報告番号	※甲乙 第 2566 号

主論文の要旨

題名

Asymptotic stability for some systems of semilinear Volterra diffusion equations

半線型ボルテラ拡散方程式系の漸近安定性

氏名 山田義雄

主論文の要旨

報告番号	※甲乙第　　号	氏名	山田義雄

§1. 序

1931年, Volterraは, 数種類の生物が生存競争している場合の個体数変化を論じた著書, "Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie," の中で, 過去の影響も考慮に入れた非線型モデルとして, 一種の常微分積分方程式を提起した. しかし, 彼の主張は必ずしも十分活されず, 1970年代に入ってようやくHale達の研究により, このような常微分積分方程式の解の存在, 一意性, 安定性などに関する系統的な理論が確立された. 同時に, Volterraの生物モデルは過去の影響のみならず, 拡散効果などの空間的変化も考慮に入れることが重要であることを認識させた.

我々は, 上のような生物モデルに示唆されて, ボルテラ積分を含む半線型拡散方程式系を数学的に研究する. 考えている領域 Ω は, 十分滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ R^N の有界領域とする. ここで, $u(x,t)={}^t(u_1(x,t), u_2(x,t),\cdots,u_N(x,t))$, $x\in\Omega$, $t\in R^1$, を未知関数とする次の初期値境界値問題を扱う.

$$(1)\qquad \frac{\partial u}{\partial t}=D\Delta u+g(u_t), \qquad x\in\Omega,\ t\in(0,\infty),$$

$$(2)\qquad \frac{\partial u}{\partial \nu}=0\ \left(\frac{\partial}{\partial\nu}=\partial\Omega\text{における外向き法線微分}\right), \qquad x\in\partial\Omega,\ t\in(0,\infty),$$

$$(3)\qquad u=\phi, \qquad x\in\Omega,\ t\in(-\infty,0].$$

但し，Dは対角成分を正定数とする対角行列，u_t，$t\in(0,\infty)$，は $u_t(x,\theta)=u(x,t+\theta)$，$x\in\Omega$，$\theta\in(-\infty,0]$，で定義される $C(\Omega\times(-\infty,0];R^N)$ クラスの関数，g は $C(\Omega\times(-\infty,0];R^N)$ から R^N への非線型関数である．

問題(1)-(3)のように無限の時間遅れをもつ半線型ボルテラ拡散方程式(系)に関して，解の安定性まで含む研究は少く，Schiaffino, Tesei, Pozio 達イタリアのグループと著者によるものが存在するのみである．しかも，これらの研究においては，空間次元が3以下であること，或は非線型項の形が制限されていることなどの大きな制約をおいている．

§2. 主定理

この論文の目標は，空間次元，非線型項の形に制約をおくことなく，一般形の半線型ボルテラ拡散方程式系(1)-(3)の解の性質，特に漸近安定性に関する結果を求めることである．漸近安定性とは，我々の場合

$$D\Delta u^* + g(\overline{u}^*)=0,\quad x\in\Omega,\ \text{但し}\ \overline{u}^*(\theta)=u^*,\ \theta\in(-\infty,0],$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial \nu}=0,\qquad x\in\partial\Omega,$$

をみたす関数(定常解) u^* の漸近安定性を意味し，u^* の適当な近傍に初期値があれば，(1)-(3)の解はすべて $t\to\infty$ と共に u^* に収束することである．

任意の定常解 u^* をとり，一般性を失うことなく $u^*=0$ とおく．この

定常解の漸近安定性を調べるために，$u=0$ の近傍で (1), (2) を線型化すると

(4) $$\frac{\partial v}{\partial t} = D\Delta v + Bv + \int_{-\infty}^{t} C(t-s)v(s)\,ds, \qquad x\in\Omega,\ t\in(0,\infty),$$

(5) $$\frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, \qquad x\in\partial\Omega,\ t\in(0,\infty),$$

の形の方程式系を得る．ここで B, $C(t)$ は任意の $p\geqq 2$ について $L^p(\Omega;R^N)$ 上の有界線型作用素であり，$C(t)$ と $tC(t)$ の作用素ノルムは $(0,\infty)$ 上可積分であるとする．

主定理を記す準備として，$C(\Omega;R^N)$-ノルムを $\|\cdot\|_\infty$，$L^p(\Omega;R^N)$-ノルムを $\|\cdot\|_p$ によって表し，$-D\Delta$ を同次ノイマン条件の下で $L^p(\Omega;R^N)$ 内に実現させた線型閉作用素 A_p を導入する．A_p の分数巾で定義される空間 $D(A_p^\alpha)$, $0\leqq\alpha\leqq 1$, のノルムを

$$\|u\|_{p,\alpha} = \|u\|_p + \|A_p^\alpha u\|_p$$

によって与える．主定理は次の形で述べられる．

<u>主定理 (Theorem 4.1).</u> $p>n$，$1>\alpha>(p+n)/2p$ とする．更に，線型ボルテラ拡散方程式系 (4), (5) に対応する特性問題

$$L(\lambda)w \equiv (\lambda I - D\Delta - B - \hat{C}(\lambda))w = 0, \quad x\in\Omega, \quad \text{但し } \hat{C}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}C(t)\,dt,$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = 0, \quad x\in\partial\Omega,$$

