

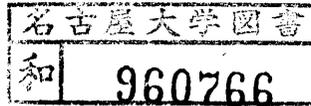
鋼薄肉 I 形桁の横ねじれ  
耐荷力に関する研究

昭和 60 年 10 月

前 川 幸 次

図・本誌

# 鋼薄肉 I 形桁の横ねじれ 耐荷力に関する研究



昭和 60 年 10 月

前 川 幸 次

## 謝辞

著者は金沢大学大学院修士課程（土木工学専攻）を1977年に修了した後、石川工業高等専門学校に奉職して9年目となった。この間に、名古屋大学での内地研究の機会も与えられ、本論文をまとめることができた。著者の力量不足にもかかわらず本論文が有益な情報を提供できるなら、それは名古屋大学・福本昶士教授ならびに金沢大学・吉田博教授の長年にわたる懇篤なる御指導と御助言の賜物である。両教授から学び得た研究ならびに教育に対する姿勢は著者の貴重な財産であり、ここに深く感謝するとともに、厚く御礼を申し上げます。

本論文をまとめるにあたり、貴重な御教示を頂戴した名古屋大学・島田静雄教授、坂本順教授、宇佐美勉助教授に厚く御礼申し上げます。また、長年にわたる懇切なる御助言を頂いた金沢工業大学・西田進教授には深く感謝致します。

名古屋大学での内地研究期間中に行った第4章の実験においては、伊藤義人博士の手を煩わせ、研究室の学生諸氏（特に、浅里芳行氏、小島清嗣氏）に多大の労をお願いした。ここに厚く御礼申し上げます。また、数値解析プログラムの開発に協力頂いた金沢大学・吉田研究室の加藤孝氏（現・福井県庁）、本多伸弘氏（現・清水建設）ならびに関係各位に厚く御礼申し上げます。

名古屋大学での内地研究期間中は、福本昶士教授、宇佐美勉助教授、山田健太郎助教授、伊藤義人助手、水野英二助手には公私ともにお世話になり、研究成果を挙げることを厚く御礼申し上げます。

研究に関する著者の恵まれた環境は石川工業高等専門学校土木工学科および関係各位の御高配によるものであり感謝致します。

なお、本論文の数値計算は金沢大学計算機センターのFACOM M-170Fおよび名古屋大学大型計算機センターのFACOM M-382を用いた。また、本論文の作成と編集にあたっては金沢大学計算機センターの車古正樹講師が開発したTXTFCPシステムを使用させて頂いた。

ULTIMATE STRENGTH OF THIN-WALLED I-SHAPED BEAMS  
DUE TO LATERAL-TORSIONAL INSTABILITY

by

Kouji MAEGAWA

ABSTRACT

In general, beams and girders are accompanied by bending moments about the major axis due to the applied loads. They are proportioned to have a greater stiffness in the loading plane. When they are not sufficiently braced against lateral deflection and twisting, they become an unstable state before the in-plane strength is reached.

This dissertation presents the theoretical and experimental study concerning the lateral-torsional instability of thin-walled I-beams and it consists of six chapters. Brief description on each chapter is given below :

Chapter 1 : The statement of the problem and review of previous investigations.

Chapter 2 : Two methods of analyzing the elastic and inelastic large-displacement behavior of horizontally curved I-beams are presented. One is based on the transfer matrix method and the other based on the finite element method. Two computer programs based on these methods have been developed and some numerical examples are also presented.

Chapter 3 : The relationship between the lateral-torsional buckling load and the ultimate load-carrying capacity of beams and the effect of the types of residual stress distribution, as well as the loading conditions and the geometrical imperfection levels on the ultimate load-carrying capacity are analytically examined using the transfer matrix method.

Chapter 4 : The lateral-torsional buckling behavior of welded

steel girders is studied experimentally and analytically. The experimental program was designed to clarify the effect of moment gradient against the lateral instability of girders in the inelastic range. The experimental ultimate load-carrying capacity of girders is compared with the analytical predictions by the finite element method based on the finite displacement theory.

Chapter 5 : Based on the analytical and experimental study, the lateral-torsional strengths of rolled beams and welded girders under moment gradient are determined by the simplified formulas. Manual method of calculating the lateral-torsional strengths of laterally continuous beams and girders is also presented.

Chapter 6 : The conclusions obtained from Chapters 2 through 5 are summarized.

# 目次

謝辞	i
ABSTRACT	ii
第1章 序論	1
1.1 緒言	1
1.2 横ねじれ座屈に関する既往の研究	2
1.3 本論文の内容と構成	4
参考文献	6
第2章 曲線ばりの横ねじれ耐荷力解析	13
2.1 緒言	13
2.2 理論解析法Ⅰ（伝達マトリックス法）	14
(1) 仮定	14
(2) 格間伝達マトリックス	15
(3) 格点伝達マトリックス	23
(4) 計算方法	27
2.3 理論解析法Ⅱ（剛性法）	28
(1) 仮定	28
(2) 増分理論による仮想仕事式	29
(3) 剛性方程式	40
(4) 計算方法	44
2.4 数値計算結果	45
(1) 伝達マトリックス法および 剛性法による精度の比較	45
(2) 曲線ばりの耐荷力	46
2.5 結論	48
付録2.1 式(2.9)の係数 $A_1 \sim A_4$	48
付録2.2 式(2.24)における行列 $T_k$ および ベクトル $U_k$	49
付録2.3 ベクトル $B_z, B_{\phi_x}$ ・・・の内容	49

付録 2 . 4	剛性マトリックス $K_{aa}$ , $K_{ac}$ , $K_{cc}$ . . . . .	5 0
付録 2 . 5	初期応力マトリックス $N^o$ , $T^o$ , $M^o$ , $K_n^o$ . . . . .	5 5
	用いた記号 I . . . . .	5 6
	用いた記号 II . . . . .	5 7
	参考文献 . . . . .	5 9
	図表 . . . . .	6 2
第 3 章	鋼 I 形ばりの横ねじれ安定性の評価方法 . . . . .	7 1
3 . 1	緒言 . . . . .	7 1
3 . 2	解析方法および初期不整のモデル化 . . . . .	7 2
3 . 3	横ねじれ耐荷力曲線 . . . . .	7 3
	( 1 ) 横ねじれ座屈パラメータ . . . . .	7 3
	( 2 ) 解析結果 . . . . .	7 4
3 . 4	荷重－変形特性および降伏領域の広がりについて . . . . .	7 8
3 . 5	結論 . . . . .	8 0
	用いた記号 . . . . .	8 0
	参考文献 . . . . .	8 2
	図表 . . . . .	8 5
第 4 章	溶接 I 形桁の横ねじれ座屈実験 . . . . .	9 6
4 . 1	緒言 . . . . .	9 6
4 . 2	実験概要 . . . . .	9 7
	( 1 ) 実験桁 . . . . .	9 7
	( 2 ) 断面寸法・素材試験・残留応力・初期たわみ . . . . .	9 7
	( 3 ) 静的曲げ試験 . . . . .	9 8
4 . 3	実験結果および考察 . . . . .	9 8
	( 1 ) 断面諸量および素材試験 . . . . .	9 8
	( 2 ) 残留応力 . . . . .	9 9
	( 3 ) 初期たわみ . . . . .	9 9
	( 4 ) 荷重－変形挙動 . . . . .	9 9
	( 5 ) 崩壊形式 . . . . .	1 0 0
4 . 4	横ねじれ耐荷力の検討 . . . . .	1 0 2
	( 1 ) 基準強度式との比較 . . . . .	1 0 2
	( 2 ) 数値解析による検討 . . . . .	1 0 4

	(3) 実験値を評価する上での問題点	105
4.5	結論	106
	用いた記号	107
	参考文献	109
	図表	111
第5章	不等曲げを受けるはりの横ねじれ基準強度	128
5.1	緒言	128
5.2	横ねじれ座屈パラメータ	130
5.3	圧延ばりの横ねじれ基準強度式の提案	130
5.4	溶接桁の横ねじれ基準強度式の提案	133
5.5	横変形に対して中間支持された桁の横ねじれ耐荷力	134
	(1) 計算手法の概説	134
	(2) 計算手順および適用例	138
5.6	ECCSの横ねじれ基準強度式に対する修正式の提案	140
5.7	結論	142
	用いた記号	142
	参考文献	144
	図表	146
第6章	結語	157
	著者研究業績および略歴	160

# 第1章 序論

## 1.1 緒言

鋼薄肉 I 形断面部材は製作加工が容易であることから、曲げ部材として広く利用されており、断面の強軸まわり（面内）の曲げに対して十分に抵抗するように荷重面内の曲げ剛性が大きく設計されている。このような部材は横方向変位およびねじれに対して適当な支持がされていないと、面内強度を十分に発揮することなく、横ねじれ座屈現象によって耐力を失う。すなわち、桁に強軸まわりの曲げを生じさせている荷重がある値に近づくと、荷重面内の曲げ剛性には余裕があるにもかかわらず、それまで僅かであった荷重面外の変形が急激に増大し、桁は不安定な状態となりこれ以上の荷重に抵抗できなくなる。面内強度を有効に利用するためには、桁の横ねじれ安定性について把握しておくことが重要である。

横ねじれ安定性に対する通常の桁の設計は示方書によって規定された安全側の設計式（通常、一様曲げが作用する桁を対象とし、長い桁では弾性座屈曲線で表され、非常に短い桁では全塑性モーメント  $M_p$  あるいは降伏モーメント  $M_y$  になり、それらの中間では、経験的な非弾性座屈遷移曲線で表される）によって行われている。示方書における設計式では簡便さが要求されることから、横ねじれ座屈に影響を与えるすべてのパラメータを含めることは困難であり、安全側の経験的な座屈曲線を用いることはやむを得ない。

しかし、柱の強度については ECCS (European Convention for Constructional Steelwork) および SSRC (Structural Stability Research Council) がより正確に評価するために multiple column curves を提案している。桁の横ねじれ座屈現象は複雑ではあるが、理論解析法ならびにコンピューターの進歩、および実験装置ならびに測定機器の精度の向上した今日では、より正確に現象を把握することは決して困難ではない。

一般にこれまで、横ねじれ安定性は横ねじれ座屈強度（ここでは、真直ぐな桁の固有値問題として求まる分岐座屈を意味する）を用いて評価されてきた。ところが、実際の桁は残留応力などの材料的初期不整のみならず初期たわみ、荷重偏心などの幾何学的初期不整を持っている。そのような桁の横ねじれ安定性は横ねじれ耐荷力（ここでは、初期たわみを考慮した有限変位解析あるいは実験における最高荷重を意味する）により評価することが桁の強度を明確にするうえで妥当である。

本研究では、まず、曲線桁を対象にした非弾性有限変位解析の定式化を示す。次に、得られた数値解析プログラムを用いて、やはりあるいは桁の横ねじれ座屈現象を横ねじれ耐荷力として評価し、残留応力および初期たわみなどの避けられない初期不整が横ねじれ座屈現象に及ぼす影響について明らかにするとともに、固有値解析として得られる横ねじれ座屈との関連性について検討する。また、非弾性域における桁の横ねじれ耐荷力に及ぼすモーメント勾配の影響について検討するために

実橋の 1/3 スケールで製作されたプレートガードについて横ねじれ座屈実験を行い，実験結果ならびに解析結果を踏まえてモーメント勾配を考慮したはりおよび桁の横ねじれ基準強度式を提案する．最後に，横方向変位およびねじり拘束が支点のみならず中間部でも存在する桁の横ねじれ耐荷力を近似的に評価する方法を示す．

## 1. 2 横ねじれ座屈に関する既往の研究

構造物の安定問題についての研究は1744年に Euler が柱の曲げ座屈を検討したのが最初であり，1759年には柱の座屈に関する研究<sup>1)</sup>を発表した．それから150年以上も過ぎた1899年になって初めてはりの曲げねじれ座屈の理論解が Prandtl<sup>2)</sup> および Michell<sup>3)</sup> によってほぼ同時に発表されている．また，近年，構造物における薄肉開断面部材を使用する機会の増加と相まって薄肉開断面部材の横ねじれ座屈の理論が急速に進んだ．これらの理論や設計のための資料は各国でまとめられている．たとえば，Bleich<sup>4)</sup>，Timoshenko and Gere<sup>5)</sup>，Vlasov<sup>6)</sup>，Galambos<sup>7)</sup>，Trahair<sup>8)</sup>，Allen and Bulson<sup>9)</sup>，日本建築学会<sup>10)</sup>，福本<sup>11)</sup>，Narayanan<sup>12)</sup> がある．また，横ねじれ座屈に関する文献調査は既に多くの研究者によって行われ，たとえば，古くは Lee<sup>13)</sup> に始まり，Johnston<sup>14)</sup>，久保<sup>15)</sup>，Cuk<sup>16)</sup> が詳細に記述している．さらに，Basler ら<sup>17)</sup> はプレートガードの各種座屈に関する莫大な文献を収集している．そこで本節では，これまで研究されてきた横ねじれ座屈に関する主要なテーマを概説するに留める．また，本論文に密接な関係のある文献については，各章に示すことにする．

1899年に Prandtl<sup>2)</sup> および Michell<sup>3)</sup> はほぼ同時に，両端で荷重面内および面外変形に対して単純支持され，一様曲げを受ける長方形断面はりの理論解を求めている．

1905年に Timoshenko<sup>18)</sup> は2軸対称 I 形ばりの基礎微分方程式を求め，エネルギー法を用いて一様曲げを受けるはりの閉じた解を求めている．荷重状態が異なる場合は一般に閉じた解を得ることはできないため，それらの影響を考慮するための研究が，その後，多く行われている．それらは種々の荷重状態および載荷高さなどを考慮できるように図表で与えられている．たとえば，Clark and Hill<sup>19)</sup>，Timoshenko and Gere<sup>5)</sup>，Vlasov<sup>6)</sup> および Nethercot and Rockey<sup>20)</sup> を挙げることができる．また，モーメント勾配がある場合の座屈荷重を求めるための近似式である等価モーメント係数は Horn<sup>21)</sup>，Salvadori<sup>22),23)</sup>，Campus and Massonnet<sup>24)</sup>，Austin<sup>25)</sup> によって提案されている．

1軸対称 I 形ばりの横ねじれ座屈に関する研究は Winter<sup>26)</sup> が初めて研究を行い，一様曲げを受けるはりの横ねじれ座屈に対する近似を示した．他の荷重に対する検討は Vlasov<sup>6)</sup>，および Anderson and Trahair<sup>27)</sup> によって行われ，種々の荷重条件に対する解は Anderson and Trahair<sup>27)</sup> に与えられている．

変断面ばかりに関する研究はフランジにテーパをつけた I 形断面ばかりを扱った Trahair and Kitipornchai<sup>28)</sup> および Massey and Mcguire<sup>29)</sup> の研究、腹板のテーパを考慮した Morrel and Lee<sup>30)</sup> の研究がある。

はりの荷重面内の変形が横ねじれ座屈に及ぼす影響を検討した研究は、吉田<sup>31)</sup>、Trahair and Woolcock<sup>32)</sup>、Vacharajittiphanら<sup>33)</sup>、西野ら<sup>34)</sup> があり、通常のはり（荷重面内および面外の曲げ剛性の差が十分にある断面）では荷重面内の変形の影響は無視できることが示されている。

桁の断面変形あるいは局部座屈と横ねじれ座屈の相互作用に関する研究は、Goldbergら<sup>35)</sup>、Rajasekaran and Murray<sup>36)</sup>、Wang and Wright<sup>37)</sup>、Akay ら<sup>38)</sup>、Hancock<sup>39),40)</sup>、Suzuki and Okumura<sup>41)</sup>、福本・久保<sup>42)</sup>、Bradford and Trahair<sup>43)</sup>、薄木・長谷部<sup>44)</sup> によって行われ、通常の圧延ばかりおよび溶接桁の横ねじれ座屈は断面変形の影響を受けないことが報告されている。

