alpha_R} + \frac{\partial A}{\partial \alpha_I} \frac{\partial}{\partial \alpha_I} \right)^2 A \quad (3.35)$$

この式に含まれる各微係数は  $\partial \Gamma / \partial \alpha^*$ ,  $\partial^2 \Gamma / \partial \alpha^{*2}$  からコーシー・リーマンの関係などを用いて計算できる。 $\alpha^*$ の出発値として第2章で計算した流体が非粘性のときの  $\alpha$  の値を用いたが、 $10^{-10}$  程度の精度で収束するのに要する計算回数はほぼ4~6回である。強制波動解の  $\beta^*$  も同様に計算した。

計算結果の検証はつぎの方法によった。1波長、単位時間あたりの連成波の散逸エネルギーは  $\mathcal{F}$  を散逸関数として

$$\mathcal{Q} = 2\pi \int_0^\lambda dx \int_0^b \mathcal{F} r dr \quad (3.36)$$

ただし

$$\mathcal{F} = 2\mu \left[ \left( \frac{\partial q_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{q_r}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} \right)^2 \right] + \mu \left( \frac{\partial q_r}{\partial x} + \frac{\partial q_x}{\partial r} \right)^2 - \frac{2\mu}{3} \left( \frac{\partial q_r}{\partial r} + \frac{q_r}{r} + \frac{\partial q_x}{\partial x} \right)^2 \quad (3.37)$$

一方、各瞬間の連成波の1波長あたりの全エネルギーはすでに示した式(2.47)を用いれば

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}_P + \mathcal{V}_L + \mathcal{T}_P + \mathcal{T}_L \quad (3.38)$$

である。式(2.47)の各式の被積分量にはもちろん本章で計算したものをを用いる。容易にわかるように  $\mathcal{Q}$  と  $\mathcal{E}$  の関係は

$$\mathcal{Q} = - \frac{d\mathcal{E}}{dt} \quad (3.39)$$

である。式(3.29)によって  $\alpha^*$  を計算した後に  $\mathcal{Q}$  と  $-d\mathcal{E}/dt$  を改めて計算して両者の一致の程度を調べた。式(3.39)は正しい解が満たすべき必要条件の一つにすぎないが、 $\alpha^*$  の計算過程で用いた最急降下法とは全く独立なものなので検算の方法としては有力なものと考えられる。 $\alpha^*$  が正しく求まっていれば等式(3.39)は  $10^{-10}$  以下の精度で満足されたが、少数ながら最急降下法では正しくない値に収束してしまうこともあったのでこの検証法は有効であった。なお、 $\mathcal{Q}$  や  $\mathcal{E}$  の計算に際して  $p$ ,  $q$  などが本章では複素数となっているので共役関係を用いて各物理量を実数化したのと同じ結果を得るように配慮する必要がある。

また、式(3.26)で定義される  $\Theta(z)$  について、 $\text{Im}(z) \neq 0$  で  $|z| \gg 1$  ならば  $|\Theta| \approx 1$  であるが  $\Theta$  の計算に必要なベッセル関数の値はきわめて大きくなることがある。それゆえ  $|z|$  が大きいときに  $\Theta$  を定義式どおりに計算しようとするると計算不能に陥りやすい。ところがベッセル関

数を漸近展開<sup>(33)</sup>すると大きな値をもたらす因数が  $\theta$  の分子と分母に共通に現われるので、あらかじめこれを除いた式を用いて計算した。本章の計算ではこの単純な注意は不可欠であった。本章では現われないが、ベッセル関数と同じく円筒関数に属するハンケル関数や変形ベッセル関数の比を計算する際にも同様の注意が必要である。

### 3.3 計算結果と考察

3.3.1 剛管内粘性流体の波動 管が剛体の場合についてはこれまでも多くの研究が行われているが、そのほとんどが管路の動特性を直接の対象にしており、波の基本的な性質という面にはあまり関心が払われていないように思われる。連成波の性質について調べるためには剛管の場合について知っておくことが好都合なのでここで整理しておく。

流体粘性の波動への作用としては位相速度の低下と減衰をもたらすことが代表的なものである。そこで、自由減衰解の位相速度を  $\alpha$ 、流体が非粘性のときの対応する位相速度を  $\alpha_0$  として、粘性による位相速度の低下率  $(\alpha_0 - \alpha) / \alpha_0$  を図 3.2 に示す。これに対応する対数減衰率  $\delta$  を図 3.3 に示す。計算は F 1, F 2 の二つの管内波動モードと比較のために自由空間における平面波についても行った。平面波では式 (3.11) において  $p(r)$  を定数として式 (3.8) に代入した結果から

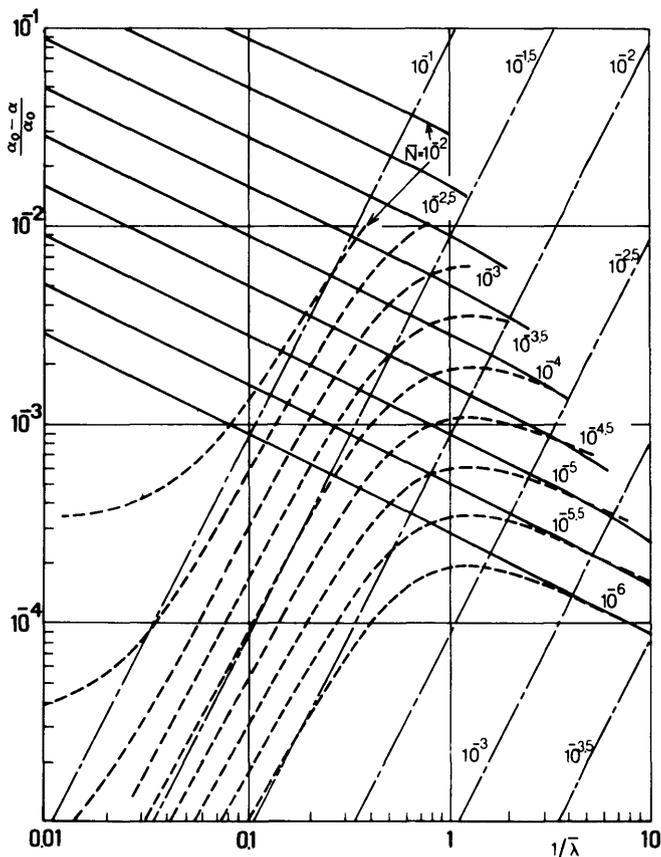


図 3.2 F 1, F 2 モードおよび平面波の位相速度に対する粘性の影響

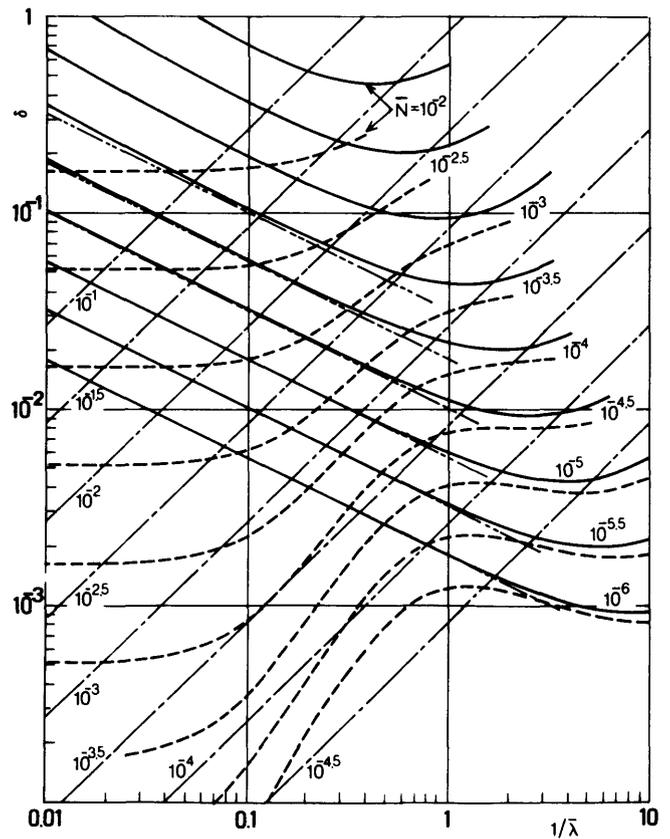


図 3.3 F 1, F 2 モードおよび平面波の  $\delta$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha_0 - \alpha}{\alpha_0} &= 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} \overline{N} \overline{\beta}\right)^2} \approx \frac{8\pi^2}{9} \cdot \frac{\overline{N}^2}{\lambda^2} \\ \delta &= \frac{\frac{4}{3} \pi \overline{N} \overline{\beta}}{\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} \overline{N} \overline{\beta}\right)^2}} \approx \frac{8\pi^2}{3} \frac{\overline{N}}{\lambda} \end{aligned} \right\} (3.40)$$

となる。ただし、式(3.40)の最右辺の近似値は $\overline{N} \overline{\beta} \ll 1$ のときのものである。なお、剛管では平均半径  $a$  は意味を持たないので、ここでは $\overline{\lambda} = \lambda / b$ とした。これらの図でパラメータとして用いられている $\overline{N} = N / b c$ の値は $2b = 1 \text{ cm}$ とすると常温の水では $\overline{N} \approx 1.3 \times 10^{-7}$ 、グリセリンでは $N = 1.2 \times 10^{-4}$ の程度であり、多くの油類ではこれらの中間の値をとる。

さて、図3.2, 3.3によると粘性の影響は各波動モードごとに全く異なっている。とくにF1と平面波の違いは著しい。減衰についてみると平面波では式(3.40)からも明らかのように $\delta$ は $\overline{N} / \overline{\lambda}$ にほぼ比例するが、短波長域を除いてF1では $\delta$ は $\sqrt{\overline{N} \overline{\lambda}}$ にほぼ比例する。

F2の $\delta$ はF1と平面波の中間の傾向を示す。波長が短くなると $\overline{N}$ が同じであれば各モードの $\delta$ の値は接近するが、平面波の減衰が管内波のものを上まわることはない。各モードのこのような違いは結局は粒子速度分布の違いからもたらされるもので、当然のことながらせん断応力が大きくなる速度分布であるほど粘性の影響は大きく現われる。

図3.4は自由減衰解のF1モードの軸方向粒子速度の計算例である。図は $\overline{N} = 10^{-3}$ の場合で、1周期を12等分したはじめの半周期分を示してあるが、図中の $\overline{q}_z = q_z / c$ の尺度は周期の最初に $\overline{p} = p / K = 1$ となるように定めた。各曲線に付した数字は時刻の経過を示す番号である。図3.4によれば管内壁の近くに境界層と呼ぶにふさわしい速度こう配の大きい領域の存在が認められ、この計算例では $\overline{\lambda} = 1$ までは波長が短くなるほど境界層の厚さがほぼ単調に減少していくのがわかる。しかし、 $\overline{\lambda} = 10^{-0.5}$ では $\overline{q}_z$ の分布は断面上での各点の位相の変化が著しいものになり、複雑になる。図3.2においてF1の $\delta$ に極小値が現われ、短波長域で再び増加する傾向があるのは $\overline{q}_z$ の分布のこのような変化に対応しているものと考えられる。

ここで、F1モードの境界層が薄い場合を対象にした $\delta$ の近似式をエネルギー的に導いてみる。剛平板に接した半無限領域を占める粘性流体が角振動数 $\omega$ で平板に平行な方向に振動するとき、厚さがほぼ $\sqrt{2N/\omega}$ と評価される境界層が現われるが、その外側では速度分布はほとんど一樣になる。このとき、平板の単位面積あたり、かつ1周期あたり $\pi \rho_L \sqrt{N/2\omega} \cdot Q^2$  だけのエネルギーが境界層内の摩擦のために失われる。(39)ただし、 $Q$ は平板から十分に離れた位置での粒子速度の振幅である。管内の波動であっても境界層が管断面寸法に比べて十分に薄ければ、単位面積あたりの失われるエネルギーは平板の場合とほぼ同じになると考えられるから、1波長、1周期あたりの散逸エネルギーを

$\mathcal{E}_0$  とすれば

$$\mathcal{E}_0 \approx 2\pi b \cdot \pi \rho_L \sqrt{\frac{N}{2\omega}} \int_0^\lambda \{Q(x)\}^2 dx \quad (3.41)$$

で近似できよう。一方、流体の持つ1波長あたりの全エネルギー $\mathcal{E}$ は波を定常波と考えると運動エネルギーの周期中の最大値に等しいとすればよい。境界層が薄ければ、粒子速度は全断面でほぼ一様とみなせるから

$$\mathcal{E} \approx \frac{1}{2} \pi b^2 \rho_L \int_0^\lambda \{Q(x)\}^2 dx \quad (3.42)$$

対数減衰率の近似値

を $\delta_A$  とすれば、式

$$(3.41), (3.42)$$

から

$$\delta_A = \frac{\mathcal{E}_D}{2\mathcal{E}} =$$

$$\frac{\pi}{b} \sqrt{\frac{2N}{\omega}} =$$

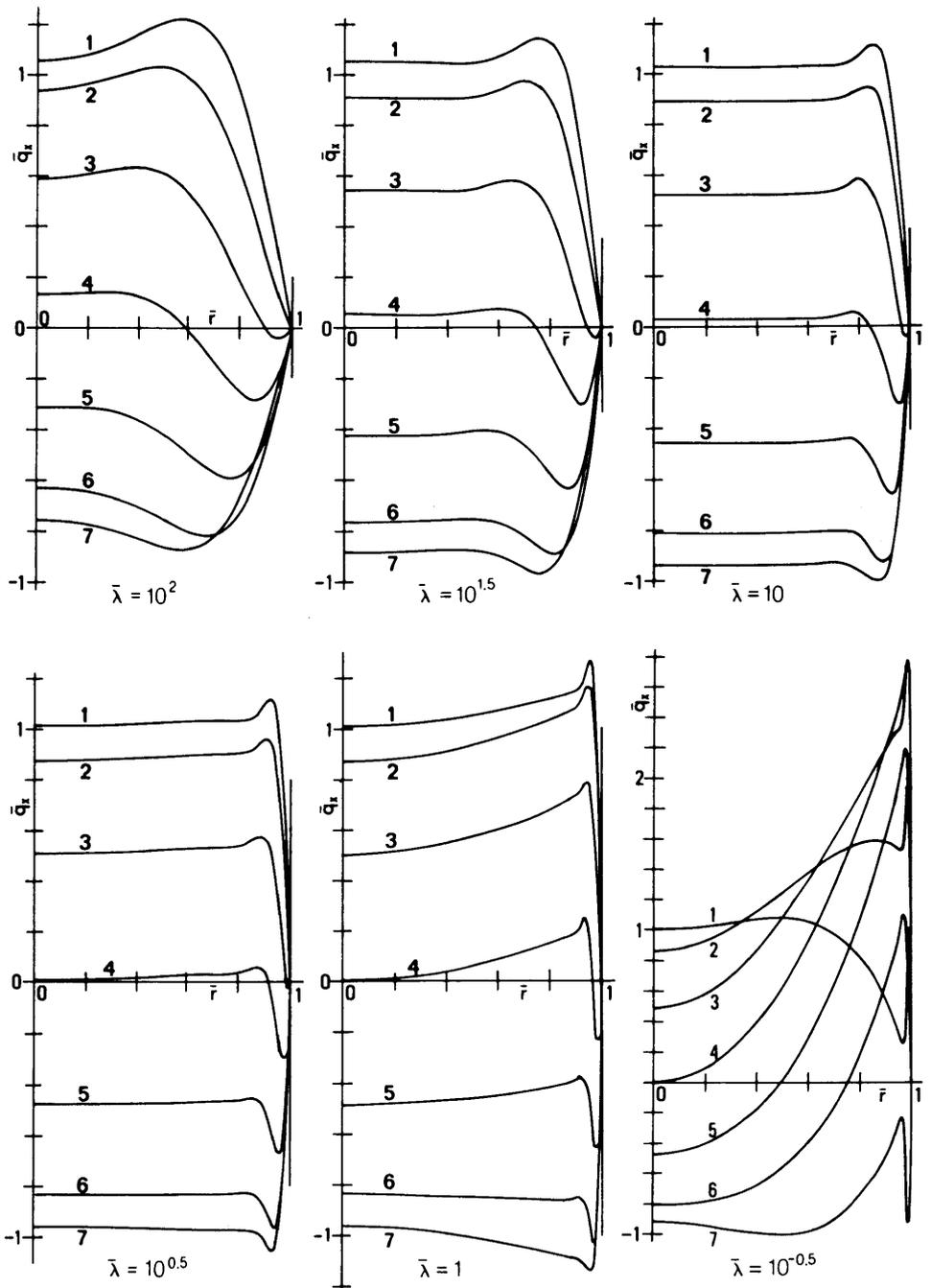
$$\pi \sqrt{\frac{2N}{\bar{\omega}}}$$

$$(3.43)$$

F1モードでは $\alpha_0 = c$ であり、 $(\alpha_0 - \alpha) / \alpha_0 \ll 1$ であるから $\alpha \approx c$ とみなせる。すると $\omega \approx 2\pi c / \lambda$ となるので式(3.43)はさらにつぎのように変形される。

$$\delta_A \approx \sqrt{\frac{\pi N \lambda}{b^2 c}} = \sqrt{\pi N \bar{\lambda}}$$

$$(3.44)$$

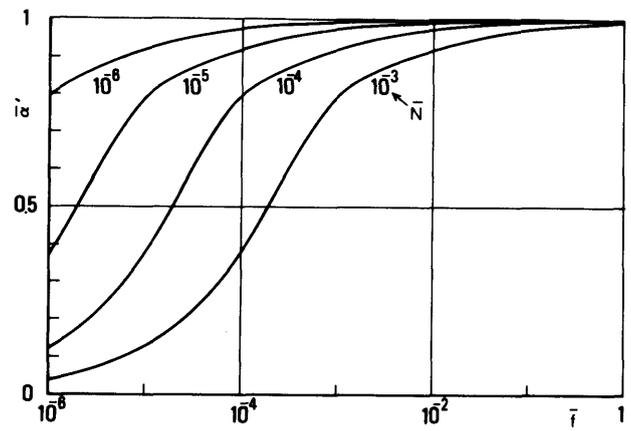


$$\bar{N} = 10^{-3}$$

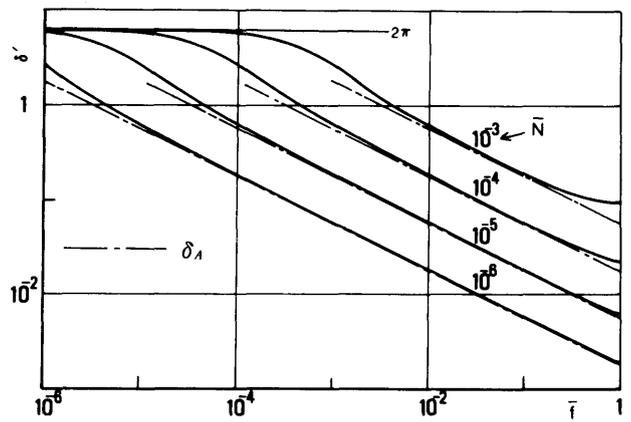
図3.4 F1モードの $q_x$ の分布

式(3.44)による $\delta_A$ を図3.3にあわせて示した。それによると $\delta_A$ は $\bar{N}$ が小さく、図示の範囲では $\bar{\lambda}$ が大きい領域で精密値とよく一致する。これはF1モードのエネルギー散逸がほとんど管壁近くの薄い境界層内だけで起きていることを示しているが、管内の波動では境界層の存在のために自由空間における波動とはかなり異なる性質を持つことになるのである。したがって管内粘性流体の波動を近似的に解析する際にも境界層の影響を適切に考慮しないと、とくに減衰の評価の面で正確さを欠く恐れがある。なお、ここでは $\bar{\lambda} \leq 100$ の範囲について計算したが、波長がさらに大きい場合、すなわち振動数が小さい場合には自由減衰する場合より、強制力の作用のもとでの波動の方が重要性が大きいので、つぎに述べる強制波動解に関連して説明する。

図3.5は強制波動解のうち、応用上とくに重要なF1モードの $\bar{\alpha}'$ 、 $\delta'$ と $\bar{f} = \omega b / 2\pi c$ の関係を比較的低い振動数域のやや広い範囲で計算した結果である。図3.5(b)で $\log \delta'$ と $\log \bar{f}$ が直線的な関係をほぼ満たしている領域が見られるが、そこでは $\delta'$ の近似値として式(3.43)の $\delta_A$ がよく一致している。これからも明らかなように $\bar{N}$ が大きくなければ自由減衰解と強制波動解とは位相速度や減衰率は互いに接近した値をとると考えてよい。 $\delta'$ と $\delta_A$ がよく一致する領域は境界層が管内径に比べて十分に薄い領域である。しかし、振動数が非常に小さくなると $\bar{\alpha}'$ はかなり急激な減少傾向を示して零に漸近し、 $\delta'$ もほぼ $2\pi$ なる一定値に漸近するようになる。これは低振動数域では境界層が厚くなって管路全体を覆うようになるため、このような領域では近似式(3.43)はもちろん使えない。このことを明確にするために軸方向の粒子速度の計算例を図3.4と同じ表示法



(a) Phase velocity



(b) Logarithmic decrement

図3.5 強制波動F1モードの位相速度と減衰率

で図3.6に示す。 $\bar{f} = 10^{-4}$ という低い振動数では $\bar{q}_z$ はほぼ回転放物面状となり、各時刻ごとの $\bar{q}_z$ 分布は $r$ に沿っての位相差がほとんどないものになっている。しかし、振動数が大きくなるにしたがってコアの部分と境界層の部分の区別がしだいに明瞭になり、境界層が薄くなっていく。 $\bar{f} > 10^{-2}$ では時間的な減衰を伴わない点を除けば図3.4の自由減衰解の $\bar{q}_z$ 分布に酷似したものになっている。また、超低振動数域では波というよりは交番圧力によって引き起こされた流れと見る方がよいであろう。このことは速度分布がポアズイユ流れに近くなることから明らかである。

(注) モードの名称は誤解の恐れがない限り, 自由減衰解と強制波動解に対して同じものを用いる。

### 3.3.2 連成運動

ここでは前章の流体が非粘性の場合の計算結果との比較を容易にするために流体に適当な粘性を付与した以外は計算データは前章と同じものを用いた。連成波動でも流体粘性の主な効果は位相速度の低下と減衰をもたらすことである。そこで, はじめに自由減衰解の C 1, C 2 モードについて求めた位相速度の低下率  $(\alpha_0 - \alpha) / \alpha_0$  と対数減衰率  $\delta$  を  $\eta$  をパラメータとして図 3.7, 3.8 に示す。ここに  $\alpha_0$  はもちろん流体に粘性がないときの各場合の位相速度である。まず, C 1 モードでは  $(\alpha_0 - \alpha) / \alpha_0$  と  $\delta$  はともに  $\eta$  に対する依存性は小さく, とくに  $\bar{\lambda} > 10$  では剛管の場合

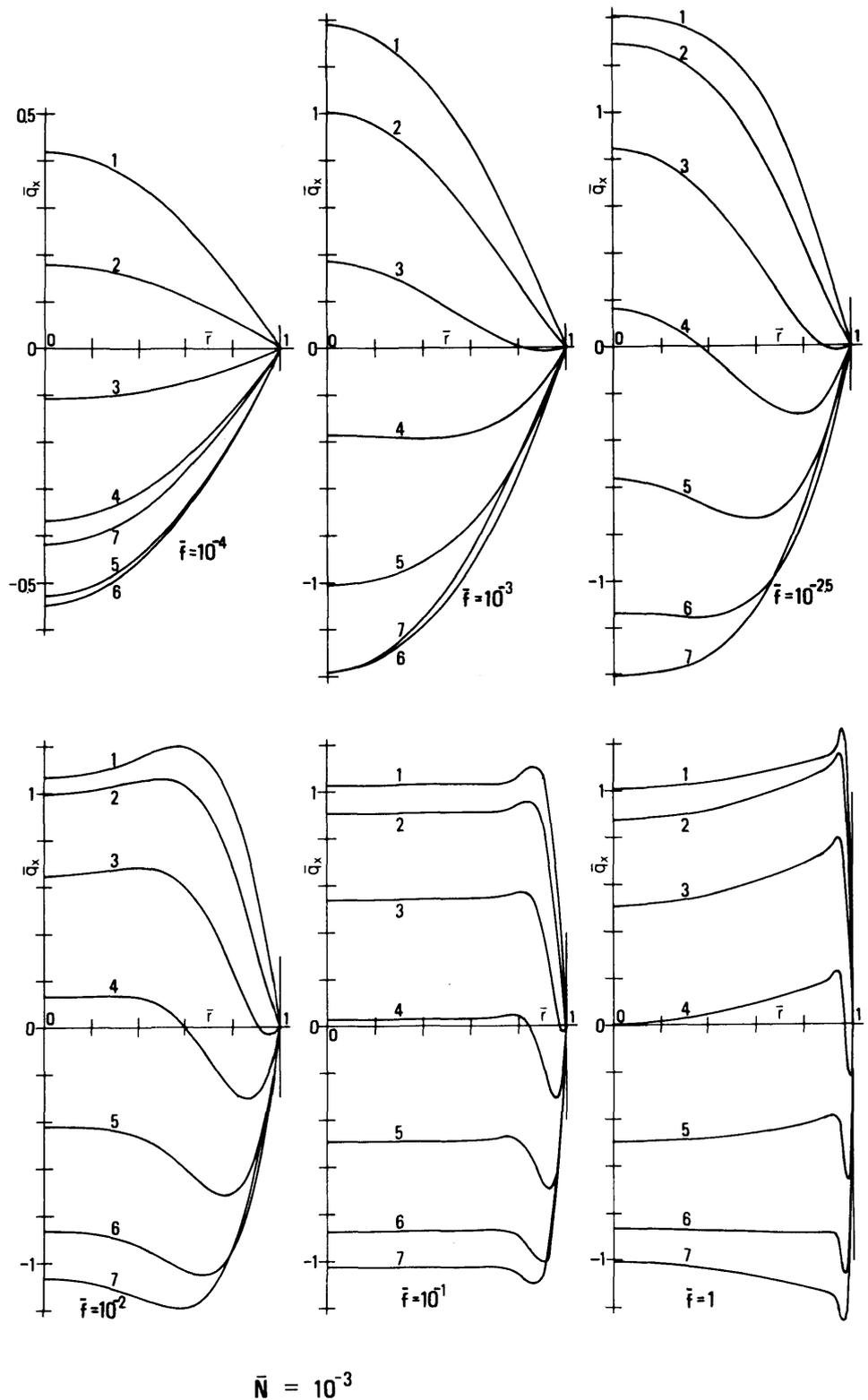
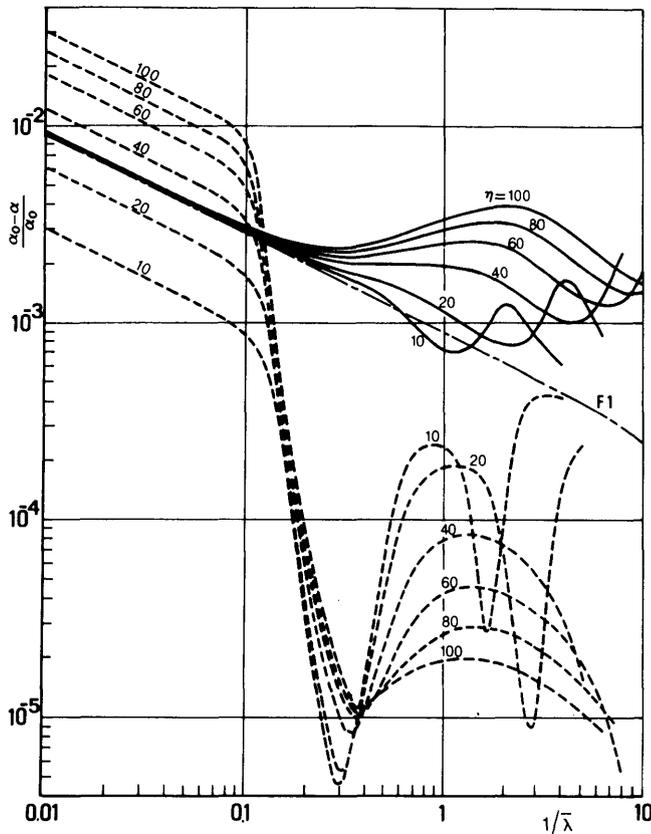
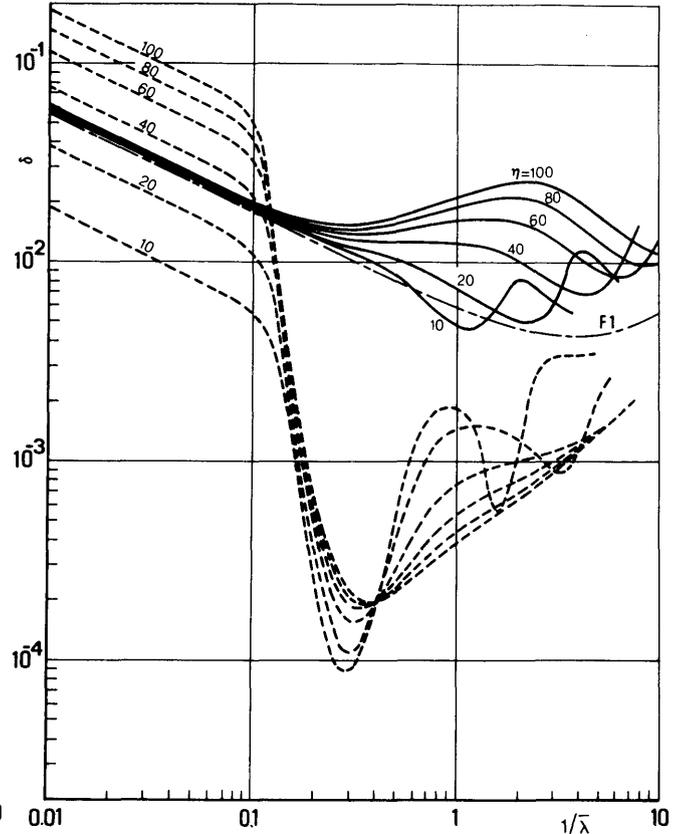


図 3.6 強制波動・F 1 モードの  $q_x$  の分布



$\bar{\rho} = 7.8, \nu = 0.3, S = 9.857 \times 10^{-3}, \bar{N} = 10^{-5}$   
 ——— C1 mode, - - - - - C2 mode

図 3.7 C1, C2 モードの位相速度の粘性  
 による低下率の  $\eta$  に対する変化



——— C1 mode, - - - - - C2 mode

図 3.8 C1, C2 モードの  $\delta$  の  $\eta$  に対する変化

の F1 モードとほとんど変わらない。これに対して C2 モードでは両者とも  $\eta$  に対する依存性は大きく、数値的に検討してみると  $\bar{\lambda} > 10$  の領域では  $(\alpha_0 - \alpha) / \alpha_0$ ,  $\delta$  はともに  $\eta$  にほとんど比例している。この領域での C2 モードは第 2 章で述べたように管の縦波が主であるが、流体から管に作用するせん断力は管が薄いほど大きな影響を及ぼすことによるものである。C2 モードでは  $(\alpha_0 - \alpha) / \alpha_0$  と  $\delta$  はともに波長が短くなると急激に小さくなるが、これは管の運動が半径方向の成分を主にするようになるので管壁での流体のせん断力を介しての流体粘性の作用が小さくなるためであることは明らかである。

さて、図 3.7, 3.8 を比較すると  $(\alpha_0 - \alpha) / \alpha_0$  と  $\delta$  の変化の様子には著しい類似性が見られる。数値的には C2 モードの短波長域を除いて

$$\delta \approx 2\pi \frac{\alpha_0 - \alpha}{\alpha_0} \quad (3.45)$$

という関係がほぼ満たされている。式 (3.45) は実は図 3.2, 3.3 の F1 モードでも短波長域を除いて成立している。このような関係が成立する理由を簡単なモデルを用いて検討してみる。波の

代わりに振動を考えると、1自由度のバネ・質量系に微小な線形の摩擦力がはたらいているものとする。その運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx + f = 0 \quad (3.46)$$

ただし、ここでは  $m$  は質点の質量、 $k$  はバネ定数、 $f$  は摩擦力、 $x$  は質点変位とする。ここで  $f$  の位相が  $x$  に対して  $\pi/4$  rad だけ遅れているものとする。すると  $X$  を  $x$  の振幅として

$$x = X \cdot e^{j\omega t} \quad f = FX e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{j\omega t} \quad (3.47)$$

とすることができる。ただし、 $\omega^*$  は複素数である。式 (3.47) を式 (3.46) に代入して実部と虚部を分ければ

$$\omega_0^2 - \omega^2 + \omega_i^2 = -\frac{F}{\sqrt{2}m}, \quad 2\omega\omega_i = -\frac{F}{\sqrt{2}m} \quad (3.48)$$

ここでは  $\omega_0^2 = k/m$ ,  $\omega = \text{Re}(\omega^*)$ ,  $\omega_i = \text{Im}(\omega^*)$  とした。式 (3.48) の第1式を第2式で辺々割れば

$$\frac{(\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega)}{2\omega\omega_i} + \frac{\omega_i}{2\omega} = 1 \quad (3.49)$$

$F$  が小さければ減衰角振動数  $\omega$  は  $\omega_0$  にきわめて近く、 $\omega_i$  は  $\omega$  や  $\omega_0$  に比べて非常に小さいことは明らかなので、式 (3.49) は近似的につきのように変形できる。

$$\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} \approx \frac{\omega_i}{\omega} \quad (3.50)$$

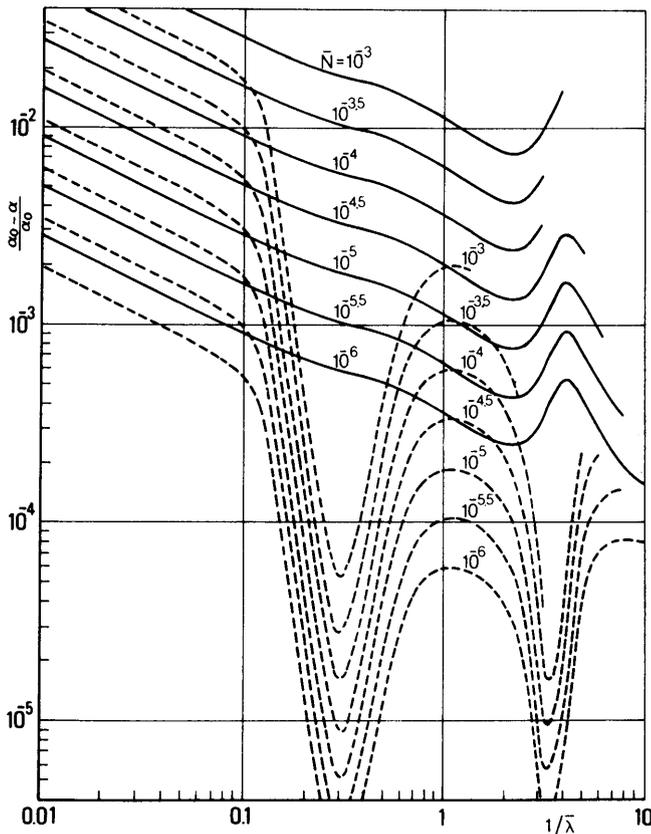
ここで、 $\delta = 2\pi\omega_i/\omega$  であることに注意すれば

$$\delta = 2\pi \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} \quad (3.51)$$

これは式 (3.45) に対応するものである。式 (3.51) を導く過程で用いた基本的な仮定は摩擦 force  $f$  が変位  $x$  に対して  $\pi/4$  rad の位相遅れを持つということだけであった。それゆえ、式 (3.45) と (3.51) の類似性から見て式 (3.45) が成立するという事は波動系であっても主たる変位とそれに作用する摩擦力の間に同様の位相関係が存在していることを示していると考えられる。実際に式 (3.43) の誘導過程で用いた平板に接する領域での粘性流体の振動では、板から十分に離れた位置での流体の変位に対して壁面上で板から流体にはたらく摩擦力は正確に  $\pi/4$  rad だけの位相遅れを持つことが明らかになっている。

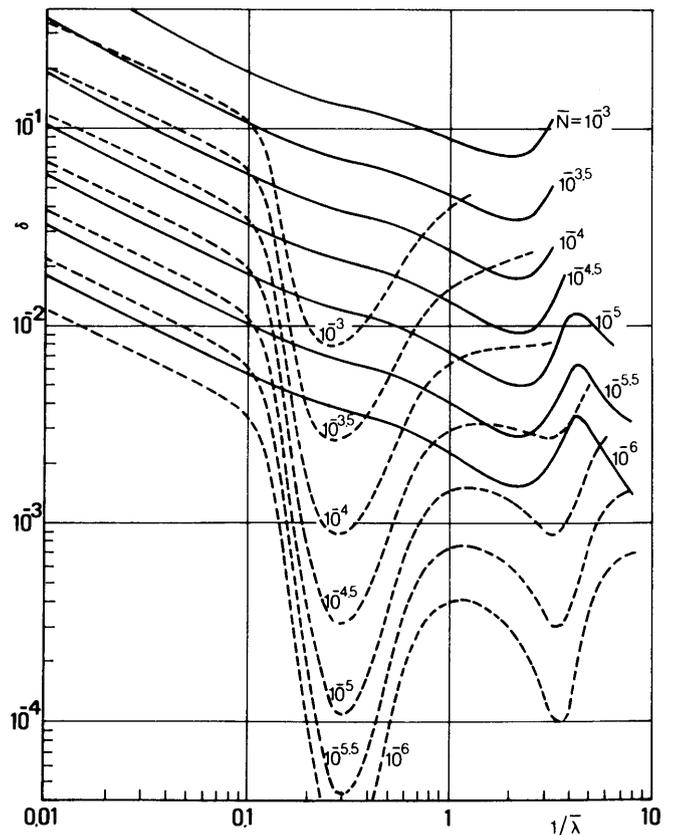
つぎに、 $\eta$  を 20 に固定して無次元動粘性係数  $\bar{N}$  を変化させた場合の  $(\alpha_0 - \alpha)/\alpha_0$  と  $\delta$  を図