が，任意の $\mathrm{Re}\,\lambda\geqq 0$ について自明解のみをもつ（スペクトル条件）とする．このとき，任意の $0<\varepsilon\leqq\varepsilon_0$（$\varepsilon_0$ はある正数）に対しある

正数 $\delta(\varepsilon)$ が存在して，条件

$$(6) \qquad \max\left\{\|\phi(0)\|_{p,\alpha},\ \sup_{\theta\leq 0}\|\phi(\theta)\|_\infty\right\} \leq \delta(\varepsilon)$$

のもと，(1)-(3) の解 u は $(-\infty, \infty)$ 上一意的に存在し，

$$(7) \qquad \|u(t)\|_{p,\alpha} \leq \varepsilon, \qquad t\in(0,\infty),$$

及び任意の $0\leq\beta<1$ について

$$(8) \qquad \lim_{t\to\infty}\|u(t)\|_{p,\beta} = 0$$

をみたす．

上の結果において，スペクトル条件が破れると定常解は安定性を失い，その近傍に非自明な周期解の分岐する可能性が現れる．従って，主定理により (1),(2) の任意の定常解の漸近安定性は，対応するスペクトル条件を調べることによって完全に決定される．

§3. 主定理の証明

主定理を証明するためのアイデアは，(4),(5) に対する基本解，すなわち，

$$v(t) = \begin{cases} a, & t=0, \\ 0, & t\in(-\infty,0), \end{cases}$$

を初期値とする (4),(5) の解 $v(t;a)$ から，$R(t)a = v(t;a)$ によって定義される作用素 $R(t)$ を利用することと，非線型問題 (1)-(3) を二つの

関数空間 $L^2(\Omega;R^N)$ と $L^p(\Omega;R^N)$ $(p>n)$ の中で解析することの二点にある。

この論文の第3節では，基本解 $R(t)$ の漸近的性質を求める。$R(t)$ の t に関するラプラス変換をとると，同次ノイマン条件の下で $L(\lambda)$ の逆作用素となる。そこで $L^2(\Omega;R^N)$ におけるフーリエ・ラプラス変換の理論を適用すると，$L^2(\Omega;R^N)$ の位相で $R(t)$ が $t\to\infty$ のとき 0 に強収束し，かつ，$[0,\infty)$ 上，強可積分であるための必要十分条件は，スペクトル条件が成立することであると証明される。

第4節では，第3節の結果を利用して，定常解 $u=0$ の漸近安定性を示す。非線型項を評価するために，$L^2(\Omega;R^N)$ 空間のみでソボレフの埋蔵定理を適用すると，$D(A_2)$ を $C(\Omega;R^N)$ に埋込むとき空間次元に制約 $(n\leqq 3)$ が現れる。それ故，$p>n$ ととれば $D(A_p)$ は $C(\Omega;R^N)$ に連続的に埋込まれ，空間次元に制約をおくことなく，非線型項は $L^p(\Omega;R^N)$ 空間内の解析で評価される。最初，(1)-(3) の解 u を $L^2(\Omega;R^N)$ 値関数とみて，基本解 $R(t)$ により積分方程式形で表現する。$R(t)$ の漸近的性質から，$\|u(t)\|_2$ と $\int_0^\infty \|u(t)\|_2\,dt$ の評価が得られる。次に，$u(t)$ を改めて $L^p(\Omega;R^N)$ 値関数とみると，拡散方程式系の正則性より $\|u(t)\|_{p,\alpha}$ の評価が得られる。条件 (6) の下で，これらの評価を組合せることによって，安定性の評価 (7) が導かれる。

漸近収束性 (8) を示すためには，$\|u(\cdot)\|_2$ の可積分性の他に，$t\to\|u(t)\|_2$ の一様連続性を証明する。この結果，$\lim_{t\to\infty}\|u(t)\|_2=0$ となり，(7) と組合せて (8) が示される。

§4. 応用

主定理の応用として，拡散項と時間遅れの項をもつ *prey-predator* モデルを第5節で考える．このモデルでは非負関数に意味があり，高々3個の非負定常解が存在する．それぞれの定常解に対応するスペクトル条件は，λに関する有限個の方程式の零点が $Re\,\lambda \geqq 0$ にないことと同値になる．主定理の仮定を後者の形で確かめることにより，定常解の局所的な漸近安定性に関する結果が得られる．より詳しく，大域的な漸近安定性を示すためには，非線型項の形に応じて，比較定理を利用する方法，或はリヤプノフ汎関数を構成する方法を用いる．こうして得られる結果は，拡散項がないときに既知の結果を完全に含む．