中間拘束を受けるはりの横ねじれ座屈に関する研究は、Hartman<sup>45)</sup>、Klöppel and Unger<sup>46)</sup>、若林・中村<sup>47)</sup>、加藤・秋山<sup>48)</sup>、Nethercot and Rockey<sup>49)</sup> がある。これらはブレーシングによる拘束効果について検討したものである。また、端拘束されたはりの横ねじれ座屈に関する研究は、Nethercot and Rockey<sup>50)</sup>、吉田・井本<sup>51)</sup>、Ojalvo and Chambers<sup>52)</sup>、Heins and Potocko<sup>53)</sup> によって行われ、スパン長さおよび断面寸法によっても異なるが、そり拘束の効果が大きいことが示されている。また、連続ばかりの横ねじれ座屈については Yoshidaら<sup>54)</sup> によって行われ、数値計算法として有限要素法、有限積分法および伝達マトリックス法の比較も行われている。

横方向変位およびねじりがはりの中間でも拘束されている場合の横ねじれ座屈の近似解法は Nethercot and Trahair<sup>55),56)</sup>、Dux and Kitipornchai<sup>57),58)</sup> によって提案され、端拘束された圧縮柱の設計に用いられている有効座屈長係数のノモグラフを利用してはりの非弾性横ねじれ座屈強度も求められている。

横ねじれ座屈の問題をわずかな初期変形あるいは荷重偏心を持つはりの横ねじれ安定問題として扱う研究は、Vinnakota<sup>59)</sup>、Lindner<sup>60),61)</sup>、Klöppel and Unger<sup>62)</sup>、吉田・前川<sup>63)~65)</sup>、Epstein<sup>66)</sup> らによって行われている。また、Klöppel and Unger<sup>62)</sup> は片持ちばりに鉛直荷重が偏心して作用する場合について、Lindner and Schmidt は荷重偏心<sup>67)</sup> および実際の構造<sup>68)</sup> を用いた載荷方法により、I 形ばかりの横ねじれ座屈実験を行っている。

横ねじれ座屈に影響するパラメータのうち、初期横変形、降伏点応力、残留応力度および断面寸法などの変動が横ねじれ座屈強度の変動に及ぼす影響を検討するために、福本らは精密な実験装置を用いて圧延ばかり<sup>69)</sup> ならびに溶接ばかり<sup>70)~72)</sup> について大量の統一的な実験を行っている。また、文献に報告されたすべての実験値を統計的に処理した研究は、Fukumoto and Kubo<sup>73)</sup> を初めとして同研究グループにより進められている<sup>74)</sup>。

### 1.3 本論文の内容と構成

本論文は薄肉 I 形断面桁の横ねじれ安定問題について実験による現象の把握，解析理論の展開ならびに数値解析による考察を行ったものである．各章の内容は次のようである．

第 2 章は，曲線ばりの解析理論の展開と曲線桁の横ねじれ耐荷力の検討を行っている．本論文では横ねじれ座屈現象を横ねじれ耐荷力（荷重－変形曲線の最高荷重）として評価するために，初期変形を考慮した非弾性有限変位解析を行う．そこで，西田<sup>75)</sup>が行ったように初期変形を曲線ばりの円弧で表し，支配方程式を導く方法を二通り示す．一つは変位の微小増分を考慮したつり合い条件式から導く遠田の方法<sup>76),77)</sup>であり，線形化有限変位理論と呼ばれている．また，数値計算法として，伝達マトリックス法を用いる．もう一方は，有限変形のひずみ・変位関係式と増分形で表された仮想仕事の原理を用いて導く薄木の方法<sup>78)~80)</sup>であり，数値計算法としては剛性法を用いる．二つの解析手法は遠田の方法および薄木の方法を参考にしたものであり，非弾性への拡張の手法と任意断面への拡張を示すことに力点が置かれている．なお，非弾性の影響は接線係数理論に基づいて，剛性の低下として評価する．二つの解析手法は実験結果ならびに両者の解析結果の比較により妥当性が検討される．

第 3 章は，鋼 I 形ばりの横ねじれ安定性について検討したものである．横ねじれ耐荷力に影響を及ぼすパラメータ（残留応力，初期たわみ，荷重偏心，断面形状，荷重の種類）について検討し，また，横ねじれ耐荷力（最高荷重）と横ねじれ座屈強度（固有値）ならびにはりの横ねじれ基準強度式との比較検討を行う．さらに，部材の降伏領域および荷重変形性状から初期不整（残留応力，初期たわみ）と横ねじれ耐荷力の関連性を検討する．用いる解析法は伝達マトリックス法による線形化有限変位理論である．

第 4 章は，横ねじれ座屈強度に及ぼすモーメント勾配の影響を溶接 I 形桁（プレートガード）の曲げ試験により調べたものである．桁は，実橋の約 1/3 スケール（I-520×110×4.5×8）のプレートガードで，実橋に準じた方法で製作されている．曲げ試験は，片曲げ，および一様曲げの二通りのモーメント勾配を考え，それぞれ支点と載荷点の横変形を拘束した，スパン中央 1 点載荷桁 4 体，および対称 2 点載荷桁 4 体によって実施されている．まず，プレートガードの初期たわみおよび座屈変形性状について計測結果を検討し，次に，これまでに提案されている横ねじれ基準強度式と実験により得られた耐荷力の比較を行う．また，本実験および圧延ばりに対する Kitipornchai<sup>81)</sup>の実験のシミュレーションを，第 2 章に示した剛性法を用いて行っている．最後に，2 点載荷桁の数値解析結果から得られる水平変形および断面回転角モードの変曲点間距離と有効座屈長係数による実験値の評価について検討されている．

第 5 章は，両端で横方向変形とねじりに対しても単純支持された圧延 I 形断面ばりおよび溶接 I 形断面桁について行った横ねじれ耐荷力解析結果をもとに，非弾性域におけるモーメント勾配の影響を取り入れた横ねじれ基準強度式の提案を行っている．また，提案した基準強度式と拘束柱の有

効座屈長係数のノモグラフを用い，中間で荷重面外の変形が拘束された桁の耐荷力を算定する近似手法を示す．

第6章は結語であり，各章の結果をもとに本論文の総括を行う．

## 参考文献

- 1) Euler, L. : Sur la Force des Colonnes Academie Royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin, Memories, Vol.13, 1759, pp.252.
- 2) Prandtl, L. : Kipperscheinungen, Doctoral Thesis, Munich, November, 1899.
- 3) Michell, A.G.M. : Elastic Stability of Long Beams under Transverse Forces, Philosophical Magazine, Vol.48, September, 1899, pp.298.
- 4) Bleich, F. : Buckling Strength of Metal Structures, McGraw-Hill Book Co., New York, 1952.
- 5) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M. : Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill Book Co., New York., 1961.
- 6) Vlasov, V.Z. (奥村敏恵ほか共訳) : 薄肉弾性ばりの理論 , 技報堂, 1967年.
- 7) Galambos, T.V. : Structural Members and Frames, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1968. (福本嘸士, 西野文雄 共訳 : 鋼構造部材と骨組-強度と設計-, 丸善, 1970年.)
- 8) Trahair, N.S. : Lateral Buckling of Beams and Beam-Columns, Chap.3, Vol. II, in Theory of Beam-Columns by W.F. Chen and Atsuta, McGraw-Hill Book Co., New York, 1977.
- 9) Allen, H.G. and Bulson, P.S. : Background to Buckling, McGraw-Hill Book Co., London, 1980.
- 10) 日本建築学会 : 鋼構造座屈設計指針 , 技報堂, 1982年.
- 11) 福本嘸士 : 構造物の座屈・安定解析, 土木学会編, 新体系土木工学 9, 技報堂, 1982年.
- 12) Narayanan, R., ed. : Beams and Beam Columns (Stability and Strength), Chapter 2, Applied Science Publishes, 1983.
- 13) Lee, G.C. : A Survey of the Literature on the Lateral Instability of Beams, Welding Research Council Bulletin, No.63, August, 1960, pp.50 -59.
- 14) Johnston, B.G., ed. : Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures, 3rd. ed., John Wiley & Sons, New York, 1976.
- 15) 久保全弘 : 鋼薄肉断面桁の曲げによる横倒れ座屈強度と耐荷力に関する研究 , 名古屋大学提出学位論文, 1980年.

- 16) Cuk, P.E. : Flexural-Torsional Buckling in Frame Structures, Doctoral Thesis, Presented to the University of Sydney, February, 1984.
- 17) Basler, K., Yen, B.T., Mueller, J.A. and Thürlimann, B. : Web Buckling Test on Welded Plate Girders, Welding Research Bulletin Series, No.64, September, 1960, pp.1 – 63 .
- 18) Timoshenko, S.P : Lateral Buckling of I-Beams under the Influence of Forces Acting in the Plane of Largest Rigidity, *ibid.*, Vol.4, No.3–4, 1905, pp.151– 219, Vol.5, No.1–2, 1906, pp.3 –34.
- 19) Clark, J.W. and Hill, H.N. : Lateral Buckling of Beams, Journal of the Structural Division, Proc. of ASCE, Vol.86, No.ST7, July, 1960, pp.175 –196.
- 20) Nethercot, D.A. and Rockey, K.C. : A Unified Approach to the Elastic Lateral Buckling of Beams, The Structural Engineer, Vol.49, No.7, July, 1971, pp.321 –330.
- 21) Horn, M.R. : The Flexural-Torsional Buckling of Members of Symmetrical I-Section under Combined Thrust and Unequal Terminal Moments, Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol.7, Part 4, 1954, pp.410–426.
- 22) Salvadori, M.G. : Lateral Buckling of I-Beams, Transactions, ASCE, Vol.120, 1955, pp.1165 –1177.
- 23) Salvadori, M.G. : Lateral Buckling of Eccentrically Loaded I-Columns, Transactions, ASCE, Vol.121, 1956, pp.1163 –1178.
- 24) Campus, F. and Massonnet, C. : Recherches sur le flambement de colonnes en acier A37, à profil en double T, sollicitées, obliquement, C.R. Rech., IRSIA, April, 1956.
- 25) Austin, W.J. : Strength and Design of Metal Beam-Columns, Journal of the Structural Division, Proc. of ASCE, Vol.87, No.ST4, April, 1961, pp.1–32.
- 26) Winter, G. : Lateral Stability of Unsymmetrical I-Beams and Trusses in Bending, Proc. of ASCE, Vol.67, No.10, December, 1941, pp.1851 –1864.
- 27) Anderson, J.M. and Trahair, N.S. : Stability of Monosymmetric

- Beams and Cantilevers, Journal of the Structural Division, Proc. of ASCE, Vol.98, No.ST1, January, 1972, pp.269 -286.
- 28) Trahair, N.S. and Kitipornchai, S. :Elastic Lateral Buckling of Stepped I-Beams, Journal of the Structural Division, Proc. of ASCE, Vol.97, No.ST10, Oct., 1971, pp.2535 -2548.
- 29) Massey, P.C. and McGuire, P.J. :Lateral Stability of Non-Uniform Cantilevers, Journal of the Engineering Mechanics Division, Proc of ASCE, Vol.97, No.EM3, June, 1971, pp.673 -686.
- 30) Morrell, M.L. and Lee, G.C. :Allowable Stress for Web-Tapered Beams, Welding Research Council, Bulletin, No.192, February, 1974, pp.1 -12.
- 31) 吉田 博：はりの横倒れ座屈におよぼす曲率の影響，土木学会中部支部研究発表会，1970年2月，pp.39 -40.
- 32) Trahair, N.S. and Woolcock, S.T. :Effect of Major Axis Curvature on I-Beam Stability, Journal of Engineering Mechanics Division, Proc. of ASCE, Vol.99, No.EM1, February, 1973, pp.85 -98.
- 33) Vacharajittiphan, P., Woolcock, S.T. and Trahair, N.S. :Effect of In-plane Deformation on Lateral Buckling, Journal of Structural Mechanics, Vol.3, No.1, 1974, pp.29 -60.
- 34) 西野文雄，倉方慶夫，長谷川彰夫，奥村敏恵：軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面材，土木学会論文報告集，第225号，1974年4月，pp.1 -15.
- 35) Goldberg, J.E., Bogdanoff, J.L. and Glauz, W.D. :Lateral and Torsional Buckling of Thin-Walled Beams, Proceedings, IABSE, Vol.24, 1964, pp.91 -100.
- 36) Rajasekaran, S. and Murray, D.W. :Coupled Local Buckling in Wide-Flange Beam-Columns, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.99, No.ST6, June, 1973, pp.1003 -1023.
- 37) Wang, S.T., and Wright, R.S. :Torsional-Flexural Buckling of Locally Buckled Beams and Columns, Proceedings, International Colloquium on Stability of Structures under Static and Dynamic Loads, SSRC-ASCE, Washington, 1977, pp.587 -608.
- 38) Akay, H.U., Johnson, C.P., and Will, K.M. :Lateral and Local Buckling of Beams and Frames, Journal of the Structural Division, Proc. of ASCE, Vol.103, No.ST9, September,1977, pp.1821 -1832.

- 39) Hancock, G.J. : Local, Distortional, and Lateral Buckling of I-Beams, Journal of the Structural Division, Proc. of ASCE, Vol.104, No.ST11, November, 1978, pp.1787 -1798.
- 40) Hancock, G.J., Bradford, M.A. and Trahair, N.S. : Web Distortion and Flexural Torsional Buckling, Journal of the Structural Division, Proc. of ASCE, Vol.106, No.ST7, July, 1980, pp.1557 - 1571.
- 41) Suzuki, Y., and Okumura, T. : Influence of Cross-Sectional Distorsion on Flexural-Torsional Buckling, Eighth Congress, IABSE, 1968, pp.321 -331.
- 42) 福本 昉士 , 久保全弘 : U形断面桁の横倒れ座屈強度 , 土木学会論文報告集 , 第264号 , 1977年8月 , pp.17 -32.
- 43) Bradford, M.A. and Trahair, N.S. : Distorsional Buckling of I-Beams, Journal of the Structural Division, Proc. of ASCE, Vol.107, No.ST2, February, 1981, pp.355 -370.
- 44) 薄木征三 , 長谷部薫 : 二次の変位場理論に基づく薄肉断面ばりの局部および全体座屈解析 , 土木学会論文報告集 , 第 344 号 /I-1, 1984年4月 , pp.357 -366.
- 45) Hartman, A.J. : Elastic Lateral Buckling of Continuous Beams, Journal of the Structural Division, Proc. of ASCE, Vol.93, No.ST4, August, 1967, pp.11 -26.
- 46) Klöppel, K. and Unger, B. : Kippen von Durchlauftragen bei seitlich und gegen verdrehen elastisch gelagerten Obergurt, Der Stahlbau, Heft 7, s.203 -207.
- 47) 若林 実 , 中村 武 : 端モーメントと等分布荷重を受ける鉄骨 H 形はりの弾性横座屈に対する数値解析 , 日本建築学会論文報告集 , 第 208 号 , 1973年6月 , pp.7 -13.
- 48) 加藤 勉 , 秋山 宏 : 上フランジを連続拘束された H 形断面鋼はりの弾性横座屈 , 日本建築学会論文報告集 , 第 232 号 , 1975年6月 , pp.41 -49.
- 49) Nethercot, D.A. and Rockey, K.C. : The Lateral Buckling of Beams Having Discrete Intermediate Restraints, The Structural Engineer, Vol.50, No.10, October, 1972, pp.391 -403.
- 50) Nethercot, D.A. and Rockey, K.C. : Lateral Buckling of Beams with Mixed End Conditions, The Structural Engineer, Vol.51, No.4, April, 1973, pp.133 -138.
- 51) 吉田 博 , 井本芳宏 : 拘束を受けるはりの弾性および非弾性横倒れ座屈解析 , 土木学会論