3.9, 3.10に示す。C1, C2モードとも長波長域では $(\alpha_0 - \alpha) / \alpha_0$ と $\delta$ はともに $\sqrt{N\bar{\lambda}}$ にほぼ比例し, とくにC1モードの $\delta$ はF1モードに対して導いた式(3.44)の $\delta_1$ でかなりよく近似できる。これらのことから剛管内のF1モードの場合と同様に連成波でも長波長域では管壁付近の薄い境界層内でほとんどのエネルギー散逸が生じていることを意味していると考えられる。このあたりの事情をよりはっきりさせるためにC1, C2モードの軸方向の粒子速度分布の代表例を図3.11, 3.12に示す。 $\bar{q}_z$ の値の決め方は図3.4と同じである。まず, 図3.11のC1モードでは $\bar{\lambda} \geq 10$ の領域での $q_z$ 分布はF1モードと酷似するものであることがわかる。しかし,  $\bar{\lambda} = 1$ では様子は大きく変わって管の中心側にも速度こう配が大きくなる領域が見られる。この変化はもちろん管ならびに流体の半径方向の運動の影響によるもので, 解析的には位相速度 $\alpha$ が音速 $c$ より小さくなるために零次の第1種変形ベッセル関数が分布の基調になっていることが知れる。図3.7, 3.8において短波長域での $\delta$ などの変化が長波長域と異なるのは速度分布のこのような変化に対応するものであろう。つぎにC2モードでは長波長域( $\bar{\lambda} = 100$ )では流体は管に付着して管壁の近くだけが大きく動き, C1モードとは全く異なる様相を示す。この波長域でのC2モードは管の軸方向の伸縮が主になっていることによるものである。この場合にも境界層が減衰に関して



$\bar{\rho} = 7.8, \nu = 0.3, s = 9.857 \times 10^{-3}, \eta = 20$   
 — C1 mode, - - - C2 mode

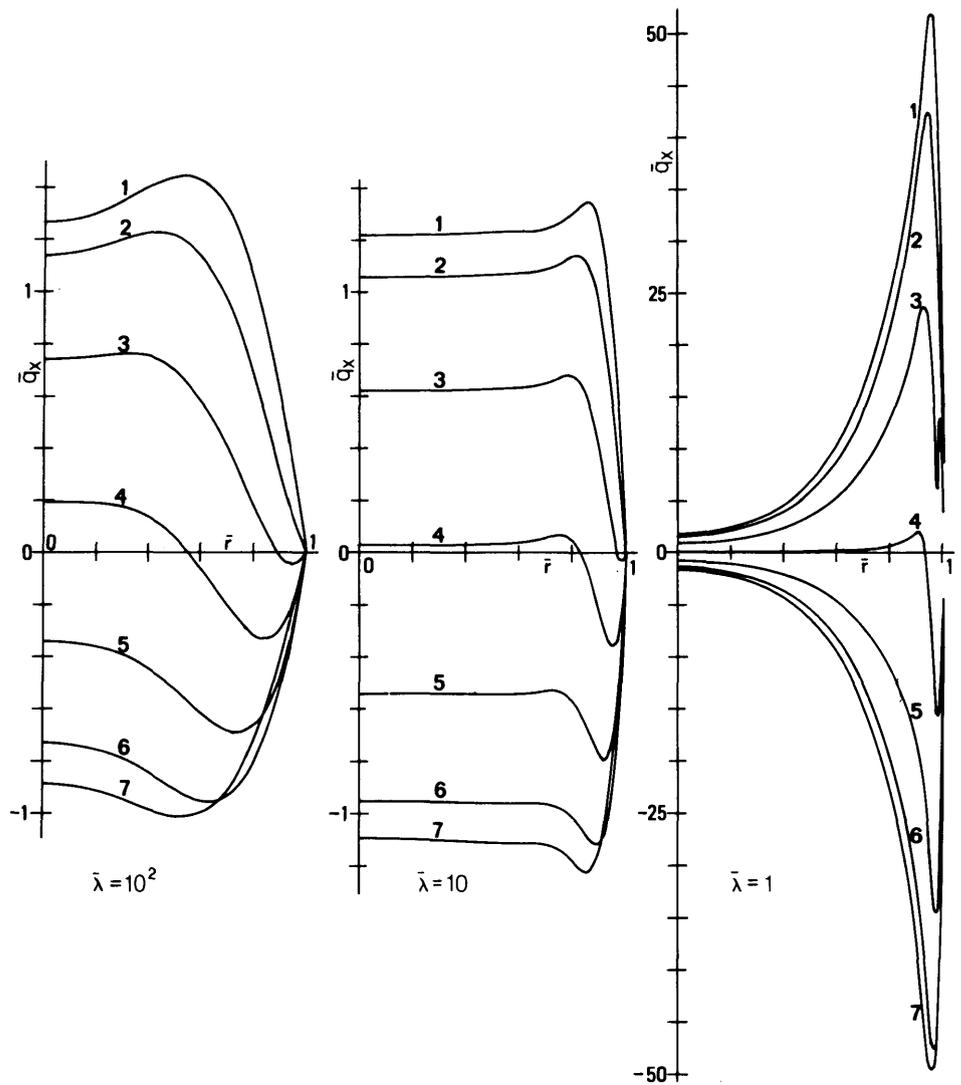
図3.9 C1, C2モードの位相速度の粘性による低下率の $\bar{N}$ に対する変化



— C1 mode, - - - C2 mode

図3.10 C1, C2モードの $\delta$ の $\bar{N}$ に対する変化  
 (計算データは図3.9に同じ)

は大きな役割を果たすのであるがその実態は C 1 や F 1 とほとんど同一視できるものであることは、図 3. 12 (b) のように  $q_x$  の分布を管と流体の相対速度に変換すると C 1 モードなどの  $q_x$  分布にきわめてよく似たものとなることから明らかである。波長が短くなって C 2 の  $\delta$  がその近くで極小値をとる  $\bar{\lambda} = 10^{0.5}$  の場合には  $q_x$  分布は長波長域とは全く異なっていて速度こう配は全体に小さくなっている。



$$\zeta = 20, \bar{\rho} = 7.8, \nu = 0.3, S = 9.857 \times 10^{-3}, \bar{N} = 10^{-3}$$

図 3. 11 C 1 モードの  $q_x$  の分布

以上の自由減衰解は

$\bar{\lambda} \leq 100$  の領域についてのみ計算したが、波長がさらに大きくなると境界層が厚くなって波の性質が変化することは剛管の場合と同じである。そのような場合も含めてつぎに強制波動解について述べる。図 3. 13, 3. 14 に  $\bar{N}$  を一定とし、 $\eta$  をパラメータとしたときの  $\alpha'$ ,  $\delta$  と  $\bar{f} = \omega a / 2\pi c$  の関係を C 1 と C 2 に分けて示す。さらに図 3. 15, 3. 16 に  $\eta$  を一定とし、 $\bar{N}$  をパラメータとした場合の計算結果を示す。まず、C 1 モードについては管の弾性の影響で位相速度が小さくなるものの変化の傾向は図 3. 5 に示した F 1 モードの強制波動解とよく似た結果になっている。ただし、図示範囲を越えた高い振動数域では管と流体の半径方向の運動によって  $\alpha'$  が小さくなることは自由減衰解と同じである。一方、C 2 モードでは C 1 モードとは異なり、超低振動数域では  $\alpha'$  は小さくなるものの零ではない一定値に漸近し、 $\delta'$  も極大値を経て零に向う傾向を示す。低振動数域では管の伸縮に付着して動く流体の速度分布は境界層が厚くなって管路全断面に及ぶ結果、回転放物面

状になるが、管に対する相対速度として見たときの流体の振幅は振動数とともに小さくなるので、減衰率も低下していくものと考えられる。なお、C 2モードの $\delta'$ の極大点以下の現象は流体の粘性が普通に用いられる油程度のものであれば、機械振動ではほとんど遭遇しないような低い振動数域のものである。

### 3.4 結 言

本章では流体の粘性も考慮に入れて解析を行い、連成波の減衰を中心とする性質について調べた。

- (1) まず、管が剛体のときには波長が管内半径より大きい領域での最低次のF 1モードの減衰は管内壁に接して現われる薄い速度境界層内の摩擦を主因として生じる。そしてこの領域では対数減衰率の簡単な近似式(3.43)、(3.44)が成立するが、波長が非常に長くなると、あるいは振動数が非常に低くなると境界層が厚くなり、管路断面全域を覆うようになるので波の性質は大きく変化し、前述の近似式も成立しなくなる。
- (2) 境界層を全く伴わない自由空間内の平面波では対数減衰率は波長が大きくなるほど低下し、F 1モードとは傾向もオーダも全く異なるものとなる。F 1モードと平面波との比較により管内粘性流体の波動の減衰に対して境界層が果たす役割の大きさを知ることができる。
- (3) 連成波のC 1、C 2モードの $\lambda > 20a$ の分散の小さな領域での減衰機構はF 1モードと同じく、管内壁付近にできる速度境界層内の摩擦によるものが主である。とくにC 1モードではF 1

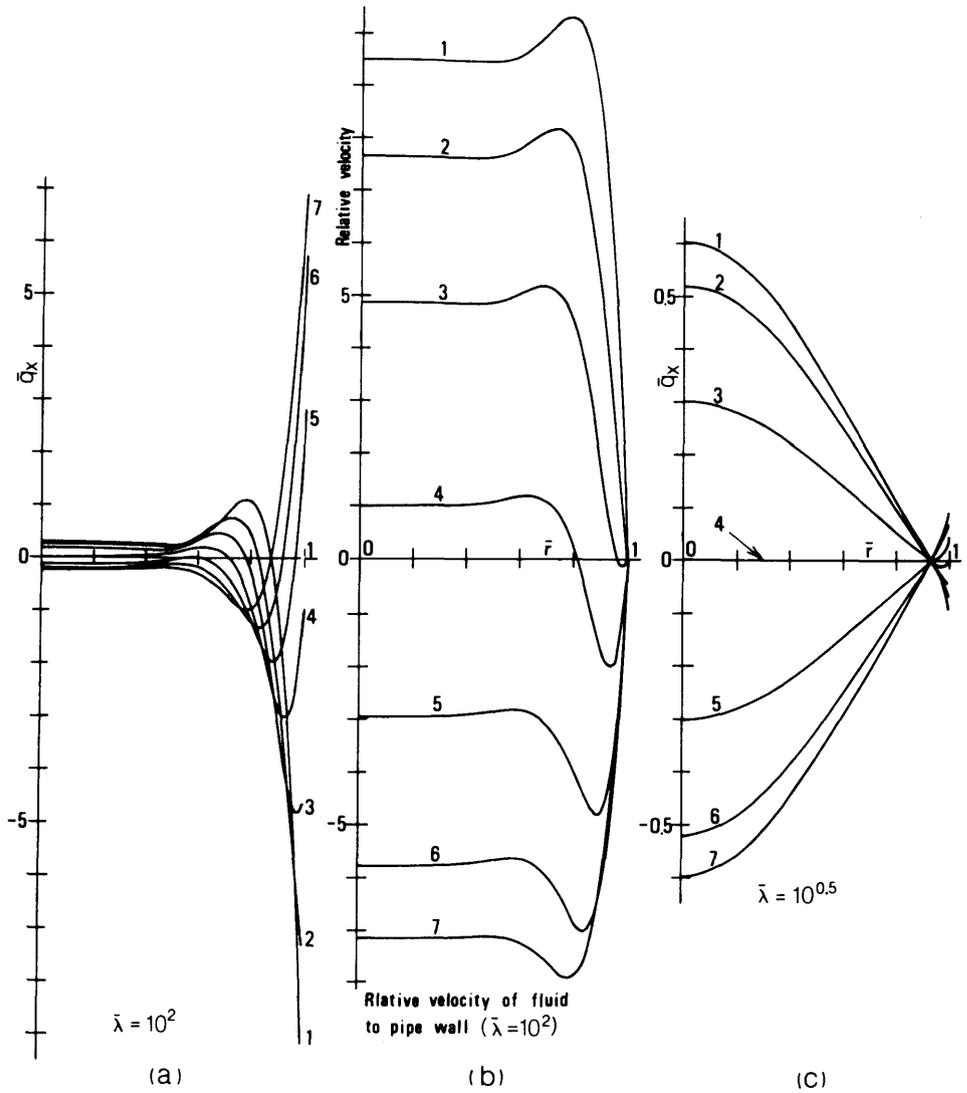
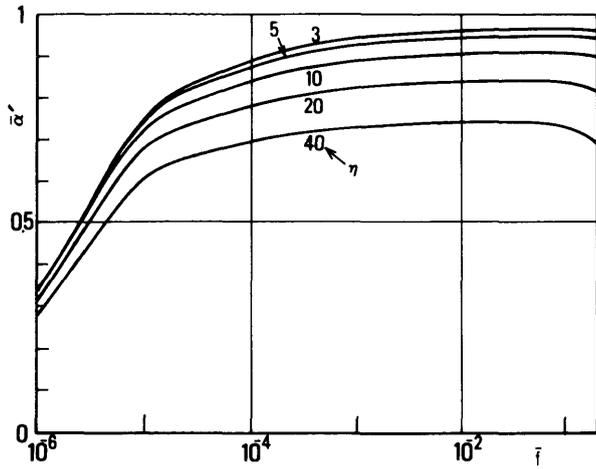
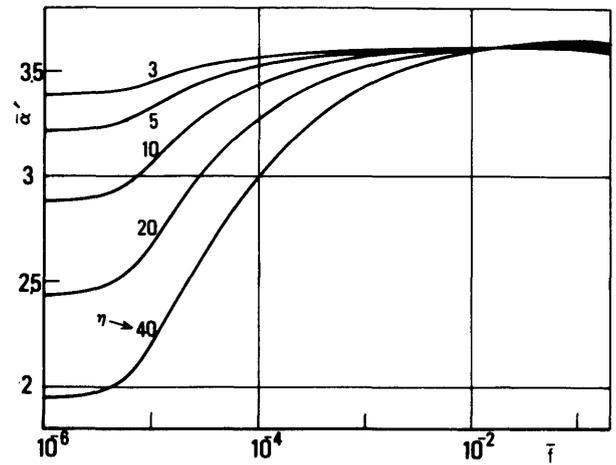


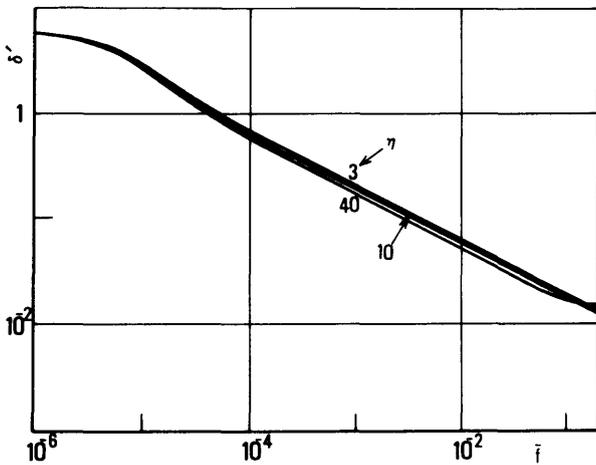
図 3.12 C 2モードの  $q_x$  の分布 (計算データは図 3.11 に同じ)



(a) Phase velocity

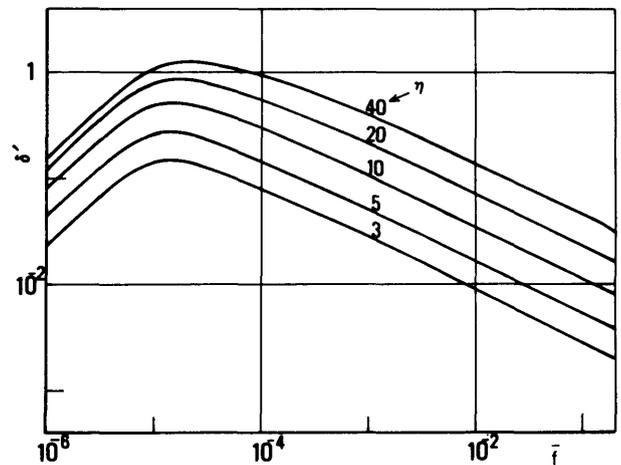


(a) Phase velocity



(b) Logarithmic decrement

$$\bar{\rho} = 7.8, \nu = 0.3, s = 9.857 \times 10^{-3}, \bar{N} = 10^5$$



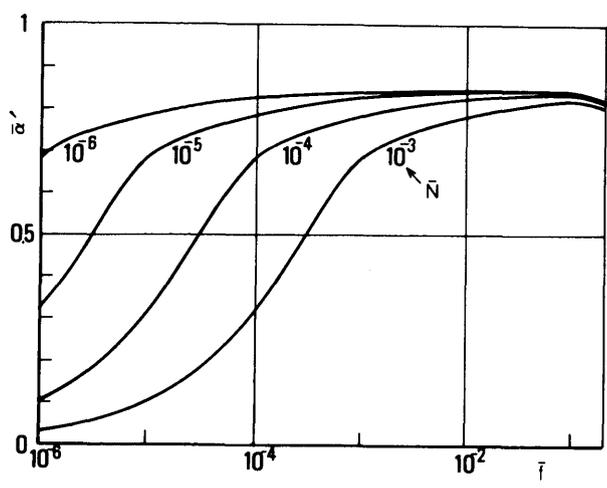
(b) Logarithmic decrement

図 3. 13 強制波動 C 1 モードの位相速度と減衰率の  $\eta$  による変化

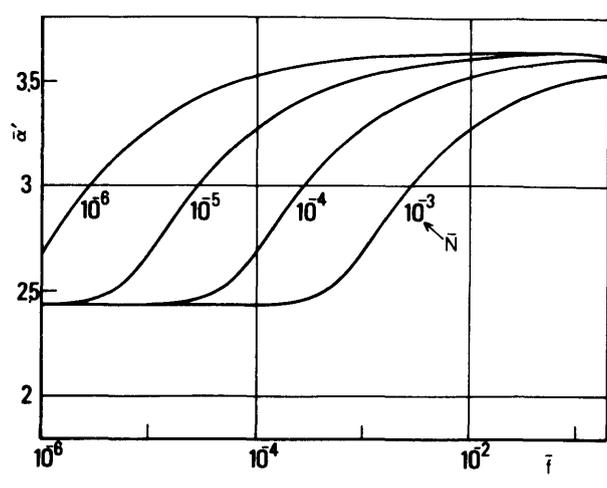
図 3. 14 強制波動 C 2 モードの位相速度と減衰率の  $\eta$  による変化 (計算データは図 3. 13 に同じ)

モードと同様に近似式 (3. 4 4) が成立する領域がある。

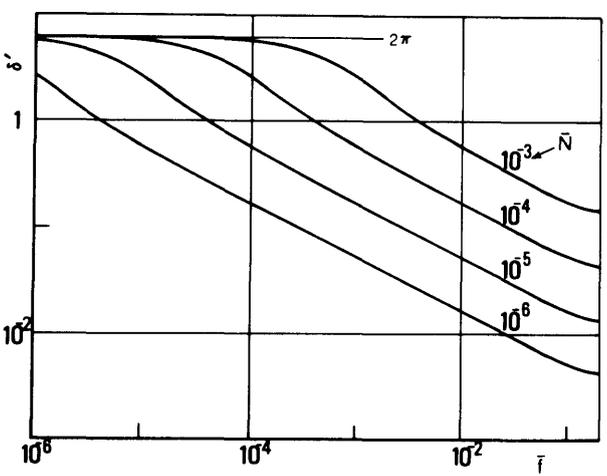
- (4) F 1, C 1, C 2 モードでは位相速度の粘性による低下率と対数減衰率の間に式 (3. 4 5) で示される平行的な関係が近似的に成立する領域があるが、これは波動の主たる変位とそれに作用する粘性による摩擦力との間に約  $\pi / 4$  rad の位相差があるということの説明できる。



(a) Phase velocity



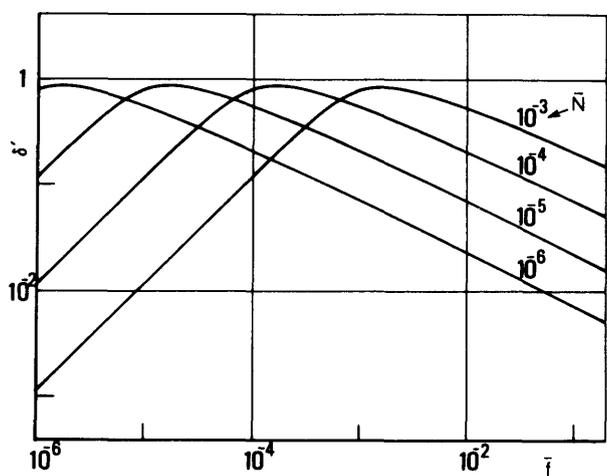
(a) Phase velocity



(b) Logarithmic decrement

$\bar{p} = 7.8, \nu = 0.3, s = 9.857 \times 10^{-3}, \eta = 20$

図 3. 15 強制波動 C 1 モードの位相速度と減衰率の  $\bar{N}$  による変化



(b) Logarithmic decrement

図 3. 16 強制波動 C 2 モードの位相速度と減衰率の  $\bar{N}$  による変化 (計算データは図 3. 15 に同じ)

## 第 4 章 管路の振動数応答の近似計算式

### 4.1 緒 言

粘性流体と弾性管の系に生じる波動現象は実際の機械・装置類においても性能にかかわる重要な問題であり、波の振舞は理論によつて的確に把握されなければならない。この点から見ると第 3 章の解析法は実用性に富んだものとは言えず、実際上の問題の処理のためには合理的な近似計算法が必要と考えられる。

さて、管路の動特性としては定常振動における振動数応答と過渡応答が重要であり、そのどちらも精度よく簡単に計算できることが望まれるが、連成波動の過渡応答については検討すべきことがらにまだ多く残されているので、ここではさしあたり目的を振動数応答に限定した近似式について検討する。

本章の近似式は、つぎのような考え方で導かれる。第 2 章、第 3 章の結果によれば、連成波は波長が管径の約 10 倍以下の領域では管と流体の半径方向の運動などのためにやや複雑な性質を呈するが、長波長域では重要なのは  $C_1$ 、 $C_2$  の二つのモードだけで、しかもこれらのモードの性質は比較的単純なものになる。そこで対象を長波長域に限れば管と流体の基礎式を単純化することが可能になり、強制波動解の複素波数を振動数に関して陽に解いた形で求めることができるので繰返し計算は不要になる。また、近似解を計算に便利な遷移行列の形に表わすこともできる。この近似法の精度はよく、 $C_1$ 、 $C_2$  の二つの波動モードを統一的に扱うことができるのであるが、実際には  $C_1$  モードだけでよい場合も多いのでさらに単純化した近似法についても述べる。近似式の精度は第 3 章の計算結果との比較で検討する。

なお、管・流体系の減衰要因には流体粘性以外に管材の内部摩擦も実際には存在する。そこで本章で導いた近似式を用いて内部摩擦の連成波の減衰への影響について簡単な検討も行う。

### 4.2 近似式の誘導

はじめに管について考える。波長が管直径の約 10 倍より大きい領域では、 $C_1$  モードにおいては管の慣性力はほとんど影響せず、 $C_2$  モードにおいては軸方向の慣性力だけが重要になることは第 2 章の検討で明らかであり、流体に粘性があってもこの事実に変化はない。また、長波長域では管に生じる弾性力としては膜力だけが重要であつて曲げやせん断はほとんど無視できることも図 2.3 から明らかである。そこで管については半径方向の慣性力を省略した膜力理論を用いる。

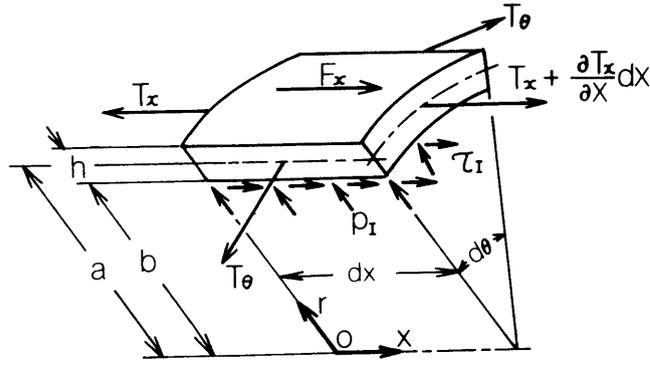


図 4.1 近似的な管のつりあい関係

図 4.1 は、この近似における管の微小要素のつりあい関係を示したもので、これを数式化すれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_x}{\partial x} + F_x + \frac{b}{a} \tau_r &= 0 \\ \frac{T_\theta}{a} - \frac{b}{a} p_r &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

$T_x$  ,  $T_\theta$  および  $F_x$  は膜力近似ではつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} T_x &= k_r \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{w}{a} \right) , & T_\theta &= k_r \left( \frac{w}{a} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ F_x &= -M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

記号は第 2 章と全く同じである。式 (4.2) を式 (4.1) に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} \left( k_r \frac{\partial^2}{\partial x^2} - M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u + \frac{\nu k_r}{a} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{b}{a} \tau_r &= 0 \\ \frac{\nu k_r}{a} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{k_r}{a^2} w - \frac{b}{a} p_r &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

つぎに流体についてであるが、ここでは粒子速度  $q$  を式 (3.5) に従って  $q_1$  と  $q_2$  に分けて考える。したがって精密には式 (3.6) と (3.7) が基礎式になるが、これをつぎのように簡略化する。まず、式 (3.6) の代わりに

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial q_{1z}}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_L} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= -K \left( \frac{\partial q_{1z}}{\partial x} + \frac{2}{r} q_{1r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

を用いる。これはつぎのことがらを根拠にして導かれた。まず、図 3.2 , 3.3 から平面波に対する粘性の影響は長波長域では F 1 モードに比べて非常に小さいが、これは管内波動では流体粘性は主に  $q_2$  成分を介して効果を現わすことを意味する。そこで、式 (3.6) の粘性項を  $q_2$  との比較において無視する。そして  $q_1$  の成分  $q_{1z}$  と  $p$  は  $r$  に依存せず、 $q_{1r}$  は  $r$  の 1 次式になると仮定する。

$p$  や  $q_1$  の成分は式 (3.13), (3.15) のようにベッセル関数によって  $r$  方向の変化が決められるのであるが, 低振動数域では変数の値が小さくなるのでベッセル関数は第 1 項だけで近似できると考えた結果である。式 (4.4) では半径方向の運動方程式が欠けているが仮定により  $\partial p / \partial r = 0$  であるから  $r$  方向に加速度を生じる要因がなくなるためである。 $q_{1r}$  は単に式 (4.4) の第 2 式を満足するように決められる。

つぎに式 (3.7) の第 1 式を  $q_{2z}$  だけで表わすと

$$\frac{\partial q_{2z}}{\partial t} = N \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) q_{2z} \quad (4.5)$$

となるが,  $q_2$  は境界層の形成に関与する成分で  $r$  方向の変化が本質的に重要であり, しかも長波長域では  $x$  方向の変化は  $r$  方向の変化に比べてはるかに小さくなるので, 式 (4.5) の  $x$  に関する微分項を省略する。そして  $q_{2r}$  はやはり  $q_2$  に関する連続の式  $\text{div } \mathbf{q}_2 = 0$  を満たすように決められるとすれば, 式 (3.7) に対する近似はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial q_{2z}}{\partial t} &= N \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) q_{2z} \\ \frac{\partial q_{2z}}{\partial x} + \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) q_{2r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

また, 管内壁に作用する流体力については式 (3.9) の代わりに

$$p_l = p, \quad \tau_l = -\mu \left[ \frac{\partial q_{2r}}{\partial r} \right]_{r=b} \quad (4.7)$$

を, 管壁における管と流体の連続条件については式 (3.10) の代わりに

$$[q_{1z} + q_{2z}]_{r=b} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad [q_{1r} + q_{2r}]_{r=b} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (4.8)$$

を用いる

以上が近似の基礎式であるが, これを解く手順は 3.2 節で述べたより精密な場合との類似点が多いから簡単に述べる。ここでは解を定常波の形に仮定する。式 (4.4), (4.6) はそれぞれつぎのように仮定した解で満足される。

$$\left. \begin{aligned} q_{1z} &= A \sin \beta^* x \cdot e^{j\omega t} \\ q_{1r} &= A \frac{r}{2\beta^*} \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^{*2} \right) \cos \beta^* x \cdot e^{j\omega t} \\ p &= A \frac{j\omega\rho_L}{\beta^*} \cos \beta^* x \cdot e^{j\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

$$\left. \begin{aligned} q_{2z} &= B J_0(nr) \sin \beta^* x \cdot e^{j\omega t} \\ q_{2r} &= -B \frac{\beta^*}{n} J_1(nr) \cos \beta^* x \cdot e^{j\omega t} \\ n &= \sqrt{-\frac{j\omega}{N}} \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

ここに  $A$ ,  $B$  は未定係数である。管の変位を

$$u = U \sin \beta^* x \cdot e^{j\omega t}, \quad w = W \cos \beta^* x \cdot e^{j\omega t} \quad (4.11)$$

とにおいて、式 (4.9), (4.10) とともに式 (4.8) に代入して、 $A$  と  $B$  について解くと

$$\left. \begin{aligned} A &= - \frac{2j\omega \beta^{*2} F(nb)U + (2j\omega \beta^*/b)W}{\{1 - 2F(nb)\} \beta^{*2} - \omega^2/c^2} \\ B &= - \frac{\{j\omega/J_0(nb)\}(\omega^2/c^2 - \beta^{*2})U - \{2j\omega \beta^*/b J_0(nb)\}W}{\{1 - 2F(nb)\} \beta^{*2} - \omega^2/c^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

ただし

$$F(z) = \frac{J_1(z)}{zJ_0(z)} \quad (4.13)$$

管が剛体のときには  $U = W = 0$  で、 $A \neq 0$ ,  $B \neq 0$  であるが、この条件から式 (4.12) の2式の共通の分母を零に等置したものが  $\beta^* - \omega$  関係を定める方程式になる。この式を  $\beta^*$  について解いて

$$\beta^* = \pm \frac{\omega}{c \sqrt{1 - 2F(nb)}} \quad (4.14)$$

(19)

この式は表現法が異なるが Brown が剛管に対して導いた式の液体に対する特別な場合と内容は一致する。このことから明らかのように、ここで検討している連成波の近似式は流体に関しては、Brown の近似と同じものを採用している結果になっている。

さて、管の弾性を考慮する場合には式 (4.9), (4.10) に式 (4.12) を代入した結果をさらに式 (4.7) に代入して  $p_r$  と  $\tau_r$  を  $U$  と  $W$  の一次結合で表わし、それを式 (4.11) とともに式 (4.3) に代入すれば  $U$  と  $W$  に関する同次の連立一次方程式が得られる。この方程式の係数行列の行列式を零に等置したものが連成波の  $\beta^* - \omega$  関係を定める方程式であるが、これを整理すると  $\beta^{*2}$  に関する二次方程式になる。これをつぎのように表わす。

$$G_1 c^4 \beta^{*4} - G_2 \omega^2 c^2 \beta^{*2} + G_3 \omega^4 = 0 \quad (4.15)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= 1 - 2F(nb) \\ G_2 &= 1 + \bar{\rho}S\{1 - 2F(nb)\} + \eta S\{2 + \bar{b}^2 F(nb) - 4\nu \bar{b} F(nb)\} \\ G_3 &= \bar{\rho}S + \eta \bar{b}^2 S F(nb) + 2\eta S^2 (1 - \nu^2) \{\bar{\rho} + \eta \bar{b}^2 F(nb)\} \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

したがって

$$\left. \begin{aligned} \beta_1^{*2} &= \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \frac{G_2 + \sqrt{G_2^2 - 4G_1G_3}}{2G_1} \\ \beta_2^{*2} &= \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \frac{G_2 - \sqrt{G_2^2 - 4G_1G_3}}{2G_1} \end{aligned} \right\} (4.17)$$

が陽に解いた  $\beta^*$  と  $\omega$  の関係で、 $\beta_1^*$  が C 1 モードの、 $\beta_2^*$  が C 2 モードの複素波数である。

さて、式 (4.9) 以下において  $\sin \beta^* x$  と  $\cos \beta^* x$  の役割を入れ替えた形にしても式 (4.15) に到達することは明らかである。それゆえ、近似の方程式系の一般解を管の軸方向変位について表わせば

$$u = (U_1 \cos \beta_1^* x + U_2 \sin \beta_1^* x + U_3 \cos \beta_2^* x + U_4 \sin \beta_2^* x) e^{j\omega t} \quad (4.18)$$

解を遷移行列の形に表わしておくで管端における境界条件を考慮する際に便利である。C 1 モードでは流体の軸方向の運動が、C 2 モードでは管の軸方向の運動が主になることから状態ベクトルの成分としては、 $q_x$  の管断面上の平均値、 $p$ 、 $u$  および管の全軸力  $2\pi a T_x$  の 4 つの量を選ぶとよい。これらの量の共通因数  $e^{j\omega t}$  で除したものに改めて  $\hat{Q}$ 、 $\hat{p}$ 、 $\hat{U}$ 、 $\hat{T}$  なる記号をあて、式 (4.18) から出発して計算すると次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \hat{Q}(x) \\ \hat{p}(x) \\ \hat{U}(x) \\ \hat{T}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 C_1(x) & k_1 S_1(x) & k_2 C_2(x) & k_2 S_2(x) \\ -l_1 S_1(x) & l_1 C_1(x) & -l_2 S_2(x) & l_2 C_2(x) \\ C_1(x) & S_1(x) & C_2(x) & S_2(x) \\ -m_1 S_1(x) & m_1 C_1(x) & -m_2 S_2(x) & m_2 C_2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

ただし、

$$C_i(x) = \cos \beta_i^* x, \quad S_i(x) = \sin \beta_i^* x \quad (i=1, 2) \quad (4.20)$$

なる略記法を用い、さらに

$$\left. \begin{aligned} k_i &= -2j\omega \frac{F(nb)\omega^2/c^2 - \{1 - 2F(nb)\} \Xi_i \beta_i^*/b}{\{1 - 2F(nb)\} \beta_i^{*2} - \omega^2/c^2} \\ l_i &= 2\rho_L \omega^2 \frac{F(nb)\beta_i^* - \Xi_i/b}{\{1 - 2F(nb)\} \beta_i^{*2} - \omega^2/c^2} \\ m_i &= 2\pi a k_T (\beta_i^* - \frac{\nu}{a} \Xi_i) \\ \Xi_i &= a\beta_i^* \frac{\nu\{1 - 2F(nb)\} \beta_i^{*2} - \{\nu + 2(1 - \nu^2)\eta \bar{b} S F(nb)\} \omega^2/c^2}{\{1 - 2F(nb)\} \beta_i^{*2} - \{1 + 2(1 - \nu^2)\eta S\} \omega^2/c^2} \end{aligned} \right\} (4.21)$$

とした。ここで

$$\mathbf{Z}(x) = [\hat{Q}(x), \hat{p}(x), \hat{U}(x), \hat{T}(x)]^T \quad (4.22)$$

とおいて式 (4.19) を

$$\mathbf{Z}(x) = \{B_{ij}(x)\} \mathbf{U} \quad (4.23)$$

と略記し,  $x=0$  とおいたうえで  $\mathbf{U}$  について解けば

$$\mathbf{U} = \{B_{ij}(0)\}^{-1} \mathbf{Z}(0) \quad (4.24)$$

これを改めて式 (4.23) に代入すると

$$\mathbf{Z}(x) = \{T_{ij}(x)\} \mathbf{Z}(0) \quad (4.25)$$

$$T_{ij}(x) = \{B_{ij}(x)\} \{B_{ij}(0)\}^{-1} \quad (4.26)$$

となる。  $\{T_{ij}(x)\}$  が遷移行列である。その要素を具体的に求めておくとな便利なのも多いので、式 (4.20), (4.21) の記号を用いて以下に記す。

$$\left. \begin{aligned} T_{11} &= \frac{-k_1 C_1 + k_2 C_2}{k_2 - k_1}, & T_{12} &= \frac{-k_1 m_2 S_1 + k_2 m_1 S_2}{m_1 l_2 - m_2 l_1}, \\ T_{13} &= \frac{k_1 k_2 (C_1 - C_2)}{k_2 - k_1}, & T_{14} &= \frac{k_1 l_2 S_1 - k_2 l_1 S_2}{m_1 l_2 - m_2 l_1}, \\ T_{21} &= \frac{l_1 S_1 - l_2 S_2}{k_2 - k_1}, & T_{22} &= \frac{-l_1 m_2 C_1 + l_2 m_1 C_2}{m_1 l_2 - m_2 l_1}, \\ T_{23} &= \frac{-l_1 k_2 S_1 + l_2 k_1 S_2}{k_2 - k_1}, & T_{24} &= \frac{l_1 l_2 (C_1 - C_2)}{m_1 l_2 - m_2 l_1}, \\ T_{31} &= \frac{-C_1 + C_2}{k_2 - k_1}, & T_{32} &= \frac{-m_2 S_1 + m_1 S_2}{m_1 l_2 - m_2 l_1}, \\ T_{33} &= \frac{k_2 C_1 - k_1 C_2}{k_2 - k_1}, & T_{34} &= \frac{l_2 S_1 - l_1 S_2}{m_1 l_2 - m_2 l_1}, \\ T_{41} &= \frac{m_1 S_1 - m_2 S_2}{k_2 - k_1}, & T_{42} &= \frac{m_1 m_1 (-C_1 + C_2)}{m_1 l_2 - m_2 l_1}, \\ T_{43} &= \frac{-m_1 k_2 S_1 + m_2 k_1 S_2}{k_2 - k_1}, & T_{44} &= \frac{m_1 l_2 C_1 - m_2 l_1 C_2}{m_1 l_2 - m_2 l_1} \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

以上に求めた近似式を便宜上、近似 I と呼ぶ。以上の経過から明らかなように近似 I では  $C_1$ ,  $C_2$  の二つのモードを同時に扱うことができる。しかしながら、管が両端で固定されていれば管の縦振動、すなわち  $C_2$  モードは励起されにくいので  $C_1$  モードだけを考えればよいであろう。このような場合を対象にさらに簡略化した近似式を考える。剛管の場合には式 (4.14) が成立するが、この式における音速  $c$  を流体が非粘性の場合の  $C_1$  モードの伝ば速度の近似式 (2.51) で置き換えてみる。すると

$$\beta^* = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{1+2S\eta}{1-2F(nb)}} \quad (4.28)$$

が複素波数の一つの近似式になる。これに対応する遷移行列は  $\beta^*$  の内容に式 (4.14) と (4.28)

の違いがあるだけで、次式のように表現すれば形式的には剛管の場合と同じになる。

$$\begin{bmatrix} \widehat{Q}(x) \\ \widehat{p}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta^* x & \frac{\beta^* \{1 - 2F(nb)\}}{j\omega\rho_L} \sin \beta^* x \\ -\frac{j\omega\rho_L \sin \beta^* x}{\beta^* \{1 - 2F(nb)\}} & \cos \beta^* x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{Q}(0) \\ \widehat{p}(0) \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