- 文報告集，第 208 号，1972 年 12 月，pp.1-12.
- 52) Ojalvo, M., and Chambers, R.S. : Effect of Warping Restraints on I-Beam Buckling, Journal of the Structural Division, Proc. of ASCE, Vol.103, No.ST12, December, 1977, pp.2351-2360.
  - 53) Heins, C.P. and Potocko, R.A. : Torsional Stiffening of I-Girder Web, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.105, No.ST8, August, 1979, pp.1689-1698.
  - 54) Yoshida, H., Nethercot, D.A. and Trahair, N.S. : Analysis of Inelastic Buckling of Continuous Beams, Proceedings, IABSE, No.P-3/77, 1977, pp.1-14.
  - 55) Nethercot, D.A. and Trahair, N.S. : Lateral Buckling Approximations for Elastic Beams, The Structural Engineer, Vol.54, June, 1976, pp.197-204.
  - 56) Nethercot, D.A. and Trahair, N.S. : Inelastic Lateral Buckling of Determinate Beams, Journal of the Structural Division, Proc. of ASCE, Vol.102, No.ST4, April, 1976, pp.701-717.
  - 57) Dux, P.F. and Kitipornchai, S. : Elastic Buckling of Laterally Continuous I-Beams, Journal of the Structural Division, Proc. of ASCE, Vol.108, No.ST9, 1982, pp.2099-2116.
  - 58) Dux, P.F. and Kitipornchai, S. : Buckling Approximations for Inelastic Beams, Journal of the Structural Division, Proc. of ASCE, Vol.110, No.ST3, March, 1984, pp.559-574.
  - 59) Vinnakota, S. : Inelastic Stability of Laterally Unsupported I-Beams, Computer & Structures, Vol.7, July, 1977, pp.377-389.
  - 60) Lindner, J. : Der Einfluß von Eigenspannungen auf die Traglast von I-Trägern, Der Stahlbau 43, Heft 2/3, Febr./März, 1974, s.39-45/s.86-91.
  - 61) Lindner, J. : Traglastkurven für I-Träger die durch außermittige Querlasten beansprucht werden, Der Stahlbau 43, Heft 10, 1974, s.307-313.
  - 62) Klöppel, K. and Unger B. : Eine experimentelle Untersuchung des Kipphaltens von Kragträgern in elastischen und plastischen Bereich in Hinblick auf eine Neufassung des

Kippsicherheitsnachweises der DIN4114, Der Stahlbau 40, Heft 11/12, Nov./Dezember, 1971, s.321–329/s.375–383.

- 63) 前川幸次 , 吉田 博 : 鋼 I 形はりの横倒れ安定性の評価方法に関する研究 , 土木学会論文報告集 , 第331号, 1983年3月 , pp.55 – 63 .
- 64) Yoshida, H. and Maegawa, K. : Lateral Instability of H-Beams with Imperfections, Third International Colloquium on Stability of Metal Structures, Paris, November, 1983, pp.93 – 99 .
- 65) Yoshida, H. and Maegawa, K. : Lateral Instability of I-Beams with Imperfections, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol.110, No.8, August, 1984, pp.1875–1892 .
- 66) Epstein, M., Nixon, D. and Murray, D.W. : Large Displacement Inelastic Analysis of Beam-Column, Journal of the Structural Division, Proc. of ASCE, Vol.104, No.ST.5, May, 1978, pp.841 – 853.
- 67) Lindner, J. : Developments on Lateral Torsional Buckling, Proceedings, International Colloquium on Stability of Structures under Static and Dynamic Loads, ASCE, Washington, D.C., May, 1977, pp.532 –540.
- 68) Lindner, J. and Schmidt, J.S. : Biegedrillknicken von I-Trägern unter Berücksichtigung wirklichkeitsnaher Lasteinleitung, Der Stahlbau 51, Heft 9, September, 1982, s.257 –263.
- 69) Fukumoto, Y., Itoh, Y. and Kubo, M. : Strength Variation of Laterally Unsupported Beams, Journal of the Structural Division, Proc. of ASCE, Vol.106, No.ST1, Jan., 1980, pp.165 –181.
- 70) Fukumoto, Y., Itoh, Y. : Statistical Study of Experiments on Welded Beams, Journal of the Structural Division, Proc. of ASCE, Vol.107, No.ST1, January, 1981, pp.89 –103.
- 71) Fukumoto, Y., Itoh, Y. and Hattori, R. : Lateral Buckling Test on Welded Continuous Beams, Journal of the Structural Division, Proc. of ASCE, Vol.108, No.ST10, October, 1982, pp.2245–2262.
- 72) Fukumoto, Y. and Nishida, S. : Ultimate Load Behavior of Curved I-Beams, Journal of Engineering Mechanics Division, Proc. of ASCE, Vol.107, No.EM2, April, 1981, pp.367 –385.
- 73) Fukumoto, Y. and Kubo, M. : An Experimental Review of Lateral

- Buckling of Beams and Girders, Proc. of International Colloquium on Stability of Structures under Static and Dynamic Loads, ASCE, Washington, D.C., May, 1977, pp.541-562.
- 74) 福本 昉士, 伊藤 義人: 座屈実験データベースによる鋼はりの横ねじれ基準強度に関する実証的研究, 土木学会論文報告集, 第341号, 1984年1月, pp.137-146.
- 75) 西田 進: 薄肉ばりの変形挙動と横倒れ座屈に関する研究, 名古屋大学提出学位論文, 1979年.
- 76) 遠田 良喜: 伝達マトリックス法による薄肉開断面曲線ばりの有限変位理論の解析, 土木学会論文報告集, 第199号, 1972年3月, pp.11-20.
- 77) 遠田 良喜: 伝達マトリックス法による薄肉開断面曲線ばりの2次応力問題の解析, 土木学会論文報告集, 第210号, 1973年2月, pp.1-11.
- 78) 薄木 征三, 榎農 知徳, 渡辺 昇: 有限なねじれを考慮した薄肉曲線部材の変形解析, 土木学会論文報告集, 第290号, 1979年10月, pp.1-15.
- 79) 薄木 征三: 変形を考慮した薄肉断面凹弧アーチの曲げねじれ座屈, 土木学会論文報告集, 第263号, 1977年7月, pp.35-48.
- 80) 渡辺 昇, 榎農 知徳, 薄木 征三: 薄肉曲線桁の変位場に基づく有限ねじれ変形解析, 土木学会論文報告集, 第317号, 1982年1月, pp.31-45.
- 81) Dux, P.F. and Kitipornchai, S. : Inelastic Beam Buckling Experiments, Research Report No.CE24, Department of Civil Engineering, University of Queensland, May, 1981, pp.1-36.

## 第2章 曲線ばりの耐荷力解析

### 2.1 緒言

薄肉曲線 I 形ばりが構造物要素として使用される機会はしだいに多くなり、その力学的挙動の実験的および解析的な研究もさかに行われている。曲線ばりはその幾何学的な構造特性のために、鉛直荷重のみが作用する場合であっても、曲げと同時にねじりを生じ、その力学的挙動はきわめて複雑である。

わが国における曲線げた（橋）の研究は、1958年の平井・倉西<sup>1)</sup>に始まり、その後、曲線げたの基礎理論およびそれに基づく実用計算法が数多く報告されている<sup>2)</sup>。しかしながら、これらは曲線桁橋の設計における構造解析手法および曲線橋の構造特性を論じた微小変位理論による研究が主である。

一方、強度を対象とした研究は、近年ようやく行われるようになり、曲線箱桁橋の断面変形の影響に関する研究<sup>3),4)</sup>、曲線主桁の構成板要素の挙動に関する研究<sup>5),6)</sup>、曲線桁（橋）の極限解析並びに塑性設計を目的とした研究<sup>7),12)</sup>、曲線 I 形桁の曲げ強度に関する研究<sup>13),14),33)</sup>、せん断による腹板の面内強度に関する研究<sup>34)</sup>があり、応力度の照査式の提案も行われつつある<sup>15),16)</sup>。

曲線桁の曲げ挙動を明らかにする場合、有限変位理論に基づく解析が必要である。遠田<sup>17)</sup>は変位の微小増分を考慮したつり合い条件式から薄肉開断面曲線ばりの基礎微分方程式を導き、また、薄木<sup>18),19),35)</sup>は薄肉回転シェルの非線形ひずみ-変位関係式をもとに薄肉曲線部材の変形解析を剛性法による有限変位解析として行い、その曲げねじり現象について考察している。

しかしながら、これまでは厳密な支配方程式を導くことに力点が置かれてきたように思われ、しかも弾性解析が中心であった。前述のように曲線ばりでは、その応力分布特性から通常の 1 軸あるいは 2 軸対称断面部材であっても断面の塑性化に伴う未降伏断面の非対称化が生ずる。曲線ばりの安全性を明確にした設計を行うためには、幾何学的非線形性のみならず材料的非線形性を考慮した解析を行い、曲線ばりの耐荷力について把握しておく必要がある。

本章では水平面内に曲率を有する曲線ばりの非弾性域での有限変形挙動の解析手法を中心に記述する。まず、遠田の方法<sup>17)</sup>を用いて曲線 I 形ばりの非弾性状態を考慮した基礎微分方程式を導き、はりの非弾性解析に対する有効性をかんがみて伝達マトリックス法を用いて数値解析を行うための定式化を行う。次に、薄木の方法<sup>35)</sup>を用いて任意断面の薄肉ばりについて、増分理論による仮想仕事の式から剛性方程式を導く。得られた二つの数値解析プログラムの精度とその妥当性を実験値との比較により検討したうえで、曲線 I 形ばりの耐荷力曲線の性状および耐荷力におよぼす残留応力の影響について検討を行う。なお、本章は文献 36) ~ 38) に発表した内容をとりまとめたものである。

## 2.2 理論解析法 I (伝達マトリックス法)

前述のように、曲線ばりの支配方程式を導く方法には、変位の微小増分を考慮したつり合い条件式から求める方法と有限変位のひずみ-変位関係式をもとに仮想仕事の原理を用いる方法がある。ここでは、前者の方法によるが、数値解析法として伝達マトリックス法を用いるので、格間伝達マトリックスと格点伝達マトリックスの誘導過程を示す。ここに、格間伝達マトリックスとは曲線ばりを長さ方向に分割して得られる円弧要素(格間)の両端における状態量を結ぶマトリックスであり、分割点(格点)の両側における状態量を結ぶものを格点伝達マトリックスという。なお、後者の方法については次節で説明する。

### (1) 仮定

- a) 部材は水平面内のみで一定の曲率を有する薄肉曲線 I 形ばりであり、横断面の図心を通る母線の曲率半径は  $R$  である。
- b) 横断面形状は部材軸方向に一定であり、曲率半径方向の断面寸法は曲率半径に比べて十分小さい。また、はりを構成する母線ごとの曲率の差は無視する。
- c) 横断面の形状は、はり変形後も変化しない。
- d) 残留応力の分布形は直線ばりに用いられているものを適用し、部材軸方向にのみ存在し板厚方向には一定である(図-2.1)。また、初期不整としての残留応力は自己つり合いを保つものとする<sup>注1)</sup>。
- e) 図-2.1に示す微小断面要素の図心におけるひずみ  $\epsilon_i$  (残留ひずみを含む) が降伏ひずみ  $\epsilon_y$  を越えたとき、その要素は降伏したものとする。すなわち、せん断応力の影響はないものとする。
- f) 格間においては、部材軸方向に断面の降伏部分は一定であり、したがって弾性域にとどまっている残された部分(以後、弾性核とよぶ)は変化しない。
- g) 材料は完全弾塑性体である。また、除荷は起らないものとする。
- h) 弾塑性域における曲げ剛性およびねじり剛性は弾性核のみ有効であるとし、St.Venantのねじり剛性は全断面有効とする<sup>20)</sup>。
- i) 断面定数は仮定 b) より曲率の影響<sup>19), 21), 22)</sup> を無視する。

---

注1) 残留応力は直線ばりと同様、次式を満足するものとする。

$$\int_A \sigma_r dA = \int_A \sigma_r y dA = \int_A \sigma_r z dA = 0$$

ここに、 $\sigma_r$  は残留応力度、 $A$  は断面を表す。なお、図-2.1のような残留応力分布を仮定すると、必然的に条件式

$$\int_A \sigma_r \omega_c dA = 0 \text{ が成立し、} \omega_c \text{ はそり関数である。}$$

## (2) 格間伝達マトリックス

図-2.2は曲率半径 $R$ を有する円弧ばりから取出した微小要素を表している。微小要素は、影をつけて表した降伏部分と弾性核に分けて考える。I形断面の図心 $D$ に沿った要素長を $dS_0$ とし、弾性核の図心 $C$ に対する弧長を $dS$ とする。また、図心 $D$ を原点とし、曲率半径方向に $Y$ 軸を一致させた直交曲線座標( $X-Y-Z$ 座標)、および図心 $C$ を原点とし、弾性核の主軸を $y-z$ 軸とした座標( $x-y-z$ 座標)を設定する。図中、 $\beta$ は $Y$ 軸と $y$ 軸のなす角( $x$ の方向に向かって時計回りを正とする)であり、 $Y_c$ および $Z_c$ は図心 $C$ の $Y-Z$ 座標値である。

弧長 $dS$ とその中心角 $d\alpha$ は $dS = (R - Y_c)d\alpha$ の関係があり、 $dS$ 間における点 $C$ の $x$ 、 $y$ 、 $z$ 方向の変位増分およびねじり角の増分をそれぞれ $\Pi dS$ 、 $\Psi dS$ 、 $\Omega dS$ および $\Theta dS$ とすれば次式で表される<sup>17)</sup>。

$$\Pi dS = \left[ u' - \frac{(v \cos \beta - w \sin \beta)}{R - Y_c} \right] dS \quad (2.1a)$$

$$\Psi dS = \left[ v' + \frac{u \cos \beta}{R - Y_c} \right] dS \quad (2.1b)$$

$$\Omega dS = \left[ w' - \frac{u \sin \beta}{R - Y_c} \right] dS \quad (2.1c)$$

$$\Theta dS = \left[ \theta' + \frac{(v' \sin \beta + w' \cos \beta)}{R - Y_c} \right] dS \quad (2.1d)$$

ここに、 $u$ 、 $v$ 、 $w$ および $\theta$ はそれぞれ弾性核の図心 $C$ の $x$ 、 $y$ 、 $z$ 方向の変位および断面回転角であり、 $(\ )' = d(\ )/dS$ とする。なお、仮定 b) より、以後 $R - Y_c \doteq R$ とする。

横断面上の任意の点 $A(y, z)$ における $x$ 、 $y$ および $z$ 方向の変位は、横断面形状不変の仮定 c) より次式で表される<sup>23), 24) 注2)</sup>。

$$u_A = u - \Psi y - \Omega z - \Theta \omega_c \quad (2.2a)$$

$$v_A = v - \theta z \quad (2.2b)$$

$$w_A = w + \theta y \quad (2.2c)$$

ここに、 $\omega_c$ は弾性核の図心 $C$ に関するそり関数である<sup>注3)</sup>。なお、式(2.2)には変位の2次成分は含まれていないが、力のつり合い条件式において変位の微小増分を考慮することにより線形化有限変位理論による解析を行う<sup>17), 25)</sup>。

横断面上の任意点の垂直ひずみ  $\varepsilon_A$  は式 (2.2) を用いて次のように表される。

$$\varepsilon_A = \frac{du_A}{dS_A} - \frac{(v_A \cos\beta - w_A \sin\beta)d\alpha}{dS_A} \quad (2.3a)$$

$$dS_A = (R - Y_c - y \cos\beta + z \sin\beta)d\alpha \quad (2.3b)$$

ここに、 $d\alpha$  は微小円弧要素の中心角であり、仮定 b) より  $dS_A = dS$  とする。

式 (2.3a) に式 (2.1) および式 (2.2) を代入し、残留ひずみ  $\varepsilon_r = \varepsilon_r(y, z)$  を考慮すると垂直ひずみ  $\varepsilon$  は次式で表される。ただし、残留ひずみについては圧縮を正として表す。

$$\varepsilon = \Pi - \Psi'y - \Omega'z - \Theta'\omega_c + \frac{z \cos\beta + y \sin\beta}{R} \theta - \varepsilon_r \quad (2.4)$$

変形前の座標系  $x-y-z$  座標に対応する変形後の状態に対する座標  $\xi-\eta-\zeta$  を定めて、この座標に関する全断面について求めた断面力を  $\bar{H}$ ,  $\bar{B}_\xi$ ,  $\bar{B}_\eta$ ,  $\bar{B}_\zeta$ ,  $\bar{B}_w$  とする。ここに、断面の降伏部分は降伏応力度  $\sigma_Y$  に相当する軸方向力を負担するものとし、 $\bar{H}$  は軸方向力、 $\bar{B}_\xi$ ,  $\bar{B}_\eta$  および  $\bar{B}_\zeta$  はそれぞれ  $\xi$  軸まわりのねじりモーメント、 $\eta$  および  $\zeta$  軸まわりの曲げモーメント、 $\bar{B}_w$  はバイモーメントであり、 $E$  をヤング率として次式のように定義する。

$$\begin{aligned} \bar{H} &= - \int_e E \varepsilon dA - \int_p \sigma_Y \operatorname{sgn}(\varepsilon) dA \\ &= \left[ -EA_e \Pi \right] + \left[ - \int_p \{ \sigma_Y \operatorname{sgn}(\varepsilon) + E \varepsilon_r \} dA \right] \\ &= \left[ H \right] + \left[ \Delta H \right] \end{aligned} \quad (2.5a)$$

$$\begin{aligned} \bar{B}_\eta &= - \int_e E \varepsilon z dA - \int_p \sigma_Y \operatorname{sgn}(\varepsilon) z dA \\ &= \left[ EI_y \left( \Omega' + \Theta' y_m - \frac{\theta \cos\beta}{R} \right) \right] + \left[ - \int_p \{ \sigma_Y \operatorname{sgn}(\varepsilon) + E \varepsilon_r \} z dA \right] \\ &= \left[ B_\eta \right] + \left[ \Delta B_\eta \right] \end{aligned} \quad (2.5b)$$

注2) 部材軸方向の剛体変位は横断面上ですべて原点Cの変位  $u$  に等しいものとする<sup>18)</sup>。

注3) 断面の降伏部分でもそりは連続している。したがって、降伏部分については板厚  $t=0$  の仮想板で置き換えて、降伏部分のそり関数を算定する<sup>21), 22)</sup>。

$$\begin{aligned}
\bar{B}_\zeta &= \int_e E \varepsilon y dA + \int_p \sigma_Y \operatorname{sgn}(\varepsilon) y dA \\
&= \left[ -EI_z \left( \Psi' - \Theta' z_m - \frac{\theta \sin \beta}{R} \right) \right] + \left[ \int_p \{ \sigma_Y \operatorname{sgn}(\varepsilon) + E \varepsilon_r \} y dA \right] \\
&= [B_\zeta] + [\Delta B_\zeta] \tag{2.5c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{B}_w &= \int_e E \varepsilon \omega_c dA + \int_p \sigma_Y \operatorname{sgn}(\varepsilon) \omega_c dA \\
&= \left[ -EI_c \Theta' + EI_z z_m \left( \Psi' - \frac{\theta \sin \beta}{R} \right) \right. \\
&\quad \left. - EI_y y_m \left( \Omega' - \frac{\theta \cos \beta}{R} \right) \right] + \left[ \int_p \{ \sigma_Y \operatorname{sgn}(\varepsilon) + E \varepsilon_r \} \omega_c dA \right] \\
&= [B_w] + [\Delta B_w] \tag{2.5d}
\end{aligned}$$

ここに、記号  $\int_e ( ) dA$  および  $\int_p ( ) dA$  はそれぞれ弾性核および降伏部分についての積分を表し、 $\operatorname{sgn}(\varepsilon)$  は  $\varepsilon$  が引張ならば 1、圧縮ならば -1 である。また、断面定数は次のように定義した。

$$\begin{aligned}
A_e &= \int_e dA, & I_y &= \int_e z^2 dA, & I_z &= \int_e y^2 dA, \\
I_c &= \int_e \omega_c^2 dA, & R_y &= \int_e \omega_c z dA, & R_z &= \int_e \omega_c y dA, \\
y_m &= \frac{R_y}{I_y}, & z_m &= -\frac{R_z}{I_z} \tag{2.6}
\end{aligned}$$

ここに、 $y_m$  および  $z_m$  は弾性核のせん断中心の座標であり、また、式(2.5)の誘導にあたっては  $y$  および  $z$  軸が図心主軸であることから次式が考慮されている。

$$\begin{aligned}
\int_e y dA &= 0, & \int_e z dA &= 0, & \int_e y z dA &= 0, \\
\int_e \omega_c A &= 0 \tag{2.7}
\end{aligned}$$

式(2.5a)～(2.5d)の各右辺は、便宜上、2つの部分に分けられている。第1項は弾性核に関する量を表し、第2項は降伏部分に関する量を表すものであり、第1項および第2項をそれぞれ“弾性項”および“非弾性項”とよぶことにする。

一方、ねじりモーメント  $B_\xi$  は次の各量の和として求められる<sup>17)</sup>。

$$\bar{B}_1 = GK_T \Theta \quad (2.8a)$$

$$\begin{aligned} \bar{B}_2 = \frac{d\bar{B}_w}{dS_0} = & -EI_c \Theta'' - y_m EI_y \left( \Omega'' - \frac{\theta' \cos \beta}{R} \right) \\ & + z_m EI_z \left( \Psi'' - \frac{\theta' \sin \beta}{R} \right) \end{aligned} \quad (2.8b)$$

$$\bar{B}_3 = \int_e E \varepsilon (y^2 + z^2) \Theta dA + \int_p \sigma_Y \operatorname{sgn}(\varepsilon) (y^2 + z^2) \Theta dA \quad (2.8c)$$

ここに、 $G$  = せん断弾性係数、 $K_T = \sum b_i t_i^3 / 3 = \text{St. Venant}$  のねじり定数、 $t_i$  = フランジおよびウェブの板厚、および  $b_i$  = 板幅である。

式(2.8c)に式(2.4)を代入する際に生ずる非線形項を収束計算における1回前に得られる  $\Pi, \Psi', \Omega'$  および  $\Theta'$  を用いて線形化すると、

$$\begin{aligned} \bar{B}_3 = & \left[ A_1 \gamma_c - A_2 \gamma_z - A_3 \gamma_y - A_4 \gamma_\omega - E \int_e \varepsilon_r (y^2 + z^2) dA \right. \\ & \left. + \int_p \sigma_Y \operatorname{sgn}(\varepsilon) (y^2 + z^2) dA \right] \Theta \end{aligned} \quad (2.9)$$

ここに、 $\gamma_c = \int_e (y^2 + z^2) dA$ 、 $\gamma_y = \int_e z (y^2 + z^2) dA$ 、 $\gamma_z = \int_e y (y^2 + z^2) dA$  および  $\gamma_\omega = \int_e \omega_c (y^2 + z^2) dA$ 、であり、係数  $A_1 \sim A_4$  は付録2.1に示す。

したがって、ねじりモーメントは次のように表される。

$$\begin{aligned} \bar{B}_\xi = & \left[ -EI_c \Theta'' - y_m EI_y \left( \Omega'' - \frac{\theta' \cos \beta}{R} \right) \right. \\ & \left. + z_m EI_z \left( \Psi'' - \frac{\theta' \sin \beta}{R} \right) + C_T \Theta \right] + \left[ \Theta \int_p \sigma_Y(\varepsilon) (y^2 + z^2) dA \right] \\ = & [B_\xi] + [\Delta B_\xi] \end{aligned} \quad (2.10)$$

ここに、 $C_T = A_1 \gamma_c - A_2 \gamma_z - A_3 \gamma_y - A_4 \gamma_\omega - E \int_e \varepsilon_r (y^2 + z^2) dA + GK_T$  であり、右辺の第1項および第2項はそれぞれ“弾性項”および“非弾性項”に相当する。

降伏断面を有するある格間から取り出した微小要素について、変形前の座標系  $(x-y-z)$  に

関する変位および断面力を図-2.2に示す. 各断面力を式(2.5)と同様な形式で, 便宜上名づけた“弾性項”および“非弾性項”の和として表す.

$$\begin{aligned} \bar{H} &= H + \Delta H, & \bar{B}_x &= B_x + \Delta B_x, & \bar{B}_y &= B_y + \Delta B_y, \\ \bar{B}_z &= B_z + \Delta B_z, & \bar{B}_w &= B_w + \Delta B_w \end{aligned} \quad (2.11)$$

微小要素  $dS_0$  について変形の増分を考慮して  $x, y$  および  $z$  軸方向の力ならびに  $x, y$  および  $z$  軸まわりのモーメントのつり合い式を求めて次式のように整理する.

$$\bar{H}' - \frac{V_y \cos \beta - V_z \sin \beta}{R} = 0 \quad (2.12a)$$

$$V_y' + \frac{\bar{H} \cos \beta}{R} - q_z \sin \beta - q_y \cos \beta = 0 \quad (2.12b)$$

$$V_z' - \frac{\bar{H} \sin \beta}{R} - q_z \cos \beta + q_y \sin \beta = 0 \quad (2.12c)$$

$$\bar{B}_x' + \frac{\bar{B}_y \cos \beta - \bar{B}_z \sin \beta}{R} + V_y \Omega - V_z \Psi + t_x - m_q = 0 \quad (2.12d)$$

$$\bar{B}_y' - \frac{\bar{B}_x \cos \beta}{R} + \bar{H} \Omega - V_z (1 + \Pi) = 0 \quad (2.12e)$$

$$\bar{B}_z' + \frac{\bar{B}_x \sin \beta}{R} - \bar{H} \Psi + V_y (1 + \Pi) = 0 \quad (2.12f)$$

ここに,  $V_y$  および  $V_z$  はそれぞれ  $y$  および  $z$  軸方向のせん断力である. また,

$$m_q = q_y \{ (b_y - Z_c) + (a_y - Y_c) \theta \} + q_z \{ (a_z - Y_c) - (b_z - Z_c) \theta \}$$

であり,  $q_y$  および  $q_z$  はそれぞれ, 作用点の座標  $(Y, Z)$  が  $(a_y, b_y)$  および  $(a_z, b_z)$  である,  $Y$  および  $Z$  軸方向の分布荷重である. また,  $t_x$  は分布ねじりモーメント荷重である.

変形後の座標系に関する  $\bar{B}_\xi, \bar{B}_\eta$  および  $\bar{B}_\zeta$  と変形前の座標系に関する  $\bar{B}_x, \bar{B}_y$  および  $\bar{B}_z$  は次の関係式を満足する.

$$\bar{B}_x = \bar{B}_\xi + \bar{B}_\eta \Psi + \bar{B}_\zeta \Omega, \quad \bar{B}_y = \bar{B}_\eta - \bar{B}_\zeta \theta, \quad \bar{B}_z = \bar{B}_\zeta + \bar{B}_\eta \theta \quad (2.13)$$

式(2.13)の非線形項に対して, 微小変位理論によって求まる断面力または収束計算における1回前に得られた断面力  $M_\eta, M_\zeta$  を用いて, 次のように線形化する.

$$[B_x] + [\Delta B_x] = [B_\xi + M_\eta \Psi + M_\zeta \Omega] + [\Delta B_\xi + \Delta M_\eta \Psi + \Delta M_\zeta \Omega] \quad (2.14a)$$

$$[B_y] + [\Delta B_y] = [B_\eta - M_\zeta \theta] + [\Delta B_\eta - \Delta M_\zeta \theta] \quad (2.14b)$$

$$[B_z] + [\Delta B_z] = [B_\zeta + M_\eta \theta] + [\Delta B_\zeta + \Delta M_\eta \theta] \quad (2.14c)$$

ここに、左辺の第1項および第2項はそれぞれ右辺のそれらに対応している。

式(2.5)および(2.10)を式(2.14)に代入して次式を得る。

$$B_x = -EI_c \Theta'' - y_m EI_y \left( \Omega'' - \frac{\theta' \cos \beta}{R} \right) + z_m EI_z \left( \Psi'' - \frac{\theta' \sin \beta}{R} \right) + C_T \Theta + M_\eta \Psi + M_\zeta \Omega \quad (2.15a)$$

$$B_y = EI_y \left( \Omega' + y_m \Theta' - \frac{\theta \cos \beta}{R} \right) - M_\zeta \theta \quad (2.15b)$$

$$B_z = -EI_z \left( \Psi' - z_m \Theta' - \frac{\theta \sin \beta}{R} \right) + M_\eta \theta \quad (2.15c)$$

有限変位理論の場合の状態量ベクトルを弾性核の図心に関する変位量および弾性項と名づけた断面力を用いて次のように定義する。

$$V = \{v, \Psi, B_z, V_y, w, \Omega, B_y, V_z, \theta, \Theta, B_w, B_x, u, H\} \quad (2.16)$$

状態量ベクトルの各成分に対する1階の連立微分方程式は次のように導くことができる。

まず、式(2.1)および(2.5a)より、

$$u' = -\frac{H}{EA_e} + \frac{v \cos \beta - w \sin \beta}{R} \quad (2.17a)$$

$$v' = \Psi - \frac{u \cos \beta}{R} \quad (2.17b)$$

$$w' = \Omega + \frac{u \sin \beta}{R} \quad (2.17c)$$

$$\theta' = \Theta - \frac{\Psi \sin \beta}{R} - \frac{\Omega \cos \beta}{R} \quad (2.17d)$$

となり、式(2.5d)、式(2.15b)および式(2.15c)より、

$$\Theta' = -\frac{(y_m B_y + z_m B_z + B_w)}{EI_\omega} + \frac{(z_m M_y - y_m M_z) \theta}{EI_\omega} + \frac{(z_m M_z + y_m M_y) \theta^2}{EI_\omega} \quad (2.17e)$$

を得る。式(2.17e)の第3項を無視し、式(2.15b)および式(2.15c)に代入すると、

$$\begin{aligned} \Psi' = & -\frac{C_1 B_z}{E} - \frac{y_m z_m B_y + z_m B_w}{EI_\omega} \\ & + \left( \frac{C_1 M_y}{E} - \frac{y_m z_m M_z}{EI_\omega} + \frac{\sin\beta}{R} \right) \theta \end{aligned} \quad (2.17f)$$

$$\begin{aligned} \Omega' = & \frac{C_2 B_y}{E} + \frac{y_m z_m B_z + y_m B_w}{EI_\omega} \\ & + \left( \frac{C_2 M_z}{E} - \frac{y_m z_m M_y}{EI_\omega} + \frac{\cos\beta}{R} \right) \theta \end{aligned} \quad (2.17g)$$

となる。ここに、 $I_\omega = I_c - y_m^2 I_y - z_m^2 I_z$ 、 $C_1 = 1/I_z + z_m^2/I_\omega$ 、および  $C_2 = 1/I_y + y_m^2/I_\omega$  であり、 $M_\eta = M_y + M_z \theta$  および  $M_\zeta = M_z - M_y \theta$  を用いた。