以上を近似Ⅱと呼ぶことにする。近似Ⅱは簡潔なうえにすでに確立している二つの近似の組合せなので理解しやすいが、精度は近似Ⅰに比べるとかなり劣る。

ここで近似解の相似性について触れておきたい。式(4.14), (4.17), (4.28)はいずれもつぎの形をしている。

$$\beta^* = \pm \frac{\omega}{c} \Phi\{F(nb)\} \quad (4.30)$$

ここに $\Phi$ は $N$ と $\omega$ が関係する要因として $F(nb)$ だけを含み、そのほかには $N$ や $\omega$ を含まない。

式(4.30)を式(3.31)に代入すると

$$\alpha' = \frac{c}{\text{Re}(\Phi)}, \quad \delta' = 2\pi \frac{\text{Im}(\Phi)}{\text{Re}(\Phi)} \quad (4.31)$$

したがって、 $\Phi$ の値が同じであれば、すなわち $nb$ が同じ値であれば $\alpha'$ と $\delta'$ は同じ値をとることになる。ところが $nb = \sqrt{-j\bar{b}\omega / \bar{N}}$ であるから、 $\alpha'$ や $\delta'$ を論ずるときには振動数と粘性に関する無次元量は統一されて $\bar{\omega}/\bar{N}$ の形のものだけを考えればよいことになる。実際に、精密な計算結果である図3.5, 3.15, 3.16において高振動数側の一部を除いて異なる $\bar{N}$ に対する各曲線が振動数をずらせば互いに重なり合うほどの類似性を持っているのは $\bar{\omega}/\bar{N}$ が同じであれば近似的には同一視できるということの具体的な現われである。

つぎに、近似Ⅰにおいて流体が非粘性となる極限の場合を調べてみる。それには $N=0$ とすれば $1/n=0$ 、したがって $F(nb)=0$ となるからこれを式(4.16)に代入すればよい。このようにしてから方程式(4.15)を $\omega = \beta\alpha$ の関係を用いて $\alpha^2$ の二次方程式に変換すると、その根は第2章で求めた伝ば速度の近似式(2.56)に一致する。式(2.56)は極限操作で求めたが、物理的な意味は近似Ⅰの誘導過程から知ることができる。

### 4.3 近似式の精度と応用例

4.3.1 近似式の精度 有限長管に生じる波動を近似的に解析する場合に誤差をもたらす要因は二つに分けられよう。一つは基礎式の精度に由来するもので波の伝ば過程で位相速度や減衰率の誤差となって現われる。もう一つは境界条件についても基礎式と同程度の近似をとらなければならないことによるものである。たとえば、管端でピストンないしプランジャーで流体を加振するとき

ピストン等の径によって管端での流体粒子速度分布は当然異なるが、粒子速度を平均化することによって問題の一次元化を図っている近似式ではこのような細部の違いを解析に折り込むことはできないし、管端での管の拘束状態も近似式を用いては完全には指定できない。これらはいずれも近似化ということが力学的には系の自由度を減少させる操作であることから生じるものである。このようなことについては次章で詳しく検討するが、結論として境界条件の細部の違いは系全体の挙動に対して大きく影響しないことが多いので、ここでは基礎式の精度についてだけ検討する。

まず、剛管に対する式(4.14)の精度は厳密値との比較によっては調べられていないようなので、それから述べる。式(4.14)の $\beta^*$ から式(3.31)によって $\alpha'$ と $\delta'$ を求め、それらを図3.5に示した精密な値と比較して求めた相対誤差を $\Delta\alpha$ 、 $\Delta\delta$ とし、それらの $\bar{f}$ に対する変化を図4.2に示す。 $\delta'$ の精度は $\alpha'$ に比べて相当悪いが、誤差を1%まで許容すればほぼ $\bar{f} < 0.3$ の領域でこの近似式は使用できる。 $\bar{f} = 0.3$ は $c = 1.5 \times 10^5$  cm/s,  $2b = 1$  cmとすれば約90 kHzに相当し、通常のためのためにはこの限界はほとんど問題にならない。この近似式の表現は簡潔であり、合理性の高いものと言えよう。

つぎに連成波動の近似Iの精度を示す。図4.3、4.4は $\bar{N}$ を一定に $\eta$ をパラメータとしてC1、

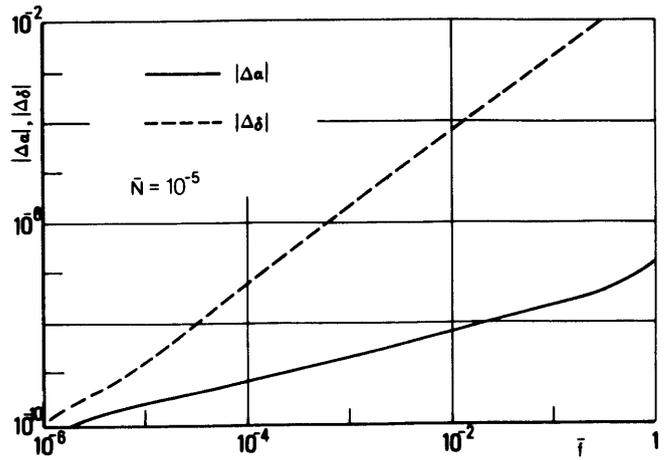


図 4.2 式(4.14)によるF1モードの $\alpha'$ と $\delta$ の精度

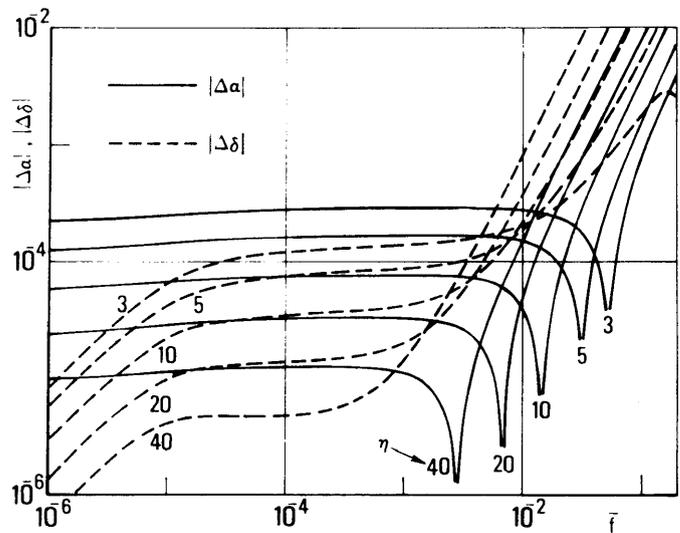


図 4.3 近似I・C1モードの $\alpha'$ 、 $\delta$ の誤差の $\eta$ による変化 (計算データは図3.13に同じ)

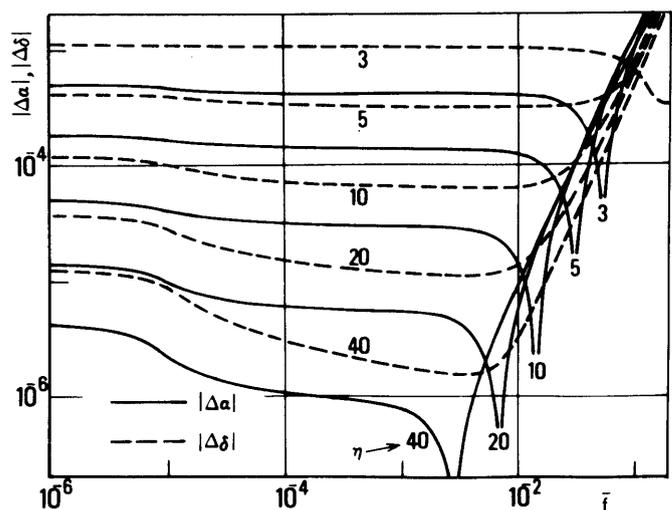


図 4.4 近似I・C2モードの $\alpha'$ 、 $\delta$ の誤差の $\eta$ による変化 (計算データは図3.14に同じ)

C2モードの誤差を分けて示したもので精密値は図3.13, 3.14に示した。また図4.5, 4.6は $\bar{N}$ をパラメータとしたときの誤差で図3.15, 3.16の精密値に対応するものである。 $|\Delta\alpha|$ ,  $|\Delta\delta|$ はともに $\bar{f} = 10^{-2}$ 付近から増大し始めるが、これはこの近似では省略した管と流体の半径方向の慣性力などが無視できなくなるため、このことによって高振動数側の限界が定められる。この限界は振動数にして剛管の場合の約 $1/10$ になるが、それでも普通の目的のためには十分な領域を覆っていると言えよう。なお、低振動数側にはとくに限界は現われない。

ところで図4.2~4.6では $|\Delta\alpha|$ や $|\Delta\delta|$ の非常に小さな領域までを示してあるが、これは誤差の変化の傾向を知ることが目的であって、実際上の目的のためにも $|\Delta\alpha|$ や $|\Delta\delta|$ が非常に小さいことが有意義であることを主張するものではない。精度評価の基準として用いた精密値は第3章で述べたように円筒かく理論を用いて求めたものであり、その意味ではすでに近似になっているので、このことをとくに注意しておきたい。実際には $10^{-3}$ 以下の領域で誤差の大小を区別しなければならない理由はほとんどないと思われる。

つぎに、近似Ⅱの誤差を図4.7に示す。

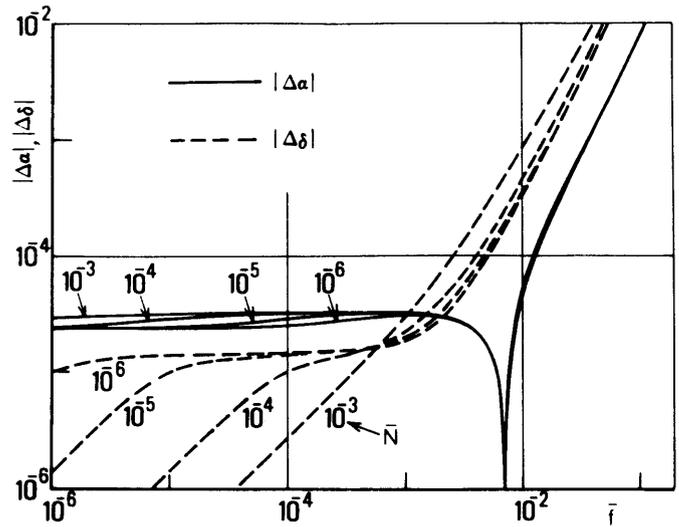


図4.5 近似Ⅰ・C1モードの $\alpha'$ ,  $\delta$ の誤差の $\bar{N}$ による変化 (計算データは図3.15に同じ)

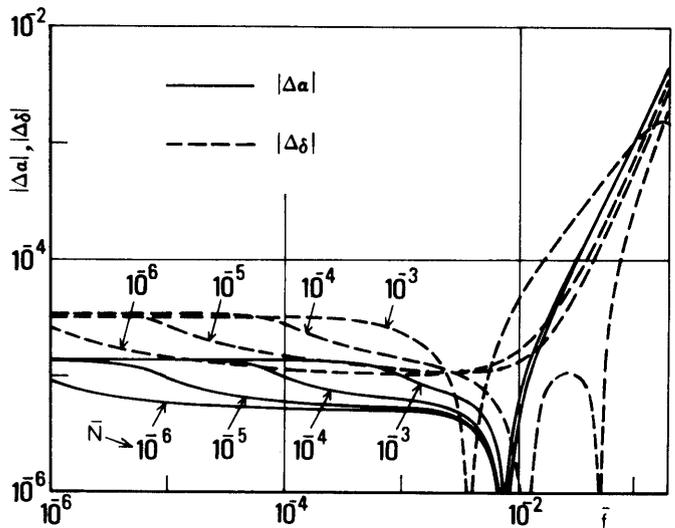


図4.6 近似Ⅰ・C2モードの $\alpha'$ ,  $\delta$ の誤差の $\bar{N}$ による変化 (計算データは図3.16に同じ)

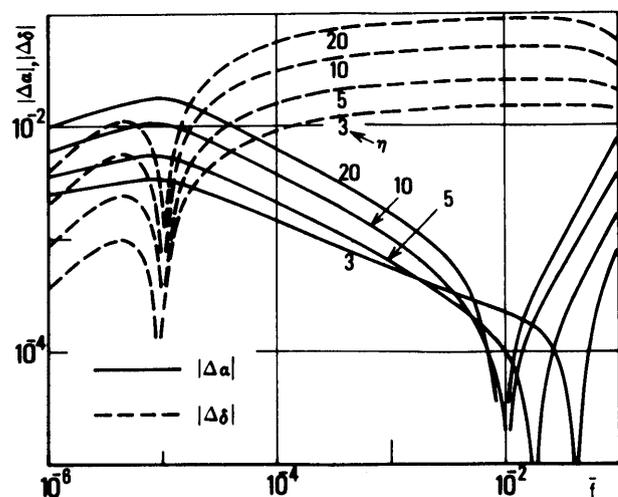


図4.7 近似Ⅱ・C1モードの $\alpha'$ ,  $\delta$ の誤差 (計算データは図3.13に同じ)

$|\Delta\alpha|$  と  $|\Delta\delta|$  の計算法は近似Ⅰの場合と同じである。近似Ⅱの精度は近似Ⅰに比べて格段に悪くなっているが、 $\eta$  が大きすぎなければ C 1 モードが主になる現象に対して実用に供することは可能であろう。

ところで、近似Ⅰでは  $\eta$  が小さいほど、近似Ⅱでは  $\eta$  が大きいほど誤差が大きくなっていて、 $\eta$  に対する誤差の傾向が逆になっている。近似Ⅰでは膜力理論を用いているので管の肉厚が小さいほど精度がよくなるのは当然であるが、近似Ⅱでは管と流体の管壁における速度の連続条件などに注意が払われていないので、管の運動が相対的に大きくなる薄肉管ほど精度が悪化するものと考えられる。

4.3.2 近似式の応用例 本章で導いた近似式の簡単な応用例として、図 4.8 に示される系の振動数応答を計算してみる。この系で

は流体の圧力振動である C 1 モードはもちろん発生するが、それと同時に  $x = l$  の閉端にかかる流体圧が管の伸縮運動、すなわち C 2 モードも励起することになる。

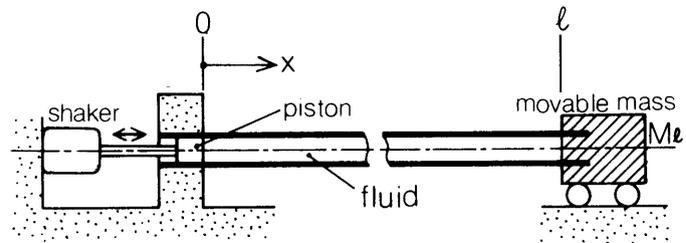


図 4.8 振動数応答の近似計算を行った系

さて、境界条件は  $x = 0$  においては  $\hat{p}$  を既知量とすると

$$\hat{p}(0) : \text{既知}, \quad \hat{U}(0) = 0 \quad (4.32)$$

$$\hat{Q}(l) = j\omega \hat{V}(l), \quad \hat{T}(l) = \pi b^2 \hat{p}(l) + M_l \omega^2 \hat{V}(l) \quad (4.33)$$

である。まず、式 (4.32) を式 (4.25) に適用するとつぎの 2 式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \hat{Q}(l) \\ \hat{T}(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{14} \\ T_{41} & T_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{Q}(0) \\ \hat{T}(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{12} \\ T_{42} \end{bmatrix} \hat{p}(0) \quad (4.34)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{P}(l) \\ \hat{U}(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{21} & T_{24} \\ T_{31} & T_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{Q}(0) \\ \hat{T}(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{22} \\ T_{32} \end{bmatrix} \hat{p}(0) \quad (4.35)$$

式 (4.33), (4.34) から  $\hat{Q}(l)$ ,  $\hat{T}(l)$  を消去すると

$$\begin{bmatrix} \hat{Q}(0) \\ \hat{T}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{14} \\ T_{41} & T_{44} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & j\omega \\ \pi b^2 & M_l \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{p}(l) \\ \hat{U}(l) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T_{12} \\ T_{42} \end{bmatrix} \hat{p}(0) \right\} \quad (4.36)$$

これを式 (4.35) に代入して整理すると

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T_{21} & T_{24} \\ T_{31} & T_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{14} \\ T_{41} & T_{44} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & j\omega \\ \pi b^2 & M_l \omega^2 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \hat{p}(l) \\ \hat{U}(l) \end{bmatrix} \\ & = - \left\{ \begin{bmatrix} T_{21} & T_{24} \\ T_{31} & T_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{14} \\ T_{41} & T_{44} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} T_{12} \\ T_{42} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T_{22} \\ T_{32} \end{bmatrix} \right\} \hat{p}(0) \end{aligned} \quad (4.37)$$

これから  $\hat{p}(l)/\hat{p}(0)$ ,  $\hat{U}(l)/\hat{p}(0)$  を求めることができる。  $x=l$  での管の軸変位  $\hat{U}(l)$  に対しては  $\hat{p}(0)$  よりも  $\hat{p}(l)$  の方が強制力として直接的な意味を持つから  $\hat{U}(l)/\hat{p}(0)$  に代えて  $\hat{U}(l)/\hat{p}(l)$  を計算する方がよいと思われるが、この計算も簡単である。

以上の方法で計算した数値例を図 4.9, 4.10 に示す。図では  $\hat{p}(0)$  を  $p_1$ ,  $\hat{p}(l)$  を  $p_2$ ,  $\hat{U}(l)$  を  $U_2$  と表わしてある。計算データは図中に示したが、 $a = 1 \text{ cm}$ ,  $h = 0.1 \text{ cm}$ ,  $l = 200 \text{ cm}$  の鋼管と適当な粘端の質量は  $\bar{M}_l = M_l / \rho_p a^3 = 0, 5^3, \infty$  の三つの場合を選んである。 $M_l = \infty$  は  $x=l$  においても管を固定しているのと同じであるから C2 モードは励起されない。 $M_l = \infty$  以外の場合には管の軸振動、すなわち C2 モードの共振によって管の両端間の圧力伝達特性が大きく影響を受けていることがわかる。C2 モードの発生がない両端固定管の場合には近似 II を使うこともできる。式 (4.29) において  $\hat{Q}(l) = 0$  とすると

$$\frac{\hat{p}(l)}{\hat{p}(0)} = \frac{1}{\cos \beta^* l} \quad (4.38)$$

となるが、これによる計算値も図 4.9 に破線で示した。近似 I で計算した  $M_l = \infty$  の場合との差異はこの場合には非常に小さい。それゆえ、 $\eta$  が大きすぎず、しかも C2 モードの影響がない場合には簡単な近似 II を用いる方がよいと思われる。

ここでは簡単な問題を例に選んだが、管の径や材質が途中で変化したり、 $x=0$  での管

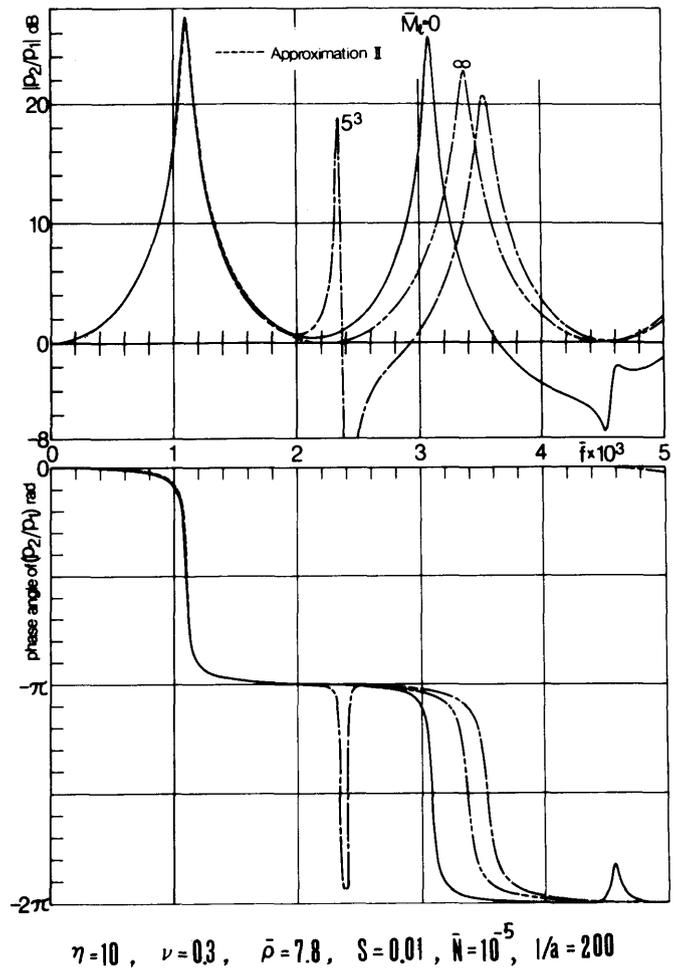


図 4.9 図 4.8 の系の両端管の圧力伝達特性

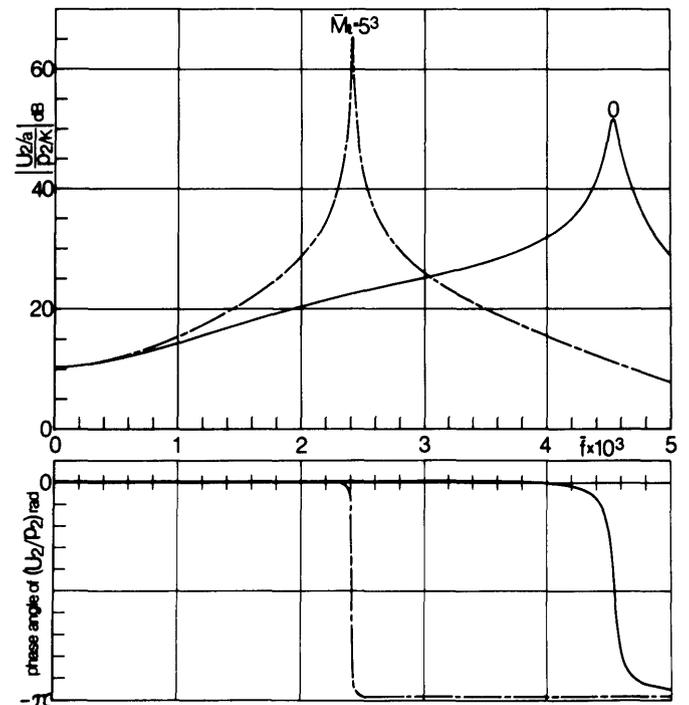


図 4.10 図 4.8 の系の可動端における圧力に対する軸変位の応答 (計算データは図 4.9 に同じ)

の運動が無視できなかつたりして問題がやや複雑になっても遷移行列法の特長を生かせば計算は比較的容易に実行できよう。

#### 4.4 管材の内部摩擦の影響

これまでは連成波の減衰の原因として流体の粘性だけを考えてきた。しかし、波の伝ば経路において波の力学的エネルギーを熱に変える要因として管の弾性変形を伴う連成波では管材の内部摩擦も考えなければならない場合もあり得る。そこで、本節では4.2節で導いた近似Ⅰがよい精度を持っているので、これを用いて波の減衰に対する内部摩擦の影響について調べておきたい。

さて、固体の、とりわけ金属材料の内部摩擦の原因は多様である。<sup>(40)</sup> そして、それを解析的に表現するための力学的なモデルもいくつか提案されている。<sup>(41)</sup> しかし、ここではそのようなことには一切立ち入らないで、内部摩擦があれば振動状態にある固体の応力とひずみの間には必ず位相のずれが生じるという事実だけに着目して検討する。応力とひずみの間に位相差があれば両者の間の比例係数としての弾性係数は複素数になる。すなわち、

$$E^* = E(1 + j\phi) \quad (4.39)$$

ここに $\phi$ は応力に対するひずみの位相遅れ(単位はrad)であって金属材料では特別な場合を除いて $\phi \ll 1$ であり、また、式(4.39)の表現は $\phi$ がそのように小さいときに限って許されるものでもある。 $\phi$ は損失率とも呼ばれ、その固体を単体で振動させたときの減衰の指標の一つで、その振動の対数減衰率を $\delta_M$ とすれば $\delta_M = \pi\phi$ の関係にある。連成波への管材の内部摩擦の影響を調べるには $\phi$ に適当な値を与えたうえで、これまでの解析におけるヤング係数 $E$ を式(4.39)の $E^*$ で置き換えればよい。近似Ⅰでは式(4.16)の第2, 3式に含まれる $S$ を

$$S^* = S / (1 + j\phi) \quad (4.40)$$

で置き換えればよい。図4.11は $\eta = 3, 40$ の二つの場合について $\phi$ をパラメータとしたときの対数減衰率で、流体粘性と内部摩擦の双方による減衰を表わす。前述のように近似Ⅰでは解に相似性があるので図の横軸を $\bar{f} / \bar{N}$ としてある。この図から明らかなようにC1モードよりもC2モードの方が、また、C1モードでは $\eta$ の大きい方が、C2モードでは $\eta$ の小さい方が内部摩擦の影響を相対的に大きく受けている。内部摩擦はひずみを通してのみその効果を発現するのであるから連成波のポテンシャルエネルギーのうちで管材のひずみエネルギーの占める割合が大きいほど内部摩擦の影響が大きくなるのである。また、流体粘性による減衰が小さい領域ほど内部摩擦の影響が目立つことも当然である。 $f$ や $N$ にもよることではあるが、 $\phi$ が $10^{-3}$ 以下であれば減衰要因としては流体粘性によるものの方が卓越する場合が多いであろう。管材が金属であれば、特殊な材料でない

限り低振動数域では  $\phi$  が小さいことが多いので、高粘度の液体に対しては管材の内部摩擦は無視できると考えられる。

なお、図 4.11 は  $\phi$  をパラメータにして描かれているが、これは特定の材料について  $\phi$  が振動数によらず一定とできることを意味するものではなく、あくまでも  $\delta'$  への  $\phi$  の影響を調べたにすぎない。 $\phi$  には振動数依存性があることの方がむしろ普通であるから、そのような場合には力学モデル (Voigt モデル, 三要素モデル等) の使用が可能であれば式(4.39)の  $E^*$  をそのモデルの式に置き換えればよいし、 $\phi$  が実験データとして与えられているだけならば式 (4.39) の  $\phi$  を実験式などによって振動数とともに変化させればよい。

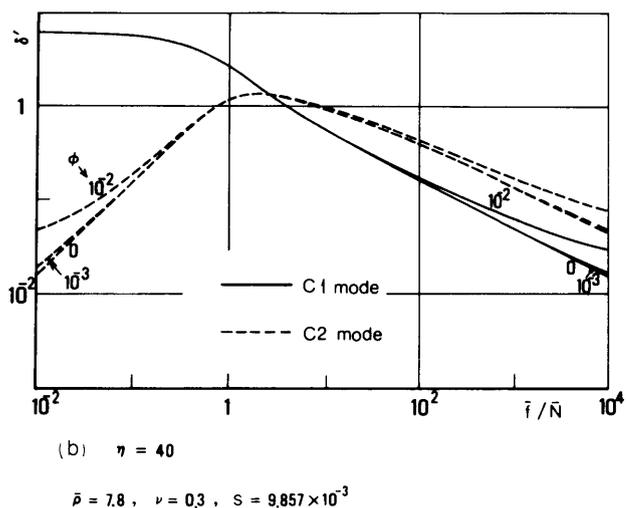
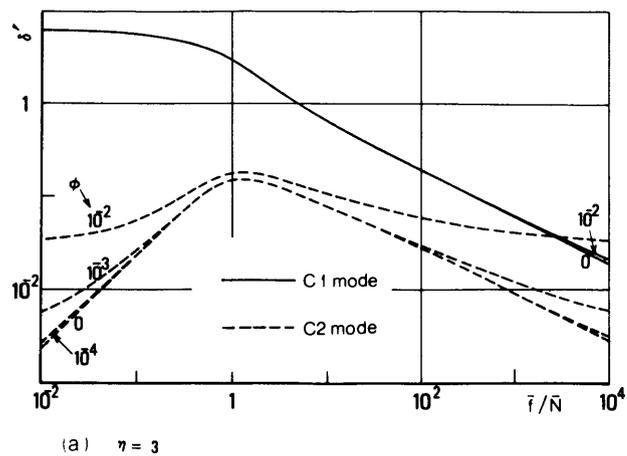


図 4.11 連成波の減衰に対する管材の内部摩擦の影響

#### 4.5 結 言

本章では前章の解析を簡単化し、粘性流体を含む管路の振動数応答の近似計算式を導いた。

(1)流体については管が剛体の場合の Brown による近似式と同じ考え方を採用し、管については半径方向の慣性力を省略した円筒かくの膜力近似の式を用いて導いた近似 I では C 1, C 2 モードの波数を振動数の関数として陽に解いた形に表わすことができ、これから構成した遷移行列によって  $\lambda > 20 a$  の領域に対する振動数応答を精度よく計算できる。

(2)C 1 モードだけを対象にしたより簡単な近似値 II は Brown の近似式と伝ば速度に関する Korteweg の近似式の単純な接合であって簡潔であるが、精度は近似 I との比較において劣る。しかし、管の肉厚に関するパラメータ  $\eta$  が 10 以下の金属管であれば第一近似の目的のために使用することは十分に可能である。

(3)近似 I の計算式を用いて管材の内部摩擦の連成波の減衰への影響を検討した。連成波のエネル

ギ分布において管のひずみエネルギーの占める割合の大きい $\eta$ が小さい場合の C2 モードにおいて内部摩擦の影響は最も顕著であるが、金属管の場合には特別の場合を除いて内部摩擦は小さいので、連成波の減衰の原因としては流体粘性によるものとの比較において無視できることが多いと考えられる。

## 第5章 管の境界条件に関する検討<sup>(26)</sup>

### 5.1 緒言

第2章，第3章では境界条件を考慮せずに連成波の伝ばに関する性質だけを対象に精密な解析を行った。しかし，現実の管路では特別な場合以外は境界条件を考慮に入れて解析することが必要であるから管路の全長にわたるような系の主要な現象と種々の境界条件がどのように関連するのかを知ることは不可欠である。

さて，本研究の対象は連続体の線形波動・振動に属する問題であるが，この分野で境界条件をも含めて精密に解析する方法は十分に確立されているとは言えないようである。特別な場合として異種異径の丸棒を接合した系における弾性波<sup>(42)</sup>，剛管内粘性流体の波<sup>(14)</sup>などの研究で境界条件を精密に扱うことを志向した例は少数ながら見られるが，それらの方法は複合系である連成波の解析に直ちに適用できるほど整理されたものではない。そこで，本章でははじめに連続体の一般的な一次元的波動の境界値問題の扱い方の整理を試み，その方法によって連成波の問題における境界条件について精密な解析を行い，その結果から近似的な扱い方の合理性の有無などを調べる。

### 5.2 伝ば項と非伝ば項

連続体の波動では媒質の種類によって基礎方程式が変わるが，波の性質という面では類似点も多く，共通に議論できることもある。そこで本節では対象を連成波動に特定せずに連続体の一次元的な線形波動一般における境界条件の検討の方法を考察してみる。なお，ここで言う一次元的波動とは空間座標が1個という意味ではなく，弾性棒や管，あるいは管内流体など細長い連続体において軸に沿って進行したり，定在したりする波動・振動現象を想定して用いる用語である。

さて， $x$ 軸に沿って生じる一次元的な波動を解析する際に用いられる解の形の一つにつきのようなものがある。

$$\varphi = \Phi \cdot \exp [j(\beta x - \omega t)] \quad (5.1)$$

ここに $\varphi$ は変位や圧力などの物理量であり， $\Phi$ は $\varphi$ の振幅，あるいは $x$ 軸に垂直な断面上での振幅分布関数で $x$ や $t$ を含まない。解の表現のしかたには式(5.1)の形以外にもいくつかあるが，いずれも適当な変換によって式(5.1)の形に帰着できる。式(5.1)のように仮定した解，あるいは解の組をその問題の基礎方程式に代入して解析を進めれば $\beta$ と $\omega$ の関係を定める特性方程式に到達する。これを形式的に

$$G(\beta, \omega) = 0 \quad (5.2)$$

と書いておく。この特性方程式は、系の基礎式が軸対称の場合なども含めて三次元理論そのものか、三次元理論を含むものであれば一般に超越方程式になり、三次元理論によらないはりや円筒かくの問題では周知のように代数方程式になる。第2章の式(2.27)や式(2.31)は $\alpha = \omega / \beta$ の置換によって前者の例となる。いずれにしても、系に $x$ 軸の正負を区別する方向性がなければ、 $\beta$ と $-\beta$ が同時に式(5.2)を満たす。方向性がなければ基礎式は $x$ の正負に関して対称となっているからである。このことは基礎式の近似の程度や散逸の有無にはよらない。この対称性によって $G(\beta, \omega)$ を $\beta$ の多項式、あるいは無限級数の形に展開すれば $\beta$ の偶数べきしか現われないことになる。したがって、特性方程式の係数がすべて実数となる非散逸系では $\omega$ をある実数とすれば、それに対応する $\beta$ は絶対値の等しい正負の実数、反対符号の二組の純虚数、および互いに符号が反対の二組の共役複素数のいずれかに分類されることになる。このようにして求めた $\beta$ を式(5.1)に代入すると、 $\beta$ が実数であれば $\varphi$ は $\beta$ の符号によって $x$ 軸の正か負のいずれかの方向に進む正弦波となるが、 $\beta$ が純虚数ならば $\varphi$ には $x$ 軸に沿っての位相の変化がなく、波としての性質は現われない。 $\beta$ が複素数の場合にはその偏角によって波の性質を帯びるか否かが決まるが、非散逸系では $\beta$ の虚部がかなり大きく、 $\varphi$ に波の性質がほとんどないことが多い。このようなことから、 $\beta$ が実数の場合の波動モードを本論文では伝ばモード、あるいは伝ば項と呼び、 $\beta$ が実数以外の場合を非伝ばモード、非伝ば項と呼んで区別することにする。弦の振動や弾性棒の縦振動に用いられる一次元の波動方程式

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \quad (5.3)$$

は伝ば項しか現われない特別な場合である。

さて、はりや円筒かくの振動問題のように特性方程式が代数方程式になり、ある $\omega$ に対応する $\beta$ が有限個しかない場合には、基礎式の一般解はすべての $\beta$ に対応する特解の重ね合わせとなることは周知のとおりである。特性方程式が超越方程式になる場合には特定の $\omega$ に対応する $\beta$ は一般に無限個あるが、この場合にもすべての $\beta$ に対応する特解の重ね合わせが一般解になると考えることは自然である。力学的に見れば、一般解の項数は明らかに軸に垂直な断面上での系の自由度に依存している。 $\beta$ が有限個となるような問題では変位分布を直線的に仮定するなどの操作によって系の自由度を大幅に減らしているのである。一般解が無限級数となる簡単な例は剛円管内の非粘性流体の波動である。式(2.32)における $m$ は式(2.18)で与えられているが、 $\alpha = \omega / \beta$ の変換を施すと

$$m = \sqrt{(\omega / c)^2 - \beta^2} \quad (5.4)$$

これを式(2.32)に代入して $\beta$ について解けば

$$\beta = \pm \sqrt{(\omega/c)^2 - (z_i/b)^2} \quad (5.5)$$

$J_1(z)$ の零点 $z_i$ は無数個あるから $\beta$ も無数個あることがわかる。しかし、 $z_i$ は番号 $i$ とともにいくらでも大きくなるから、有限の $\omega$ に対して実数値をとる $\beta$ は有限個しかないこともわかる。すなわち、伝ば項は有限個だけで、一般解を構成する残りの項はすべて非伝ば項となるのである。このことは後に示す連成波でも同じで、多分、連続体の一次元的波動において一般的に成立すると推測される。

ここで、非伝ば項の役割などを知るために $0 \leq x$ を占める何らかの半無限長系を考え、 $x=0$ で時間的に調和変動が起きるものとする。すると、一般解の各項のうち、 $\text{Im}(\beta) < 0$ となる波数に対応する非伝ば項の係数はすべて零でなくてはならないことがわかる。これらの非伝ば項は $x$ の増

大とともに発散するからである。それゆえ、残る非伝ば項は $\text{Im}(\beta) > 0$ のものばかりであるが、

これらは $x$ の増加に従って指数関数的に値を減じる。つまり、境界から離れると系の運動は実質的に有限個の伝ば項だけに支配されることになる。

非伝ば項は境界条件との適合のために現われると見なせるから境界項という名称もふさわしいと思われる。有限長系では、 $\text{Im}(\beta) < 0$ となる一群

の非伝ば項はもう一方の境界の近傍で意味を持つ境界項となる。その簡単な具体例としてはりの曲

げ振動の初等理論の両端固定の場合の固有関数を伝ば項と非伝ば項とに分けて図5.1に示す。非伝

ば項が影響する距離は伝ば項の位相に換算して測らなければならないが、非伝ば項の波数の虚部が

伝ば項の波数(実数)に比べて大きいほど相対的に近距離までしか影響は及ばない。この点から見るとここに示した例は非伝ば項の影響距離が大きい場合の典型例のようである。

さて、伝ば項と非伝ば項で構成した一般解の各項の係数は与えられた境界条件を満たすように決められなければならない。一般解が有限項のときには係数の決定は簡単であるが、無限項のときには注意が必要である。厳密な決定が可能な場合とそうでない場合があるからで、式(5.1)の $\phi$ に

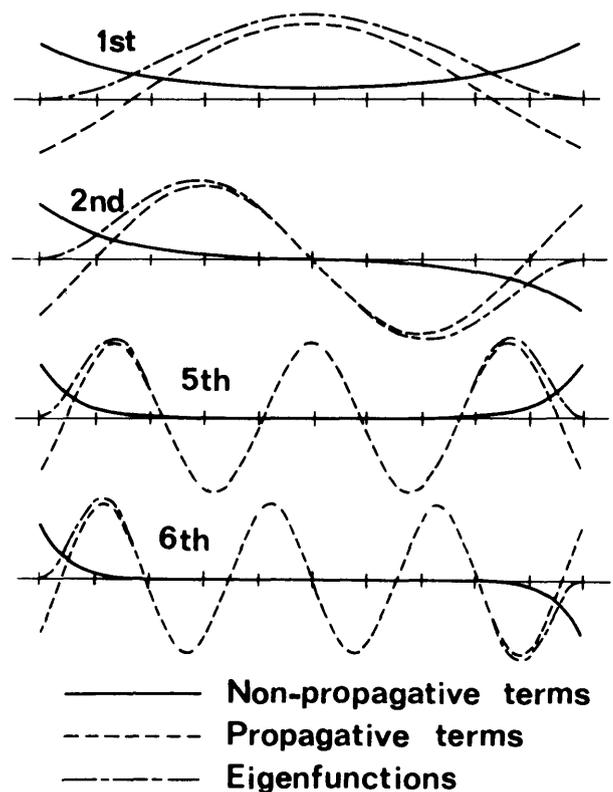


図5.1 両端固定はりの曲げ振動における伝ば項と非伝ば項

相当する振幅分布関数の間に直交性があるかないかによる。直交性のある例は剛円管内非粘性流体の波動で、たとえば圧力  $p$  は  $J_0(mr)$  で振幅分布が決められるが、二つの波数  $\beta_i$  と  $\beta_k$  に対応する  $m$  を  $m_i$  と  $m_k$  とすれば

$$\int_0^b J_0(m_i r) J_0(m_k r) r dr = \begin{cases} 0 & (i \neq k) \\ \frac{b^2}{z_i} \{J_0(z_i)\}^2 & (i = k) \end{cases} \quad (5.6)$$

(33)

である。これは Lommel の定理に剛管の条件、式 (2.31) を適用すれば求められる。式 (5.6) を用いれば、一般解の各項の係数はフーリエ級数の場合と同様に決められる。しかし、このような操作が常に可能というわけではなく、係数は境界条件が近似的に満足されるように選点法や最小二乗法を用いて決めざるを得ないこともある。この場合には数学的な意味での厳密性という点では問題も残るが、数値計算の結果の精度については各問題に応じた方法で数値的に検証できるので実際上の問題は少ない。

さて、以上に述べてきた非伝ば項の性質からみて、境界条件を考慮しない無限長系での解析が伝ば項だけを対象とするものであることは明らかである。しかし、それが長い有限長系に対しては漸近的な近似になっているとすることができよう。

なお、本論文では伝ば項、非伝ば項という名称を用いたが、最近、古賀らは円筒かくの振動問題<sup>(43)</sup>で本論文の非伝ば項に相当するものを縁領域解と呼んでいることを指摘しておきたい。

### 5.3 流体が非粘性の場合の連成波動 —境界条件との関連—

5.3.1 波数スペクトル 前節の議論によれば一定振動数で調和運動している一次元的な連続体の解析は、その振動数における波数をすべて求め、それらに対応する特解をすべて重ね合わせて一般解を構成し、境界条件を満たすように係数を定めれば一応完了することになる。しかし、その前提として、各振動数における波数の分布、すなわち振動数に対する波数のスペクトルをあらかじめ知っておくことが望ましいし、波数スペクトルだけでも定性的ながら有効な考察が可能なこともある。そこで図 5.2 に複素領域で計算した波数スペクトルを示す。計算式は式 (2.27) に  $\alpha = \omega / \beta$  の変換を施したものであり、計算法は Newton - Raphson 法を用いた。計算データは図 2.4 と同じである。比較のために、非連成の管と流体の波数も示した。各場合とも伝ば域と非伝ば域の間の連続性を考慮して曲線に名称を付してあるが、これは図 2.4 で用いた波動モードの名称と同じである。ただ、破線で示した CC, TC は連成波と管単独の実部、虚部がともに値を持つ複素波数を、 $\text{Re}(\beta) - \omega$ ,  $\text{Im}(\beta) - \omega$  平面への投影として示したもので、これらはいずれも  $\omega$  が大きくなるとほかの曲線に合流して消滅する。そのほかの曲線はすべて各平面上に値を持つ。また、各曲線上

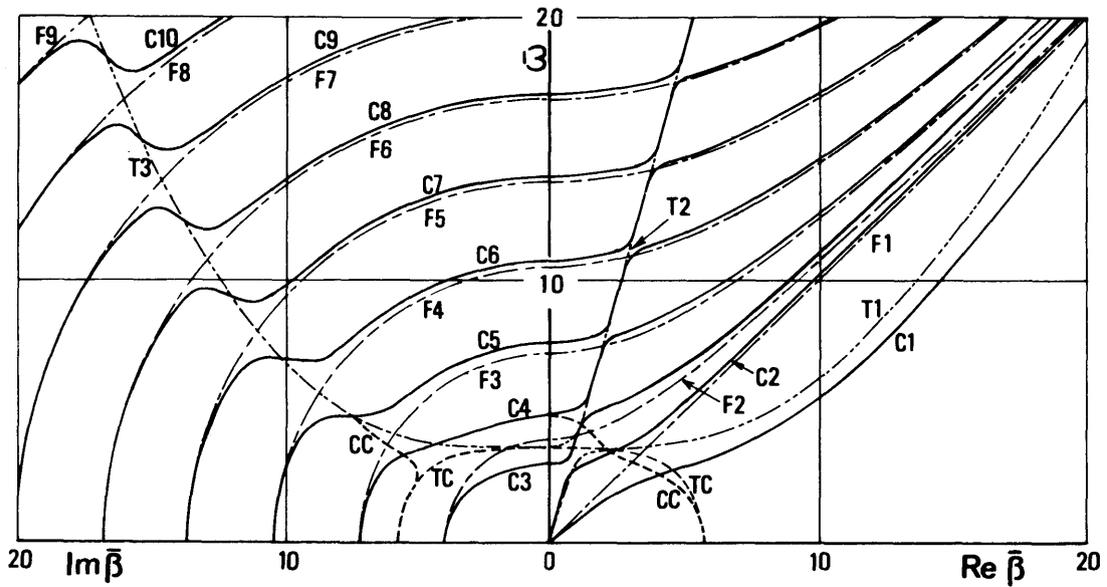


図 5.2 連成波および非連成の管と流体の波数スペクトル  
(計算データは図 2.4 に同じ)

で  $\beta = 0$  となる  $\omega$  は各波動モードのしゃ断振動数で、各モードの伝ば、非伝ばの性質は連成波と非連成の流体では振動数がしゃ断振動数より大きい、小さいか決められることがわかる。しかし、管単独の場合には性質がやや複雑であって T 3 はしゃ断振動数以上で非伝ば的になっているが、同じことは三次元弾性論で計算した弾性丸棒の波動にも見られる。図 5.2 では、位相速度は  $\alpha = \omega / \beta$  の関係によって実波数域にある曲線上の 1 点と原点を結ぶ直線の傾きで、群速度は式 (2.28) の関係によってその点における接線の傾きで表わされている。第 2 章で示した図 2.4 などは、図 5.2 の一部の表現法を変えたものになっているのである。

さて、この計算に用いた Herrmann - Mirsky の円筒かく理論の精度は非伝ば域については全く未検討である。そこで、この点をまず確かめたが、この円筒かく理論による管単独の波数は図 5.2 を大きく覆う領域で三次元弾性論によるものとよく一致し、図上ではその差を区別できないほどであった。また図示の範囲では Herrmann らの理論と重なるもの以外に三次元弾性論によっても波数は発見されなかった。それゆえ、三次元理論では存在するはずの他の波数は虚部が非常に大きく、それから導かれる波動モードはすべて非伝ば性が非常に強くなるので、管端近傍の管の応力分布などを精密に計算しようとする場合以外は明らかに無視することができ、波の大域的な振舞にはほとんど影響しないと考えられる。

図 5.2 においては  $\omega$  を一定にしたときに現われる実波数は各場合とも有限個しかないが、虚数および複素数の波数は円筒かく理論で近似した管単独の場合を除いて分布の傾向から明らかに無限個となることに注意しておきたい。また、連成波では C 3 モードのしゃ断振動数以下で伝ば性を持つ

のは C 1, C 2 の二つのモードだけである。2.4 節および第 4 章で近似の対象を C 1, C 2 だけに限定することができたのは、実はそれ以外のモードが低振動数域で伝ば性を持っていないからということが理論的な根拠だったのである。

ここで、応用上は低振動数域が重要になるので  $\bar{\omega} < 2$  の領域での各波動モードと境界条件のかかり方を検討してみる。ちなみに、 $2a = 1\text{cm}$ 、流体を水とすれば  $\bar{\omega} = 2$  は約 95 kHz に相当する。さて、図 5.2 の  $\bar{\omega} < 2$  では C 3, C 4 ……は F 2, F 3 ……と、C C は T C と非常に接近しており、 $\bar{\omega} = 0$  でこれらは完全に一致する。このことから明らかなように、C 3, ……は流体の運動を主にし、C C は管の変形を主にする非伝ばモードである。そこで、C 3 以上のいくつかの非伝ばモードと流体が主になる伝ばモードの軸方向粒子速度  $q_z$  の断面上での分布の代表例を図 5.3 に示す。圧力  $p$  の分布もこれに相似である。いま、管端で平らな頭部を持ち、管内径と等しい直径のピストンで流体を加振する場合を考えてみる。この場合、伝ばする波は C 1 モードの形をとることは明らかであるが、図 5.3 に示されるように C 1 の  $q_z$  分布は平坦ではないので、C 1 モードだけでピストン面との速度の連続性を満たすことはできない。そこで、C 3 以上の流体が主になる非伝ばモードによってこの差が埋められるのである。このように、C 3, C 4 ……は管端での流体の粒子速度や圧力などの分布に密接に関連して発生する非伝ばモードなのである。一方、C C モードの特徴を調べるために平均半径  $r = a$  面上での各方向の応力振幅の軸応力に対する比を図 5.4 に示す。この図は C 1, C 2 の二つの伝ばモードについても示してある。第 2 章で調べた各モードの特徴に従って、C 1 では  $\sigma_r$  が大きく  $\tau$  は小さい。また、C 2 では  $\sigma_z$  が主で  $\tau$  はほとんど問題にならない程度である。これに対して、C C モードでは  $\tau$  と  $\sigma_r$  が大きく、とくに  $\tau$  は C 1, C 2 に比

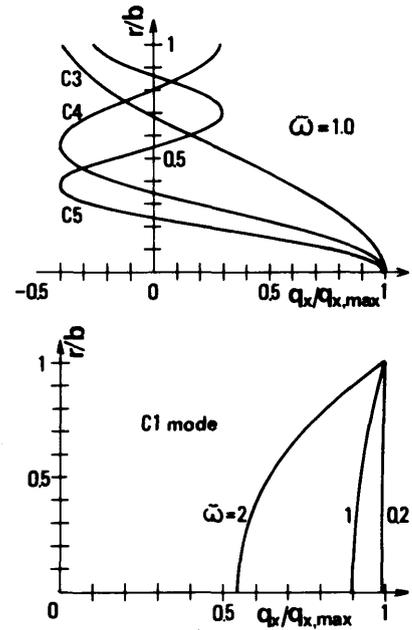


図 5.3 モード C 1 と C 3 ~ C 5 の  $q_z$  分布の代表例

較は大きい。また、C 2 では  $\sigma_z$  が主で  $\tau$  はほとんど問題にならない程度である。これに対して、C C モードでは  $\tau$  と  $\sigma_r$  が大きく、とくに  $\tau$  は C 1, C 2 に比

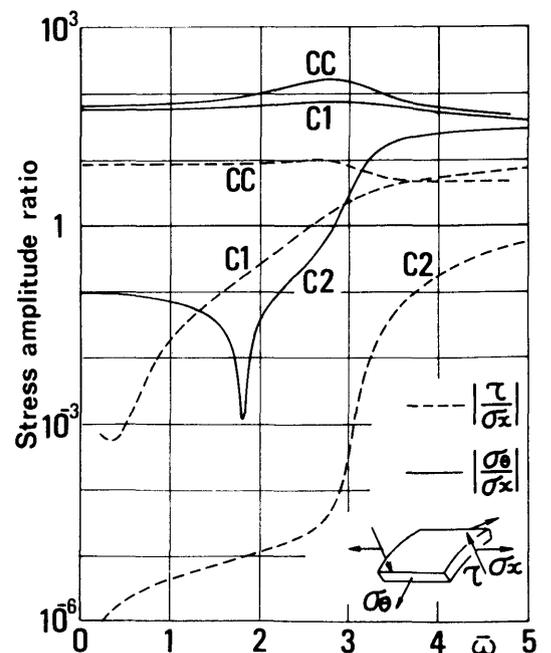


図 5.4 C 1, C 2, C C モードの管平均半径面上における各方向の応力振幅の比較

べてきわだって大きい。これは C C が管端での管の半径方向の拘束に関係が深いことを示している。端的な例として静的な場合を考えると、内圧が高まれば管は端から離れたところではほぼ一様にふくらむが、管端で半径方向変位が拘束されていれば管端に近づくにつれてふくらみは徐々に小さくなるわけで、変形の様子からせん断応力  $\tau$  が大きくなることも明らかである。C C モードは管端付近のこのような変化を主に表わす項となるのである。それゆえ、流体圧力に対する応答として管の半径方向変位も生じる C 1 モードとの関係は大きいと考えられるが、管の軸方向運動が主になる C 2 モードに対しては影響が小さいと考えられる。

以上をまとめると、低振動数域では連成波の非伝ばモードはいずれも管端において主に C 1 モードとの相互作用によって発生するが、C 2 モードとのかかわりは小さいと考えられる。

5.3.2 数値計算例 連成波動において非伝ば項の影響が具体的にどの程度かを見積もるために、つぎの問題について数値的に検討した。 $x \geq 0$  を領域とする半無限長管の管端  $x = 0$  で管のすべての変位が拘束され、管路も閉じているとする。そして  $x = \infty$  に C 1 モードの波を  $x$  の負方向に発射する波源があるとすれば、管端で波は反射されることになるが、その状態を代表的な振動数について調べてみる。任意の位置における波の状態は入射波と反射波の重ね合わせで表現することができるが、それを式 (2.21) などを参照して軸方向の粒子速度  $q_z$  について複素数形で表示すれば

$$q_z = A_1 J_0(m_1 r) \exp[-j(\beta_1 x + \omega t)] + \sum_{i=1}^{\infty} B_i J_0(m_i r) \exp[j(\beta_i x - \omega t)] \quad (5.7)$$

$A_1$  を係数とする項が入射波であり、残りはすべて反射によって生じるものである。反射波には C 1, C 2 の二つの伝ばモードと、 $\text{Im}(\beta) > 0$  であるすべての非伝ばモードが含まれるが、とくに C C モードには  $\text{Re}(\beta)$  が正負の二つのものがあることに注意する必要がある。 $q_z$  に対応して  $p$  や管の変位  $\psi$ ,  $u$ ,  $w$  なども同様に表現することができる。たとえば

$$w = A_1 \frac{m_1 J_1(m_1 b)}{\beta_1 \omega} \exp[-j(\beta_1 x + \omega t)] - \sum_{i=1}^{\infty} B_i \frac{m_i J_1(m_i b)}{\beta_i \omega} \exp[j(\beta_i x - \omega t)] \quad (5.8)$$

などとなる。一方、境界条件は

$$\psi = u = w = 0 \quad (x = 0) \quad (5.9)$$

$$q_z = 0 \quad (x = 0, \quad 0 \leq r \leq b) \quad (5.10)$$

以上によって、 $\omega$  と  $A_1$  を指定したときに反射波の各項の係数  $B_i$  を決めなければならない。この場合に、 $x$  軸に垂直な断面上での振幅分布関数の間に直交性があれば、それを用いることができるが、

連成波にはそのような性質はないと判断される。図 5.2 において、C 7, C 8, ……が T 3 と交わるあたりで一定の  $\omega$  に対する  $\beta$  に多価性が見られる。これはこのような振動数帯で一般解を構成するとき、一つの  $\omega - \beta$  曲線分枝に属する特解を加え合わせる必要のあることを意味する。ところが、 $\beta$  がごくわずかしか変わらない場合には振幅分布は類似したものになるから、これらの解の間に直交性があるとは考えられない。ある関数系が直交系であるというときには例外の存在は許されない。それゆえ、連成波では直交性はないと考えられるのである。このような事情から、係数  $B_i$  の決定に際しては近似法を用いざるを得ないが、ここではアルゴリズムの簡単さから選点法を用いた。まず、式 (5.7), (5.8) などの反射波の項数を  $n$  で打ち切る。そして境界条件のうち、式 (5.10) は  $0 \leq r \leq b$  を等分して  $(n-3)$  個の分点で満たすようにすると  $(n-3)$  個の一次方程式が得られるが、これと式 (5.9) から導かれる 3 個の方程式を連立させれば  $n$  個の  $B_i$  が決定できる。反射波の級数は C 1, C 2 の二つの伝ば項と  $\text{Im}(\bar{\beta}) < 100$  のすべての非伝ば項で構成したが、 $\bar{\omega} \leq 2$  ではいずれも  $n = 34$  であった。このとき、式 (5.10) は断面上の平均値で  $10^{-5}$  以下、局所的には  $10^{-4}$  程度の精度で満足されていた。

さて、計算結果は  $p$ ,  $q_*$  と管の半径方向変位  $w$  について図 5.5 に示す。横軸は入射波である C 1 の各振動数における波長を  $\lambda_i$  として  $x/\lambda_i$  で表わし、縦軸はそれぞれの量の入射波の振幅を 0.5 としたもので、計算結果は入射波と反射波の和である。入射波と反射波の干渉で定常波が生じているが、その波形は管端付近を除いてほぼ完全な正弦波になっている。これは反射波の基本成分がやはり C 1 モードであって、C 2 モードの成分がほとんど含まれていないからである。定常波の位相は非伝ば項の影響で振動数が大きくなるほどずれている。それは拘束による管端の近傍での管の剛性の増大のためにこの部分の伝ば速度が少し大きくなり、遠方から管端の方向を見たときに管の長さが見かけ上少し減る方向に生じている。振動数が大きくなるほど位相のずれが大きくなるのは  $\omega$  が大きくなるほど伝ば項の波長は小さくなるのに対して図 5.2 からわかるように非伝ば項の  $\text{Im}(\beta)$  の変化は小さく、管端から非伝ば項の影響が及ぶ距離には大きな変化はないからである。図 5.5 では  $\bar{\omega} = 0.2$  のときの位相のずれはきわめて小さいので、それ以下の振動数域では非伝ば項は管の全長にわたるような現象に対してほとんど影響しないと見てよい。つまり、C 1 モードの伝ば速度の近似値を用いて次元問題として解析することが可能になるのである。 $\bar{\omega} = 0.2$  は図 5.5 の中に示したように波長にすれば  $\lambda_1/a \approx 26.6$  であり、2.4 節で示した近似の限界  $\bar{\lambda} = 20$  と比較的近い値になっている。

本章で一まず議論を精密化したのは、以上に述べてきたように、関与する要因の多い連成波動でも支配的な要因とそうでないものがあり、その区別を明確にすることによって簡単な近似で扱いた

いという要請の妥当性を理論的に確かめることが主な目的であった。ここでは単に一つの簡単な境界条件について計算しただけであるが、非伝ば項の性質を考えれば、ここでの結論にある程度の一般性を持たせてもよいことは明らかである。この結果、連成波の境界条件として重要なのはC1モードに対しては管路が開いているか否か、あるいは非同次の問題ならば流体粒子速度や圧力の平均振幅などであり、C2モードに対しては管の軸方向の拘束状態などであって、そのほかの要因は主に非伝ば項が関与することなので管全長にわたるような現象に対しては無視できることが明らかになった。ただ、管端の状態は実際には弁などによって管路が部分的にしか開いていなかったり、あるいはエルボなどを介して他の管に接続されていたりするなど複雑な場合が多いが、そのような場合に境界条件を合理的に一次元近似をするためにはどのようにすべきかなど今後検討すべきことも多く残されている。

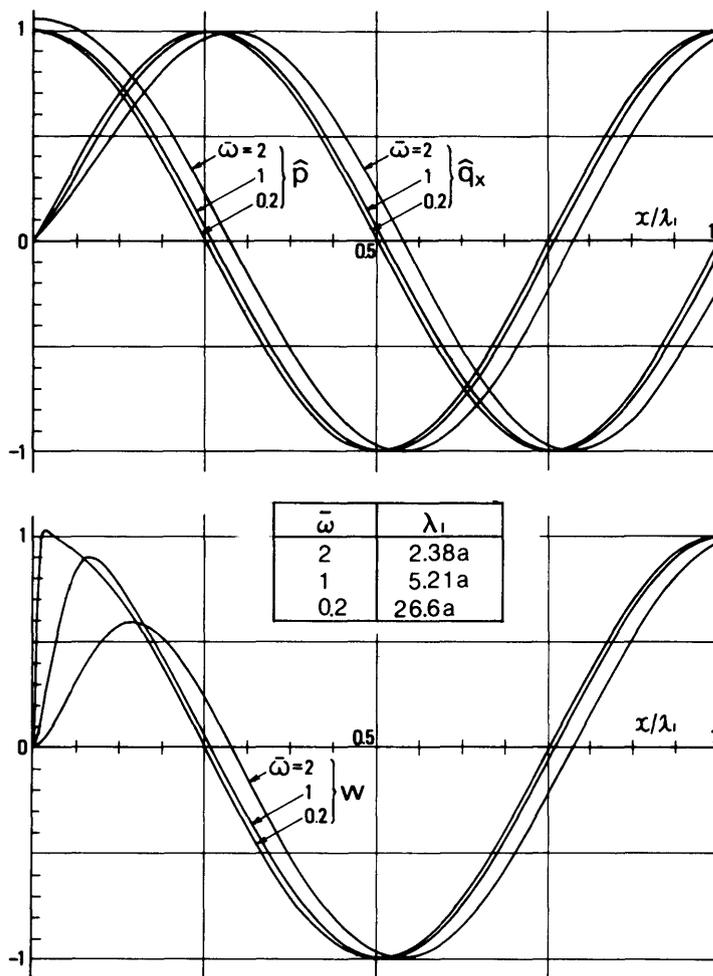
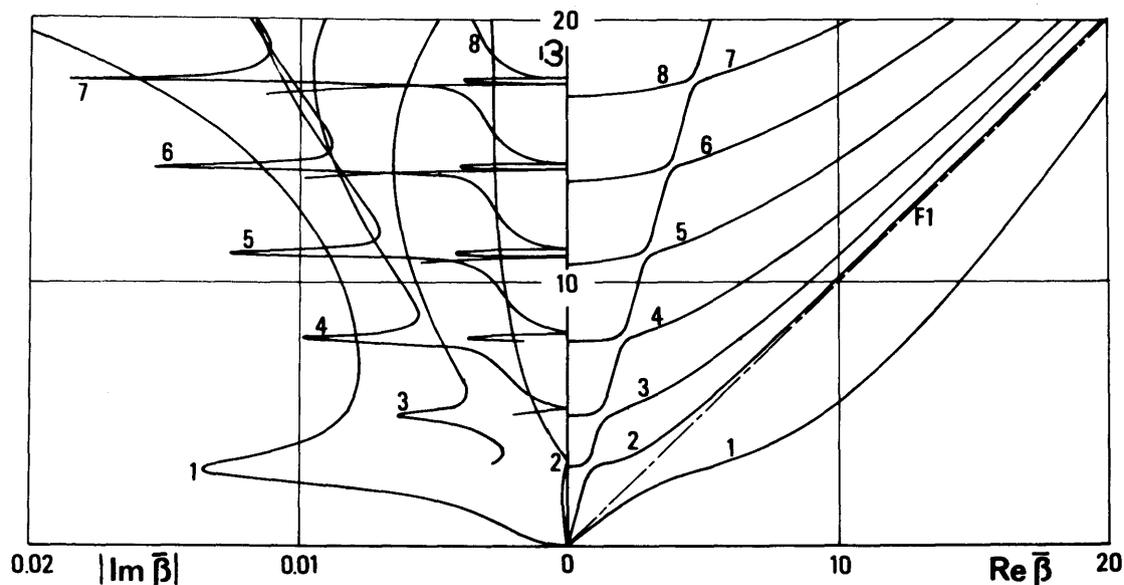


図 5.5 「管完全固定、管路閉鎖」端における入射波(C1モード)と反射波の合成波

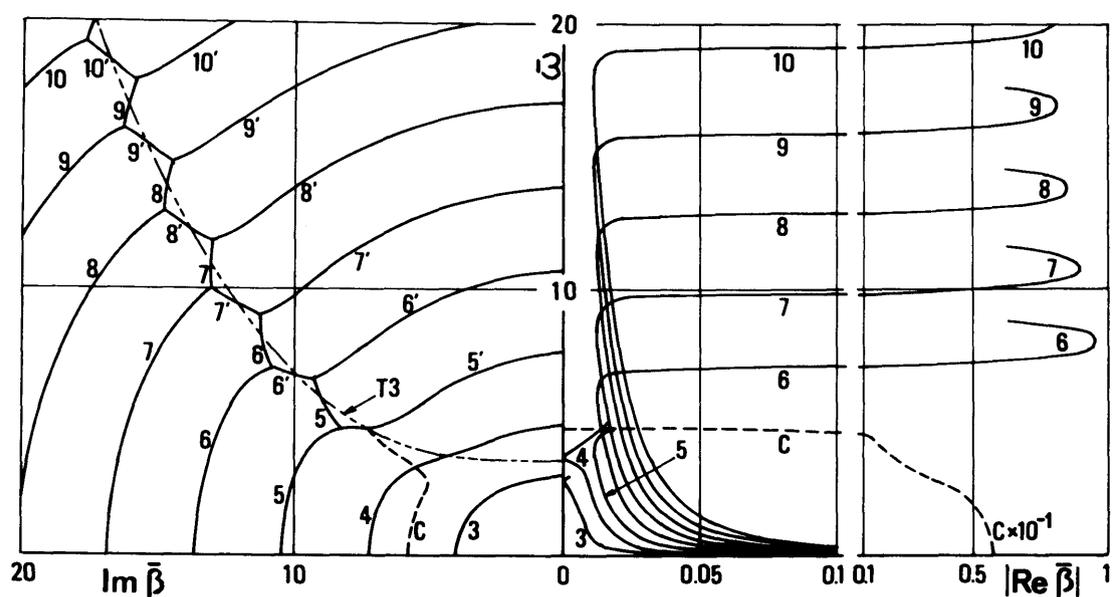
#### 5.4 流体に粘性がある場合の連成波動 —境界条件との関連—

粘性流体の波動など散逸系では一般に実波数は存在しない。そこで少しあいまいであるが、波数が実数に近い複素数であるものを伝ば項、それ以外のものを非伝ば項と呼ぶことにする。実際には散逸が過大でなければ、波数は対応する非散逸系のものから偏角がわずかに移動する程度のことが多く、実数に近い波数の一群と他の波数の一群との間には偏角に大きな開きがあるのが普通なので、上述のような基準でさしつかえないことが多い。

図 5.6 は図 5.2 と同じデータに無次元動粘度  $\bar{N} = 10^{-5}$  を付与して計算した波数スペクトルで、図 5.2 の実波数に対応するものを図の (a) に、それ以外のものを (b) に分けて、それぞれ実部と虚



(a)



(b)

図 5.6 流体に粘性がある場合の連成波の波数スペクトル  
 $(\bar{N} = 10^{-5}$ , 他のデータは図 5.2 に同じ)

部を示してある。これらの図では基本的には連成波だけを示しているのでモード名の C は省略した。図 5.6 (a) の C 1, C 2 の  $\text{Re}(\beta)$  は低振動数域で直線的に描かれ、非分散的のようにになっているが、これは図示が困難なためであって、実際には第 3 章で示したように粘性による分散が非常に低い振動数では生じる。また、図 (b) では煩雑さを避けるために  $\text{Re}(\beta)$  は主な分枝の途中までを示してある。図 5.6 を図 5.2 と比較すると振動数が大きい領域ではかなりの違いが見られるが、 $\bar{\omega} < 2$  の低振動数域では粘性は波数の偏角に小さな変化を生じさせているだけである。したがって、各波動モードの伝ば、非伝ばの性質は粘性によって大きく変わることはないので、境界条件と各波動モードとのかかわり方も前節で調べた結果とほぼ同じである。それゆえ、第 4 章で C 1, C 2 の二

つのモードだけを対象に近似式を導いたことは妥当なものであったと言えるだろう。

図 5.6 は図 5.2 と近いものではあるが、減衰は式 (3.31) から明らかなように波数の偏角に支配されるので、減衰までを考慮する限りは差が小さくても同一視することはできない。二つの図の近さは具体的には粘性の有無によらず、共振振動数に大きな変化がないなどの点に現われる。

## 5.5 結 言

本章では管端で境界条件が任意に与えられたときの精密な解析法について考察した。その結果、つぎのことが明らかになった。

(1) 連成波動の問題に限らず、一般の一次元的な線形波動系において方程式の解には波としての性質を持つ実数の波数のもののほかに波数が複素数または虚数であって波としての性質を欠くものも存在する。実波数の解を伝ば項、それ以外のものを非伝ば項と呼ぶ。

(2) 任意に与えられた境界条件を満たすためには伝ば項以外に系の自由度に応じた数の非伝ば項を考慮して一般解を構成する必要がある。

(3) 非伝ば項は境界の近傍でのみ伝ば項と比較し得るほどの値を持つが、境界から離れると急速に値を減じる。したがって境界からある程度離れた領域においては波動は実質的に伝ば項だけに支配される。

(4) 流体が非粘性の場合の連成波の低振動数域では伝ば項は  $C_1$ ,  $C_2$  の二つのモードだけで、他はすべて非伝ば項となる。非伝ば項のうち、 $C_3$ ,  $C_4$ , ……などは管端における流体の圧力や粒子速度分布の断面上での変化を表わすものとなり、 $C_C$  モードは管端での管の半径方向の拘束を表わすものになる。

(5) 連成波の低振動数域では非伝ば項は境界からの到達距離が非常に短いのでそれらを見捨てても波動の管の全長にわたるような挙動にはほとんど影響がない。それゆえ、 $C_1$ ,  $C_2$  の二つの伝ば項だけを対象にした連成波の近似解析は理論的に妥当である。

(6) 流体に粘性があっても連成波の各モードの伝ば、非伝ばの性質には少なくとも低振動数域では大きな変化はなく、流体が非粘性の場合に対して導かれた結論(4), (5)は流体に粘性があっても成立する。

## 第6章 非軸対称波動モードに関する検討

### 6.1 緒言

本論文の解析はこれまでは対象を軸対称の現象に限ってきた。これは簡単のためでもあるが、連成波動では非軸対称の現象は起きにくいという定性的判断があったためでもある。この考えは流体中の圧力伝ばが少なくとも低振動数域では等方的にしか起こらないということに関連しており、妥当性が著しく欠けるとは思われないが、理論的に明確な検討をしておくことが望ましい。そこで第5章で導入した波動モードの伝ば、非伝ばという性質の面からこの問題を検討してみる。

### 6.2 解析

ここでは管の基礎式として Flügge の円筒かく理論を用いる。これは回転慣性とせん断変形の影響を含まないので非常に高い振動数の領域では意味を失うが、低振動数域での精度はよい。図 6.1 に示したように、管の平均半径( $r = a$ ) 面上の変位として、 $x$ ,  $r$  方向の  $u$ ,  $w$  に加えて、 $\theta$  方向の成分を  $v$  とすれば、管の運動方程式は内壁に作用する流体圧力  $p_i$  の影響を考慮してつぎのように書ける。

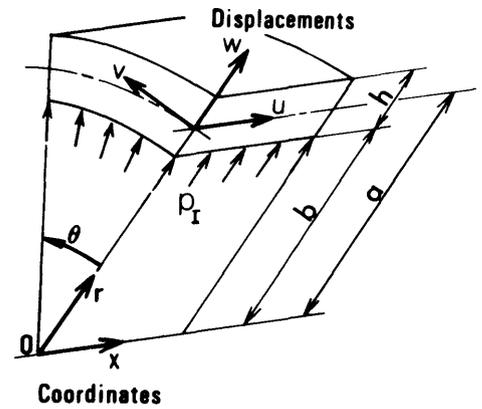


図 6.1 記号

$$\left. \begin{aligned}
 & \left\{ k_r \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{a} \left( \frac{k_r}{a^2} + \frac{D}{a^4} \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} u + \frac{1+\nu}{2} \frac{k_r}{a} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} \\
 & + \left\{ -\frac{D}{a} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{1-\nu}{2} \frac{D}{a^3} \frac{\partial^3}{\partial x \partial \theta^2} + \frac{\nu k_r}{a} \frac{\partial}{\partial x} \right\} w = 0 \\
 & \frac{1+\nu}{2} \frac{k_r}{a} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \left\{ \frac{1-\nu}{2} \left( k_r + 3 \frac{D}{a^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{k_r}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} v \\
 & + \left\{ -\frac{3-\nu}{2} \frac{D}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{k_r}{a^2} \right\} \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \\
 & \left\{ -\frac{D}{a} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{1-\nu}{2} \frac{D}{a^3} \frac{\partial^3}{\partial x \partial \theta^2} + \frac{\nu k_r}{a} \frac{\partial}{\partial x} \right\} u + \left\{ -\frac{3-\nu}{2} \frac{D}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{k_r}{a^2} \right\} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\
 & + \left\{ D \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{2D}{a^2} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{D}{a^4} \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 1 \right)^2 + \frac{k_r}{a^2} + M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} w - p_i = 0
 \end{aligned} \right\} (6.1)$$

式 (2.8) の記号を用いた。一方、流体の基礎式は非粘性の場合を考えるので式 (2.10), (2.11) がそのまま使える。たゞし、演算子や  $q$  はもちろん三次元的なものと解釈しなければならない。また、管と流体の連成の条件、式 (2.13), (2.14) にも変更はない。解析手順は、 $\theta$  に関する因

数が現われることや、ベッセル関数の次数が高くなるなどの違いはあるが、第2章の軸対称の場合と類似したものになる。まず、流体の基礎式は  $p$  や  $q$  の成分をつぎのようにおけば満たされる。

$$p_x = P J_n(mr) \cos n\theta \exp[j(\beta x - \omega t)] \quad (6.2)$$

$$\left. \begin{aligned} q_x &= \frac{P\beta}{\rho_L \omega} J_n(mr) \cos n\theta \exp[j(\beta x - \omega t)] \\ q_\theta &= \frac{Pjm}{2\rho_L \omega} \{J_{n-1}(mr) + J_{n+1}(mr)\} \sin n\theta \exp[j(\beta x - \omega t)] \\ q_r &= -\frac{Pjm}{2\rho_L \omega} \{J_{n-1}(mr) - J_{n+1}(mr)\} \cos n\theta \exp[j(\beta x - \omega t)] \end{aligned} \right\} (6.3)$$

$$m = \sqrt{(\omega/c)^2 - \beta^2} \quad (6.4)$$

これに対応して管の変位をつぎのようにおく。

$$\left. \begin{aligned} u &= U \cos n\theta \exp[j(\beta x - \omega t)] \\ v &= V \sin n\theta \exp[j(\beta x - \omega t)] \\ w &= W \cos n\theta \exp[j(\beta x - \omega t)] \end{aligned} \right\} (6.5)$$

式(6.3)、(6.4)のそれぞれの第3式を式(2.14)に代入すれば、 $P$ と $W$ の関係が定まる。この関係を用いたうえで、式(6.2)で $r=b$ とすれば、

$$p_x = W \frac{2\rho_L \omega^2 J_n(mb)}{m \{J_{n-1}(mb) - J_{n+1}(mb)\}} \cos n\theta \exp[j(\beta x - \omega t)] \quad (6.6)$$

式(6.5)、(6.6)を式(6.1)に代入すれば、 $U$ 、 $V$ 、 $W$ に関する連立一次方程式が得られるが、その係数行列は式(2.26)と同様に対称である。

この行列の行列式を零に等置したものが、 $\omega$ と $\beta$ の関係を定める方程式であるが、これを形式的に

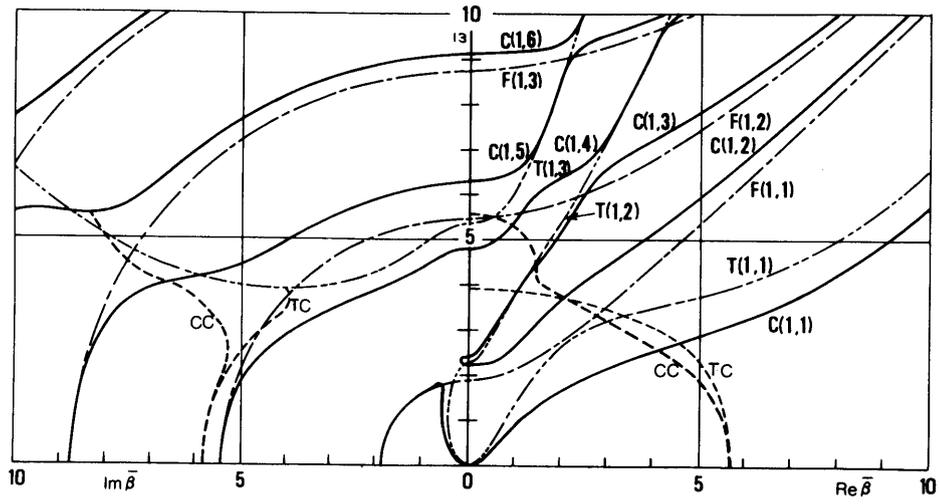
$$G(\beta, \omega) = 0 \quad (6.7)$$

と表わしておく。 $\omega$ に一定の実数を与えて式(6.7)を $\beta$ について解くと、5.2節で述べたようにこの場合も問題が $x$ 軸の正負に関して対称であるから、 $\beta$ は正負の実数、符号が反対の一組の純虚数、および符号が互いに反対の二組の共役複素数のいずれかに分類できる。

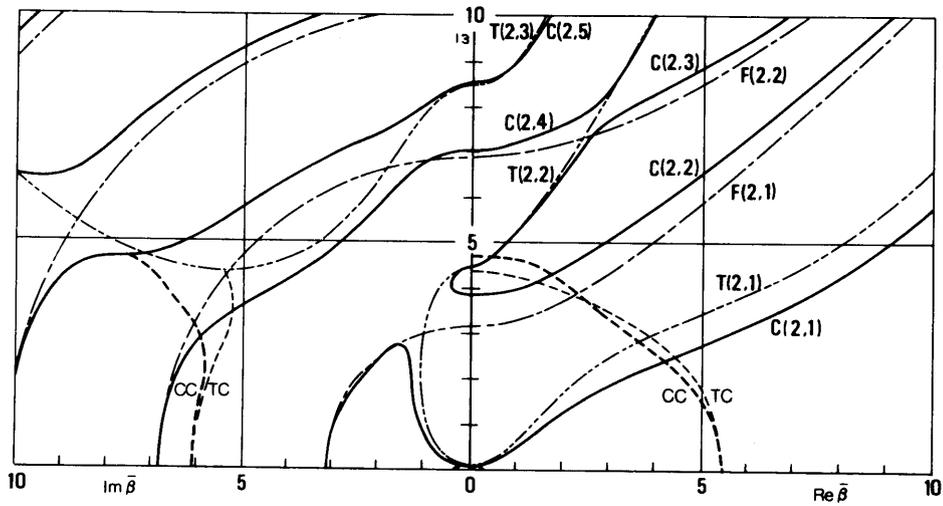
$\beta$ が実数であれば式(6.2)、(6.3)、(6.5)の諸量は進行波となるが、それ以外は進行波としての性質を欠く。ある波動モードが起きやすいか否かというあいまいな分類は、その波動モードが伝ば的か、非伝ば的かという分類によって意味を明確にできるというのが本章の検討の基本である。