次に、断面力については式(2.12)に式(2.11)を考慮し、非線形項には収束計算における1回前の断面力を用いて線形化すれば、

$$H' = \frac{V_y \cos\beta - V_z \sin\beta}{R} \quad (2.18a)$$

$$V_y' = -\frac{H \cos\beta}{R} - \frac{\Delta H \cos\beta}{R} + q_z \sin\beta + q_y \cos\beta \quad (2.18b)$$

$$V_z' = \frac{H \sin\beta}{R} + \frac{\Delta H \sin\beta}{R} + q_z \cos\beta - q_y \sin\beta \quad (2.18c)$$

$$\begin{aligned} B_x' = & \frac{B_z \sin\beta - B_y \cos\beta}{R} - Q_y \Omega + Q_z \Psi \\ & + \left[ q_y (a_y - Y_c) + q_z (b_z - Z_c) + \frac{\Delta M_\zeta \cos\beta + \Delta M_\eta \sin\beta}{R} \right] \theta \\ & - t_x + q_y (b_y - Z_c) - q_z (a_z - Y_c) \\ & + \frac{\Delta B_\zeta \sin\beta - \Delta B_\eta \cos\beta}{R} - \Delta B_x' \end{aligned} \quad (2.18d)$$

$$B_y' = \frac{B_x \cos\beta}{R} - N\Omega + V_z - \frac{Q_z H}{EA_e} - \Delta N\Omega + \frac{\Delta B_x \cos\beta}{R} - \Delta B_y' \quad (2.18e)$$

$$B_z' = -\frac{B_x \sin\beta}{R} + N\Psi - V_y - \frac{Q_y H}{EA_e} + \Delta N\Psi - \frac{\Delta B_x \sin\beta}{R} - \Delta B_z' \quad (2.18f)$$

となる。また、式(2.5d)および式(2.15a)から、

$$B_w' = B_x - C_T \Theta - \Psi (M_y + M_z \varphi) - \Omega (M_z - M_y \varphi) \quad (2.18g)$$

を得る。ここに、 $N, M, Q$ および $\varphi$ はそれぞれ収束計算における1回前の軸方向力、曲げモーメント、せん断力および断面回転角を表し、式(2.18a)には $\Delta H' = 0$ を、式(2.18d)には式(2.14b)および式(2.14c)を、さらに式(2.18e)および(2.18f)には式(2.5a)より $\Pi = -H/EA_e$ を用いた。

また、式(2.18)における $\Delta B_x'$ 、 $\Delta B_y'$  および  $\Delta B_z'$  は式(2.5)、(2.10)および(2.14)に仮定f)を用いて次のように表される。

$$\Delta B_x' = \Theta' \int_p \sigma_Y \operatorname{sgn}(\varepsilon) (y^2 + z^2) dA + \Delta M_\eta \Psi' + \Delta M_\zeta \Omega' \quad (2.19a)$$

$$\Delta B_y' = -\Delta M_\zeta \theta' \quad (2.19b)$$

$$\Delta B_z' = \Delta M_\eta \theta' \quad (2.19c)$$

上式の $\Theta'$ 、 $\Psi'$ 、 $\Omega'$  および  $\theta'$  に対して式(2.17)を代入した後、式(2.18d~f)に代入すれば、次のような線形化された式を得る。

$$\begin{aligned} B_x' = & B_y \left\{ -\frac{\cos \beta}{R} + \frac{y_m}{EI_\omega} K + \frac{y_m z_m}{EI_\omega} \Delta M_\eta - \frac{C_2}{E} \Delta M_\zeta \right\} \\ & + B_z \left\{ \frac{\sin \beta}{R} + \frac{z_m}{EI_\omega} K - \frac{y_m z_m}{EI_\omega} \Delta M_\zeta + \frac{C_1}{E} \Delta M_\eta \right\} \\ & + B_w \left\{ \frac{1}{EI_\omega} K - \frac{y_m}{EI_\omega} \Delta M_\zeta + \frac{z_m}{EI_\omega} \Delta M_\eta \right\} - \Omega Q_y + \Psi Q_z \\ & + \theta \left\{ q_Y (a_Y - Y_c) + q_Z (b_Z - Z_c) - \frac{z_m M_y - y_m M_z}{EI_\omega} K \right. \\ & \left. - \left( \frac{C_2}{E} M_z - \frac{y_m z_m}{EI_\omega} M_y \right) \Delta M_\zeta - \left( \frac{C_1}{E} M_y - \frac{y_m z_m}{EI_\omega} M_z \right) \Delta M_\eta \right\} \\ & - t_X + q_Y (b_Y + Z_c) - q_Z (a_Z - Y_c) \\ & + \frac{\Delta B_\zeta \sin \beta - \Delta B_\eta \cos \beta}{R} \end{aligned} \quad (2.20a)$$

$$B_y' = B_x \frac{\cos\beta}{R} + V_z - H \frac{Q_z}{EA_e} - \Psi \frac{\Delta M_\zeta \sin\beta - \Delta M_\eta \cos\beta}{R} - \Omega(N + \Delta N) + \Theta \left( \Delta M_\zeta + \frac{\cos\beta}{R} K \right) \quad (2.20b)$$

$$B_z' = -B_x \frac{\sin\beta}{R} - V_y + H \frac{Q_y}{EA_e} + \Omega \frac{\Delta M_\eta \cos\beta - \Delta M_\zeta \sin\beta}{R} - \Psi(N + \Delta N) - \Theta \left( \Delta M_\eta + \frac{\sin\beta}{R} K \right) \quad (2.20c)$$

ここに、 $K = \int_p \sigma_Y \operatorname{sgn}(\varepsilon) (y^2 + z^2) dA$ である。

式(2.17)、式(2.18)および式(2.20)は次のようにマトリックス表示することができる。

$$\frac{dV}{dS} = GV + H \quad (2.21)$$

ここに、 $G$ は14行14列のマトリックスであり、各要素は $S$ の関数である。また、 $H$ は荷重項を表すベクトルである。

式(2.21)に Runge - Kutta 法を用いて格間 $k$ において数値積分を行うと、次式を満足する格間伝達マトリックス  $F_k$  を数値的に得る。

$$V_k^R = F_k V_k^L + L_k \quad (2.22)$$

ここに、 $V_k^L$  および  $V_k^R$  はそれぞれ格間 $k$ の左端および右端の状態量ベクトルを表し、 $L_k$  は格間 $k$ における荷重項を表す。

### (3) 格点伝達マトリックス

格間 $k$ の右端の状態量ベクトル  $V_k^R$  と格間 $k+1$ の左端の状態量ベクトル  $V_{k+1}^L$  の関係式は次式で表される。

$$V_{k+1}^L = P_k V_k^R + M_k \quad (2.23)$$

ここに、 $P_k$  は格点伝達マトリックスであり、 $M_k$  は荷重項を表すベクトルである。

仮定 b) において等断面曲線部材を仮定しているが、通常の荷重が作用する曲線 I 形断面ばりは、非弾性域ではもはや均一部材ではなくなる。ここでは簡単のために、仮定 f) のように格間内で弾

性核が変化しないものとする。その結果、異なった弾性核を有し、図心が一致しない2つの要素（格間）においては、それらの結合点（格点）の左右における状態量ベクトルの関係に不連続性の影響を考慮しなければならない。

a) 格点に集中荷重が作用する場合<sup>17),26)</sup>

格点 $k$ には、 $X, Y$  および  $Z$  軸方向の集中荷重  $P_X, P_Y$  および  $P_Z$  が  $Y-Z$  座標でそれぞれ  $(a_X, b_X), (a_Y, b_Y)$  および  $(a_Z, b_Z)$  に作用しているものとする。格点 $k$ の左右の格間の弾性核は等しいものとし、格点における適合条件とつり合い条件から

$$q_{k+1}^L = q_k^R = q_k \quad (2.24a)$$

$$Q_{k+1}^L = Q_k^R + T_k q_k^R + U_k \quad (2.24b)$$

を得る。ここに、 $q_k^R$  および  $q_{k+1}^L$  はそれぞれ格点 $k$ の左側および右側の変形量に関する状態量ベクトルであり、 $Q_k^R$  および  $Q_{k+1}^L$  はそれぞれ  $q_k^R$  および  $q_{k+1}^L$  に対応する断面力に関する状態量ベクトルである。また、 $T_k$  および  $U_k$  はそれぞれ集中荷重による飛躍量を表すマトリックス（7行7列）および列ベクトル（7行）であり、ベクトル  $q$  および  $Q$  は

$$q = \{v, \psi, w, \Omega, \theta, \Theta, u\} \quad (2.25a)$$

$$Q = \{V_y, B_z, V_z, B_y, B_x, B_w, H\} \quad (2.25b)$$

で定義し、 $T_k$  および  $U_k$  は付録2.2に示す。なお、式(2.24)を式(2.23)の形に整理することは容易である。

b) 格点 $k$ の左右の格間における弾性核の図心が不連続である場合<sup>27)</sup>

前述のように、仮定 f) による簡単化のため、非弾性域に対しては格点における弾性核の不連続性を避けることはできない。このような場合の式(2.23)を具体的に求める。

まず、格点 $k$ の左側および右側の弾性核の図心の座標を  $Y-Z$  座標で、それぞれ  $C_l(Y_{cl}, Z_{cl})$  および  $C_r(Y_{cr}, Z_{cr})$  とする。同様に、図心主軸 ( $y$  軸) と  $Y$  軸のなす角を  $\beta_l$  および  $\beta_r$  とする。

図-2.3に示すように、 $Y-Z$  座標の原点  $D$  を原点とし、主軸座標 ( $y-z$  座標) に平行な座標 ( $\bar{y}-\bar{z}$  座標) を定めて、この座標に関する上記の図心座標をそれぞれ  $C_l(\bar{y}_{cl}, \bar{z}_{cl})$  および  $C_r(\bar{y}_{cr}, \bar{z}_{cr})$  とすれば次式が成り立つ。

$$\bar{y}_{cl} = Y_{cl} \cos \beta_l + Z_{cl} \sin \beta_l \quad (2.26a)$$

$$\bar{z}_{cl} = -Y_{cl} \sin \beta_l + Z_{cl} \cos \beta_l \quad (2.26b)$$

$$\bar{y}_{cr} = Y_{cr} \cos \beta_l + Z_{cr} \sin \beta_l \quad (2.26c)$$

$$\bar{z}_{cr} = -Y_{cr} \sin \beta_l + Z_{cr} \cos \beta_l \quad (2.26d)$$

格点 $k$ において、断面上の任意の2点 $(\bar{y}_1, \bar{z}_1)$ および $(\bar{y}_2, \bar{z}_2)$ の変位の連続性を考慮すると、式(2.2b)から次式が成り立つ。

$$v_1 = v_l - (\bar{z}_1 - \bar{z}_{cl})\theta_l = v_r^* - (\bar{z}_1 - \bar{z}_{cr})\theta_r^* \quad (2.27a)$$

$$v_2 = v_l - (\bar{z}_2 - \bar{z}_{cl})\theta_l = v_r^* - (\bar{z}_2 - \bar{z}_{cr})\theta_r^* \quad (2.27b)$$

ここに、\*印は格点 $k$ の左側の弾性核の座標軸 $(\bar{y}, \bar{z})$ 方向で表した図心 $C_r$ の変形量を意味する。式(2.27)から次式を得る。

$$\theta_r^* = \theta_l = \theta \quad (2.28a)$$

$$v_r^* = v_l - (\bar{z}_{cr} - \bar{z}_{cl})\theta_l = v_l - \Delta\bar{z}_c\theta_l \quad (2.28b)$$

また、 $\bar{z}$ 軸方向の変位 $w$ についても同様な結果を得る。

$$w_r^* = w_l + (\bar{y}_{cr} - \bar{y}_{cl})\theta_l = w_l + \Delta\bar{y}_c\theta_l \quad (2.28c)$$

$\bar{y} - \bar{z}$ 座標の原点に関する単位そり関数を $\omega_d$ とすれば、図心 $C$ に関する単位そり関数 $\omega_c$ は、

$$\omega_c = \omega_d + \bar{z}_c\bar{y} - \bar{y}_c\bar{z} \quad (2.29)$$

となり<sup>27), 28)</sup>、式(2.2a)に用いれば、変位 $v$ および $w$ と同様な展開から、

$$\begin{aligned} &(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)(\Psi_r^* - \Psi_l + \bar{z}_{cr}\Theta_r^* - \bar{z}_{cl}\Theta_l) + \Delta\omega_d(\Theta_r^* - \Theta_l) \\ &+ (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(\Omega_r^* - \Omega_l - \bar{y}_{cr}\Theta_r^* + \bar{y}_{cl}\Theta_l) = 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

を得る。ここに $(\bar{y}_1, \bar{z}_1)$ および $(\bar{y}_2, \bar{z}_2)$ は断面上の任意点の座標であり、断面形状が一定であることから $\Delta\omega_d = \omega_{dl1} - \omega_{dl2} = \omega_{dr1} - \omega_{dr2}$ が考慮されている。

式(2.30)は任意の2点について成り立つことから、

$$\Theta_r^* = \Theta_l \quad (2.31a)$$

$$\Psi_r^* = \Psi_l - \Delta\bar{z}_c\Theta_l \quad (2.31b)$$

$$\Omega_r^* = \Omega_l + \Delta\bar{y}_c\Theta_l \quad (2.31c)$$

が得られ、これらを式(2.2a)に用いて格点における変位 $u$ の連続性を考慮すれば次式を得る。

$$u_r^* = u_l - \Delta\bar{y}_c\Psi_l - \Delta\bar{z}_c\Omega_l + \Phi\Theta_l \quad (2.32)$$

ここに、 $\Phi = \omega_{dri} - \omega_{dli} + \Delta \bar{z}_c \bar{y}_{cr} - \Delta \bar{y}_c \bar{z}_{cr}$ であり、 $\omega_{dli}$ および  $\omega_{dri}$  はそれぞれ格点  $k$  の左側および右側の弾性核について求めた任意点  $i$  の単位そりである。

式(2.28)～式(2.32)で得られた変形量に座標変換を行うと核点  $k$  の右側の弾性核の主軸方向に関する変形量が求まる。

$$\theta_r = \theta_l \quad (2.33a)$$

$$v_r = v_l \cos \gamma + w_l \sin \gamma - \theta_l \chi_1 \quad (2.33b)$$

$$w_r = w_l \cos \gamma - v_l \sin \gamma + \theta_l \chi_2 \quad (2.33c)$$

$$\Theta_r = \Theta_l \quad (2.33d)$$

$$\Psi_r = \Psi_l \cos \gamma + \Omega_l \sin \gamma - \Theta_l \chi_1 \quad (2.33e)$$

$$\Omega_r = \Omega_l \cos \gamma - \Psi_l \sin \gamma + \Theta_l \chi_2 \quad (2.33f)$$

$$u_r = u_l - \Psi_l \Delta \bar{y}_c - \Omega_l \Delta \bar{z}_c + \Theta_l \Phi \quad (2.33g)$$

ここに、 $\gamma = \beta_r - \beta_l$ 、 $\chi_1 = \Delta \bar{z}_c \cos \gamma - \Delta \bar{y}_c \sin \gamma$  および  $\chi_2 = \Delta \bar{y}_c \cos \gamma + \Delta \bar{z}_c \sin \gamma$  であり、上式は格点の左右で弾性核が異なる場合の変形量に関する格点伝達方程式である。

一方、断面力に関する格点伝達方程式は仮想仕事の原理を適用して導くことができ<sup>27)</sup>、格点  $k$  における仮想仕事式は、

$$\delta W = \langle \bar{\mathbf{q}}_k^R \rangle \{ \delta \mathbf{q}_k^R \} + \langle \bar{\mathbf{q}}_{k+1}^L \rangle \{ \delta \mathbf{q}_{k+1}^L \} \quad (2.34)$$