### 6.3 計算結果と考察

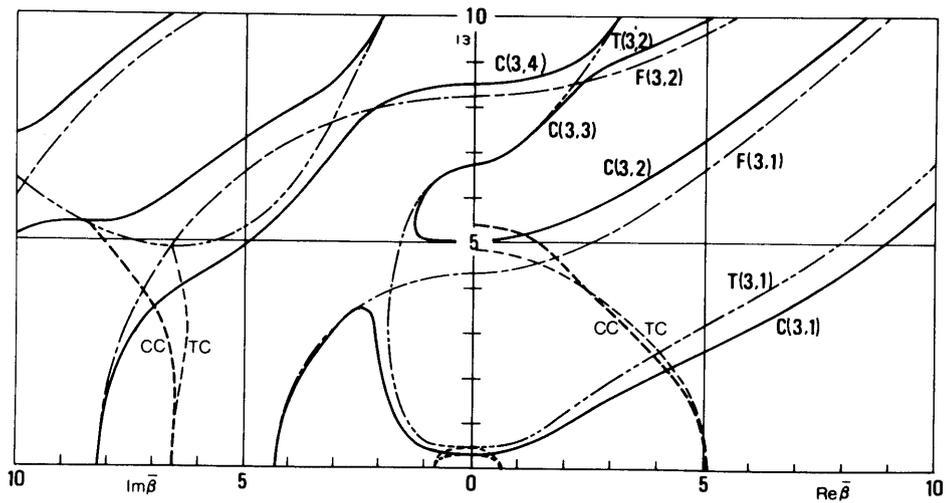
方程式(6.7)を用いて計算した複素波数のスペクトルを $n=1, 2, 3$ の場合について図6.2に示



(a)  $n=1$



(b)  $n=2$



(c)  $n=3$

$\eta = 20$ ,  $\bar{\rho} = 7.8$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $S = 9.857 \times 10^{-3}$   
 (Steel pipe & Water)

図 6.2 連成, 非連成系の非軸対称モードの複素波数スペクトル

す。ここでも比較のために非連成波の管と流体の  $\beta - \omega$  関係をあわせて示した。図中、 $CC$ 、 $TC$  とあるのは図 5.2 の場合と同じく、連成波と管単独の複素波数の各平面上への投影で、それ以外の曲線はすべて各平面上に値を持つ。各曲線のうち、伝ば域にあるもの、すなわち波数が完全に実数域にあるものには名称をつけてあるが、 $C(n, i)$  は  $\theta$  方向の波数が  $n$  で、同一の  $\beta$  に対する  $\omega$  が小さい方から  $i$  番目の連成波の伝ばモードを意味する。 $T(n, i)$ 、 $F(n, i)$  は非連成の管と流体の伝ばモードで、 $n, i$  の意味は連成波と同じである。

さて、図 6.2 によれば、剛管内流体の非軸対称波動モードはすべて零でない  $\chi$  断振動数を持ち、 $\chi$  断振動数以下では波数が純虚数となって非伝ばモードとなっている。すなわち、低い振動数では非軸対称の圧力分布が波として管内流体を伝えることはできないのである。これに対して、管単独の場合には  $T(1, 1)$  だけが  $\omega = 0$  から伝ば性を持つが、他は  $\omega = 0$  の近傍ではことごとく非伝ば的である。

連成波では  $C(1, 2)$  と  $C(1, 3)$ 、 $C(2, 2)$  と  $C(2, 3)$  が非伝ば域で結合するなど、 $\beta - \omega$  曲線は図 5.2 の軸対称の場合に比べてやや複雑にはなっているが、各曲線が各領域ごとに非連成の管あるいは流体のいずれかのモードに位置や傾向が近く、そのモードの特徴を濃厚に受け継いでいる点などは軸対称の場合と類似している。各  $n$  における最低次モード  $C(n, 1)$  は  $T(n, 1)$  に沿って、また、 $T(n, 1)$  より低振動数側にあるので、管が主になる波動モードで流体は付加質量的な役割を果たすものと考えられる。 $C(n, 1)$  も  $n = 1$  の場合を除いて  $\chi$  断振動数は零ではなく、非常に低い振動数域では非伝ば的である。 $\omega = 0$  から伝ば性を持つ唯一の非軸対象連成波  $C(1, 1)$  はいわゆる管の横振動のモードであって、軸に垂直な面内での管断面重心の移動を伴う運動をする点が  $n \geq 2$  のモードとは異なっている。一方、非連成の  $F(n, 1)$  は管の弾性があると変化して  $C(n, 2)$  となって現われるが、 $C(n, 2)$  はいずれも低振動数域では伝ば性を持たず、しかもその  $\chi$  断振動数は  $F(n, 1)$  と同様にかかなり大きい。

以上は  $n = 3$  までの結果であるが、 $n$  が大きくなるとこれまでに述べてきたことはさらに強まる傾向にある。それを明らかにするための資料として  $n = 0$  から 10 までの  $\chi$  断振動数の分布を図 6.3 に示

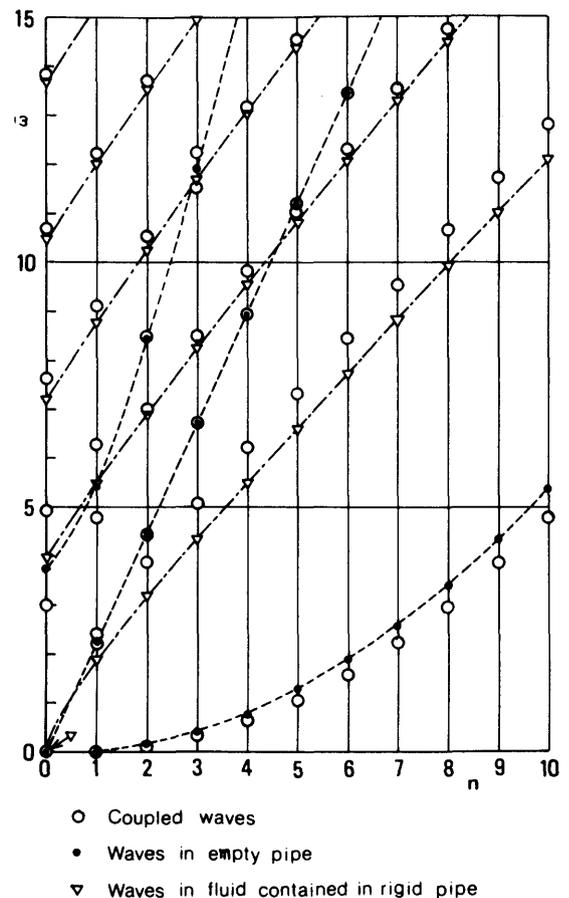


図 6.3  $\chi$  断振動数の分布

す。しゃ断振動数は，たとえば連成波では式(6.7)で $\beta = 0$ としたときにこの方程式を満たす $\omega$ として求められる。 $n$ が大きくなるほど， $C(n, 1)$ のしゃ断振動数は大きくなり，伝ばモードは相当に高い振動数まで出現しないことがこの図からわかる。

以上の検討から明らかなように，低い振動数域で流体が主な役割を果たす連成波の非軸対称の伝ばモードは一つも存在せず，また，管が主な役割を果たす伝ばモードもいわゆる横振動のモードを除いては低振動域では存在しない。それゆえ，機械工学で普通に問題となるような低い振動数域では，管端で課せられた境界条件に非軸対称の要因が含まれていても，それが管の横振動を励起するものでない限り影響は管端の近傍にとどまって管の全長にわたるような現象に大きな影響を及ぼすことはないと考えられる。

以上からもわかるように，非軸対称現象のうちで遭遇する機会が最も多いのは流体を含んだ管の横振動である。この場合には，流体は単に付加質量として作用するだけで，剛性的な面への寄与はほとんどないと考えられる。そうであれば，この問題は流体を単に質量要素として考えたはりの曲げ振動の初等理論

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (\rho_f A_1 + \rho_s A_2) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (6.8)$$

でかなりよい近似ができるであろう。ただし， $I$ ， $A_1$ は管実体の断面二次モーメント，断面積， $A_2$ は管路の断面積である。式(6.8)から $\beta - \omega$ 関係を求めて無次元化すると

$$\bar{\beta}^4 = \bar{\omega}^2 \frac{S\{2\bar{\rho}\eta^2 + \eta(\eta - 1/2)^2\}}{(\eta^2 + 1/4)} \quad (6.9)$$

となる。この式による $\beta - \omega$ 関係を図6.2(a)の原点付近を拡大したものと比較して図6.4に示す。両者は $|\beta| < 0.16$ ，波長にして $\bar{\lambda} > 40$ の範囲ではよく一致している。つまり，流体を含んだ管の横振動は伝ば項の半波長が管平均直径の約10倍以上であれば，式(6.8)を用いて近似計算ができるがそれより波長が短くなる場合には精密な理論を用いなければならない。

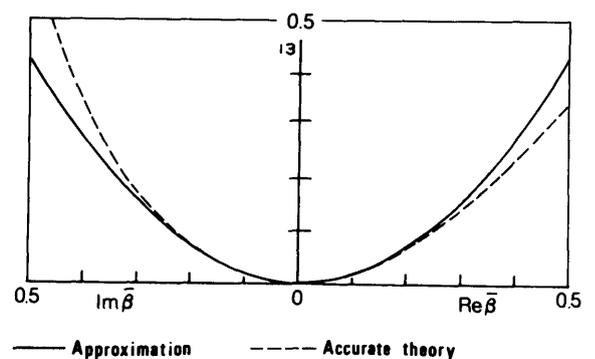


図6.4  $n = 1$ の場合の波数の近似値  
(計算データは図6.2に同じ)

#### 6.4 結 言

本章では連成波の非軸対称モードの性質を前章で示した波動モードの伝ば，非伝ばの観点から検討した。

(1)連成波の非軸対称モードは横振動のモードを除いて低振動数域において伝ば性を持たないので，横振動の発生のない条件下では連成波動を軸対称問題として解析することは可能である。

(2)横振動のモードである  $C(1,1)$  は波長が管半径の約 40 倍以上であれば，管内流体を単なる付加質量とみなしてはりの曲げ振動の初等理論で解析することができる。

## 第 2 編 実 験 的 研 究

本編では第 1 編の解析結果のうち，とくに重要な分散性と減衰について行った実験について述べる。

## 第7章 伝ば速度の振動数依存性 <sup>(28)</sup>

### 7.1 緒 言

第2章での解析結果によれば、連成波動の最大の特徴は各モードの顕著な分散性であろう。これを確かめるために、流体の粘性が小さく、伝ば速度への影響が無視できるような場合について実験を行い、伝ば速度の振動数に対する依存のしかたを調べた。

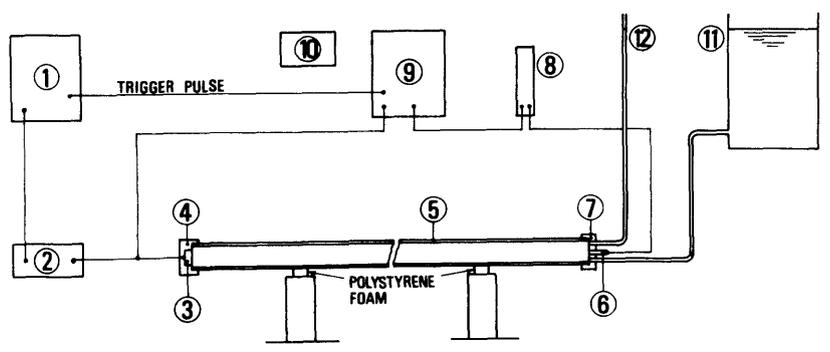
さて、弾性管一流体系の波動の実験はこれまでもいくつか行われているが、本研究ととくにかかわりの深いものとしては Boyle, Froman, Fields <sup>(8)~(13)</sup> らの一連の研究がある。これはやはり分散性を対象にしていて、定性的には本研究の内容と一致する面もあるが、検討した領域が実験的にも理論的にも非常にせまい範囲に限定されており、結果の解釈にやや合理性の欠ける点もあって、現在から見れば不十分と言わざるを得ない。また、それ以外には水撃や衝撃の実験はされているが、分散性を直接の対象とした実験は見当たらないようである。實際上問題になる管路の波動現象は水撃など過渡現象の形で現われることが多いが、分散性という波の性質の基本的な側面についても実験的に調べられておくべきだと考えられる。

### 7.2 実験の方法

7.2.1 実験装置 波の伝ば速度の測定法は原理的に定常波によるものとパルスによるものとに分けられる。前者では振動数と波長を測定してそれらの積の形で位相速度を求めることになるが、この方法について予備的に検討してみたところでは、波長の測定を広い振動数範囲で正確に行うことが困難であった。これは連成波に複数の波動モードが存在することに加えて、装置の中で測定対象の部分に対してその周辺の部分の剛性を十分に大きくとれなかったために対象外の振動モードも励起されてしまうことが原因と見られ、連成波に対してこの方法を用いるためには実験装置にかなりの工夫が必要のように思われた。そこでパルス法を用いることにしたが、これは有限整数周期だけ正弦波形をとるいわゆるトーン・バースト・パルスを発射して一定長さの管路を伝ばするのに要する時間を測定するものである。この方法では装置が簡単になることもあって励起される波動モードは測定対象のものにほぼ限られ、しかも伝ば速度の差を利用すれば各波動モードの識別が容易にできるという利点がある。しかし、その反面でつぎのような大きな欠点もある。この方法は一応は群速度の測定を志向するものと言えようが、分散性の強い系ではパルスは進行しながら大きく変形することになる。そのために、伝ば時間の測定にあたってはある幅の不確実さを許容しなければな

らないことと、そのようにして測る速度は群速度そのものにはならないことに注意しなければならなかった。

図 7.1 に実験装置の配置を示す。送波器③から管内に発射されたパルスは受波器⑥で検出され、送波器へ印加される電圧とともに 2 現象シンクロスコープ⑨に送られ、⑩で写真撮影される。



- ① Pulse Generator    ② Amplifier    ③ Transmitter    ④ Retainer
- ⑤ Pipe    ⑥ Receiver    ⑦ Retainer    ⑧ Amplifier    ⑨ Oscilloscope
- ⑩ Photographing Aparatus    ⑪ Tank    ⑫ Level Meter

図 7.1 実験装置

写真上で両信号の立ち上り時刻の差を読み取って連成波の伝ば時間とするのであるが、後述するように受波信号の立ち上りが非常に不明確になるときに伝ば時間を例外的な方法で決めざるを得ない場合も若干あった。⑫は脱気孔を兼用した液位計であるが、液位は管中心から約 60 cmとした。なお、管は両端から全長の約 20 %の位置を発泡スチロール片を介して水平に支えたが、これによって生じる管の静たわみは無視する。

つぎに図 7.1 ①のパルス発生器の回路構成を図 7.2 (a)に、各部のタイミング関係を同図 (b)に示す。①はCR発振器で連続正弦波を出す。①の出力を②で方形波に変えた後に分周器③で搬送波

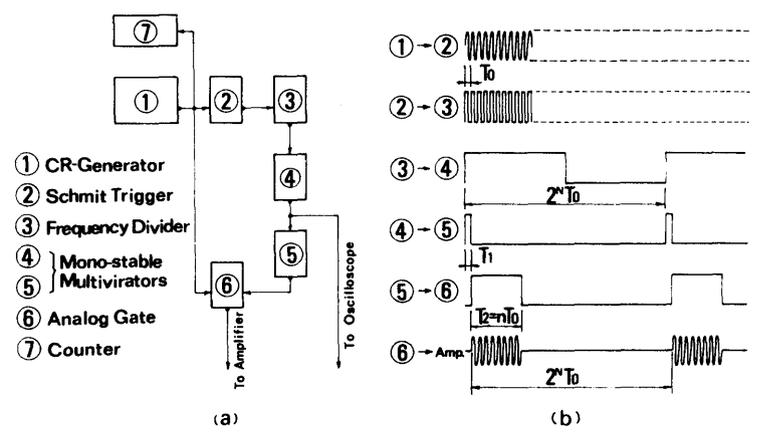


図 7.2 パルス発生器の構成

の周期  $T_0$  の  $2^N$  倍 ( $N$  は可変整数) の周期の方形波に変換するが、この周期が出力パルスの発生周期になる。④と⑤は単安定マルチバイブレータで、④は③の出力の立ち上りで⑤は④の出力の立ち下りでトリガされてそれぞれ長さが可変の方形波を 1 個ずつ出す。⑤の出力はアナログゲート⑥の制御端子に加えられるが、⑥は制御端子電圧が高レベルにあるときだけ①からの信号を出力側に通すのでトーン・バースト・パルスが得られる。④の出力の長さは⑥の出力の立ち上りの位相が適正になるように、⑤の出力の長さは⑥の出力の長さそのものになることを考慮して決める。

さて、パルスの発射周期は前に発射したパルスが管内で十分に減衰して続いて発射するパルスと

の干渉がないように決めるが、本実験では  $(2^8 \sim 2^{13}) \times T_0$  の範囲で選んだ。また、パルスの長さ  $T_2$  はできる限り長い方がスペクトル純度が向上するが、観測上からは伝ば速度と管長からもたらされる制限がある。そこで、参考のために計算した繰り返しのない単一パルスのスペクトル分布図 7.3 などから、低振動数域で  $T_0$  が大きくなる場合でも  $10 T_0$  程度は確保するようにした。スペクトル純度が悪いとパルスの中心振動数が不明確になって伝ば速度と振動数の関係を調べようとする本実験では結果にはっきりした意味が与えられなくなるからである。

送波器には電磁形と圧電形の 2 種類を用いた。電磁形のは電話用受話器 (R-60) の振動板を厚さ 0.2 cm の軟鋼円板に変更したもので、約 20 kHz 以下の領域で用いた。圧電形のはチタン酸バリウム磁器製の円筒形振動子 (共振振動数 26 kHz, および 40 kHz) で高い振動数の領域で用いた。これらは図 7.4 に示すように保持具によって管に装着した。比較的低い振動数域で C1, C2 の二つのモードが同時に発生し、受波信号の写真で C1 モードの立ち上りが先行する C2 モードの後部と重なって明確に観測できない場合があった。このような場合には C2 モードはほぼ管の縦波であるという解析結果を参考にして図 7.4 (a) のように、保持具を二つに分割して間に緩衝ゴム帯を設けて C2 モードの発生を抑えた。図 7.4 に見られるように送波面は管端に正しく一致していないが、その差は管長の 0.5% 未満なので誤差に含めて処理した。

受波器には圧力変換器 (半導体ひずみゲージ形, PMS-5-2H) を使用した。本来の用途である圧力測定では受圧膜の共振のために使用できる振動数域は限定されるが、本実験ではパルスの到来の検出が目的なので、共振点を越え、応答が得られる限り、240 kHz 付近まで用いた。高い振動数域では受波信号は離散的に現われる限られた範囲の振動数帯であったので、受圧膜の高次の共振モードの応答を利用したものと推測される。受波面は管端に一致させた。

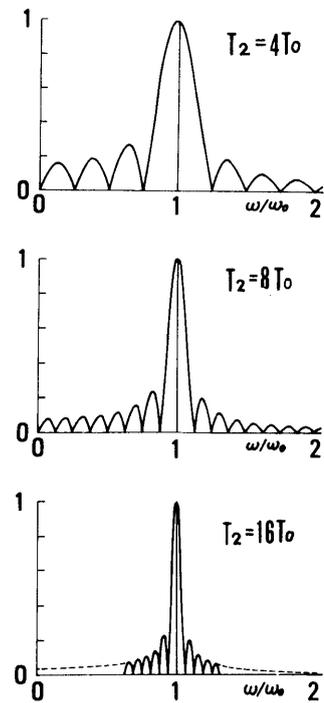


図 7.3 パルスの振動数スペクトル

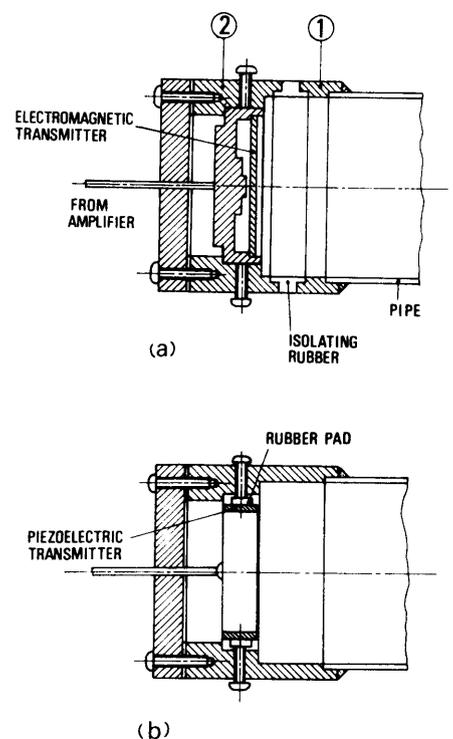


図 7.4 送波器

7.2.2 試料 実験に用いた管は引き抜き成形された黄銅管で  $\eta = a/h$  の値が 17.5 と 10.7 の 2 種類である。管の内外面は本実験における最小の波長などに比較して十分に滑らかである。管内流体には水道水を用いた。水そのものに対して特別な脱気処理は行わなかったが、気泡は波の伝ば速度に大きな影響を及ぼすので、水を管内に注入してから数日間は放置して遊離してくる気泡を除くなどの注意はした。水温は 19~23℃ の範囲内であったが、20℃ を代表温度とする。このときの水の物性値は  $K = 2.197 \times 10^5 \text{ N/cm}^2$ ,  $\rho_L = 0.998 \text{ g/cm}^3$ ,  $c = 1.483 \times 10^5 \text{ cm/s}$  である。水のこれらの物性値に対して計算した無次元量を含めて表 7.1 に管の諸元を示す。表中の  $l$  は管の全長である。なお、水の粘性や管の内部摩擦などの散逸的な要因は本実験の場合には伝ば速度への影響という点では小さいので無視する。

表 7.1 供試管の諸元

管番号	$a$ cm	$h$ cm	$l$ cm	$E$ N/cm <sup>2</sup>	$\nu$	$\rho_P$ g/cm <sup>3</sup>	$\eta$	$S$	$\bar{\rho}$
No. 1	2.625	0.15	501.0	$8.47 \times 10^6$	0.35	8.41	17.5	$2.59 \times 10^{-2}$	8.43
No. 2	2.675	0.25	500.5	"	"	"	10.7	"	"

### 7.3 実験結果と考察

はじめに供試管 No.1 を用いて測定した伝ば速度を図 7.5 に示す。図中に示した  $\alpha$ ,  $\alpha_g$  の曲線は第 2 章の計算法で求めた各波動モードの位相速度と群速度である。ここでは横軸を振動数としてあるが、これは測定値に対してはパルスの搬送波の振動数  $f_0$  の意味である。各波動モードの名称はこれまでと同じであるが、このうち F1 モードとしてあるのは結局流体中の音速を意味している。なお、測定値がいずれのモードに属するのかを明確に判定できない場合もあるので測定値にはモードの区別を与えていない。

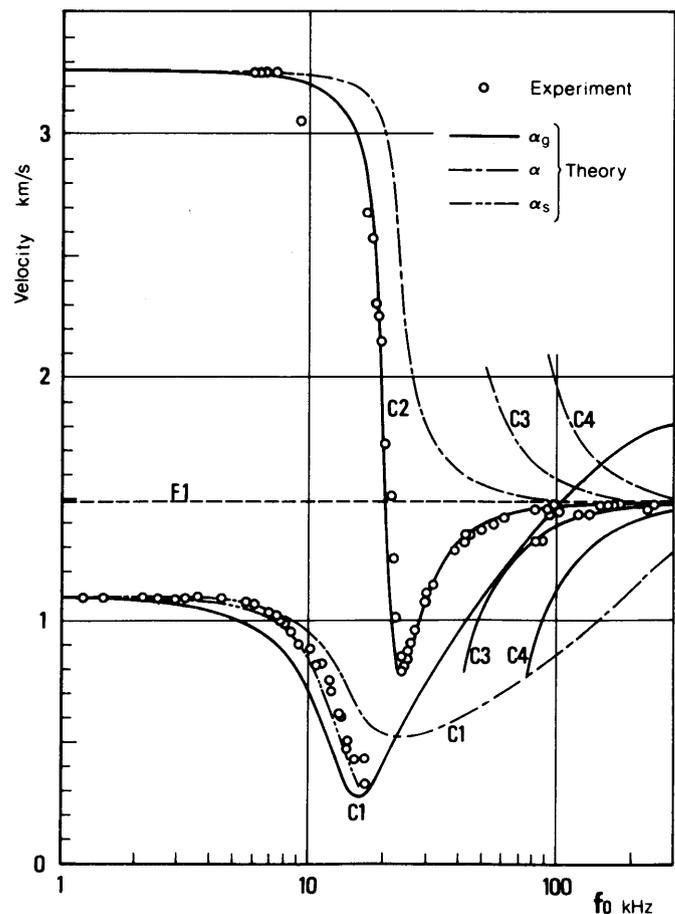


図 7.5 管 No.1 の実験結果

さて、図 7.5 によると測定値は計算

された  $\alpha_s$  曲線にほぼ沿う形で分布している。これは群速度の持つじょう乱伝ばの速度という意味と本実験で用いているパルス法との関係から期待されることである。それゆえ、第2章の理論は連成波の分散性の主な特徴をほぼ正しく表現することができると言ってもよいであろう。しかしながら細部においては一致の程度が十分ではない領域が見られる。とくにC1モードで分散性の大きい5～11kHzの領域では測定値は  $\alpha_s$  の計算値よりやや大きめになっている。この理由として、図7.3などからわかるようにパルスのスペク

トルが純粹ではないために、パルスの中心成分よりやや大きい群速度を持つ振動数の成分によって受波信号の立ち上がりが支配されるので、測定される伝ば時間がパルスの中心成分の群速度から計算される値より小さめになるということが推測される。このあたりの事情を数値的シミュレーションによって調べてみた。

まず、図7.6(a)を参照して送波端における圧力の理想的な入射波形を数式化すると

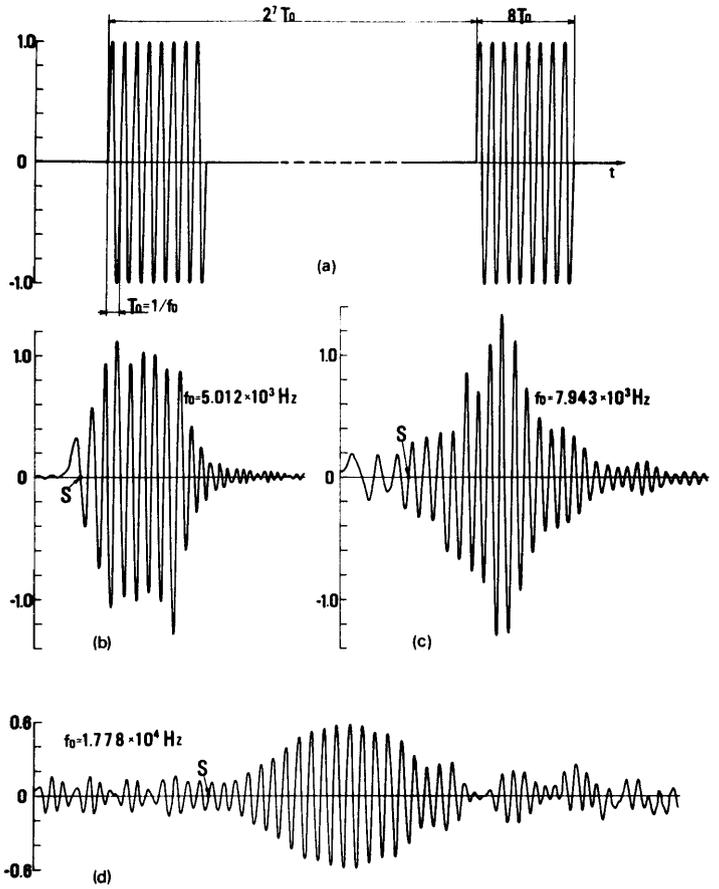


図7.6 受波パルスのシミュレーション

$$p(0, t) = \left. \begin{aligned} & \sin \omega_0 t, & IMT_0 \leq t < IMT_0 + nT_0 \\ & 0, & IMT_0 + nT_0 \leq t < (I+1)MT_0 \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

ここに  $\omega_0 = 2\pi f_0$  ,  $T_0 = 1/f_0$  であり、 $M, n, I$  はいずれも整数で  $M > n$  とする。式(7.1)をフーリエ級数に展開して各成分波にそれぞれの波数を付与して合成すれば、任意の時刻と場所における  $p$  がつぎの形の式で計算される。

$$p(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ A_i \cos \left( \frac{i\omega_0}{M} t - \beta_i x \right) + B_i \sin \left( \frac{i\omega_0}{M} t - \beta_i x \right) \right\} \quad (7.2)$$

ただし、 $\beta_i$  は角振動数が  $i\omega_0 / M$  のときの C 1 モードの波数である。 $x = l$  とすれば、管の長さだけ進んだときのパルスの形が計算できる。数値計算にあたっては波数と振動数の関係をあらかじめ十分に広い範囲で十分な密度で計算しておき、式 (7.2) に必要な  $\beta_i$  を補間法で求めて用いた。そのほか、 $n = 8$ 、 $M = 128$  としたが、これは計算能率から定めたもので実験条件とは一致しない。 $10^{-3}$  程度の精度を確保するのに式 (7.2) の級数は 500 項以上を必要とした。図 7.6(b)~(d) に供試管 No.1 の C 1 モードについて計算した例 ( $f_0 = 10^{3.7}$ 、 $10^{3.9}$ 、 $10^{4.2}$  Hz) を示す。パルスにかなりの変形が見られるが、だいたい三つの部分に分けられる。振幅が小さく、規則性も乏しい前駆波とも称すべき部分、振幅の変化はかなり著しいものの搬送波とほぼ同じ周期を持つ信号本体の部分、およびこれに続く振幅の小さいしょう乱である。さて、実際に測定されるのは信号本体の立ち上り点の速度である。そこで前述した各部の特徴を考慮しながら、シミュレーションの結果を観察して信号本体の立ち上りを図 7.6 の S 点のように定める。そして S 点の時刻から算出した速度を  $\alpha_s$  とする。ここで注意すべきことは S 点は一意に決定できるものではなく、いく分かの任意性を許容せざるを得ないことである。それゆえ、 $\alpha_s$  の値もある程度のあいまいさを持つことになるが、これは波動現象に特有の不確定性の一つの現れとも考えられ、分散性の波の伝ば速度を本実験のように測定する限りは避けられないことである。しかし、S 点として可能な範囲にはおのずから限界があり、 $\alpha_s$  は数パーセントの幅の中で上下するだけなので、このあいまいさは以下の議論には大きな支障とはならないと考えられる。このようにして求めた  $\alpha_s$  を図 7.5 にあわせて示した。測定値は  $\alpha_0$  より  $\alpha_s$  の方によく一致するが、測定値も  $\alpha_s$  もパルス先端の速度という意味であるからこれは当然と言えるだろう。このような測定法では群速度そのものは得られないのである。位相速度と群速度は波動現象にかかわる最も基本的な速度の概念ではあるが、これらだけですべてが尽されるということにはならないのである。いずれにせよ、 $\alpha_s$  の導入によって理論と実験の一致はよくなる方へ向うことは確実である。C 2 モードなどでも同じことが生じているはずであるが、測定値は  $\alpha_0$  によく一致するのでシミュレーションは割愛した。

ところで、図 7.5 では測定値が得られていない領域がいくつかある。このうち、C 2 モードの約 6 kHz 以下と C 3、C 4 で測定できなかったのは実験技術などが原因であって、そのモードの固有の性質によるものではない。しかし、C 1 モードの  $\alpha_s$  曲線の極小点より高い振動数域ではこのモードの性質によって観測できなかったと考えられる。図 7.7 に C 1 モ

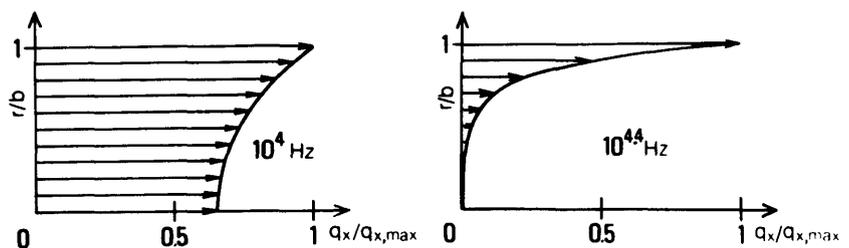


図 7.7 管No.1, C 1 モードの  $q_x$  分布の計算例

一ドの流体の軸方向粒子速度の計算例を示す。ただし、これはパルスではなく、連続正弦波に対するものである。管と流体の半径方向運動が著しいと考えられる  $f_0 = 10^{4.4} \text{ Hz} (\approx 25 \text{ kHz})$  では管路中心部の軸方向速度は極端に小さくなっており、実際には粘性によって管壁付近の速度も小さくなるはずであるから C 1 モードは軸方向に進む流体の波としての性質が乏しくなっていると考えられる。観測できなかったのは C 1 モードのこのような性質によるものと考えられ、高い振動数域では弾性管内の流体の波としては C 2, C 3 などの高次モードの方に実質的な意味があるように考えられる。

つぎに図 7.8 に実際に観測したパルス波形の例を示す。各写真とも上段が受波信号、下段が送波器への印加電圧である。受波信号は振動数域ごとに変化に富んだ波形を示すが、これは系の強い分散性のためと考えられる。(a)では C 1 のパルスに先行する振幅の小さな C 2 モードのパルスが認められる。また、(c)のように

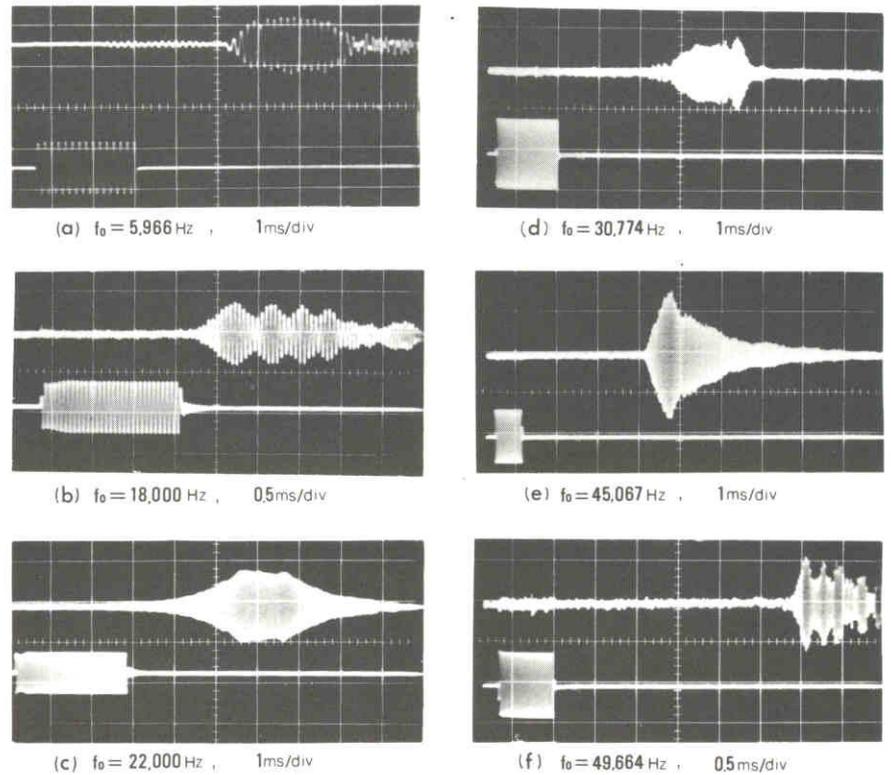


図 7.8 パルスの観測例

受波信号そのものは明確に認められるにもかかわらず、その立ち上りは全く不明確なものも若干あった。このような場合には測定から除外するか、可能であれば受波、送波両信号の中心間の時間差を用いた。この方法で得られる速度はパルス先端の速度を求める本実験での原則的な方法によるものとは少し異なる値になるはずであるが、測定値の分布傾向からは区別することができなかった。

管No.1の実験を補強するために行った管No.2についての実験結果を図 7.9 に示す。 $\alpha_s$  は計算していないが、 $\alpha_s$  と測定値の対応は管No.1とほぼ同様である。また  $\alpha_s$  との対応から C 3, C 4 モードと考えられるパルスが少数ながら観測されている。

以上のように、連成波の分散に関する第 2 章の解析結果は実験によってほぼ確認することができる。しかしながら、本実験の方法は前述したように精度の点で問題を持つものであり、分散性の波の伝ば速度が一意性のより高い形で得られるような実験方法の開発が望まれる。

連成波の伝ば速度の振動数依存性に関する実験は以上のとおりであるが、Krauseらの研究<sup>(18)</sup>が本章の内容と密接に関連するのでここで簡単に触れておきたい。Krauseらは水を満たした管の一端をエアガンから発射された弾丸で打撃し、発生した波を管端からの距離を変えたいくつかの点で流体圧力や管の応力の変動として記録し、波の到来時刻と距離の関係から伝ば速度を求めている。打撃によって起きる波は広い範囲の振動数成分を含んだものになるから、C 2モードでは全域のうちで最大の群速度を持つ低振動数非分散域（図 7.5, 7.9 参照）によって受信波形の立ち上がりが決まる。また、C 1モードでも計算上現われる群速度の最大点付近の成分は前述したようにほとんど伝ばしないから実質的に群速度が最大になる低振動数非分散域の成分で受信波形の立ち上がりが決まると考えられる。つまり、この方法で検出されるのは C 1, C 2モードとも低振動数域の伝ば速度である。Krauseらは実験結果を理論値と比較しているが計算式は第 2章で導いた近似式(2.56)と全く同じものである。Krauseらの実験と計算の比較を表 7.2 に引用して示す。ただし、記法は本論文で用いているものに改めてある。表中、管単独とあるのは水を含まない場合のもので計算値は $\sqrt{E/\rho_P}$ である。実験と理論はかなりよく一致している。第 2章の検討によれば C 2モードの伝ば速度は低振動数域で管単独の場合をわずかながら上まわるのであるが、表 7.2 ではその特徴がすべての場合に明確にとらえられている。