で表される。ここに、 $\langle \bar{\mathbf{q}}_k^R \rangle$  および  $\langle \bar{\mathbf{q}}_{k+1}^L \rangle$  はそれぞれ格間  $k$  の右端および格間  $k+1$  の左端における内力ベクトルであり、 $\langle \delta \mathbf{q}_k^R \rangle$  および  $\langle \delta \mathbf{q}_{k+1}^L \rangle$  は対応する変位ベクトルである。すなわち、

$$\langle \bar{\mathbf{q}}_k^R \rangle^t = \{ V_{yl}, \bar{B}_{zl}, V_{zl}, -\bar{B}_{yl}, -\bar{B}_{xl}, \bar{B}_{wl}, \bar{H}_l \} \quad (2.35a)$$

$$\langle \bar{\mathbf{q}}_{k+1}^L \rangle^t = \{ -V_{yr}, -B_{zr}, -V_{zr}, \bar{B}_{yr}, \bar{B}_{xr}, -\bar{B}_{wr}, -\bar{H}_r \} \quad (2.35b)$$

$$\{ \mathbf{q}_k^R \} = \{ V_l, \Psi_l, w_l, \Omega_l, \theta_l, \Theta_l, u_l \} \quad (2.35c)$$

$$\{ \mathbf{q}_{k+1}^L \} = \{ V_r, \Psi_r, w_r, \Omega_r, \theta_r, \Theta_r, u_r \} \quad (2.35d)$$

で定義する。

変位  $\{ \delta \mathbf{q}_k^R \} = \{ 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0 \}$  を与えると、格点  $k$  の右側の仮想変位が式(2.33)から求まる。それらを式(2.34)に代入し、 $\delta W = 0$  とすれば次式が求まる。

$$\bar{B}_{zl} - \bar{B}_{zr} \cos \gamma - \bar{B}_{yr} \sin \gamma + \bar{H}_r \Delta \bar{y}_c = 0 \quad (2.36a)$$

同様な計算により，

$$V_{y_l} - V_{y_r} \cos \gamma + V_{z_r} \sin \gamma = 0 \quad (2.36b)$$

$$V_{z_l} - V_{y_r} \sin \gamma - V_{z_r} \cos \gamma = 0 \quad (2.36c)$$

$$-\bar{B}_{y_l} - \bar{B}_{z_r} \sin \gamma + \bar{B}_{y_r} \cos \gamma + \bar{H}_r \Delta \bar{Z}_c = 0 \quad (2.36d)$$

$$-\bar{B}_{x_l} + V_{y_r} \chi_1 - V_{z_r} \chi_2 + \bar{B}_{x_r} = 0 \quad (2.36e)$$

$$\bar{B}_{w_l} + \bar{B}_{z_r} \chi_1 + \bar{B}_{y_r} \chi_2 - \bar{B}_{w_r} - \bar{H}_r \Phi = 0 \quad (2.36f)$$

$$\bar{H}_l - \bar{H}_r = 0 \quad (2.36g)$$

が求まり，上式に式(2.11)，式(2.14)および式(2.33)を代入すると，格点 $k$ の左右における断面力に関する状態量ベクトルの関係式が求まる．

$$\begin{aligned} B_{z_r} &= B_{z_l} \cos \gamma - B_{y_l} \sin \gamma + H_l \chi_2 \\ &\quad + \theta_l (\Delta M_{\eta_l} \cos \gamma - \Delta M_{\eta_r} + \Delta M_{\zeta_l} \sin \gamma) \\ &\quad + \Delta B_{\zeta_l} \cos \gamma - \Delta B_{\zeta_r} - \Delta B_{\eta_l} \sin \gamma + \Delta H_l \chi_2 \end{aligned} \quad (2.37a)$$

$$\begin{aligned} B_{y_r} &= B_{z_l} \sin \gamma + B_{y_l} \cos \gamma - H_l \chi_1 \\ &\quad + \theta_l (\Delta M_{\eta_l} \sin \gamma + \Delta M_{\zeta_r} - \Delta M_{\zeta_l} \cos \gamma) \\ &\quad + \Delta B_{\zeta_l} \sin \gamma - \Delta B_{\eta_r} + \Delta B_{\eta_l} \cos \gamma + \Delta H_l \chi_1 \end{aligned} \quad (2.37b)$$

$$V_{y_r} = V_{y_l} \cos \gamma + V_{z_l} \sin \gamma \quad (2.37c)$$

$$V_{z_r} = V_{z_l} \cos \gamma - V_{y_l} \sin \gamma \quad (2.37d)$$

$$\begin{aligned} B_{w_r} &= B_{w_l} + B_{z_l} \Delta \bar{Z}_c + B_{y_l} \Delta \bar{y}_c - H_l \Phi + \theta_l (\Delta M_{\eta_l} \Delta \bar{Z}_c - \Delta M_{\zeta_l} \Delta \bar{y}_c) \\ &\quad + \Delta B_{w_l} - \Delta B_{w_r} + \Delta B_{\zeta_l} \Delta \bar{Z}_c + \Delta B_{\eta_l} \Delta \bar{y}_c - \Delta H_l \Phi \end{aligned} \quad (2.37e)$$

$$\begin{aligned} B_{x_r} &= B_{x_l} + V_{z_l} \Delta \bar{y}_c - V_{y_l} \Delta \bar{Z}_c - \Theta_l (\Delta M_{\zeta_r} \chi_2 - \Delta M_{\eta_r} \chi_1) \\ &\quad + \Psi_l (\Delta M_{\eta_l} - \Delta M_{\eta_r} \cos \gamma + \Delta M_{\zeta_r} \sin \gamma) \\ &\quad + \Omega_l (\Delta M_{\zeta_l} - \Delta M_{\eta_r} \sin \gamma - \Delta M_{\zeta_r} \cos \gamma) \\ &\quad + \Delta B_{\xi_l} - \Delta B_{\xi_r} \end{aligned} \quad (2.37f)$$

$$H_r = H_l + \Delta H_l - \Delta H_r \quad (2.37g)$$

式(2.33)および(2.37)は式(2.23)のように整理することができ，得られるマトリックス $P_k$ およびベクトル $M_k$ は，格点 $k$ の左右で弾性核の中心軸が一致しない場合の格点伝達マトリックスおよび荷重項ベクトルである．

#### (4) 計算方法

伝達マトリックス法については文献(26)に詳述されており，ここでは図-2.4に示す弾塑性有限変位解析のフローチャートに従って解析手法を説明する．

a) データ入力，剛性計算(step①)．

- b) 荷重値入力 (step②) .
- c) 収束計算の第1回目は、非線形項を無視した微小変位理論による変位および断面力の計算 (step ④) .
- d) 収束計算において、1回前に得られている変位および断面力による線形化手法を用いた有限変位理論による解析 (step ⑤) .
- e) d)は変位および断面力が許容値に収束するまで繰り返す (step⑥) .
- f) 変位が収束した場合、図-2.1に示した微小断面要素の中心における垂直ひずみ  $\varepsilon_i$  を格間ごとに求める (step ⑨) .
- g) 垂直ひずみ  $\varepsilon_i$  が降伏ひずみ  $\varepsilon_Y$  を超えたとき、微小要素は降伏したものとし、超過しない微小要素は弾性核を形成するものとする。このとき、応力分布から計算される軸方向力と収束計算で得られている軸方向力は一致しない。通常、この軸方向のつり合いを満足するように試行錯誤法<sup>30)</sup> が用いられるが、本手法では微小要素のうちひずみレベルの高い方から4個までしか降伏しないものとして収束計算を続けることにする。したがって、弾性核が変化した場合には、剛性等の修正を行い同じ荷重レベルでの収束計算を続ける。弾性核に変化がない場合、この荷重レベルでの収束値が得られたものとする (step ⑩) .
- h) 荷重レベルを逐次増加し、対応する変形量を収束計算により求めるが、変形量が収束しなくなったとき計算を打ち切る (step⑨) .

### 2.3 理論解析法Ⅱ (剛性法)

前節では変位の微小増分を考慮したつり合い条件式から曲線ばりの支配方程式を導き、伝達マトリックス法への適用方法を示した。しかし、それは増分理論において初期たわみの項を無視した線形化有限変位理論であり、大きな変位と変形の解析には限度があるという指摘<sup>35)</sup>もある。そこで、本節では文献 35) に紹介されたより厳密な有限変位理論の定式化を非弾性解析へ拡張し、曲線ばりの耐荷力解析のための第二の手法を紹介する。したがって、本節の定式化の大筋は文献 35) に従ったものである。なお、本節の数値解析に用いる剛性法は伝達マトリックス法に比べて汎用プログラムへの拡張が容易であるため、第4章における実験値の検証および補足のために利用する。

#### (1) 仮定

- a) 部材は水平面内だけに一定の曲率を有する薄肉曲線ばりである。
- b) 横断面形状は任意で、部材軸方向に一定とする。また、はりを構成する母線ごとの曲率の差を考慮する。
- c) 横断面形状ははりが変形した後も変化しない。

- d) 残留応力は板厚およびはりの長さ方向に変化せず，断面内で自己つり合いを保つものとする．
- e) 材料は完全弾塑性体であるとし，断面の板幅方向に微小分割した要素の図心における直ひずみが降伏ひずみを越えたとき，その要素は降伏したものとする．また，除荷は起らないものとする．
- f) はりの長手方向に分割した一つの要素における降伏部分あるいは弾性域に留まっている部分（弾性核）は長手方向に変化しないものとする．なお，精度を向上させるためには，弾性核が変化するものとして数値積分を行えばよいが，計算コストの割りに精度は上がらないと考えられる．
- g) 非弾性の影響は弾性核を有効とした非弾性剛性値により考慮する．ただし，St. Venant のねじり剛性は非弾性域でも全断面が有効とする塑性流理論によるものとする．
- h) 断面定数には曲率の影響を考慮する．
- なお，2.2節に述べた理論解析法Ⅰの仮定との違いはb)，h)の2点であり，本節の解析法は初期曲率に対してもより厳密な定式化を行うことになる．

## (2) 増分理論による仮想仕事式

仮定 c) から得られる変位場は  $\sin\varphi$  および  $\cos\varphi$  をテーラー展開することなく表すと<sup>19)</sup>，

$$u = u_0 - y \sin\varphi - x(1 - \cos\varphi) \quad (2.38a)$$

$$v = v_0 + x \sin\varphi - y(1 - \cos\varphi) \quad (2.38b)$$

$$w = w_0 - y(\Phi_x \cos\varphi - \Phi_y \sin\varphi) - x(\Phi_x \sin\varphi + \Phi_y \cos\varphi) - \omega \Psi_z \quad (2.38c)$$

で表される．ここに，直交曲線座標 ( $x-y-z$ 座標) は図-2.5のように定めたもので，原点  $o$  は任意点であり， $y-z$  平面は曲率面に一致する． $u_0, v_0$  および  $w_0$  はそれぞれ座標原点  $o$  の  $x, y$  および  $z$  方向の変位を表し， $\varphi$  は断面回転角である． $\omega$  は原点  $o$  に関するそり関数<sup>23)</sup> であり，非弾性域では2.2節に示した方法と同様に扱う．また，幾何学量は次式で定義する．

$$\begin{aligned} \Phi_x &= v'_0 + \frac{w_0}{R}, & \Phi_y &= u'_0 \\ \Psi_z &= \varphi' - \frac{\Phi_y \cos\varphi + \Phi_x \sin\varphi}{R} \end{aligned} \quad (2.39a \sim c)$$

ここに，記号  $( )' = d( )/dz$ ， $z = R\theta$  および  $R =$  座標原点を通る母線の曲率半径である．

一方，薄肉曲線部材の非零のひずみ成分は直ひずみ  $\varepsilon_\theta$  および薄肉中心線に沿うせん断ひずみ  $\gamma_s$  だけであり，それぞれ次式で表される．

$$\varepsilon_\theta = \frac{R}{\rho} \left\{ \varepsilon_z - \frac{1}{2} \frac{R}{\rho} \left[ \Phi_y^2 + \Phi_x^2 + (x^2 + y^2) \varphi'^2 \right] \right.$$

$$\begin{aligned}
& +2\Phi_x\phi' (x \cos\phi - y \sin\phi) - 2\Phi_y\phi' (x \sin\phi + y \cos\phi) \Big] \\
& - y \left( \Phi_x'\cos\phi - \Phi_y'\sin\phi - \Phi_x\phi'\sin\phi - \Phi_y\phi'\cos\phi - \frac{1 - \cos\phi}{R} \right) \\
& - x \left( \Phi_y'\cos\phi + \Phi_x'\sin\phi - \Phi_y\phi'\sin\phi + \Phi_x\phi'\cos\phi + \frac{\sin\phi}{R} \right) \\
& - \omega \Psi_z' \Big\} \tag{2.40a}
\end{aligned}$$

$$\gamma_s = \frac{R}{\rho} \Theta \Psi_z \tag{2.40b}$$

ここに， $\rho =$  板厚中心線上の任意点を通る母線の曲率半径であり，板厚方向の曲率半径の変化は無視した．また，

$$\varepsilon_z = w_o' - \frac{v_o}{R} \tag{2.41a}$$

および，

$$\Theta = \left( \frac{R}{\rho} \right) 2n \quad (\text{開区間})$$

$$\Theta = \left( \frac{R}{\rho} \right) \frac{\tilde{q}_k}{t} \quad (\text{閉区間}) \tag{2.41b}$$

で表される．ねじり関数  $\tilde{q}_k$  については文献 23) の式 (32) に示されている．

円弧要素のある状態 ( $S_n$  状態とする) における応力，変位，体積力および要素端の表面力をそれぞれ

$$\begin{aligned}
& \left( \sigma_\theta^o, \tau_s^o \right), \quad \left( u^o, v^o, w^o \right) \\
& \left( q_x^o, q_y^o, q_\theta^o \right), \quad \left( \tilde{\tau}_{x\theta}^o, \tilde{\tau}_{y\theta}^o, \tilde{\sigma}_\theta^o \right) \tag{2.42a~d}
\end{aligned}$$

で表し，微小な荷重増分によって別の状態 ( $S_{n+1}$ ) に達したとき，それらは増分量に記号  $\Delta$  を付けて次のように表される．

$$\left( \sigma_\theta^o + \Delta\sigma_\theta, \tau_s^o + \Delta\tau_s \right), \quad \left( u^o + \Delta u, v^o + \Delta v, w^o + \Delta w \right)$$

$$\begin{aligned}
& \left( q_x^\circ + \Delta q_x, q_y^\circ + \Delta q_y, q_\theta^\circ + \Delta q_\theta \right) \\
& \left( \tilde{\tau}_{x\theta}^\circ + \Delta \tilde{\tau}_{x\theta}, \tilde{\tau}_{y\theta}^\circ + \Delta \tilde{\tau}_{y\theta}, \tilde{\sigma}_\theta^\circ + \Delta \tilde{\sigma}_\theta \right)
\end{aligned} \tag{2.43a~d}$$

このとき仮想仕事式は次のように書くことができる。

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\theta_e} \int_A \left[ \left( \sigma_\theta^\circ + \Delta \sigma_\theta \right) \delta \left( \varepsilon_\theta^\circ + \Delta \varepsilon_\theta \right) + \left( \tau_s^\circ + \Delta \tau_s \right) \delta \left( \gamma_s^\circ + \Delta \gamma_s \right) \right. \\
& \left. - \left( q^\circ + \Delta q \right) \delta \left( D^\circ + \Delta D \right)^t \right] \rho dA d\theta \\
& - \left[ \int_A \left( \tilde{\tau}^\circ + \Delta \tilde{\tau} \right) \delta \left( D^\circ + \Delta D \right)^t dA \right]_0^{\theta_e} = 0
\end{aligned} \tag{2.44}$$