Krauseらの研究は連成波動のうち、C 1, C 2の二つのモードの低振動数非分散域だけを対象とした結果になっていると言える。本章の実験では精度などが十分でないために、前述の C 2モードの特徴などを確認できなかったが、全く異なる方法で行われたKrauseらの研究でこの点は補われていることになろう。

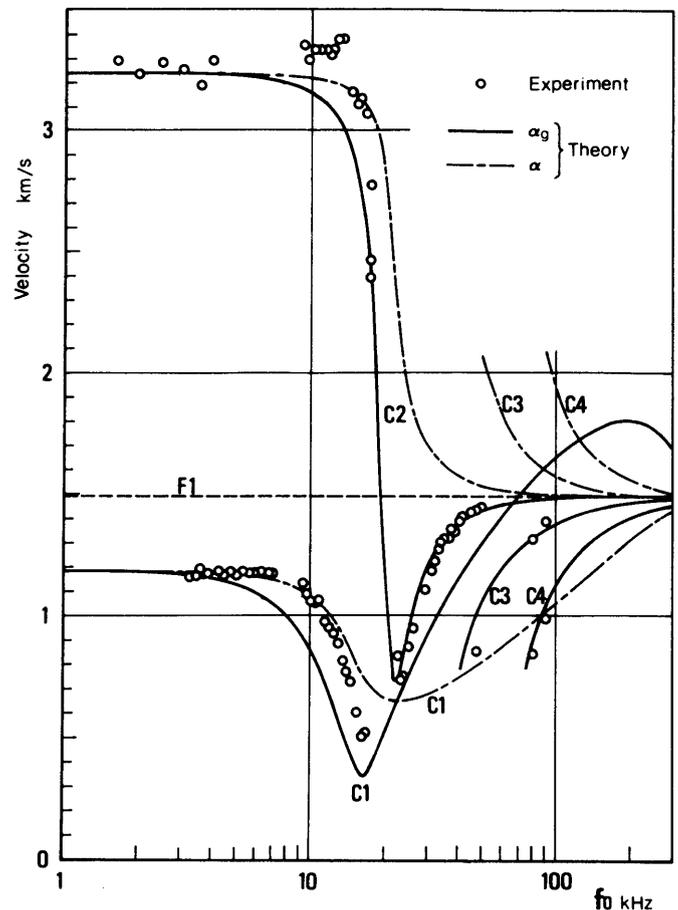


図 7.9 管No.2の実験結果

表 7.2 Krause らによる実験値と計算値の比較

管材料	無次元量				伝ば速度 $\times 10^5 \text{cm/s}$					
					管単独		C 1		C 2	
	S	$\nu$	$\bar{\rho}$	$\eta$	実験	計算	実験	計算	実験	計算
アクリル	0.4051	0.37	1.194	7.193	2.182	2.126	0.518	0.563	2.240	2.275
”	”	”	”	3.667	2.177	”	0.676	0.664	2.243	2.257
アルミニウム	0.0298	0.33	2.777	4.763	5.156	5.131	1.275	1.300	5.283	5.197

#### 7.4 結 言

黄銅管に水を封入した系においてパルス法による伝ば速度の実験を行った。その結果、つぎのことが明らかになった。

(1)パルス法による測定値の分布傾向は第2章で示した計算法によるC1, C2モードの群速度とかなりの一致を示し、少数ながらC3, C4モードと見られるパルスも観測された。このことにより、第2章の解析法は実際の系に対してもほぼ妥当な結果を与えると判断される。

(2)しかしながら、C1モードの分散性の強い領域では測定値の方が計算値よりやや大きくなった。これは本実験法がパルスの先端部の速度を求めるものであるために、パルス中に含まれるパルスの中心成分より大きな伝ば速度を持つ振動数成分によって実際のパルス先端部の速度が決められることが原因と考えられる。したがって、本実験法は定量的な精度という点では改良すべき面がある。

(3)C1モードの群速度曲線の極小点より高い振動数域ではC1モードは観測されず、C2以上の高次モードだけが観測された。これは流体の粒子速度分布などから見てC1モードは高振動数域では伝ばする波としての性質が弱くなるためと考えられ、高い振動数の領域ではC2モードをはじめとする高次モードの方が伝ばする性質が強い。

## 第 8 章 連成波動の減衰

### 8.1 緒 言

伝ば速度とならんで減衰も波動の重要な性質である。第 3 章，第 4 章では流体に粘性がある場合の波の性質を解析的に調べたが，その結果によると粘性は主に速度の境界層内の摩擦によって波に減衰をもたらすことが明らかになっている。そこで，この点について実験的に検討した。

さて，管内流体の減衰性の波動についてはこれまでもかなり多くの実験が行われているが，その多くは振動数応答や過渡応答を実測して計算値と照合することで理論の妥当性を判定しようとしている。しかしながら，理論，とりわけ減衰機構を検証するための実験としてはそれだけでは必ずしも十分とは言えない。その主な理由をあげると多くの場合，減衰は共振振動数や過渡現象の基本周期などにはあまり影響せず，共振振幅やパルス性の波の変形などに影響が現われる程度なので現象の中の小さな変動について理論と実験の比較をしなければならないということがある。その一方である限られた範囲内では仮定された減衰機構が何であってもそれによって与えられる中心成分の減衰量が同程度であればこれらの応答の計算結果はかなり類似したものになってしまう。そして実験条件を注意深く選ばないと実験対象系からその周辺へのエネルギー漏えいが生じて誤差が大きくなる可能性もある。条件を変化させても妥当性を保つという意味で，考えられている減衰機構が一般性を備えていることを確かめるためには周囲とのエネルギー授受がなるべく少ない条件下で減衰率を測定し，それが関係諸量にどのような形で依存するのかという法則性の面から調べる必要があると考えられる。本章の実験は以上のような考え方に基づいて行われた。

なお，本章の実験は線形理論が適用できる場合のものである。波の振幅が大きくなって非線形効果が無視できないような問題については別の検討に従わなければならない。

### 8.2 減衰率の測定法

減衰率の測定法として本実験ではつぎの三つのうちから場合に応じて必要なものを用いた。方法そのものは一般的なものであるが，名称は一般化していないように思われるのでここでは一応つぎの名称を用いる。

- (1) 自由減衰法：ある固有振動モード（有限長系の定常波）を励起しておいて励振力を断てば自由減衰するわけであるが，振幅が  $A$  (dB) だけ低下するのに要する時間を  $t_A$  (s) ，固有振動数を  $f_0$  (Hz) とすれば

$$\delta = \frac{A \ln 10}{20 f_0 t_A} \quad (8.1)$$

である。  $t_A$  の測定には振幅を対数変換してペン書き記録するレベルレコーダを用いるが、紙送り速度やペンの応答速度に制限があるので  $\delta$  と  $f_0$  の積が一定以下の場合に適した方法である。なお、この方法では dB を単位として記録した振幅レベルの時間に対する直線性から減衰の振幅依存性の有無を容易に判定できるという利点がある。

- (2) 共振法：一定振幅の力で励振したときの共振曲線のピークの鋭さから減衰率を求めるもので、共振点の振動数を  $f_0$  ，振幅が共振点を 1 として  $R$  なる割合になるピークの両側の 2 点の振動数を  $f_1$  ，  $f_2$  ( $f_2 > f_1$ ) とすれば

$$\delta = \frac{\pi R}{\sqrt{1 - R^2}} \frac{f_2 - f_1}{f_0} \quad (8.2)$$

この場合、用いるべき共振曲線は本来は変位振幅に対するものであるが、速度や加速度の振幅も  $(f_2 - f_1) \ll f_0$  であれば精度的にほとんど問題なく用いることができる。ただし、励振振動数の安定性は普通 4 ないし 5 けたほどであるから、 $(f_2 - f_1)$  の計算で極端な落ちが生じるようであれば使用を避けなければならない。それゆえ、自由減衰法よりも減衰がやや大きい場合に用いられる。なお、普通は  $R = 1/\sqrt{2} \approx 3.01 \text{ dB}$  とすれば式 (8.2) の係数が簡単化されるので、そのようにすることが多い。

- (3) パルス法：前章の実験で用いたトーン・バースト・パルスを管の一端から入射して、管路途中の 2 点で測定した圧力振幅を  $p_1$  ，  $p_2$  ( $p_1 > p_2$ ) ， 2 点間のパルスの伝ば時間を  $\Delta t$  (s) とすると
- $$\delta = \frac{\ln(p_1 / p_2)}{f_0 \Delta t} \quad (8.3)$$

ただし、 $f_0$  (Hz) はパルスの搬送波の振動数である。この方法は前に述べた二つとは異なり、固有振動を用いないので振動数に対する測定密度を自由に選べる利点がある。しかし、分散が大きい系では波形の変形が大きいので使えないし、伝ば速度が大きい場合には管路を長くしなければならないなど、使用にあたって制限になることも多い。それゆえ、パルス法は分散が小さく、伝ば速度も小さい波に対して最も適したものである。

これらの異なる方法で測定した減衰率を二つの方法を重ねて使用できる領域で比較してみると実験誤差の範囲内で相互に一致することはもちろん確認できる。

### 8.3 管内空気を伝わる音波の減衰

まず、管内流体を空気とした実験について述べる。この場合には管の弾性変形はほとんど起こらず、実験対象系と周辺系との力学的な結合をほぼ完全に断つことができるので、減衰率の測定は比

較的容易である。しかしながら、液体とは違って気体では圧力変化に伴う温度変化が大きいため、管壁と気体の間に熱流が生じて減衰の原因になる。つまり、減衰は粘性と熱伝導の二つの原因によってもたらされるのである。それゆえ、流体として暗黙のうちに液体を考え、粘性だけを考慮した第3章、第4章の理論を本実験と直接比較することはできない。そこで本節では新たに気体を対象にした波動の近似解析法を検討して実験結果はそれと比較することにする。このように本節の実験は本論文のこれまでの理論で扱ってきたものとは性質を異にする系を対象としたものになるが、熱伝導の効果は後述するように気体の動粘度が見かけ上大きくなったのとほぼ同じ形で現われるので、本節の実験結果にやや間接的ながら第3章、第4章の理論のうち剛管の場合に対する検証の意味を持たせることは可能と考えられる。

8.3.1 実験装置 方法は主としてパルス法を用い、低い振動数域で部分的に共振法を用いた。図8.1にパルス法の装置を示す。これは前章の実験で用いた伝ば速度の測定の場合と基本的にはほぼ

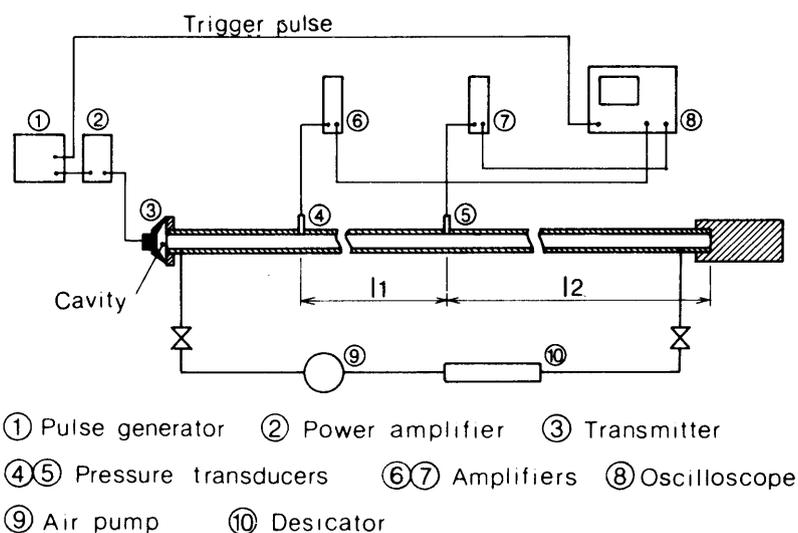
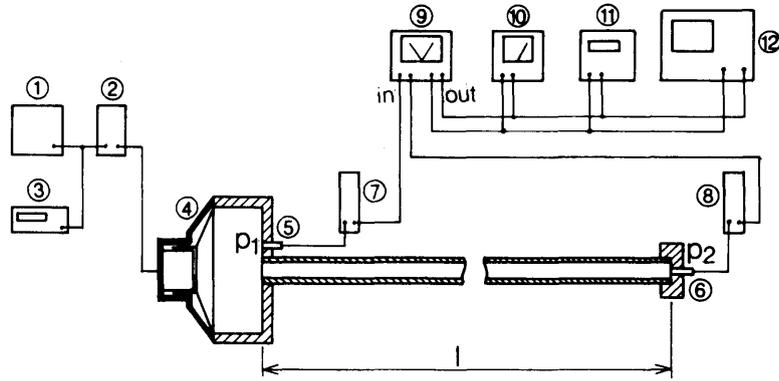


図 8.1 パルス法の装置

同じ構成であるが、圧力の測定点を管路途中の2箇所としたことと反射波を遅延させて測定対象のパルスとの干渉をなくすために管が長くなっていることが異なる。測定部長さ  $l_1$  は 200~480 cm、遅延部の長さ  $l_2$  は 400 cm 以上とした。送波器③としては波形の点からみて小形のダイナミックスピーカ(口径4~6 cm)がすぐれていたが、管径との寸法の不一致により取付部にできる空洞の固有振動がパルスの立ち上りの衝撃で励起されて観測の妨げになる場合があるので、空洞をなるべく小さくして固有振動数を上げ、測定対象域からはずすことが必要であった。図8.2は共振法の装置で、圧力を励振端ともう一方の閉端で測定してそれぞれ  $p_1$ 、 $p_2$  としたが、 $p_1$  が駆動力、 $p_2$  がそれに対する応答の意味になる。実際にはスピーカの駆動電圧をほぼ一定にして振動数



- ① CR Generator    ② Power amplifier    ③ Frequency counter  
 ④ Speaker    ⑤⑥ Pressure transducers    ⑦⑧ Amplifiers  
 ⑨ AC Voltmeter (2 ch.)    ⑩ Amplitude ratio meter  
 ⑪ Phase meter    ⑫ Oscilloscope

図 8.2 共振法の装置

を変化させるのであるが、共振点付近では  $p_2$  のみならず  $p_1$  も大きく変動して駆動力一定の条件が近似的にも満たされない。そこで  $p_1$  ,  $p_2$  の電圧信号を⑦~⑨によって増幅した後に精密な整流回路と割算回路とで構成した振幅比計によって  $|p_2 / p_1|$  を求めて  $\delta$  の測定に用いた。図 8.2 の装置は位相計⑪も用いることによって振動数応答の測定にも使用した。

表 8.1 に主な実験条件を示す。表中の  $\xi$  は位相速度が式 (2.51) で近似できるとして管の弾性の影響を評価するために計算した

$$\xi = \frac{c - \alpha}{c} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 2S\eta}} \quad (8.4)$$

である。ただし、空気は 1 気圧、20°C の状態を想定した。 $\xi$  の値は最大でも  $1.5 \times 10^{-5}$  程度にしかならないので、この実験では管をほぼ完全な剛体とみなすことができる。なお、空気の物性値は後出の表 8.2 に示した。

表 8.1 主な実験条件

実験 番号	管材料	b cm	h cm	$\xi$	温度 °C		
					パルス法	共振法	振動数応答
No. 1	アルミニウム	0.31	0.085	$0.87 \times 10^{-5}$	20.6~20.9	20.6~21.8	19.9~20.6
2	"	0.415	"	1.1 "	18.3~19.1	22.9~23.1	—————
3	"	0.50	0.1	1.2 "	16.9~17.5	21.7~22.4	—————
4	鋼	0.715	0.37	0.17 "	18.8~19.5	—————	—————
5	銅	1.00	0.11	1.1 "	17.8~18.0	20.9~21.9	20.9~22.1
6	鋼	1.685	0.45	0.29 "	20.7~20.8	—————	—————
7	黄銅	2.55	0.25	1.5 "	18.5	—————	—————

8.3.2 実験結果 以上に述べた方法と条件下で測定した対数減衰率  $\delta$  を図 8.3 に示す。円形で示される測定値はパルス法，三角形は共振法によるもので，共振法はパルス法が適用できない低

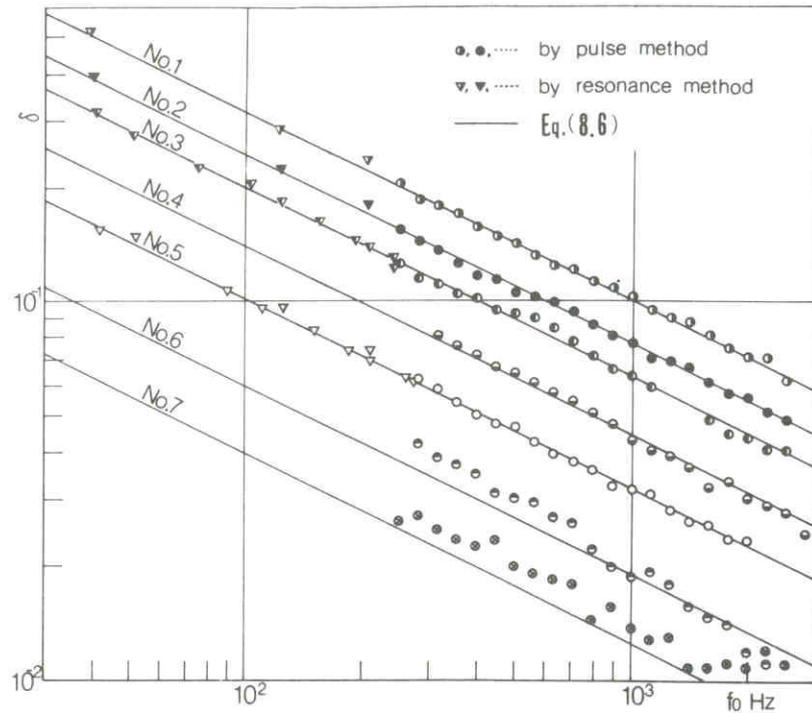
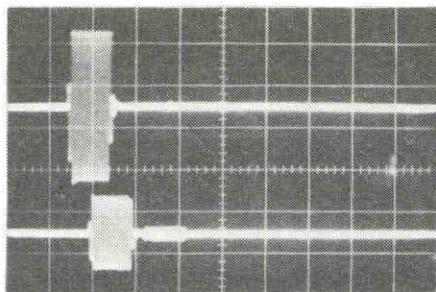
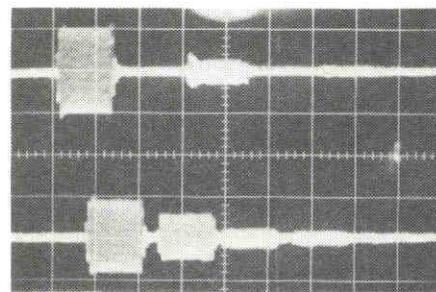


図 8.3 円管内空気を伝わる音波の測定結果

振動数域で部分的に実施した。パルス法で式 (8.3) によって  $\delta$  を算出する際に必要な伝ば時間  $\Delta t$  は  $l_1/c$  の値で代用した。  $\Delta t$  はわずかながら粘性などの影響を受けるが，剛管に対しても成立する式 (3.45) の関係によって評価すると，図 8.3 の結果に対して  $\Delta t = l_1/c$  としたことによる影響は最大で 3% 程度，大部分の測定値に対しては 1% 前後の誤差にとどまる。なお，パルスの観測例を図 8.4 に示す。各場合とも上が図 8.1 の④，下が⑤の圧力変換器で検出された圧力波形でパルスの振幅比はこのような写真から決定した。この場合，分散による波形の変形がほとんどないの



(a) No.1,  $l_1=350\text{cm}$ ,  $f_0=562\text{Hz}$



(b) No.6,  $l_1=480\text{cm}$ ,  $f_0=562\text{Hz}$

図 8.4 パルスの観測例

でパルスは原形をほぼ保ちながら，そして減衰しながら進行している様子がわかる。一方，共振法では管長を  $l = 130 \sim 200$  cm とし，各場合とも三次までの共振点についての測定結果を示している。

さて，図 8.3 では  $\log f - \log \delta$  の関係が示されているが，各場合とも測定値が図上でほぼ直線状に分布していることが見出される。剛管内粘性流体の波動（F 1 モード）に対しては対数減衰率について式（3.43）なる近似式が成立する。これを参考にしながら，No.1～No.5 のパルス法による測定値を処理して実験式を作ってみると

$$\delta = \frac{1.01}{b\sqrt{f}} \quad [b(\text{cm}), f(\text{Hz})] \quad (8.5)$$

となる。ところが，この実験での代表的な状態である 1 気圧， $20^\circ\text{C}$  の空気の動粘度  $N = 0.1501$   $\text{cm}^2/\text{s}$  を式（3.43）に代入すると，式（8.5）右辺の分子の値を 0.687 に置き換えたものになって，実験値の方が約 47% 大きくなる。この差が実は熱伝導によるもので，空気のプラントル数を  $Pr = 0.72$  として後出の式（8.26）によって粘性と熱伝導の双方を考慮した  $\delta$  の近似の理論値を計算してみると

$$\delta = \frac{1.013}{b\sqrt{f}} \quad [b(\text{cm}), f(\text{Hz})] \quad (8.6)$$

となって，理論と実験は非常によく一致する。図 8.3 で各場合に対応して描かれている直線は式（8.6）によるもので，No.1～No.5 については共振法で求めた低い振動数域まで  $\delta$  の実験値と理論値との一致はよい。No.6 と No.7 では一致の程度が悪くなっているが，これらの場合には減衰が小さいのでパルス法での測定部の長さ  $l_1$  が実験室規模では十分にとれないこともあって  $p_1$  と  $p_2$  の値が接近し，式（8.3）を用いて  $\delta$  を算出する際に  $\ln(p_1/p_2)$  に対する読み取り誤差が相対的に大きくなったものと考えられる。

つぎに別の角度の検討として図 8.2 の装置を用いて振動数応答の測定を行った。図 8.5 に表 8.1 の実験条件で No.1 と No.5 の場合の結果を示す。管長はいずれも 200 cm である。図 8.5 に併記した曲線は第 4 章で導いた遷移行列・式（4.29）に剛管の場合の波数の近似式（4.14）を適用して計算したものであるが，動粘度  $N$  の代わりに熱伝導効果までを含む等価動粘度〔後出式（8.21）〕 $N_{eq} = 0.326$   $\text{cm}^2/\text{s}$  を用いている。この計算値は後に示すより簡単な式（8.28）によっても図上では区別できないほどの差しか生じない。実験値と計算値は振幅比，位相差ともよく一致していると言えよう。このように気体に対しては  $N$  の代わりに  $N_{eq}$  を用いれば見かけ上熱伝導効果のない単純な粘性流体として計算することは十分に可能である。

以上の実験は熱伝導効果までを含む現象についてのものなので、それを考慮していない第3章、第4章の理論の直接的な検証にはならない。しかし、式(8.5)と(8.6)の一致は減衰のうち、粘性に起因するものが式(3.43)と同じ形で生じ、それに類似の法則性に従う熱伝導による減衰が加わっているという考え方を支持するものなので、もし、熱伝導効果がなければ減衰は式(3.43)の形で起きることを示すものと言えよう。少なくとも、それを否定する現象は本実験では何ら見出されない。式(3.43)は管内流体の波動では減衰は主に薄い境界層内の摩擦によってもたらされるとの仮説に立って導かれたものであるから、現実の減衰機構もそれとほとんど同じと見てよいと考えられる。

なお、つぎに述べる理論は管断面形状や気体の種類を問わないところ

から、円管以外に正方形断面の管と空気、また、円管とアルゴン、二酸化炭素でここにおけるのと同様の実験を行ったところ、やはり理論と実験はよく一致した。その詳細はここでは省略する。

8.3.3 気体に対する理論の補足 これまでにも述べてきたように、管内流体が気体の場合には熱伝導も減衰の要因になるのであるが、その機構はほぼつぎのようである。圧力変化に伴う気体の温度変化は管壁から離れたところではほぼ断熱的に起こる。しかし、管壁は熱容量が大きいのでほぼ定温の状態を保つ。それゆえ、管壁に接する部分の気体には近似的にみて等温から断熱まで状態変化の様式が連続的に変化する薄い層、温度境界層が生じる。この層を通じての気体と管壁の間の熱の授受が断面上での気体の平均粒子速度と圧力の関係に位相のずれをもたらす、摩擦力が作用

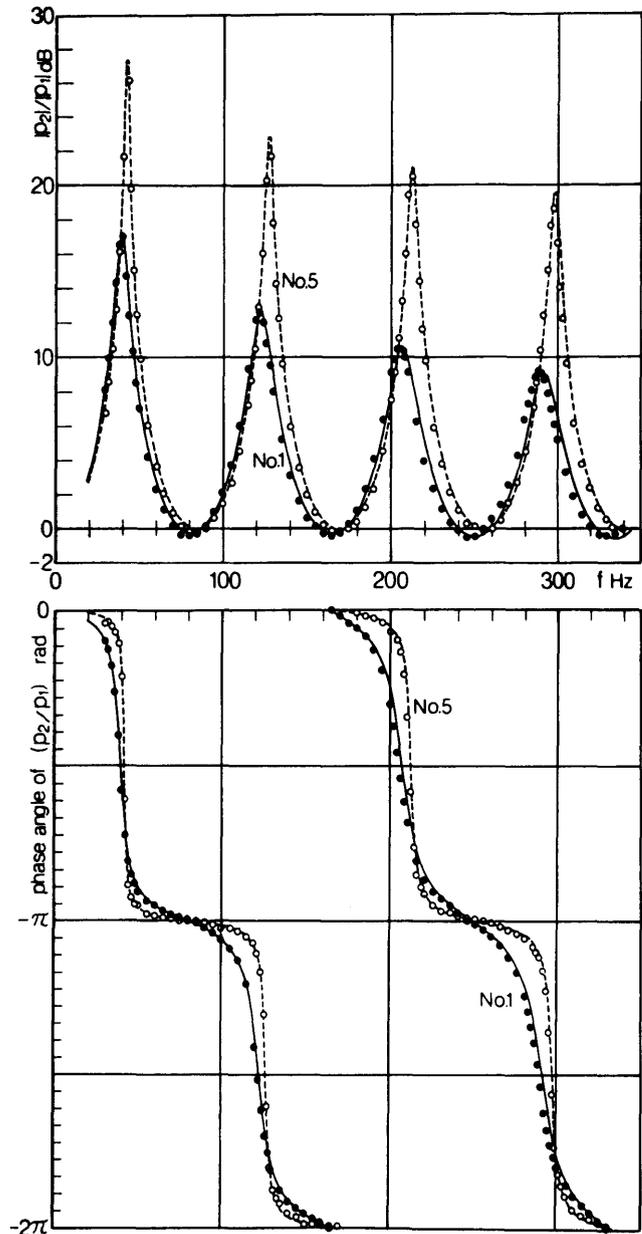


図 8.5 振動数応答の測定例  
(No.1 および No.5,  $l=200$  cm)

するのと同様の結果になるのである。このような現象は古くから知られており，理論的には Brown, その他によって検討されているのであるが，十分には普及していない。それは明らかに理論がかなり複雑な形をしているためと考えられる。ところが，粘性も熱伝導も広い振動数範囲にわたって非常に薄い境界層によってその作用を現わすという点に着目すれば理論を簡単化することができ，しかも管断面形状は任意のものを扱えるようになる。以下において，そのような簡易な近似理論を導くが，ここでは管の弾性変形は一切無視する。

なお，本項においては第 1 章に示す基本的な記号のほかにつぎの記号も用いる。

$x, y$	:	二次元直角座標
$s$	:	ラプラス変数
$\hat{p}, \hat{q}_x, \dots$	:	$p, q_x, \dots$ の $t$ に関するラプラス変換
$A$	:	任意断面管の断面積
$L$	:	任意断面管の内周長さ
$C_p$	:	気体の定圧比熱
$r$	:	気体の比熱比
$\kappa$	:	気体の温度伝導率
$P_r$	:	気体のプラントル数 $P_r = N / \kappa$
$\theta$	:	気体の温度の変動分
$\theta_0$	:	気体の絶対温度の平均値
$\rho$	:	気体の密度の変動分
$\rho_0$	:	気体の密度の平均値
$p_0$	:	気体の絶対圧力の平均値
$c_0$	:	気体中の断熱的音速 $c_0 = \sqrt{r p_0 / \rho_0}$

はじめに， $y = 0$  で剛平面に接している二次元半無限空間を考え， $y > 0$  の領域に満たされた粘性流体に波が壁に平行に生じるものとする。〔図 8.6(a)〕運動方程式は演算子を二次元のものとするれば精密には式 (3.3) となるのであるが，第 4 章で検討したように右辺第 2 項の作用は管内の波動では第 3 項の作用に比べて小さいので無視する。また，壁の近くでは  $|\partial^2 q_x / \partial y^2| \gg |\partial^2 q_x / \partial x^2|$  であり，この波は本質的に  $x$  方向の縦波であるから  $|q_y| \ll |q_x|$ ， $|\partial p / \partial y| \ll |\partial p / \partial x|$  であることに注意すれば運動方程式は簡単化されて，ラプラス変換を用いて表わせばつぎのようになる。

$$\frac{\partial^2 \hat{q}_x}{\partial y^2} - \frac{s}{N} \hat{q}_x = \frac{1}{\rho_0 N} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \quad (8.7)$$

これを  $y = 0$  で  $\hat{q}_x = 0$ ， $y = \infty$  で  $|\hat{q}_x| \neq \infty$  であるとして解くと

$$\hat{q}_x = -\frac{1}{\rho_0 s} (1 - e^{-\sqrt{\frac{s}{N}} y}) \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \quad (8.8)$$

右辺括弧内の第2項が境界層を表わす。さて、管内の波動でも境界層が断面寸法に比べて薄ければ  $y$  軸を管壁上の任意の点から壁に垂直に内側に向けてとれば壁の近くの速度分布は式(8.8)のようになると考えられる。そこで、式(8.8)を用いて  $\hat{q}_x$  の断面上での平均値  $\hat{q}_m$  を計算する。境界層が薄ければその影響は管壁に沿って現われるだけなので、全断面にわたって積分する代わりに

$$\hat{q}_m = -\frac{1}{A\rho_0 s} \left( A - L \int_0^{y^*} e^{-\sqrt{\frac{s}{N}} y} dy \right) \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \quad (8.9)$$

とすることができる。ただし、 $y^*$ は  $|\exp(-\sqrt{s/N} y^*)| \ll 1$  となるような  $y$  の適当な値とする。式(8.9)を整理すると

$$\rho_0 s \hat{q}_m = -\left(1 - \frac{L}{A} \sqrt{\frac{N}{s}}\right) \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \quad (8.10)$$

これが一次元近似の運動方程式である。気体の粘性の効果はこの式によって表わされる。

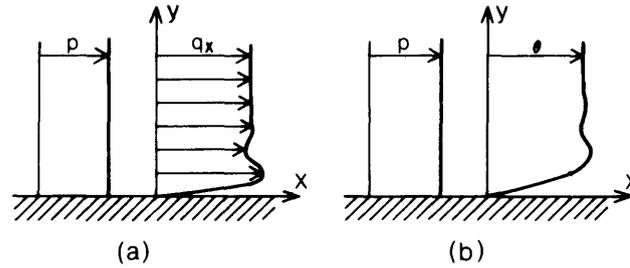


図 8.6 速度と温度の境界層の説明図

つぎに熱伝導の効果を検討する。これは一次元近似の連続条件に組み込まれる。まず、基礎式は線形近似で

$$s\hat{\rho} + \rho_0 \operatorname{div} \hat{q} = 0 \quad (8.11)$$

$$\nabla^2 \hat{\theta} - \frac{s}{\kappa} \hat{\theta} = -\frac{s}{\kappa \rho_0 C_p} \hat{p} \quad (8.12)$$

$$p_0 = C_p \frac{r-1}{r} \rho_0 \theta_0, \quad \frac{\hat{p}}{p_0} = \frac{\hat{\rho}}{\rho_0} + \frac{\hat{\theta}}{\theta_0} \quad (8.13)$$

これらの式は順に連続条件、エネルギー方程式、状態方程式である。式(8.13)の第2式の各項の分子は本来は微分量であるが、各量の変動が小さいとしてこのように表わす。ここでも  $y=0$  で定

温の剛壁に接している二次元の半無限空間を考え、波が  $x$  方向に進むものとする。〔図 8.6 (b)〕波長が大きければ壁の近くでは  $|\partial^2 \hat{\theta} / \partial x^2| \ll |\partial^2 \hat{\theta} / \partial y^2|$  が成立するから式 (8.12) は簡単化されて

$$\frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial y^2} - \frac{s}{\kappa} \hat{\theta} = - \frac{s}{\kappa \rho_0 C_p} \hat{p} \quad (8.14)$$

これを  $y = 0$  で  $\hat{\theta} = 0$ ,  $y = \infty$  で  $|\hat{\theta}| \neq \infty$  として解くと

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\rho_0 C_p} (1 - e^{-\sqrt{\frac{s}{\kappa}} y}) \hat{p} \quad (8.15)$$

式 (8.8) から式 (8.10) を導いたのと同様の方法で、 $\hat{\theta}$  の断面上の平均値  $\hat{\theta}_m$  を式 (8.15) から計算すると

$$\hat{\theta}_m = \frac{1}{\rho_0 C_p} \left( 1 - \frac{1}{A} \sqrt{\frac{\kappa}{s}} \right) \hat{p} \quad (8.16)$$

つぎに式 (1.11) を式 (8.13) の第 2 式を用いて変形してから断面上で平均すると

$$s \hat{p} - \frac{\dot{p}_0}{\theta_0} s \hat{\theta}_m + \dot{p}_0 \frac{\partial \hat{q}_m}{\partial x} = 0 \quad (8.17)$$

ただし、 $\dot{p}$  はもともと一様に近く、 $|q_y| \ll |q_x|$  であることを考慮した。式 (8.17) に式 (8.16) を代入し、式 (8.13) の第 1 式によって  $\theta_0$  を消去すれば、

$$s \left\{ 1 + \frac{L}{A} (r-1) \sqrt{\frac{\kappa}{s}} \right\} \hat{p} = - r \dot{p}_0 \frac{\partial \hat{q}_m}{\partial x} \quad (8.18)$$

これが次元近似の連続の式で、 $\hat{p}$  の係数の第 2 項が熱伝導の影響を表わす。この項の有無で、 $\hat{p}$  と  $\hat{q}_m$  の関係に位相の変化が生じることは容易にわかる。

式 (8.10) と (8.18) とを連立させれば管内気体の波動問題を解くことができるのであるが、もう少し使いやすい形に方程式を変形しておく。 $\hat{p}$ ,  $\hat{q}_m$  がともに  $e^{\zeta x}$  なる因数を持つとすれば式 (8.10), (8.18) から  $\zeta$  に関する特性方程式が得られるが、それを解くと

$$\zeta = \pm \frac{s}{c_0} \sqrt{\left\{ 1 + \frac{L}{A} (r-1) \sqrt{\frac{\kappa}{s}} \right\} / \left( 1 - \frac{L}{A} \sqrt{\frac{N}{s}} \right)} \quad (8.19)$$

さて、この近似理論では管の断面寸法に比べて速度と温度の境界層が薄いことを前提にしていた。ところが、式 (8.8), (8.15) から  $\hat{q}_x$ ,  $\hat{\theta}$  の境界層の厚さをそれぞれ  $|\sqrt{N/s}|$ ,  $|\sqrt{\kappa/s}|$  で代表させることができる。これらの数倍も壁から離れば壁の影響はほとんどなくなるからである。それゆえ、 $\sqrt{N/s}$ ,  $\sqrt{\kappa/s}$  はともに  $A/L$  に比べて非常に小さい量であるべきで、このことを考慮して式 (8.19) の近似をさらに進めると

$$\zeta = \pm \frac{s}{c_0} \left( 1 + \frac{1}{b_{eq}} \sqrt{\frac{N_{eq}}{s}} \right) \quad (8.20)$$

ここでつぎの記号を導入した。

$$N_{eq} = N \left( 1 + \frac{r-1}{\sqrt{Pr}} \right)^2 \quad (8.21)$$

$$b_{eq} = \frac{2A}{L} \quad (8.22)$$

式 (8.21) の意味は熱伝導の効果が第一近似では粘性効果と同形であることに着目して、粘性と熱伝導の双方を  $N_{eq}$  なる等価動粘度を用いて見かけ上粘性だけとして扱おうというものである。また、これまでの議論は管の断面形状は特定されていないので相対する壁間の距離が境界層の厚さに比べて十分に大きければ任意でよいのであるが、波の減衰の面から見て式 (8.22) で定義される内半径を持つ等価な円管を想定することができる。

特性指数を式 (8.19) から (8.20) へと変形したので、方程式 (8.10), (8.18) もこれに適合するように書き直す。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \rho_0 s \left( 1 + \frac{1}{b_{eq}} \sqrt{\frac{N_{eq}}{s}} \right)^2 \hat{q}_m &= 0 \\ s \hat{p} + r \rho_0 \frac{\partial \hat{q}_m}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.23)$$

これが近似方程式の最終的な形で、 $N_{eq}$  を定義したのに合わせて粘性と熱伝導の双方を粘性抵抗の形で運動方程式に組み込み、連続条件は見かけ上断熱条件下での圧縮性を表わすとしてある。

ここで  $s = j\omega$ ,  $\zeta = j\beta$  を式 (8.20) に代入して、式 (3.31) と同様の関係から  $\alpha'$ ,  $\delta'$  を求めると

$$\alpha' = c_0 \left/ \left( 1 + \frac{1}{b_{eq}} \sqrt{\frac{N_{eq}}{2\omega}} \right) \right. \quad (8.24)$$

$$\delta' = \frac{2\pi}{b_{eq}} \sqrt{\frac{N_{eq}}{2\omega}} \left/ \left( 1 + \frac{1}{b_{eq}} \sqrt{\frac{N_{eq}}{2\omega}} \right) \right. \quad (8.25)$$

$\sqrt{N_{eq}/2\omega} / b_{eq} \ll 1$  であれば、式 (8.25) の近似をさらに進めて

$$\delta' \approx \frac{2\pi}{b_{eq}} \sqrt{\frac{N_{eq}}{2\omega}} \quad (8.26)$$