ここに、 $D$ 、 $q$ および $\tilde{\tau}$ はそれぞれ式(2.43b)、(2.43c)および(2.43d)なる成分をもつベクトルである。また、式(2.44)における $S_{n+1}$ 状態の変位 $(D^\circ + \Delta D)$ および、ひずみ $(\varepsilon_\theta^\circ + \Delta \varepsilon_\theta)$ は式(2.38)および式(2.40)で幾何学量 $\Phi_x$ 、 $\varphi$ 、 $\Psi_z$ 等を $(\Phi_x^\circ + \Delta \Phi_x)$ 、 $(\varphi^\circ + \Delta \varphi)$ 、 $(\Psi_z^\circ + \Delta \Psi_z)$ と置き換えて得られる。たとえば、式(2.38a)より

$$\begin{aligned}
u^\circ + \Delta u &= \left( u_o^\circ + \Delta u_o \right) - y \sin(\varphi^\circ + \Delta \varphi) - x \left\{ 1 - \cos(\varphi^\circ + \Delta \varphi) \right\} \\
&= u_o^\circ - y \sin \varphi^\circ - x \left( 1 - \cos \varphi^\circ \right) + \Delta u_o - \Delta \varphi \left( y \cos \varphi^\circ + x \sin \varphi^\circ \right) \\
&\quad - \frac{\Delta \varphi^2}{2} \left( x \cos \varphi^\circ - y \sin \varphi^\circ \right)
\end{aligned} \tag{2.45}$$

したがって、増分変位 $\Delta u$ は次式で表される。ただし、以後の式においては簡単のために、 $S_n$ 状態の量を表す上付き記号 $^\circ$ はそのままとし、増分量を表す記号 $\Delta$ は省略する。すなわち $\Delta u$ 、 $\Delta u_o$ 、および $\Delta \varphi$ をそれぞれ $u$ 、 $u_o$ および $\varphi$ で表すことにする。

$$u = u_o - \varphi \left( y \cos \varphi^\circ + x \sin \varphi^\circ \right) - \frac{\varphi^2}{2} \left( x \cos \varphi^\circ - y \sin \varphi^\circ \right) \tag{2.46a}$$

同様に、

$$v = v_o + \varphi \left( x \cos \varphi^\circ - y \sin \varphi^\circ \right) - \frac{\varphi^2}{2} \left( x \sin \varphi^\circ + y \cos \varphi^\circ \right) \tag{2.46b}$$

$$w = w_o - y \left( \Phi_x \cos \varphi^\circ - \Phi_y^\circ \cos \varphi^\circ - \Phi_y \sin \varphi^\circ - \Phi_x^\circ \sin \varphi^\circ \right)$$

$$\begin{aligned}
& -x \left( \Phi_y \cos \varphi^\circ + \Phi_x^\circ \varphi \cos \varphi^\circ + \Phi_x \sin \varphi^\circ - \Phi_y^\circ \varphi \sin \varphi^\circ \right) \\
& -\omega \left( \varphi^\circ - \frac{\Phi_y \cos \varphi^\circ + \Phi_x \sin \varphi^\circ}{R} - \frac{\Phi_x^\circ \varphi \cos \varphi^\circ - \Phi_y^\circ \varphi \sin \varphi^\circ}{R} \right) \\
& -y \left\{ \frac{\varphi^2}{2} \left( \Phi_y^\circ \sin \varphi^\circ - \Phi_x^\circ \cos \varphi^\circ \right) - \varphi \left( \Phi_y \cos \varphi^\circ + \Phi_x \sin \varphi^\circ \right) \right\} \\
& \frac{+ \left( x - \frac{\omega}{R} \right) \left\{ \frac{\varphi^2}{2} \left( \Phi_y^\circ \cos \varphi^\circ + \Phi_x^\circ \sin \varphi^\circ \right) \right.}{+ \varphi \left( \Phi_y \sin \varphi^\circ - \Phi_x \cos \varphi^\circ \right) \left. \right\}}
\end{aligned} \tag{2.46c}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\theta = & \frac{R}{\rho} \left[ \varepsilon_z + \frac{1}{2} \left( \frac{R}{\rho} \right) \left\{ 2\Phi_x^\circ \Phi_x + 2\Phi_y^\circ \Phi_y + 2(x^2 + y^2) \varphi^\circ \cdot \varphi^\circ \right. \right. \\
& \left. \left. + \Phi_x^2 + \Phi_y^2 + (x^2 + y^2) \varphi^{\circ 2} \right\} \right. \\
& -y \left( \chi_1 \cos \varphi^\circ - \chi_2 \sin \varphi^\circ + \lambda_1 \cos \varphi^\circ + \lambda_2 \sin \varphi^\circ - \frac{\varphi^2}{2R} \cos \varphi^\circ \right) \\
& -x \left( \chi_2 \cos \varphi^\circ + \chi_1 \sin \varphi^\circ - \lambda_2 \cos \varphi^\circ + \lambda_1 \sin \varphi^\circ - \frac{\varphi^2}{2R} \sin \varphi^\circ \right) \\
& -\omega \left\{ \varphi^\circ - \frac{1}{R} \left( \chi_3 \sin \varphi^\circ + \chi_4 \cos \varphi^\circ + \lambda_3 \sin \varphi^\circ + \lambda_4 \cos \varphi^\circ \right) \right\} \\
& + \frac{xy}{\rho} \left( \chi_5 \cos \varphi^\circ + \chi_6 \sin \varphi^\circ + \lambda_5 \cos \varphi^\circ + \lambda_6 \sin \varphi^\circ \right) \\
& \left. - \frac{y^2}{\rho} \left( \chi_5 \sin \varphi^\circ - \chi_6 \cos \varphi^\circ + \lambda_5 \sin \varphi^\circ - \lambda_6 \cos \varphi^\circ \right) \right] \tag{2.46d}
\end{aligned}$$

$$\gamma_s = \frac{R}{\rho} \Theta \left\{ \varphi^\circ - \frac{1}{R} \left( \chi_7 \cos \varphi^\circ + \chi_8 \sin \varphi^\circ + \lambda_7 \cos \varphi^\circ - \lambda_8 \sin \varphi^\circ \right) \right\} \tag{2.46e}$$

ここに,

$$\begin{aligned}
\chi_1 &= \dot{\Phi}_x - \dot{\Phi}_y^{\circ} \varphi \quad , \quad \chi_2 = \dot{\Phi}_y + \dot{\Phi}_x^{\circ} \varphi + \varphi/R \\
\chi_3 &= \dot{\Phi}_x^{\circ} - \dot{\Phi}_y \varphi^{\circ} - \varphi \left( \dot{\Phi}_y^{\circ} + \dot{\Phi}_x^{\circ} \varphi^{\circ} \right) - \varphi^{\circ} \dot{\Phi}_y^{\circ} \\
\chi_4 &= \dot{\Phi}_y^{\circ} + \dot{\Phi}_x \varphi^{\circ} + \varphi \left( \dot{\Phi}_x^{\circ} - \dot{\Phi}_y^{\circ} \varphi^{\circ} \right) + \varphi^{\circ} \dot{\Phi}_x^{\circ} \\
\chi_5 &= \varphi^{\circ} \dot{\Phi}_x + \dot{\Phi}_x^{\circ} \varphi^{\circ} - \dot{\Phi}_y^{\circ} \varphi^{\circ} \varphi \quad , \quad \chi_6 = -\varphi^{\circ} \dot{\Phi}_y - \dot{\Phi}_y^{\circ} \varphi^{\circ} - \dot{\Phi}_x^{\circ} \varphi^{\circ} \varphi \\
\chi_7 &= \dot{\Phi}_y + \dot{\Phi}_x^{\circ} \varphi \quad , \quad \chi_8 = \dot{\Phi}_x - \dot{\Phi}_y^{\circ} \varphi \quad , \quad \lambda_1 = -\dot{\Phi}_y \varphi - \dot{\Phi}_x^{\circ} \varphi^2/2 \\
\lambda_2 &= -\dot{\Phi}_x \varphi + \dot{\Phi}_y^{\circ} \varphi^2/2 \quad , \quad \lambda_3 = \lambda_1 - \lambda_7 \varphi^{\circ} - \chi_7 \varphi^{\circ} \\
\lambda_4 &= -\lambda_2 - \lambda_8 \varphi^{\circ} - \chi_8 \varphi^{\circ} \quad , \quad \lambda_5 = -\lambda_8 \varphi^{\circ} + \chi_8 \varphi^{\circ} \quad , \quad \lambda_6 = -\lambda_7 \varphi^{\circ} - \chi_7 \varphi^{\circ} \\
\lambda_7 &= \dot{\Phi}_x \varphi - \dot{\Phi}_y^{\circ} \varphi^2/2 \quad , \quad \lambda_8 = \dot{\Phi}_y \varphi + \dot{\Phi}_x^{\circ} \varphi^2/2 \quad (2.46f)
\end{aligned}$$

であり、式(2.46a～e)において下線部は増分の2次の項である。また、誘導においては3次以上の項を無視した。

式(2.46a～e)の線形項および非線形項にそれぞれ上付記号LおよびNを付けて式(2.44)に代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\theta e} \int_A \left\{ \sigma_{\theta} \delta \varepsilon_{\theta}^L + \sigma_{\theta}^{\circ} \delta \varepsilon_{\theta}^N + \tau_s \delta \gamma_s^L + \tau_s^{\circ} \delta \gamma_s^N \right. \\
& - \left( q_x \delta u^L + q_x^{\circ} \delta u^N + q_y \delta v^L + q_y^{\circ} \delta v^N + q_{\theta} \delta w^L + q_{\theta}^{\circ} \delta w^N \right) \Big\} \rho dA d\theta \\
& - \left[ \int_A \left( \tilde{\tau}_{x\theta} \delta u^L + \tilde{\tau}_{x\theta}^{\circ} \delta u^N + \tilde{\tau}_{y\theta} \delta v^L + \tilde{\tau}_{y\theta}^{\circ} \delta v^N \right. \right. \\
& \left. \left. + \tilde{\sigma}_{\theta} \delta w^L + \tilde{\sigma}_{\theta}^{\circ} \delta w^N \right) dA \right]_0^{\theta e} = -\delta W_n \quad (2.47a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta W_n &= \int_0^{\theta e} \int_A \left\{ \sigma_{\theta}^{\circ} \delta \varepsilon_{\theta}^L + \tau_s^{\circ} \delta \gamma_s^L - \left( q_x^{\circ} \delta u^L + q_y^{\circ} \delta v^L + q_{\theta}^{\circ} \delta w^L \right) \right\} \rho dA d\theta \\
& - \left[ \int_A \left( \tilde{\tau}_{x\theta}^{\circ} \delta u^L + \tilde{\tau}_{y\theta}^{\circ} \delta v^L + \tilde{\sigma}_{\theta}^{\circ} \delta w^L \right) dA \right]_0^{\theta e} \quad (2.47b)
\end{aligned}$$

ここに、式(2.47)においては高次の項(たとえば $\sigma_{\theta} \delta \varepsilon_{\theta}^N$ )は無視した。なお、式(2.47b)の $\delta W_n$ は $S_n$ 状態の仮想仕事式に相当する。

上式の初期応力 ( $\sigma_\theta^0, \tau_s^0$ ) および応力増分 ( $\sigma_\theta, \tau_s$ ) に対して次式を用いる .

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^0 &= E\varepsilon_\theta^0 + \sigma_\theta^r & , & & \tau_s^0 &= G\gamma_s^0 \\ \sigma_\theta &= E\varepsilon_\theta^L & , & & \tau_s &= G\gamma_s^L \end{aligned} \quad (2.48)$$

ここに ,  $E$  = 弾性係数 ,  $G = E/2(1+\nu) =$  せん断弾性係数 ,  $\varepsilon_\theta^0 = S_n$  状態での外力による直ひずみ , および  $\sigma_\theta^r =$  残留応力である . ただし , 残留応力が自己つり合いを保つものとするれば , 曲線桁においても ,  $\int_A \sigma_\theta^r dA = \int_A \sigma_\theta^r x dA = \int_A \sigma_\theta^r y dA = \int_A \sigma_\theta^r \omega dA = 0$

が成り立つ . また ,  $\sigma_Y$  を降伏点応力度とするととき , 仮定 e) , f) および g) より  $|\sigma_\theta^0| \leq \sigma_Y$  であり , 式 (2.47a) の左辺の第 1 項は

$$\int_0^{\theta_e} \int_A \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta^L \rho dA d\theta = E \int_0^{\theta_e} \int_{A_e} \varepsilon_\theta^L \delta \varepsilon_\theta^L \frac{\rho}{R} dA R d\theta \quad (2.49)$$

のように表される . ここに ,  $\int_{A_e} ( ) dA$  は弾性核についての積分を表す .

式(2.47)に式(2.46) , 式(2.48)および式(2.49)を代入すると次式を得る . ここでは文献 35) と異なり ,  $y-z$  平面が曲率面に一致すること以外 , 座標軸  $x-y-z$  に関して何んら制約を行わないことにする .