これはエネルギー的な考察から導いた式 (3.43) と同形で、 $b_{eq} = b$ ,  $N_{eq} = N$  とすれば、すなわち円管で熱伝導がないとすれば両者は一致する。また、式 (8.24) と (8.26) から  $\delta' = 2\pi$

$(c_0 - \alpha') / c_0$  となるが、この関係は式 (3.45) そのものである。

さて、式 (8.20) に対応する  $\zeta$  の精密値は円管についてだけでなく<sup>(19)</sup> 本論文の記法ではつぎのようになる。

$$\zeta = \pm \frac{s}{c_0} \left[ \left\{ 1 + 2(r-1) F \left( j b \sqrt{\frac{P_r s}{N}} \right) \right\} / \left\{ 1 - 2 F \left( j b \sqrt{\frac{s}{N}} \right) \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (8.27)$$

ただし、 $F(z)$  の定義は式 (4.13) に従うものとする。ここでベッセル関数を漸近展開して  $F(z)$  を近似し、 $N/sb^2 \ll 1$  であることなどに注意すると式 (8.27) の第一近似は式 (8.20) の円管の場合に一致する。つまり、ここで求めた近似式は物理的には速度と温度の境界層が管断面寸法に比べて薄いことを前提にしていたが、数学的には Brown の理論の漸近展開の意味を持つのである。円管以外では精密値が得られていないので、ここで式 (8.20) の円管の場合と式 (8.27) を数値的に比較してみる。表 8.2 に示す定数を用いて式 (8.27) から空気、アルゴン、二酸化炭素および特別な場合として  $r=1$  とできる液体について  $\zeta$  を計算し、それから求めた  $\bar{\alpha}'$ 、 $\delta'$  を精密値とした。結果を図 8.7 に示す。図の横軸は  $\bar{f} / \bar{N}_{eq} = \omega b^2 / 2\pi N_{eq}$  で、 $\bar{f} = \omega b / 2\pi c_0$ 、 $\bar{N}_{eq} = \bar{N}_{eq} / b c_0$  の無次元化による。図 8.7 には各種類の流体に対する式 (8.27) による値と式 (8.20) ; すなわち式

(8.24) , (8.25) による近似値のほかに  $\delta'$  については式 (8.26) による結果も示した。これらの近似値には図 8.7 の表現では流体の種類による差異はない。図 8.7 によれば  $\bar{f} / \bar{N}_{eq} > 10$  の領域での  $\bar{\alpha}'$ 、 $\delta'$  の流体の種類による差は小さく、近似式も比較的よい精度を持つことがわかる。

ちなみに  $\bar{f} / \bar{N}_{eq} = 10$  は  $b = 1 \text{ cm}$ 、気体を空気とすれば約 3.3 Hz であって振動的な現象でこの限界が障害になる

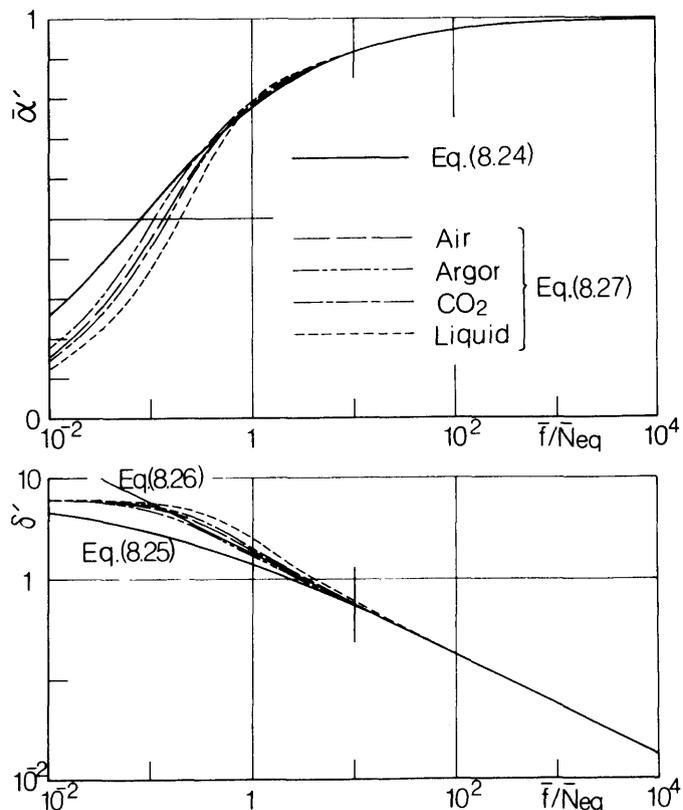


図 8.7  $\bar{\alpha}'$ 、 $\delta'$  の近似値と精密値

表 8.2 20°C, 1気圧における気体の物性値

	$\rho_0$ g/cm <sup>3</sup>	$r$	$P_r$	$c_0$ cm/s	$N$ cm <sup>2</sup> /s	$N_{eq}$ cm <sup>2</sup> /s
空 気	$1.205 \times 10^{-3}$	1.403	0.72	$3.435 \times 10^5$	0.1501	0.3265
アルゴン	1.662	1.67	0.666	3.191	0.1336	0.443
二酸化炭素	1.842	1.302	0.80	2.676	0.0793	0.1418
液 体	—	1.0	—	—	—	—

ことは少ないと考えられる。

図 8.7 には現われないが、式 (8.20) には高振動数側にも限界がある。これは精密な式 (8.27) でも同じで、その主因は式 (3.3) 右辺の第 2 項を介しての粘性の作用と、波長が短くなるために生じる軸方向の熱伝導の影響が無視できなくなることによるもので、これらの要因が自由空間における平面音波の減衰の主因と同じであることに着目して試算してみると、これらによる減衰が境界層による減衰と同程度になるのは直径が数 cm の円管内空気では 100 kHz 以上においてである。実際にはこれ以下で影響がではじめるから 10 kHz 前後が近似の限界と見積もられる。

ここで導いた近似理論は適用可能な振動数の限界を上下に持つが、簡潔なものであり、形式的に  $r = 1$  とすれば熱的效果は消去されて液体にも使用できるので広く応用できると考えられる。液体に用いる際には式 (8.23) において  $N_{eq} = N$ ,  $r\rho_0 = K$  とすればよいが管の弾性が無視できる場合に限られることは言うまでもない。

なお、方程式 (8.23) の解を使いやすいように遷移行列で表わすとつぎのようになる。

$$\begin{bmatrix} \hat{p}(x) \\ \hat{q}_m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \zeta x & \frac{r\rho_0 \zeta}{s} \sinh \zeta x \\ \frac{s}{r\rho_0 \zeta} \sinh \zeta x & \cosh \zeta x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{p}(0) \\ \hat{q}_m(0) \end{bmatrix} \quad (8.28)$$

#### 8.4 連成波動の減衰

管内流体が液体のときにはほとんどの場合に管を流体に対して剛体であるとみなすことはできず、管の運動を考慮することが必要になる。実はそのような場合には管に接触したり、管を支持したりする物体の運動も無視できないことが多い。それゆえ、対象とする波動・振動モードだけを純度よく取り出すことや周囲へのエネルギー漏えいを無視できる程度に抑えることに注意を払わないと連成

波の伝ば径路における減衰の機構を明らかにすることができない。第2章，第3章の解析などから明らかなように連成波には低振動数域でC1，C2の二つの主要な波動モードが存在するが，現在までのところ，良好な実験が可能であったのはC2モードについてであった。これは棒の縦振動とほぼ同じ要領で実験を遂行できる。以下にその方法と結果を示す。

8.4.1 実験装置 実験は主に共振法により，一部の減衰が小さい場合については自由減衰法も用いた。図8.8に実験装置を示す。管の一端を電磁形励振器④で非接触励振し，他端にとりつけた小形加速度形⑧（質量1.8g）で管の縦振動を検出する。スイッチSは自由減衰法を用いるとき

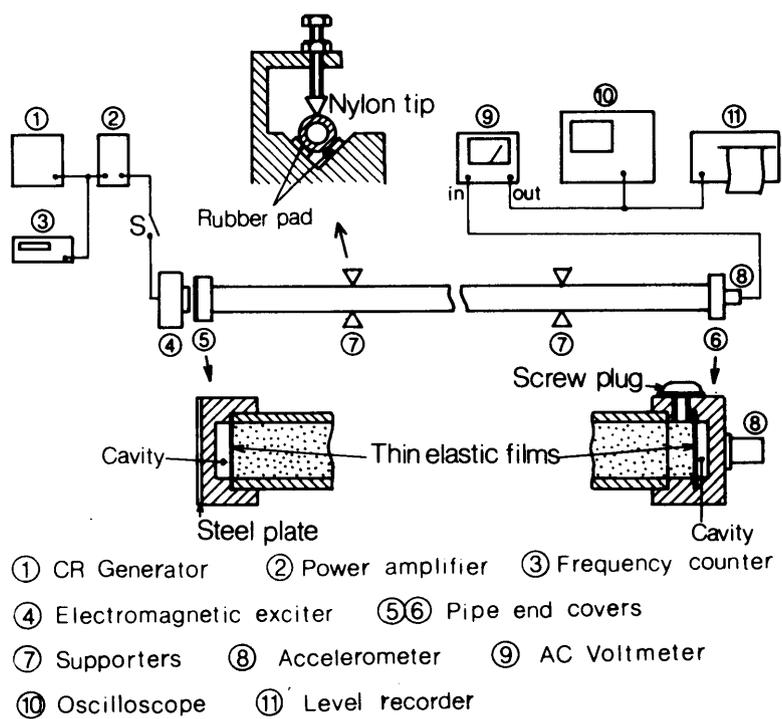


図 8.8 C2モードの減衰測定装置  
 （共振法，自由減衰法）

に励振回路を開くためのものである。管は支持器⑦で支えるが，支持点は対象とする共振モードの節点である。節点以外で支えると当然のことながら減衰は大きくなり，結果が混乱する。⑦は図中に示したようにナイロン片やゴム片を介して比較的大きなブロックにいわば軟固定をする構造としたが，固定しないと減衰が大きくなることがある。管端は薄い弾性膜（塩化ビニル）で液体を封じているが，これは管端の運動が直接液体に伝わるのを防ぎ，C1モードの発生を抑えるためである。液温は供試管と同質の管に同じ液体を封入したダミー管を供試管の近くに平行においてその液温を熱電対で測定した値で代用した。液体では粘性の温度変化が大きいのので液温を  $20 \pm 0.5^\circ\text{C}$  の範囲に保つように管理した。

試料として用いた管は黄銅製で，諸元は  $a = 0.54\text{cm}$ ，  $h = 0.118\text{cm}$  ( $\eta = 4.576$ )，

$\rho_P = 8.41 \text{ g/cm}^3$ ,  $E = 1.022 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$ ,  $\nu = 0.35$  および  $l = 300 \text{ cm}$  である。液体には粘性係数を簡単に変えられるのでグリセリン水溶液を用いたが、その物性値としてこの実験に必要な粘性係数と音速はともに密度の関数の形で測定したデータが公表されているので、ここでは精密な比重計で密度を測定し、対応する粘性係数と音速をそれらのデータから補間法で求めて用いた。表 8.3 に各場合の実験条件を示す。

### 第 8.3 主な実験条件

実験番号	濃度 mass %	$\rho_L$ g/cm <sup>3</sup>	$c$ cm/s	$N$ cm <sup>2</sup> /s	$\bar{\rho}$	$S$	$\bar{N}$	液温 °C
No. 1	約 95	1.252	$1.953 \times 10^5$	4.81	6.72	$4.67 \times 10^{-2}$	$5.12 \times 10^{-5}$	20.0 ~ 20.5
2	86	1.228	1.903	1.15	6.85	4.37	1.25	20.2 ~ 20.3
3	75	1.198	1.863	0.309	7.02	4.07	0.345	19.8 ~ 20.5
4	61	1.148	1.775	0.0801	7.33	3.54	0.0938	20.0 ~ 20.2
5	37	1.096	1.688	0.0317	7.67	3.06	0.0376	20.0 ~ 20.3
6	0	0.998	1.483	0.01	8.43	2.15	0.014	20.3 ~ 20.5
7	管 単 独							

8.4.2 実験結果 まず、励振振動数を掃引して管端における加速度応答を記録した例を図 8.9 に示す。この図の横軸はほぼ振動数の対数目盛になっている。(ただし、若干の誤差があるのは振

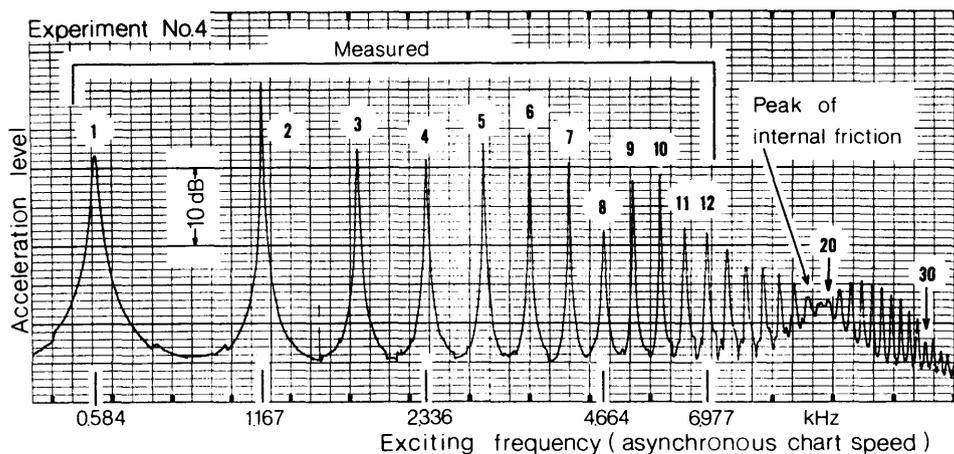


図 8.9 管端における加速度応答の参考記録例  
(実験 No.4)

動数と紙送り速度が同期していないためである。)また、支持点を 2 次の共振モードの節としたので、支持点はそのモードの節に一致する 2, 6 次の共振ピークは高くなり、腹に一致する 8 次の共振ピ

ークは低くなっている。このようなことから、図 8.9 はあくまでも参考にすぎないが、30 次くらいまでは明確に励起されていることがわかる。しかしながら、20 次の共振点（約 10 kHz）の近くに、その物理的な機構は不明であるが、管材の内部摩擦の顕著なピークがあって 10 次以上ではそれに向ってピークの高さが減っていく。この領域では共振法しか使えないが、共振法は元来、その共振モードが他の共振モードとは独立していることを前提に使用できるものなので、共振ピークのレベルが低すぎると隣のモードのすその影響で減衰率の精度が悪くなる。そこで本実験では測定範囲を 12 次の共振点までとした。なお、図 8.9 と同様の記録は各実験ごとに行って、測定時に励振が正常にできるか否かの判定資料とした。

図 8.10 に C 2 モードの対数減衰率  $\delta$  の測定結果を示す。このうち、No.7 は液体を封入しない管単独の状態

で振動させたときの減衰で、管材の内部摩擦が主因と考えられ、連成波の減衰に対してはバックグラウンドの意味を持つ。

前述したように、約 10 kHz の点に内部摩擦のピークがあるので図示範囲ではそれに向って  $\delta$  は  $f$  とともに大きくなっている。No.7 の実験値の対応して描かれている曲線（一点鎖線）は  $\delta$  を  $f$  の 5 次式で表わした実験式によるものである。

さて、No.1 ~ No.6 が連成波 C 2 モードの減衰であるが、 $\delta$  の測定値は低振動数域ではいずれも  $1/\sqrt{f}$  におおむね比例する形で分布している。これは図 8.16 に示さ

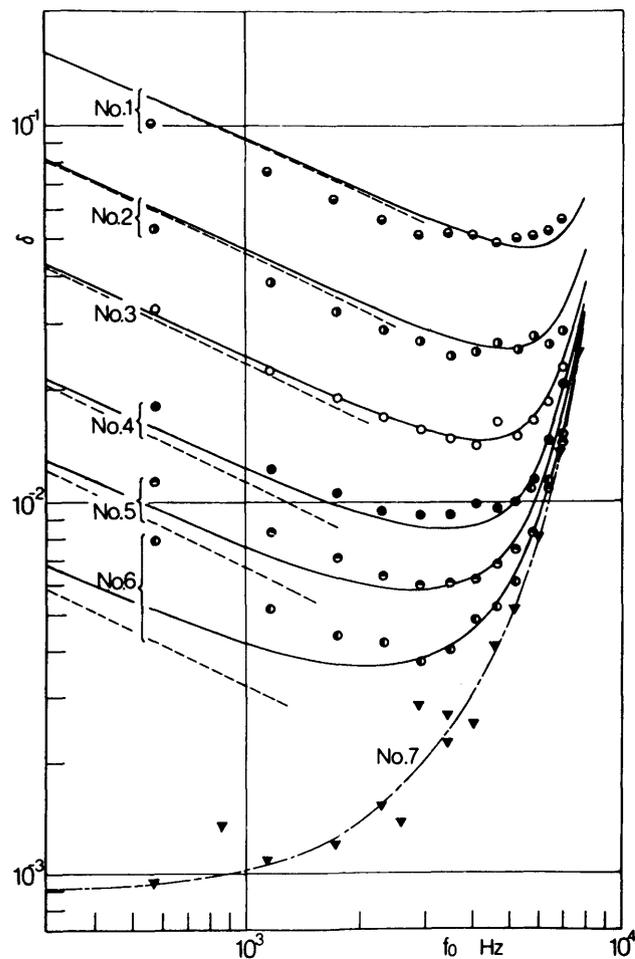


図 8.10 C 2 モードの減衰率の測定結果

れる理論的な結果と傾向において一致するものであり、この領域での減衰が主に流体粘性によってもたらされていることを意味している。これは、また、管だけの No.7 との  $\delta$  の差を見ても明らかである。一方、 $f$  が大きくなると  $\delta$  は極小値を経て管単独の No.7 の曲線に沿う形で変化するようになるが、これは明らかに粘性よりも内部摩擦による減衰の方が卓越するようになるためである。実験値

と比較するための理論値は第4章で求めた近似Ⅰによって計算した。すなわち、式(4.17)で与えられるC2モードの波数 $\beta^*$ に式(3.31)を適用して $\delta'$ を計算するのであるが、4.4節に示した複素弾性係数を用いる方法で管材の内部摩擦を考慮したもので実線で、管を完全弾性体としたものを破線で図8.10に示した。内部摩擦はNo.7の曲線を表わす実験式によって計算に取り入れた。内部摩擦を考慮した計算値は傾向において実測値とよく一致しており、一部を除けば定量的にもかなりよく一致していると言えるであろう。管内流体が水であるNo.7は他に比べて実験と理論の一致が悪いが、その原因として実験上の精度の影響が大きいと考えられる。空気の場合の図8.3のNo.6, No.7でもそうであったが、減衰が小さいと減衰率の測定精度は一般に悪くなる傾向にある。それだけ、外因の影響を直接的に受けやすくなるためであるが、いずれにしても水のような低粘度の液体でも粘性は内部摩擦と比較して必ずしも無視できるものではない。一方、粘性が大きければ管材の内部摩擦は低い振動数域で無視することはできる。

以上の実験によって、C2モードの減衰への流体粘性の寄与が大きいものであることが明らかになり、第3章、第4章の解析法がほぼ妥当であることが確認された。この実験ではC1モードについて調べることはできなかったが、解析的にはC1, C2モードは同一の理論で扱われるものであり、本実験はその理論の部分的な証明の意味を持つので、ここでの結果がC1モードに対する理論の妥当性の有力な傍証にはなると考えられる。

ところで、高粘度の油を含む鋼製油圧管の縦振動の減衰を管材の内部摩擦だけに帰して説明した<sup>(50)</sup>論文もあるが、そのような結論に一般性がないことは本実験で明らかである。金属材料の内部摩擦はいわゆる構造に敏感な量であって、組成や加工履歴によってかなり変化するものと言われるが、著者の経験では鋼や銅でも1kHz以下の低い振動数域では図8.10のNo.7と $\delta$ のオーダーにおいて同程度であることが多い。それゆえ、特別な場合を除けばC2モードの散逸要因としてはやはり流体粘性が最も重要であると考えべきであろう。

## 8.5 結 言

管内空気を伝わる音波(F1モード)とグリセリン水溶液を封入した黄銅管の縦振動(C2モード)の減衰について実験的に検討した。

(1) 管内流体が空気の場合、波動の減衰率は第3章で導いた近似式(3.43)と傾向はよく一致するが、実験値の方が約47%大きくなる。これは、一般に流体が気体の場合には圧力変化に伴う温度変化が大きいのでほぼ定温壁となる管壁との間に熱の授受が発生し、これが粘性とともに減衰の原因となるため、これを考慮して補正した理論による計算値は実験値によく一致する。

(2) 流体が気体の場合に現われる熱伝導の効果は第一近似においては気体の動粘度が見かけ上増大したのと同じ形になる。このことを利用して粘性と熱伝導の双方の効果を等価な動粘度で表現すると簡単な近似理論が導かれる。

(3) C 2 モードの減衰率は、第 4 章で導いた近似 I により、管材の内部摩擦をも考慮して計算した値とかなりよく一致する。ただし、流体の粘性が小さい場合には一致の程度は劣るが、これは減衰率が小さいために主に実験上の誤差の影響を受けたものと考えられる。

## 第 9 章 結 論

本論文では弾性円管と管内の流体が連成する波動の伝ばに関する性質を第 1 編（第 2 章～第 6 章）で解析的に調べ、第 2 編（第 7 章、第 8 章）において解析結果のうち代表的な点について実験的に検討した。本研究で得られた結論はつぎのとおりである。

(1) 第 2 章では流体を非粘性として連成波の分散性を中心とする性質を調べた。

(a)  $C_1$ 、 $C_2$  の二つのモードは長波長域においてはほとんど非分散的であり、それぞれ流体、あるいは管の縦波が主になる。波長が短くなり、管径と比較し得る程度になるとこれら二つのモードは主に管の半径方向の運動とそれに伴う流体の運動のために著しい分散性を示す。

(b)  $C_3$  以上の高次モードの性質は管が剛体のときの流体の高次の波動モードに類似する。

(c) 管内流体に一樣流があるときには、連成波の性質が流体が主になるような領域では位相速度は一樣流の速度に近い幅で変化するが、管が主であるような領域では変化の幅は小さい。

(d)  $C_1$ 、 $C_2$  モードの長波長・非分散域に対しては伝ば速度の近似計算が可能である。 $C_1$  モードに対しては Korteweg による式 (2.51) が、 $C_1$ 、 $C_2$  の二つのモードを同時に扱うときには式 (2.56) が、とくに金属管の場合には精度よく成立する。

(2) 第 3 章では流体の粘性を考慮に入れて、波の減衰に関することがらを中心に調べた。

(a)  $C_1$ 、 $C_2$  の二つの連成波のモード、および管が剛体のときの  $F_1$  モードの減衰は波長が管径の約 10 倍以上の領域では管壁に接して生じる流体の薄い速度境界層内の摩擦が主な原因となって生じる。ただし、波長が非常に大きくなったり、流体粘度が大きすぎたりすると境界層が厚くなって管路の全面を覆うようになるので波の性質は変化し、 $C_1$ 、 $F_1$  モードでは波というより交番圧力による流れとしての性質を示すようになる。

(b) 境界層が薄い領域では  $F_1$ 、 $C_1$  モードの対数減衰率の簡易な近似式 (3.43) などが成立する。

(3) 第 4 章では第 3 章の解析法を単純化して粘性流体を含む直管の振動数応答の近似計算式を導いた。

(a)  $C_1$ 、 $C_2$  の二つのモードを対象にした近似 I は波長が管径の約 10 倍以上の領域で非常によい精度を持つ。

(b)  $C_1$  だけを対象にしたより簡単な近似 II は近似 I より精度が劣るが、 $C_2$  モードの発生がなく、肉厚が極度に薄くない金属管であれば十分に実用が可能である。

(c) 近似 I の計算式を用いて管材の内部摩擦の連成波の減衰に対する影響を調べたが、金属管の場合には内部摩擦は小さいことが多いので流体粘性による減衰と比較して無視できることが多いと

考えられる。

(4)第5章では境界条件が任意に与えられたときの解析法について検討した。

(a)一般の一次元的な波動系の方程式の解は実波数を持つ伝ば項と虚数、複素数の波数を持つ非伝ば項とに分類できる。一般解はすべての伝ば項と非伝ば項の一次結合となる。

(b)非伝ば項は境界の近傍においてのみ伝ば項と比較し得るほどの値を持つが、境界から離れると急速に小さくなる。

(c)連成波の低振動数域では伝ば項はC1, C2の二つだけで、残りはことごとく非伝ば項である。

(d)連成波の非伝ば項は低振動数域では無視しても影響は小さく、このことにより、C1, C2の二つのモードだけを対象にした近似計算が可能になる。

(e)流体に粘性があっても連成波の各モードの伝ば、非伝ばの性質には大きな変化はない。したがって、第4章の近似法の理論的な根拠の一つが、この検討によって与えられる。

(5)第6章では連成波の非軸対称モードを検討し、管の横振動のモードを除いてすべての非軸対称モードは低振動数域では実波数を持たず、非伝ば的になっていることを確認した。したがって連成波の解析に際して、横振動の発生のない条件下では非軸対称モードを考慮する必要はない。

(6)第7章では水を封入した黄銅管についてパルス法で伝ば速度の実験を行った。伝ば速度の測定値は第2章の方法による群速度の計算値と分布傾向においてかなりよく一致した。このことから、第2章の解析法は実際に妥当であると判断される。しかしながら、この実験法はパルスの先端部の速度を求めるために、一部において群速度と少し異なる値となった。これは明らかに実験法の問題と考えられるので、連成波動、さらに一般的に強分散性の波動系の群速度の測定法については改良すべき点が存在すると考えられる。

(7)第8章では減衰に関する実験を行った。

(a)管内流体を空気としてそれを伝わる音波の対数減衰率を調べた結果、単純な粘性流体として計算する第3章の近似式(3.43)に傾向はよく一致するが実験値の方が約47%大きくなる。これは気体では圧力変動に伴う温度変動が大きいために定温壁として振舞う管壁との間に発生する熱伝導も減衰の原因となるためである。

(b)気体の場合に現われる減衰に対する熱伝導の効果は第一近似においては気体の動粘度が見かけ上増大したのと同じ形になる。このことを利用して粘性と熱伝導の効果を等価な動粘度で表現すると管内気体の波動の簡単な近似理論が導かれる。

(c)(a)項で述べた実験値は(b)項で述べた理論による値とよく一致する。これは管内流体の波動において速度と温度の境界層が薄いとする理論的な考察の妥当性を証明するものである。

(d)黄銅管にグリセリン水溶液を封入した系の管の縦振動はC 2モードが定常波となって現われたものであるが，その対数減衰率の測定結果は第4章で導いた近似Iを用いて管材の内部摩擦も考慮して計算した値とかなりよく一致する。したがって，第4章，およびこれと近似的には一致する第3章の解析法は連成波の減衰に関してほぼ妥当な結果を与えると判断される。

本研究ではそのほかに管の外壁に流体や固体が接している場合にそれらの物質の影響で連成波の性質がどのように変化するかという点についても調べたが<sup>(52)</sup>，その結果の要点を付録IIに示す。

(23)

付録 I 円管に三次元弾性論を用いた連成波の解析

2.4 節で近似式の精度を検討する際の基準として管に三次元弾性論を用いた計算値を使用した<sup>3)</sup>が、ここでその解析法を述べておく。

弾性体の三次元運動方程式は

$$\rho_P \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (A + 2M) \text{grad div } \mathbf{u} - M \text{rot rot } \mathbf{u} \quad (1.1)$$

ただし、 $\mathbf{u}$  は変位場、 $A$ 、 $M$  は Lamé の定数とする。 $A$ 、 $M$  は  $E$ 、 $\nu$  とつぎの関係にある。

$$A = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad M = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (1.2)$$

式 (1.1) を粘性がある場合の流体の運動方程式 (3.3) と比較してみると流体では圧力こう配の項が現われるほか、左辺の  $t$  に関する微分の階数が異なる。とくに後者の違いのためにこれらの方程式の表わす現象は全く違うものになるのであるが、形がよく似ているので求解のための演算には類似点も多い。ここでも  $\mathbf{u}$  が非回転、回転の 2 成分に分けられるとする。

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \quad \text{rot } \mathbf{u}_1 = 0, \quad \text{div } \mathbf{u}_2 = 0 \quad (1.3)$$

$\mathbf{u}_1$ 、 $\mathbf{u}_2$  はそれぞれスカラー、ベクトルのポテンシャルを持つ。

$$\mathbf{u}_1 = \text{grad } \varphi, \quad \mathbf{u}_2 = \text{rot rot } (\psi \mathbf{e}_z) \quad (1.4)$$

式 (1.3)、(1.4) により、方程式 (1.1) はつぎの 2 式に分解される。

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \psi - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.5)$$

ただし

$$c_1^2 = \frac{A + 2M}{\rho_P}, \quad c_2^2 = \frac{M}{\rho_P} \quad (1.6)$$

方程式 (1.5) の解として

$$\varphi = \Phi \cos \beta(x - \alpha t), \quad \psi = \Psi \sin \beta(x - \alpha t) \quad (1.7)$$

を仮定すれば

$$\left. \begin{aligned} \phi &= B_1 J_0(n_1 r) + B_2 Y_0(n_1 r) \\ \psi &= C_1 J_0(n_2 r) + C_2 Y_0(n_2 r) \end{aligned} \right\} \quad (I.8)$$

ただし,

$$n_1 = \beta \sqrt{(\alpha/c_1)^2 - 1}, \quad n_2 = \beta \sqrt{(\alpha/c_2)^2 - 1} \quad (I.9)$$

ここで

$$\mathbf{u} = U_x \sin \beta(x - \alpha t) \cdot \mathbf{e}_x + U_r \cos \beta(x - \alpha t) \cdot \mathbf{e}_r \quad (I.10)$$

とおいて式 (I.3), (I.7), (I.8) から  $U_x$ ,  $U_r$  を求めると

$$\left. \begin{aligned} U_x &= -\beta \{ B_1 J_0(n_1 r) + B_2 Y_0(n_1 r) \} + n_2^2 \{ C_1 J_0(n_2 r) + C_2 Y_0(n_2 r) \} \\ U_r &= -n_1 \{ B_1 J_1(n_1 r) + B_2 Y_1(n_1 r) \} - \beta n_2 \{ C_1 J_1(n_2 r) + C_2 Y_1(n_2 r) \} \end{aligned} \right\} \quad (I.11)$$

つぎに  $r = \text{一定}$  の面上に発生する垂直応力  $\sigma_r$  とせん断応力  $\tau_{rz}$  は

$$\sigma_r = A \operatorname{div} \mathbf{u} + 2M \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \tau_{rz} = M \left( \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) \quad (I.12)$$

で計算される。これを具体的に計算して、 $\sigma_r$  の振幅を  $S_r$ ,  $\tau_{rz}$  の振幅を  $T_{rz}$  とすれば

$$\left. \begin{aligned} S_r &= -B_1 \left\{ \left( \frac{\beta^2 \alpha^2}{c_1^2} A + n_1^2 M \right) J_0(n_1 r) - n_1^2 M J_2(n_1 r) \right\} \\ &\quad - B_2 \left\{ \left( \frac{\beta^2 \alpha^2}{c_1^2} A + n_1^2 M \right) Y_0(n_1 r) - n_1^2 M Y_2(n_1 r) \right\} \\ &\quad + \beta n_2^2 M [C_1 \{J_0(n_2 r) - J_2(n_2 r)\} + C_2 \{Y_0(n_2 r) - Y_2(n_2 r)\}] \\ T_{rz} &= 2\beta n_1 M \{ B_1 J_1(n_1 r) + B_2 Y_1(n_1 r) \} \\ &\quad + n_2 (\beta^2 - n_2^2) \{ C_1 J_1(n_2 r) + C_2 Y_1(n_2 r) \} \end{aligned} \right\} \quad (I.13)$$

ここで管の内外の表面における境界条件を考えると、まず、管内壁では、流体との応力と速度の連続性から

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = q_r, \quad \sigma_r = -p, \quad \tau_{rz} = 0 \quad (r = b) \quad (I.14)$$

また、管の外壁ではすべての応力が零となるから

$$\sigma_r = 0, \quad \tau_{rz} = 0 \quad (r = b + h) \quad (I.15)$$

式 (I.14), (I.15) に第 2 章で求めた流体の式 (2.20), (2.21) と式 (I.11), (I.13) [実際にはこれらに  $\cos \beta(x - \alpha t)$  などに乗じたもの] を代入すれば、未定係数  $P, B_1, B_2, C_1, C_2$  に関する同次の連立一次方程式が得られるが、この係数行列の行列式を零に等置したものが流体が非粘性の場合の連成波の厳密な  $\beta - \alpha$  関係を定める方程式となる。実際の数値計算に際しては  $\alpha$  の値によっては  $n_1, n_2$  が虚数になることがあるので、ベッセル関数の代わりに変形ベッセル関数を用いれば実数の範囲内で計算することができる。

もし、管内に流体がなければ式 (I.14) の代わりに

$$\sigma_r = 0, \quad \tau_{rz} = 0 \quad (r = b) \quad (I.16)$$

となる。これと式 (I.15) を式 (I.13) が満たすための条件から  $B_1, B_2, C_1, C_2$  についての連立一次方程式が得られるので、これから管単独の厳密な  $\beta - \alpha$  関係が定められる。図 2.3 の三次元理論による計算値はこのようにして求めたものである。

なお、管単独の場合の三次元解析は Gazis<sup>(51)</sup> によって詳しく行われている。

## 付録Ⅱ 管外壁に接する物質の連成波動への影響

本文第1編の解析では管の外壁に接する物質は存在しないと考えてきた。しかしながら、実際には管が流体中に没していたり、固体中に埋め込まれていたりすることも多く、そのような場合には管の運動に伴って管外の物質も運動したり、変形したりするから、波は管内流体、管、および管外物質の連成したものとなり、管外物質がない場合とは異なった性質を示す。このような問題も第1編におけるのと同様の方法で解析できるが、ここではその要点と主な計算結果を示すことにする。なお、ここでは第1章に示した基本的な記号に加えてつぎのものが必要になる。

- $K'$  : 管外流体の体積弾性率  
 $\rho'_L$  : 管外流体の密度  
 $c'$  : 管外流体中の音速  $c' = \sqrt{K' / \rho'_L}$   
 $\mu'$  : 管外流体の粘度  
 $N'$  : 管外流体の動粘度  
 $E'$  : 管外弾性体のヤング係数  
 $\nu'$  : 管外弾性体のポアソン比  
 $\rho'_E$  : 管外弾性体の密度

$H_n^{(1)}(z)$  ,  $H_n^{(2)}(z)$  :  $n$  次の第1種, 第2種ハンケル関数

$H_n(z)$  :  $H_n^{(1)}(z)$  の略記

$K_n(z)$  :  $n$  次の第2種変形ベッセル関数

$$S_L = K / K'$$

$$\bar{\rho}'_L = \rho'_L / \rho_L$$

$$\bar{N}' = N' / b' c'$$

$$S_E = E' / E$$

$$\bar{\rho}'_E = \rho'_E / \rho_L$$

## Ⅰ. 1 解 析

まず、管の基礎式であるが、ここでは図Ⅱ.1のように内外の表面に分布力が作用するとしなければならないので、つぎのようになる。

$$\left( -D \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_s + I \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi + \left( \frac{D}{a} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{I}{a} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u - k_s \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{b h}{2a} \tau_I - \frac{b' h}{2a} \tau_E = 0 \quad \Bigg|$$

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{D}{a} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{I}{a} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi - \left( k_r \frac{\partial^2}{\partial x^2} - M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u - \frac{\nu k_r}{a} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{b}{a} \tau_i + \frac{b'}{a} \tau_E = 0 \\ -k_s \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\nu k_r}{a} \frac{\partial u}{\partial x} - \left( \frac{k_r}{a^2} + \frac{D}{a^4} - k_s \frac{\partial^2}{\partial x^2} + M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) w + \frac{b}{a} p_i - \frac{b'}{a} p_E = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 1})$$

基本的な記号は第2章，第3章と同じである。管の変位，内壁に作用する分布力を第3章の式(3.21)，(3.24)と同じにおく。管内流体に粘性があれば，式(3.24)の $R_1$ ， $R_2$ はもちろん式(3.25)がそのまま使え，非粘性のときには $R_1$ は式(2.23)などから変形すれば

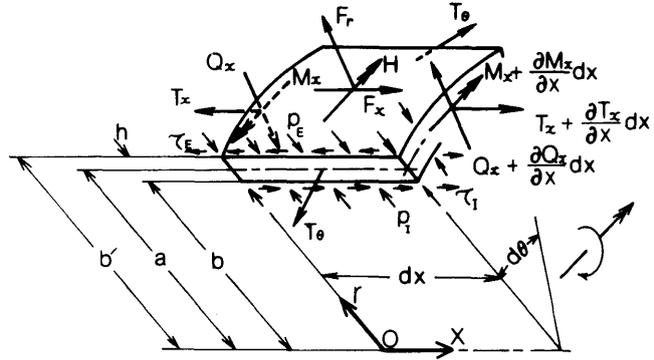


図1. 1 管のつりあい関係

よく， $R_2$ は零となる。つぎに外壁にはたらく分布力について

$$p_E = R_3 \exp[j\beta(x - \alpha^*t)], \quad \tau_E = R_4 \exp[j\beta(x - \alpha^*t)] \quad (\text{II. 2})$$

とおく。ここに現われる $R_3$ ， $R_4$ を式(3.25)の $R_1$ ， $R_2$ と同じく管の変位振幅の一次結合で表わすことができれば，式(II.1)は $\psi$ ， $U$ ， $W$ に関する同次の連立一次方程式に帰着できるので，これまでと同様に $\beta - \alpha^*$ 関係などを定めることができる。 $R_3$ ， $R_4$ をこのように表わす手順は管の内と外では境界条件が異なるために関数の種類が違ってくるものになるが， $R_1$ ， $R_2$ を求める手順と大差はない。ここでは，簡単のために管外物質が無限領域を占める非粘性流体の場合を例にとる。 $p$ に関する波動方程式(2.12)と同形の方程式が管外流体にも成立するが，その解をつぎのように表わすことができる。

$$p = \{ AH_0^{(1)}(m'r) + BH_0^{(2)}(m'r) \} \exp[j\beta(x - \alpha^*t)] \quad (\text{II. 3})$$

ただし

$$m' = \pm \beta \sqrt{(\alpha^*/c')^2 - 1} \quad (\text{II. 4})$$

ここでハンケル関数の漸近式を用いて $r$ が大きい領域での波の振舞を調べてみる。 $|m'r| > 1$ ならば，式(II.3)の漸近式は<sup>(33)(58)</sup>

$$p \approx \sqrt{\frac{2}{\pi m' r}} \left[ A \exp \left\{ j \left( \beta x + m' r - \beta \alpha^* t - \frac{\pi}{4} \right) \right\} + B \exp \left\{ j \left( \beta x - m' r - \beta \alpha^* t - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \right] \quad (\text{II.5})$$

である。式(II.4)によると $m'$ には符号が反対の二つの値があるが、常に $\text{Re}(m') > 0$ のものを選ぶとする。また $\beta > 0$ ,  $\text{Re}(\alpha^*) > 0$ とすると、式(II.5)の $A$ を係数とする項は $r$ の正方向へ、 $B$ を係数とする項は $r$ の負方向へ進む成分を持つ波であることがわかる。ところが、ここでは管外流体は無限領域を占めるとしているから管の運動に伴ってひき起こされた波が反射などによって $r$ の負方向に進む波に変換されることはない。したがって、係数のうち $B$ は零となる。つまり、第1種のハンケル関数だけを考えればよいので $H_1^{(1)}(z) = H_1(z)$ と略記する。これは管外物質が変わっても同じである。式(II.3)を書き直すと

$$p = A H_0(m' r) \exp [ j \beta (x - \alpha^* t) ] \quad (r \geq b') \quad (\text{II.6})$$

この式を式(2.10)と同形の運動方程式に代入して半径方向の粒子速度 $q_r$ を求めれば

$$q_r = A \frac{j m' H_1(m' r)}{\rho_L \beta \alpha^*} \exp [ j \beta (x - \alpha^* t) ] \quad (\text{II.7})$$

$r = b'$ において $q_r = \partial w / \partial t$ であることから、 $A$ と $W$ の関係を定め、式(II.6)に代入して $r = b'$ とすれば

$$R_3 = - \frac{\rho' \beta^2 \alpha^{*2}}{m' \Phi_H(m' b)} W \quad (\text{II.8})$$

ただし

$$\Phi_H(z) \equiv \frac{H_1(z)}{H_0(z)} \quad (\text{II.9})$$

一方、 $\tau_E = 0$ であるから $R_4$ は零である。

管外が粘性流体と等方均質な弾性体の場合には結果だけを示しておくが、求め方は基本的には非粘性流体の場合と同じである。

粘性流体の場合には

$$R_3 = - \frac{h}{2} \beta^2 \alpha^* \left[ 2\mu' - j \rho_L' \beta \alpha^* \Phi_H(n' b') G_H \right] \Psi - \beta^2 \alpha^* \left[ 2\mu' - j \rho_L' \beta \alpha^* \Phi_H(n' b') G_H \right] U - \left[ \rho_L' n' \beta^2 \alpha^{*2} G_H - \frac{2 j \mu' \beta \alpha^*}{b'} \right] W \quad (\text{II.10})$$

$$\left. \begin{aligned}
R_1 &= -\frac{h}{2} \rho'_L m' \beta^2 \alpha^{*2} \Phi_H(m' b') \Phi_H(n' b') G_H \Psi \\
&\quad + \rho'_L m' \beta^2 \alpha^{*2} \Phi_H(m' b') \Phi_H(n' b') G_H U - \beta^2 \alpha^{*2} [2\mu' - j \rho'_L \beta \alpha^* \Phi_H(n' b') G_H] W \\
m' &= \pm \beta \sqrt{\frac{\alpha^{*2}}{c'^2 - (4/3) j N' \beta \alpha^*} - 1} \\
n' &= \pm \beta \sqrt{\frac{j \alpha^*}{\beta N'} - 1}
\end{aligned} \right\} \quad (\text{II.11})$$

弾性体の場合には

$$\left. \begin{aligned}
R_3 &= -\frac{j h}{2} \beta \left[ \frac{E'}{1 + \nu'} - \rho'_E \beta^2 \alpha^{*2} \Phi_H(n' b') G_H \right] \Psi \\
&\quad + j \beta \left[ \frac{E'}{1 + \nu'} - \rho'_E \beta^2 \alpha^{*2} \Phi_H(n' b') G_H \right] U - \left[ \frac{E'}{b'(1 + \nu')} - \rho'_E n' \beta^2 \alpha^{*2} G_H \right] W \\
R_4 &= -\frac{h}{2} \rho'_E m' \beta^2 \alpha^{*2} \Phi_H(m' b') \Phi_H(n' b') G_H \Psi \\
&\quad + \rho'_E m' \beta^2 \alpha^{*2} \Phi_H(m' b') \Phi_H(n' b') G_H U - j \beta \left[ \frac{E'}{1 + \nu'} - \rho'_E \beta^2 \alpha^{*2} \Phi_H(n' b') G_H \right] W \\
m' &= \pm \beta \sqrt{\frac{\rho'_E (1 + \nu') (1 - 2\nu')}{E' (1 - \nu')} \alpha^{*2} - 1} \\
n' &= \pm \beta \sqrt{\frac{2\rho'_E (1 + \nu')}{E'} \alpha^{*2} - 1}
\end{aligned} \right\} \quad (\text{II.12})$$

$$\left. \begin{aligned}
m' &= \pm \beta \sqrt{\frac{\rho'_E (1 + \nu') (1 - 2\nu')}{E' (1 - \nu')} \alpha^{*2} - 1} \\
n' &= \pm \beta \sqrt{\frac{2\rho'_E (1 + \nu')}{E'} \alpha^{*2} - 1}
\end{aligned} \right\} \quad (\text{II.13})$$

式(II.10), (II.12)に含まれる  $\Phi_H$  は式(II.9)によるが,  $G_H$  はいずれの場合もつぎの式による。

$$G_H = \frac{1}{m' n' \Phi_H(m' b') + \beta^2 \Phi_H(n' b')} \quad (\text{II.14})$$

以上に求めた  $R_3$ ,  $R_4$  を  $R_1$ ,  $R_2$  とともに場合に応じて選択して用いる。

さて, これまでは位相速度を複素形の  $\alpha^*$  として, 自由減衰解の形の解を考えてきた。これは, 粘性や内部摩擦など物質の性質に由来する散逸要因が存在しなくても, 管外壁から管外物質中への波, すなわちエネルギーの放射が起これば連成波は減衰するからである。しかし, このような放射は必ず起こるとは限らない。放射の有無が何によって決められるのかを調べてみる。簡単のために管

の内外が非粘性流体であって、 $\alpha^*$ が実数で  $c'$ より小さいとしてみる。すると式(II.4)によって  $m'$ は純虚数になるが、このとき

$$H_i(jz) = -\frac{2j}{\pi} e^{-\frac{jz}{2}} K_i(z) \quad (\text{II.15})$$

という関係<sup>(38)</sup>を用いると、管外では  $p$  は  $m' = jm''$ として  $K_0(m''r)$  なる関数で  $r$  方向の変化が定められることになる。ところが、 $m'' > 0$ ならば  $r$ の全域で  $K_0(m''r) > 0$  であるから、 $p$ には  $r$  方向に位相の変化が現われず、 $r$  方向に進む波としての性質がないことになる。それゆえ、放射は起きない。このような解は確かに存在するのである。このようなとき、 $K_0(m''r)$ は  $r$ の増大とともに急激に値を減じるので管外壁の運動による管外流体の運動は管外壁の近傍に局在したものになることもわかる。以上のように  $m'$ が虚数ならば放射は起きないが、式(II.5)右辺第1項からわかるように  $m'$ は波数ベクトルの  $r$  成分の意味を持つ。その  $m'$ が虚数のときに  $r$  方向の波にはならないという議論は、第5章で検討した伝ば、非伝ばの議論と本質において同じである。言い換えれば、放射の有無は管外流体の運動が  $r$  方向に伝ば的か非伝ば的かということの別の表現にすぎない。

ここで、ハンケル関数に関連した数値計算上の注意を記す。ハンケル関数の性質として

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |H_i(z)| = \begin{cases} 0, & \text{Im}(z) > 0 \\ \infty, & \text{Im}(z) < 0 \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

ということがあるので、式(II.4)、(II.11)、(II.13)の  $m'$ 、 $n'$ の符号には任意性がない。放射があるときには  $\text{Re}(m') > 0$ 、 $\text{Re}(n') > 0$  としなければならないが、このとき  $\text{Im}(m') < 0$  となり、式(II.16)から  $r = \infty$ で  $|p| = \infty$ などとなってしまうことがある。これは自由減衰解であるから、先に放射されたものほど振幅が大きいということから生じることで、物理的に矛盾した解ではない。一方、放射がなければ式(II.16)から  $\text{Im}(m')$ 、 $\text{Im}(n')$ はいずれも正でなくてはならない。そこで  $m'$ や  $n'$ を計算したらその偏角を調べて、前述の注意に適合しなければ符号を変えなければならない。この点が管内流体に関連して現われるベッセル関数とは異なるのである。

## II. 2 計算結果

管外物質の連成波への影響のしかたは(1)付加質量効果、(2)剛性効果、(3)放射減衰効果、(4)粘性減衰効果などに分けられよう。このうちどれが卓越するかは、管外物質の種類と連成波の各モードの運動様式によって決まることである。ここでは管外物質として非粘性、粘性流体と弾性固体、管内流体には非粘性流体を考えて数値計算した結果を示し、各場合の特徴を考察する。なお、モード

の名称はこれまでどおり，C 1，C 2 … とする。

II. 2.1 管外物質が非粘性流体の場合 管材として鋼を，管内外の流体として水を想定して計算した。図 II. 2 は C 1 モードの位相速度で， $\alpha < c'$  であるから放射は起きない場合である。管外流

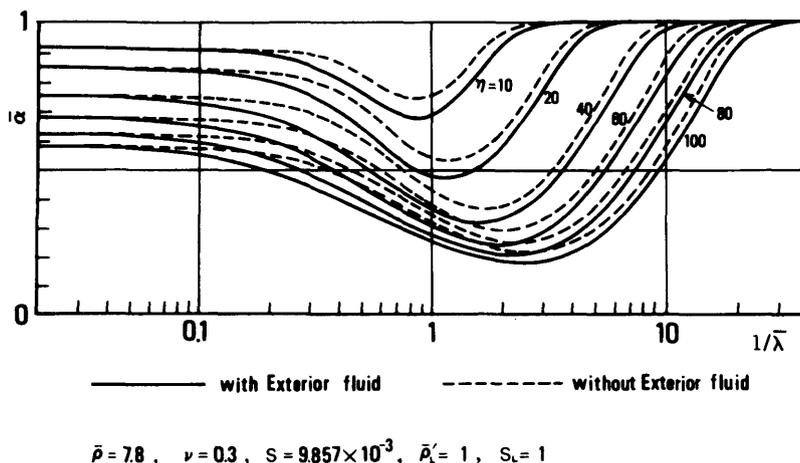


図 II. 2 管外が非粘性流体の場合の C 1 モードの位相速度

体がない場合に比べ， $\alpha$  は小さくなっており，付加質量的な効果が現われている。管の半径方向の運動が激しい領域で  $\alpha$  の低下が著しいが，これは管が大きく動くほど管外流体の運動も大きくなるため，付加質量効果の特徴と言えよう。なお，長波長域では  $\alpha$  は管外に流体があってもなくてもほとんど差はないが，この領域では式 (2.51) による伝ば速度の近似が可能である。

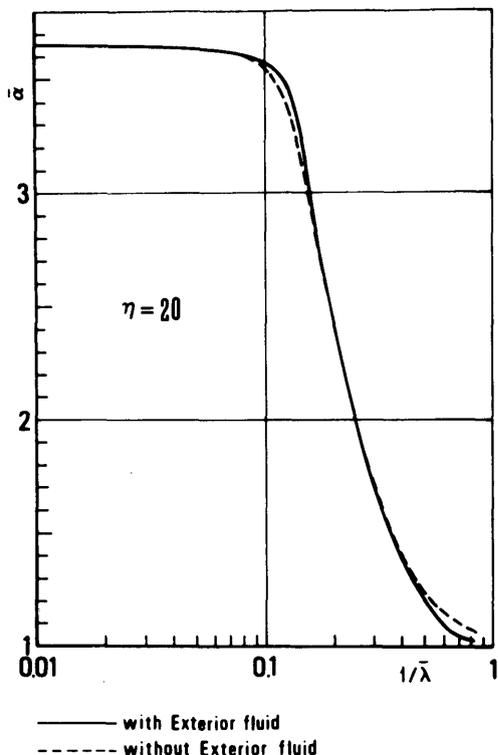


図 II. 3 管外が非粘性流体の場合の C 2 モードの位相速度 ( $\eta$  以外の計算データは図 II. 2 に同じ)

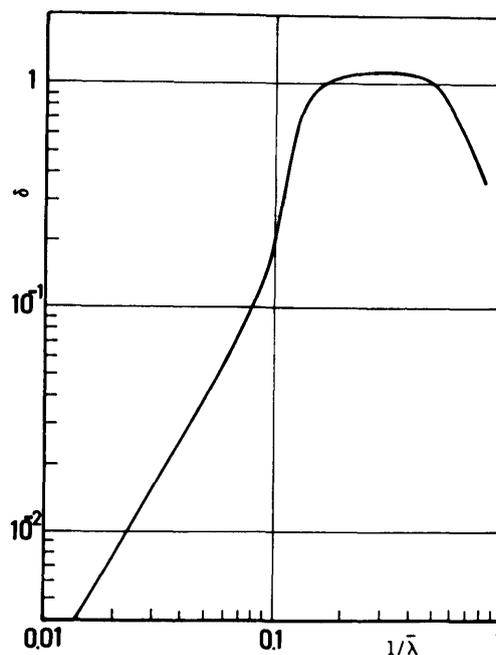


図 II. 4 図 II. 3 の位相速度に対応する C 2 モードの放射による減衰率

図 II. 3, II. 4 は同じ条件で計算した C 2 モードの位相速度と放射による減衰率である。管外流体の影響は  $\alpha$  に対しては大きくないが、放射による減衰が管径の数倍の波長域で非常に大きくなっている。この領域では C 2 モードでも管の運動の半径方向成分が大きくなるためである。

以上のように C 1 と C 2 では管外流体の影響のしかたは全く異なる。その解析的な背景は前述したとおりであるが、物理的な解釈はつきのようなになる。管の半径方向変位  $w$  の正位相の部分で排除された流体は、振動数が小さければ  $w$  の負位相の部分へ軸方向に移動する時間的な余裕がある。それゆえ、流体の運動は管軸方向が主になり、波として半径方向に伝ばしていく性質が現われない。しかし、振動数が大きいと流体はこのような形では管の運動に追従しきれなくなるので、半径方向に位相の正負の変化が生じ、波としての性質を帯びるのである。

II. 2. 2 管外物質が粘性流体の場合 ここでは管外流体に適当な無次元動粘度  $\bar{N}'$  を付与した以外は前項と同じ条件で計算した。図 II. 5, II. 6 に C 1 モードの減衰率をそれぞれ  $\eta$ ,  $\bar{N}'$  をパラメータとして示す。図 II. 5 では  $\eta$  が大きいほど  $\delta$  が大きくなっているが、これは管が薄肉であるほど管内流体の圧力に対する応答としての管の変形が大きくなり、それに伴う管外流体の運動も大きくなるためである。図 II. 5 では  $\delta$  は  $\sqrt{\bar{N}'}$  にほぼ比例し、 $\bar{\lambda}$  が大きければ  $\delta$  は  $\sqrt{\bar{N}' \bar{\lambda}}$  に比例する傾向を持つ。これは第 3 章で調べた管内流体の粘性による減衰と共通するものであり、この場合にも減衰に対して境界層が主な役割を果すことを示している。しかし、管内流体による減衰に比べて非常に小

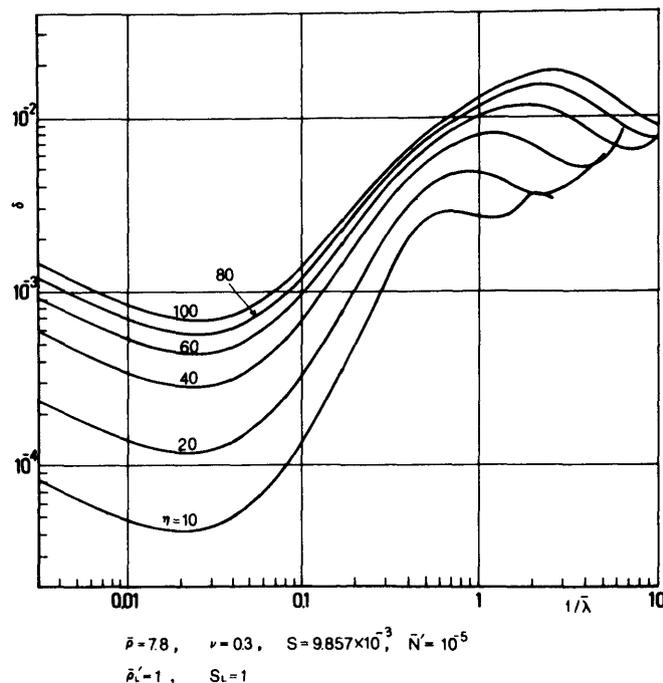
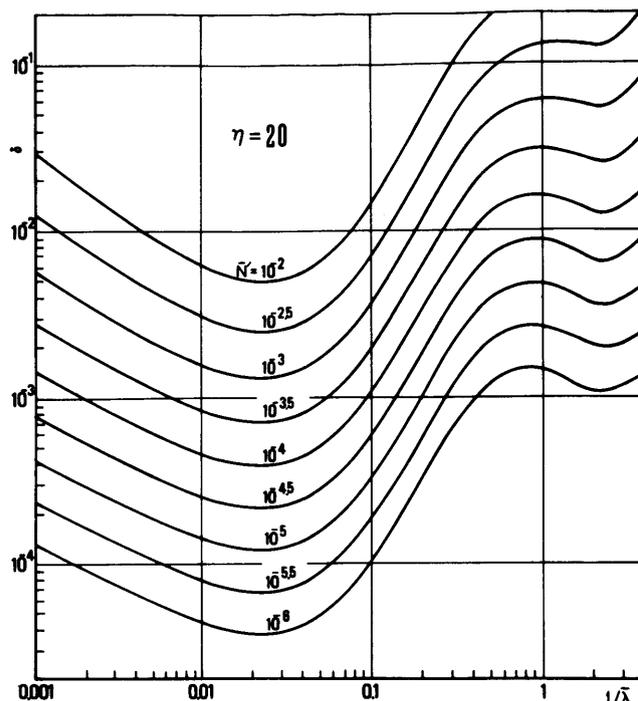


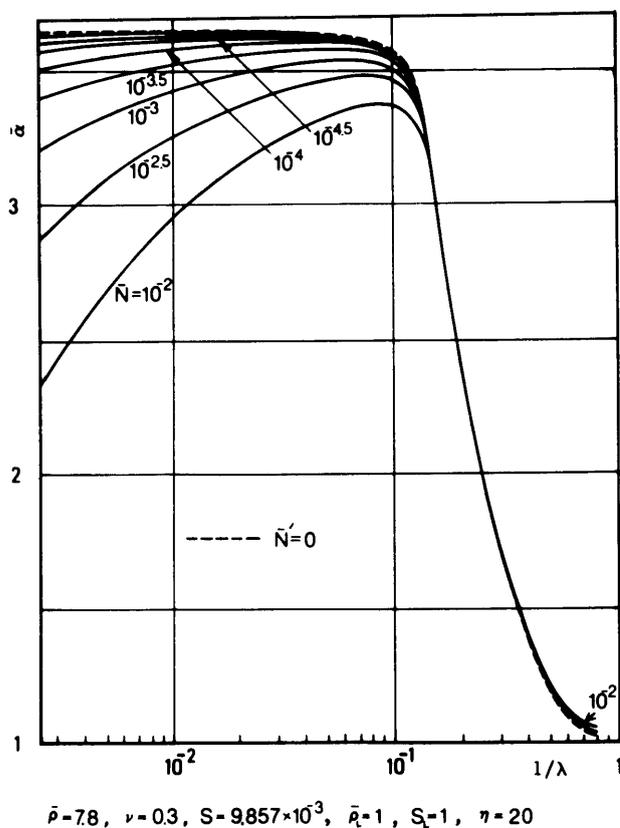
図 II. 5 管外が粘性流体の場合の C 1 モードの  $\delta$  の  $\eta$  による変化



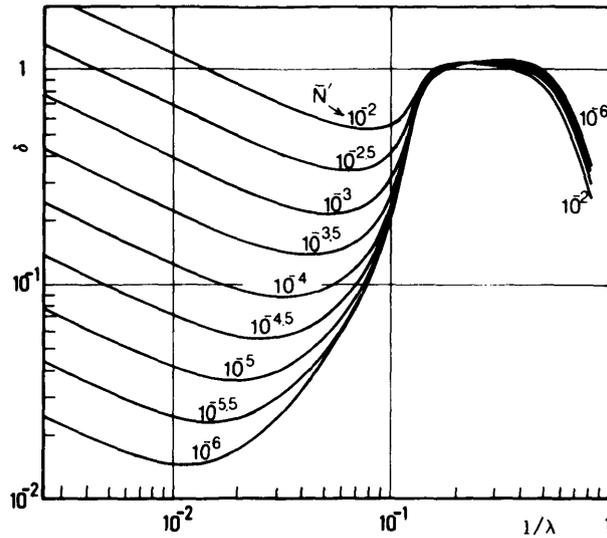
図Ⅱ. 6 管外が粘性流体の場合のC 1モードの $\delta$ の $\bar{N}$ 'による変化  
( $\eta$ 以外の計算データは図Ⅱ. 5に同じ)

さく、 $\eta = 20$  の場合について  $\bar{N}' = \bar{N}$  として管の外と内の流体粘性による減衰率  $\delta$  を比較してみると、前者は後者の約  $1/100$  ほどである。これは、管外流体の運動の方がはるかに小さいためにほかならない。なお、言うまでもなく、C 1モードの減衰の原因は管外流体の粘性だけである。

つぎにC 2モードの位相速度と減衰率を $\bar{N}'$ をパラメータにして図Ⅱ. 7, Ⅱ. 8に示す。 $\alpha$ の粘性による低下は $\bar{\lambda} > 10$ で顕著である。これはこの領域ではC 2モードがほぼ管の縦波として振舞うためにとくに粘性の影響が大きくなるため、図Ⅱ. 8の $\delta$ の傾向からこれも明らかである。C 2モードの減衰をもたらすものは長波長域では主に粘性、波長が短くなると放射が卓越するようになる。長波長域での $\delta$ は $\bar{N}'$ が $\bar{N}$ と同じならば管内流体の粘性によるものと近くな



図Ⅱ. 7 管外が粘性流体の場合のC 2モードの位相速度



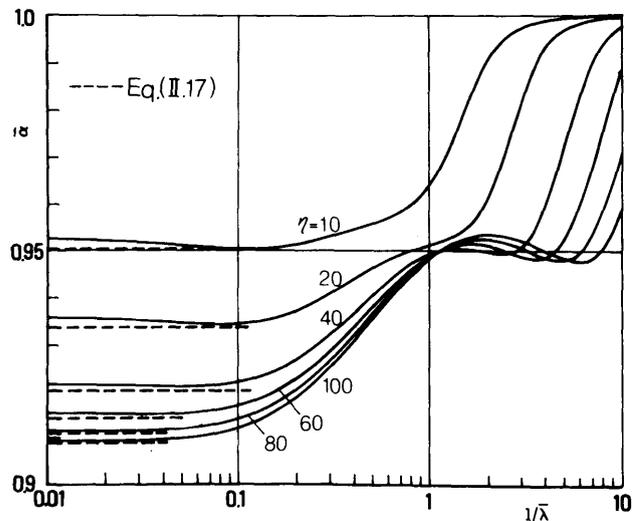
図Ⅱ. 8 図Ⅱ. 7の位相速度に対応するC2モードの粘性と放射による減衰率

る。管の縦波としての運動様式から見れば、粘性流体が管の内にあるか外にあるかは大きな違いにはならないからである。

### Ⅱ. 2. 3 管外物質が弾性体の場合

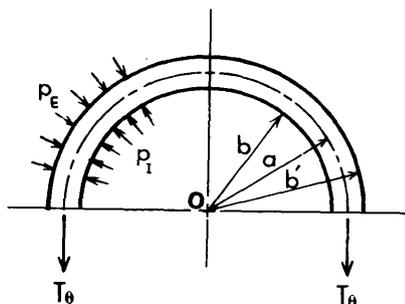
ここでは鋼管—水の系がコンクリート程度の弾性固体で覆われているとしてC1モードについてだけ計算した。この場合には減衰は生じないので図Ⅱ. 9に位相速度を示す。この場合の効果は剛性的で $\alpha$ は大きくなる。

しかし、必ずしも剛管とみなせるほどにはならない。長波長域では非分的でつぎの近似式が成立する。



$$\bar{\rho} = 7.8, \quad \nu = 0.3, \quad S = 9.857 \times 10^3, \quad \bar{\rho}' = 2.3, \quad \nu' = 0.2, \quad S_E = 0.1$$

図Ⅱ. 9 管外が弾性体の場合のC1モードの位相速度



図Ⅱ. 10 軸に垂直な断面内の力のつりあい

$$\alpha = c \sqrt{\frac{1 + \nu' + S_E \eta}{(1 + 2S\eta)(1 + \nu') + S_E \eta}} \quad (\text{II. 17})$$

これは図Ⅱ. 10に示す管軸に垂直な力のつりあいから得られる。

$$p_I b = p_E b' + T_0 \quad (\text{II. 18})$$

という関係に、管外弾性体と管の軸ひずみを無視して得られる

$$p_E = \frac{Ew}{(1 + \nu')b'}, \quad T_0 = Eh \frac{w}{a} \quad (\text{II. 19})$$

という関係と，管内流体に対して成立する

$$p_r = \frac{2K}{b} \frac{\alpha^2}{c^2 - \alpha^2} w \quad (\text{II.20})$$

という関係を代入すれば求められる。式（II.17）による計算値を図II.9に破線で示したが，この例ではいずれも0.3%未満の誤差を生じているだけである。式（II.17）も場合に応じて有効に使用できると考えられる。

# 文 献

- (1) 中野・高橋, 油圧管路・制御弁の非定常問題, 日本機械学会誌,  
77-676 (昭49-11), 1148.
- (2) Young, T., Hydraulic Investigations, subservient to an intended Croonian  
Lecture on the Motion of the Blood, Trans. Roy. Soc. London,  
98 (1808), 164.
- (3) 岡, レオロジー, (昭49), 372, 裳華堂.
- (4) Korteweg, D. J., Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in  
elastischen Röhren, Ann. der Phys. und Chem. 5 (1878), 525.
- (5) Simin, O., Water Hammer, Proc. Water Works Assoc. (1904), 341.
- (6) Thorley, A. R. D., Pressure Transients in Hydraulic Pipelines, Trans.  
ASME, Ser. D (1969-9), 453.
- (7) 藤本, 水力学概論, (昭25), 186, 養賢堂.
- (8) Boyle, R. W and Froman, D., Velocity of Sound in Tubes :  
Ultra - Sonic Method, Nature, 126-3181 (1930-10), 453.
- (9) Field, G. S., Longitudinal and Radial Vibrations in Liquids Contained in  
Cylindrical Tubes, Canad. J. Res., A 5 (1931), 131.
- (10) Boyle, R. W., Froman, D. K. and Field, G. S.,  
Dispersion and Selective Absorption in the Propagation of  
Ultrasound in Liquids Contained in Tubes Part I,  
Canad. J. Res., A 6 (1932), 102.
- (11) Field, G. S. and Boyle, R. W.,  
Dispersion and Selective Absorption in the Propagation of  
Ultrasound in Liquids Contained in Tubes Part II,  
Canad. J. Res., A 6 (1932), 192.
- (12) Field, G. S., Longitudinal Waves in Cylinders of Liquid, in Hollow  
Tubes and in Solid Rods,  
Canad. J. Res., A 11 (1934), 254.

- (13) Field, G. S., Dispersion and Selective Absorption in the Propagation of  
Ultrasound in Fluids Contained in Tubes,  
Canad. J. Res., A 17 (1939), 197.
- (14) Gerlach, C. R. and Parker, J. D.,  
Wave Propagation in Viscous Fluid Lines Including Higher  
Mode Effects, Trans. ASME, Ser. D (1967-12), 782.
- (15) DeArmond, R. P. and Rouleau W. T.,  
Wave Propagation in Viscous, Compressible Liquids Confined  
in Elastic Tubes, Trans. ASME, Ser. D (1972-12), 811.
- (16) Jayasinghe, D. A. P. and Leutheusser H. J.,  
Pulse Propagation in Distensible Viscous Fluid Lines,  
Trans. ASME, Ser. D (1974-9), 259.
- (17) Safwat, H. H., On the Elastic Behavior of the Pipe Wall for Water-Hammer  
Applications, Nucl. Engng and Des., 21 (1972), 85.
- (18) Krause, N., Goldsmith, W. and Sackman, J. L.,  
Transients in Tubes Containing Liquids,  
Int. J. mech. Sci., 10 (1976), 53.
- (19) Brown, F. T., The Transient Response of Fluid Lines,  
Trans. ASME, Ser. D (1962-12), 547.
- (20) Holmboe, E. L. and Roulew, W. T.,  
The Effect of Viscous Shear on Transient in Liquid Lines,  
Trans. ASME, Ser. D (1967-3), 547.
- (21) Zielke, W., Frequency - Dependent Friction in Transient Pipe Flow,  
Trans. ASME, Ser. D (1968-3), 109.
- (22) 浦田, 弾性円管と流体の連成波動(第1報, 流体が非粘性の場合の基礎的解析),  
日本機械学会論文集 41-351 (昭50-11), 3112.
- (23) 浦田, 弾性円管と流体の連成波動(伝ば速度の近似式の精度),  
名古屋工業大学学報 32 (昭55), 183.
- (24) 浦田, 弾性円管と流体の連成波動(第2報, 流体の粘性を考慮した場合の基礎的解析),  
日本機械学会論文集 42-357 (昭51-5), 1389.

- (25) 浦田, 弾性円管と流体の連成波動(第4報, 粘性流体を含む直管系の振動数特性の近似計算式),  
日本機械学会論文集 44-387 (昭53-11), 3739.
- (26) 浦田, 弾性円管と流体の連成波動(第6報, 境界条件に関する考察)  
日本機械学会論文集 47-415C (昭56-3), 275.
- (27) 浦田, 弾性円管と流体の連成波動(第7報, 非軸対称現象に関する検討)  
日本機械学会論文集 47-420C (昭56-8), 1125.
- (28) 浦田, 弾性円管と流体の連成波動(第5報, 伝ば速度の振動数依存性に関する実験),  
日本機械学会論文集 45-396C (昭54-8), 869.
- (29) 浦田, 弾性円管と流体の連成波動(第8報, 流体粘性による減衰に関する実験),  
日本機械学会論文集 48-435C (昭57-11), 1713.
- (30) 浦田, 立道, 任意断面管内の気体の波動(簡易な近似式の誘導と実験),  
日本機械学会講演論文集 No.830-6 (昭58-3, 4, 第60期通常総会・機械力学  
・計測・自動制御), 192.
- (31) Herrmann, G. and Mirsky, I.,  
Three-Dimensional and Shell-Theory Analysis of Axially  
Symmetric Motions of Cylinders, J. Appl. Mech.  
23-4 (1956-11), 563.
- (32) Elmore, W. C. and Heald, M. A.,  
Physics of Waves, (1969), 125, McGraw-Hill.
- (33) 寺沢, 自然科学者のための数学概論, (昭29), 449, 岩波書店.  
森口, 宇田川, 一松, 数学公式Ⅲ, (昭35), 145, 岩波書店  
Watson, G. N., Theory of Bessel Functions, (1966), Cambridge.
- (34) 今井, 流体力学(前編), (昭48), 33, 裳華房.
- (35) 倉西, 応用弾性学, (昭28), 89, 共立出版.
- (36) 葉山, 振動工学ハンドブック(谷口編), (昭51), 1052, 養賢堂.
- (37) 磯田, 大野, 数値計算ハンドブック, (昭46), 456, オーム社.
- (38) 玉木, 流体力学Ⅱ—粘性流体の力学—, (昭32), 20, 共立出版.
- (39) 文献(34)の291ページ
- (40) 比企, 弾性, 非弾性, (昭47), 151, 共立出版.

- (41) Fung, Y. C., (大橋・他訳), 固体の力学/理論, (昭45), 20, 培風館.
- (42) 戸田, 福岡, 山根, 複合棒の不連続接合部における周期応力波の応答,  
日本機械学会講演論文集 No.770-7 (昭52-6, 第12回シンポジウム・  
固体及び構造の動的挙動), 81.
- (43) 古賀, 小松, 円筒かくの自由振動における支配方程式と固有値,  
日本機械学会論文集 46-401C (昭55-1), 1.
- (44) Miklowitz, J., The Theory of Elastic Waves and Waveguides,  
(1978), 208, North-Holland.
- (45) 東京天文台編, 理科年表, (昭55), 物理化学部, 丸善.
- (46) 化学工学協会編, 化学工学便覧, (昭43), 74, 丸善.
- (47) 小橋, 音と音波, (昭44), 133, 裳華房.
- (48) Washburn, E. W. et al, Int. Crit. Tables, 5 (1929), 23, McGraw-Hill.
- (49) Fergusson, F. A. A. et al,  
Velocity of Sound in Glycerol, J. Acous. Amer., 8 (1958), 786.
- (50) 鷺尾, 小西, 菌田, 油圧管路における波動現象の研究 (第5報, 脈動現象に及ぼす管の縦振  
動の影響), 日本機械学会論文集 44-384 (昭53-8), 2781.
- (51) Gazis, D. C., Three-Dimensional Investigation of the Propagation of Waves  
in Hollow Circular Cylinders.  
I. Analytical Foundation, J. Acous. Amer., 8 (1958), 786.
- (52) 浦田, 弾性円管と流体の連成波動 (第3報, 管外壁に接する物質の力学的効果の解析),  
日本機械学会論文集 43-375 (昭52-11), 4139.
- (53) Junger, M. C. and Feit, D.,  
Sound, Structure and Their Interaction, (1972), 205, MIT Press.

## 謝

## 辞

本研究は名古屋工業大学生産機械工学科機械力学講座において行われたものである。本研究の基礎となった振動工学の知識は理論と実験の両面にわたって同講座の立道有年教授の御指導をいただきました。著者に研究の機会を与えて下さったこと、研究遂行中に暖い御鞭撻をいただいたこととあわせて同教授の御指導に深く感謝致します。

下山鑛一先生（現・名古屋工業大学名誉教授）には研究生活を始めるに際して暖いおはげましの言葉を賜りました。また、本研究の動機の一つは著者の学生時代に受けた名古屋工業大学・山田豊教授の講義にある。この講義で本論文の式（2.51）に相当するものを説明されたのであるが、水力学と材料力学が簡潔に結びつけられていることに感銘を受け、その後、波の性質はより正確にはどのようなものになるのかと考えたことが本研究の発端となった。このように、著者が曲りなりにも一つの研究をまとめることができた背景には山田 豊先生をはじめ、恩師、先輩の諸先生の直接、間接の御指導とお力添えがあったことを記して深く感謝申し上げます。

また、名古屋大学工学部・村上光清教授をはじめ、同学部・山本敏男教授、伊藤忠哉教授、清家政一郎教授の諸先生には本論文を完成するにあたって著者の未熟な原稿に対して非常に懇切な御指導と御助言を賜りました。ここに記して深甚なる感謝の意を表する次第です。

論文提出者の発表論文ならびに業績リスト

1. 本論文に関係のあるもの

- (1) 弾性円管と流体の連成波動(第1報、流体が非粘性の場合の基礎的解析)  
日本機械学会論文集 第41巻第351号(昭和50年11月)、3112。
- (2) 弾性円管と流体の連成波動(第2報、流体の粘性を考慮した場合の基礎的解析)  
日本機械学会論文集 第42巻第357号(昭和51年5月)、1389。
- (3) 弾性円管と流体の連成波動(第3報、管外壁に接する物質の力学的効果の解析)  
日本機械学会論文集 第43巻第375号(昭和52年11月)、4139。
- (4) 弾性円管と流体の連成波動(第4報、粘性流体を含む直管系の振動数特性の近似計算式)  
日本機械学会論文集 第44巻第387号(昭和53年11月)、3739。
- (5) 弾性円管と流体の連成波動(第5報、伝ば速度の振動数依存性に関する実験)  
日本機械学会論文集 第45巻第396号C編(昭和54年8月)、869。
- (6) 弾性円管と流体の連成波動(伝ば速度の近似式の精度)  
名古屋工業大学学報 第32巻(昭和55年)、183。
- (7) 弾性円管と流体の連成波動(第6報、境界条件に関する考察)  
日本機械学会論文集 第47巻第415号C編(昭和56年3月)、275。
- (8) 弾性円管と流体の連成波動(第7報、非軸対称現象に関する検討)  
日本機械学会論文集 第47巻第420号C編(昭和56年8月)、1125。
- (9) 弾性円管と流体の連成波動(第8報、流体粘性による減衰に関する実験)  
日本機械学会論文集 第48巻第435号C編(昭和57年11月)、1713。
- (10) 任意断面管内の気体の波動(簡易な近似式の誘導と実験)  
日本機械学会講演論文集 No. 830-6(第60期通常総会、昭和58年4月2日)、192。  
(日本機械学会論文集に投稿中)

2. その他

- (1) 伝達マトリックス法による粘弾性多層材の振動解析(続報)  
日本機械学会講演論文集 No. 713-1(昭和46年3月)、92。
- (2) 拘束層を等分割した粘弾性多層はりの振動(伝達マトリックス法による解析)  
日本機械学会講演論文集 No. 710-12(昭和46年10月)、199。
- (3) 粘弾性層をもつ多層板の振動(く形板と円板の場合について)  
日本機械学会講演論文集 No. 710-12(昭和46年10月)、203。
- (4) 粘弾性層をもつ部分多層はりの振動解析  
日本機械学会論文集 第40巻第335号(昭和49年7月)、1889。
- (5) Analysis of Effects of Fluid Viscosity on Sound Propagation  
in Acoustic Wave Guide with Circular Section  
名古屋工業大学学報 第29巻(昭和52年)、275。
- (6) 連続体の一次元的波動における非伝ば項について  
名古屋工業大学学報 第30巻(昭和53年)、179。