$$\begin{aligned} & E \int_0^{\theta_e} \left\{ A_e \varepsilon_z \delta \varepsilon_z + A_e^* \delta (\alpha_1 \varepsilon_z) + A_e^{**} \alpha_1 \delta \alpha_1 + J_p^* \varphi^0 \cdot \delta (\varepsilon_z \varphi^0) \right. \\ & + J_p^{**} \varphi^0 \cdot \delta (\alpha_1 \varphi^0) - J_x \delta (\varepsilon_z \alpha_2) - J_x^* \delta (\alpha_1 \alpha_2) - J_y \delta (\varepsilon_z \alpha_3) \\ & - J_y^* \delta (\alpha_1 \alpha_3) - J_\omega \delta (\varepsilon_z \alpha_{11}) - J_\omega^* \delta (\alpha_1 \alpha_{11}) + J_{xx} \alpha_2 \delta \alpha_2 \\ & + J_{yy} \alpha_3 \delta \alpha_3 + J_{xy} \delta (\alpha_2 \alpha_3) + J_{x\omega} \delta (\alpha_2 \alpha_{11}) + J_{y\omega} \delta (\alpha_3 \alpha_{11}) \\ & - J_{xx\rho} \delta (\varepsilon_z \alpha_4) - J_{xx\rho}^* \delta (\alpha_1 \alpha_4) + J_{xy\rho} \delta (\varepsilon_z \alpha_5) + J_{xy\rho}^* \delta (\alpha_1 \alpha_5) \\ & - J_{px}^* \varphi^0 \cdot \delta (\alpha_2 \varphi^0) - J_{py}^* \varphi^0 \cdot \delta (\alpha_3 \varphi^0) - J_{p\omega}^* \varphi^0 \cdot \delta (\alpha_{11} \varphi^0) + J_{\omega\omega} \alpha_{11} \delta \alpha_{11} \\ & + J_{pp} \varphi^0 \cdot \varphi^0 \delta \varphi^0 + J_G \alpha_{10} \delta \alpha_{10} - J_{pxx} \varphi^0 \cdot \delta (\varphi^0 \alpha_4) + J_{pxy} \varphi^0 \cdot \delta (\varphi^0 \alpha_5) \\ & - D_1 \delta (\alpha_3 \alpha_5) + D_2 \delta (\alpha_3 \alpha_4 - \alpha_2 \alpha_5) + D_3 \alpha_4 \delta \alpha_4 + D_4 \delta (\alpha_2 \alpha_4) \\ & + D_5 \alpha_5 \delta \alpha_5 - D_6 \delta (\alpha_4 \alpha_5) - D_7 \delta (\alpha_5 \alpha_{11}) + D_8 \delta (\alpha_4 \alpha_{11}) \left. \right\} R d\theta \\ & + \int_0^{\theta_e} \left\{ N^{o*} (\Phi_x \delta \Phi_x + \Phi_y \delta \Phi_y) + K^{o*} \varphi^0 \cdot \delta \varphi^0 \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - M_x^o \left( \delta\lambda_1 \cos\varphi^o + \delta\lambda_2 \sin\varphi^o - \delta\varphi \frac{\varphi}{R} \cos\varphi^o \right) \\
& - M_y^o \left( \delta\lambda_1 \sin\varphi^o - \delta\lambda_2 \cos\varphi^o - \delta\varphi \frac{\varphi}{R} \sin\varphi^o \right) \\
& + M_\omega^o \frac{\delta\lambda_3 \sin\varphi^o + \delta\lambda_4 \cos\varphi^o}{R} + M_{xy}^o \left( \delta\lambda_5 \cos\varphi^o + \delta\lambda_6 \sin\varphi^o \right) \\
& - M_{yy}^o \left( \delta\lambda_5 \sin\varphi^o - \delta\lambda_6 \cos\varphi^o \right) - T_{zs}^o \left( \delta\lambda_7 \cos\varphi^o - \delta\lambda_8 \sin\varphi^o \right) \Big\} R d\theta \\
& - \int_0^{\theta e} \left\{ p_x \delta u_o + p_y \delta v_o + p_\theta \delta w_o + m_\theta \cos\varphi^o \delta\varphi \right. \\
& \left. - m_n \sin\varphi^o \delta\varphi - \left( m_\theta^o \sin\varphi^o + m_n^o \cos\varphi^o \right) \varphi \delta\varphi \right\} R d\theta \\
& - \left[ \tilde{Q}_x \delta u_o + \tilde{Q}_y \delta v_o + \tilde{N} \delta w_o + \tilde{M}_z \cos\varphi^o \delta\varphi - \tilde{M}_n \sin\varphi^o \delta\varphi \right. \\
& \left. - \tilde{M}_\omega \delta\alpha_{10} - \tilde{M}_x \delta(\alpha_6 - \alpha_9) - \tilde{M}_y \delta(\alpha_7 + \alpha_8) \right]_0^{\theta e} \\
& - \left[ - \left( \tilde{M}_z^o \sin\varphi^o + \tilde{M}_n^o \cos\varphi^o \right) \varphi \delta\varphi + \tilde{M}_x^o \left\{ \alpha_8 \delta\varphi + \delta(\alpha_7\varphi) \right\} \right. \\
& \left. + \tilde{M}_y^o \left\{ \alpha_9 \delta\varphi - \delta(\alpha_6\varphi) \right\} - \tilde{M}_\omega^o \frac{\delta(\lambda_3 \sin\varphi^o + \lambda_4 \cos\varphi^o)}{R} \right]_0^{\theta e} \\
& = -\delta W_n \tag{2.50a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta W_n = \int_0^{\theta e} \left\{ N^o \delta\varepsilon_z + N^{o*} \delta\alpha_1 + K^{o*} \varphi^{o\cdot} \delta\varphi^{\cdot} - M_x^o \delta\alpha_2 - M_y^o \delta\alpha_3 \right. \\
\left. - M_\omega^o \delta\alpha_{11} + M_{xy}^o \delta\alpha_5 - M_{yy}^o \delta\alpha_4 + T_{zs}^o \delta\alpha_{10} \right\} R d\theta \\
- \int_0^{\theta e} \left\{ p_x^o \delta u_o + p_y^o \delta v_o + p_\theta^o \delta w_o + m_\theta^o \cos\varphi^o \delta\varphi \right. \\
\left. - m_n^o \sin\varphi^o \delta\varphi \right\} R d\theta - \left[ \tilde{Q}_x^o \delta u_o + \tilde{Q}_y^o \delta v_o + \tilde{N}^o \delta w_o \right. \\
\left. + \tilde{M}_z^o \cos\varphi^o \delta\varphi - \tilde{M}_n^o \sin\varphi^o \delta\varphi - \tilde{M}_\omega^o \delta\alpha_{10} - \tilde{M}_x^o \delta(\alpha_6 - \alpha_9) \right. \\
\left. - \tilde{M}_y^o \delta(\alpha_7 + \alpha_8) \right]_0^{\theta e} \tag{2.50b}
\end{aligned}$$

式(2.50)では幾何学量および断面量を次のように定義した。

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \Phi_x^\circ \Phi_x + \Phi_y^\circ \Phi_y & \alpha_2 &= \chi_1 \cos \varphi^\circ - \chi_2 \sin \varphi^\circ \\
 \alpha_3 &= \chi_1 \sin \varphi^\circ + \chi_2 \cos \varphi^\circ & \alpha_4 &= \chi_5 \sin \varphi^\circ - \chi_6 \cos \varphi^\circ \\
 \alpha_5 &= \chi_5 \cos \varphi^\circ + \chi_6 \sin \varphi^\circ & \alpha_6 &= \Phi_x^\circ \cos \varphi^\circ - \Phi_y^\circ \sin \varphi^\circ \\
 \alpha_7 &= \Phi_x^\circ \sin \varphi^\circ + \Phi_y^\circ \cos \varphi^\circ & \alpha_8 &= (\Phi_x^\circ \cos \varphi^\circ - \Phi_y^\circ \sin \varphi^\circ) \varphi \\
 \alpha_9 &= (\Phi_x^\circ \sin \varphi^\circ + \Phi_y^\circ \cos \varphi^\circ) \varphi & \alpha_{10} &= \varphi' - \frac{1}{R} (\chi_7 \cos \varphi^\circ + \chi_8 \sin \varphi^\circ) \\
 \alpha_{11} &= \theta_\omega^{nL} = \varphi'' - \frac{1}{R} (\chi_3 \sin \varphi^\circ + \chi_4 \cos \varphi^\circ) & & (2.51)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_e &= \int_{Ae} \frac{R}{\rho} dA, & J_x &= \int_{Ae} \frac{R}{\rho} y dA, & J_y &= \int_{Ae} \frac{R}{\rho} x dA \\
 J_\omega &= \int_{Ae} \frac{R}{\rho} \omega dA, & J_{xy} &= \int_{Ae} \frac{R}{\rho} xy dA, & J_{x\omega} &= \int_{Ae} \frac{R}{\rho} y \omega dA \\
 J_{y\omega} &= \int_{Ae} \frac{R}{\rho} x \omega dA, & J_{xx} &= \int_{Ae} \frac{R}{\rho} y^2 dA, & J_{yy} &= \int_{Ae} \frac{R}{\rho} x^2 dA \\
 J_{\omega\omega} &= \int_{Ae} \frac{R}{\rho} \omega^2 dA, & J_p &= \int_{Ae} \frac{R}{\rho} (x^2 + y^2) dA \\
 J_{px} &= \int_{Ae} \frac{R}{\rho} (x^2 + y^2) y dA, & J_{py} &= \int_{Ae} \frac{R}{\rho} (x^2 + y^2) x dA \\
 J_{p\omega} &= \int_{Ae} \frac{R}{\rho} (x^2 + y^2) \omega dA, & J_{pp} &= \int_{Ae} \left( \frac{R}{\rho} \right)^3 (x^2 + y^2)^2 dA \\
 J_{xy\rho} &= \int_{Ae} \frac{R}{\rho} \frac{xy}{\rho} dA, & J_{xx\rho} &= \int_{Ae} \frac{R}{\rho} \frac{y^2}{\rho} dA \\
 J_{pxy} &= \int_{Ae} \left( \frac{R}{\rho} \right)^2 (x^2 + y^2) \frac{xy}{\rho} dA \\
 J_{pxx} &= \int_{Ae} \left( \frac{R}{\rho} \right)^2 (x^2 + y^2) \frac{y^2}{\rho} dA \\
 D_1 &= \int_{Ae} \frac{R}{\rho} \frac{x^2 y}{\rho} dA, & D_2 &= \int_{Ae} \frac{R}{\rho} \frac{xy^2}{\rho} dA, & D_3 &= \int_{Ae} \frac{R}{\rho} \frac{y^4}{\rho^2} dA
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4 &= \int_{Ae} \frac{R}{\rho} \frac{y^3}{\rho} dA, & D_5 &= \int_{Ae} \frac{R}{\rho} \frac{x^2 y^2}{\rho^2} dA, & D_6 &= \int_{Ae} \frac{R}{\rho} \frac{xy^3}{\rho^2} dA \\
D_7 &= \int_{Ae} \frac{R}{\rho} \frac{xy}{\rho} \omega dA, & D_8 &= \int_{Ae} \frac{R}{\rho} \frac{y^2}{\rho} \omega dA, & J_G &= \int_A G \left( \frac{R}{\rho} \right) \Theta^2 dA
\end{aligned} \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned}
N^\circ &= \int_A \sigma_\theta^\circ dA, & N^{\circ*} &= \int_A \sigma_\theta^\circ \frac{R}{\rho} dA, & M_y^\circ &= \int_A \sigma_\theta^\circ x dA \\
M_\omega^\circ &= \int_A \sigma_\theta^\circ \omega dA, & M_x^\circ &= \int_A \sigma_\theta^\circ y dA, & M_{xy}^\circ &= \int_A \sigma_\theta^\circ \frac{xy}{\rho} dA \\
M_{yy}^\circ &= \int_A \sigma_\theta^\circ \frac{y^2}{\rho} dA, & T_{zs}^\circ &= \int_A \tau_s^\circ \Theta dA \\
K^{\circ*} &= \int_A \sigma_\theta^\circ \frac{R}{\rho} (x^2 + y^2) dA
\end{aligned} \tag{2.53}$$

$$\begin{aligned}
p_x &= \int_A \frac{\rho}{R} q_x dA, & p_y &= \int_A \frac{\rho}{R} q_y dA, & p_\theta &= \int_A \frac{\rho}{R} q_\theta dA \\
m_\theta &= \int_A \frac{\rho}{R} (xq_y - yq_x) dA, & m_n &= \int_A \frac{\rho}{R} (xq_x + yq_y) dA
\end{aligned} \tag{2.54}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_x &= \int_A \tilde{\tau}_{x\theta} dA, & \tilde{Q}_y &= \int_A \tilde{\tau}_{y\theta} dA, & \tilde{N} &= \int_A \tilde{\sigma}_\theta dA \\
\tilde{M}_x &= \int_A \tilde{\sigma}_\theta y dA, & \tilde{M}_y &= \int_A \tilde{\sigma}_\theta x dA, & \tilde{M}_z &= \int_A (x\tilde{\tau}_{y\theta} - y\tilde{\tau}_{x\theta}) dA \\
\tilde{M}_\omega &= \int_A \tilde{\sigma}_\theta \omega dA, & \tilde{M}_n &= \int_A (x\tilde{\tau}_{x\theta} + y\tilde{\tau}_{y\theta}) dA
\end{aligned} \tag{2.55}$$

式(2.50)における上付記号\*は式(2.52)の積分において、 $(R/\rho)$ をさらに乗ずることで得られ、記号\*\*は同様に $(R/\rho)^2$ を乗じて得られる。また、式(2.50)で $S_n$ 状態の量を表す上付記号 $^\circ$ の付いた荷重および材端力はそれぞれ式(2.54)および式(2.55)の応力に上付記号 $^\circ$ を付けて得られる。

初期応力による断面力を表す式(2.53)は式(2.48)を用いて次のように展開できる。

$$\begin{aligned}
N^\circ &= \int_{Ae} (E\varepsilon_\theta^\circ + \sigma_\theta^\tau) dA + \int_{Ap} \sigma_y \operatorname{sgn}(\varepsilon_\theta^\circ + \varepsilon_\theta^\tau) dA \\
&= E \left\{ A_e \varepsilon_z^\circ + \frac{1}{2} A_e^* \beta_1 + \frac{1}{2} J_p^* (\varphi^\circ)^2 - J_x \beta_2 \right. \\
&\quad \left. - J_y \beta_3 + J_{xy\rho} \varphi^\circ \beta_4 - J_{xx\rho} \varphi^\circ \beta_5 - J_\omega \beta_6 \right\}
\end{aligned}$$

$$+ \int_{A_e} \sigma_\theta^r dA + \int_{A_p} \sigma_Y \operatorname{sgn}(\varepsilon_\theta^o + \varepsilon_\theta^r) dA \quad (2.56a)$$

$$\begin{aligned} N^{o*} &= E \left\{ A_e^* \varepsilon_z^o + \frac{1}{2} A_e^{**} \beta_1 + \frac{1}{2} J_p^{**} (\varphi^{o\cdot})^2 - J_x^* \beta_2 \right. \\ &\quad \left. - J_y^* \beta_3 + J_{xy\rho}^* \varphi^{o\cdot} \beta_4 - J_{xx\rho}^* \varphi^{o\cdot} \beta_5 - J_\omega^* \beta_6 \right\} \\ &\quad + \int_{A_e} \sigma_\theta^r \frac{R}{\rho} dA + \int_{A_p} \sigma_Y \frac{R}{\rho} \operatorname{sgn}(\varepsilon_\theta^o + \varepsilon_\theta^r) dA \end{aligned} \quad (2.56b)$$

$$\begin{aligned} M_x^o &= \int_{A_e} (E \varepsilon_\theta^o + \sigma_\theta^r) y dA + \int_{A_p} \sigma_Y \operatorname{sgn}(\varepsilon_\theta^o + \varepsilon_\theta^r) y dA \\ &= E \left\{ J_x \varepsilon_z^o + \frac{1}{2} J_x^* \beta_1 + \frac{1}{2} J_{px}^* (\varphi^{o\cdot})^2 - J_{xx} \beta_2 \right. \\ &\quad \left. - J_{xy} \beta_3 - J_{x\omega} \beta_6 + D_2 \varphi^{o\cdot} \beta_4 - D_4 \varphi^{o\cdot} \beta_5 \right\} \\ &\quad + \int_{A_e} \sigma_\theta^r y dA + \int_{A_p} \sigma_Y \operatorname{sgn}(\varepsilon_\theta^o + \varepsilon_\theta^r) y dA \end{aligned} \quad (2.56c)$$

$$\begin{aligned} M_y^o &= \int_{A_e} (E_t \varepsilon_\theta^o + \sigma_\theta^r) x dA + \int_{A_p} \sigma_Y \operatorname{sgn}(\varepsilon_\theta^o + \varepsilon_\theta^r) x dA \\ &= E \left\{ J_y \varepsilon_z^o + \frac{1}{2} J_y^* \beta_1 + \frac{1}{2} J_{py}^* (\varphi^{o\cdot})^2 - J_{xy} \beta_2 \right. \\ &\quad \left. - J_{yy} \beta_3 - J_{y\omega} \beta_6 + D_1 \varphi^{o\cdot} \beta_4 - D_2 \varphi^{o\cdot} \beta_5 \right\} \\ &\quad + \int_{A_e} \sigma_\theta^r x dA + \int_{A_p} \sigma_Y \operatorname{sgn}(\varepsilon_\theta^o + \varepsilon_\theta^r) x dA \end{aligned} \quad (2.56d)$$

$$\begin{aligned} M_\omega^o &= \int_{A_e} (E \varepsilon_\theta^o + \sigma_\theta^r) \omega dA + \int_{A_p} \sigma_Y \omega \operatorname{sgn}(\varepsilon_\theta^o + \varepsilon_\theta^r) dA \\ &= E \left\{ J_\omega \varepsilon_z^o + \frac{1}{2} J_\omega^* \beta_1 + \frac{1}{2} J_{p\omega}^* (\varphi^{o\cdot})^2 - J_{x\omega} \beta_2 \right. \\ &\quad \left. - J_{y\omega} \beta_3 - J_{\omega\omega} \beta_6 + D_7 \varphi^{o\cdot} \beta_4 - D_8 \varphi^{o\cdot} \beta_5 \right\} \\ &\quad + \int_{A_e} \sigma_\theta^r \omega dA + \int_{A_p} \sigma_Y \omega \operatorname{sgn}(\varepsilon_\theta^o + \varepsilon_\theta^r) dA \end{aligned} \quad (2.56e)$$

$$\begin{aligned}
K^{\circ*} &= \int_{Ae} \frac{R}{\rho} (E\varepsilon_{\theta}^{\circ} + \sigma_{\theta}^r)(x^2 + y^2) dA + \int_{Ap} \frac{R}{\rho} \sigma_Y \operatorname{sgn}(\varepsilon_{\theta}^{\circ} + \varepsilon_{\theta}^r)(x^2 + y^2) dA \\
&= E \left\{ J_p^* \varepsilon_z^{\circ} + \frac{1}{2} J_p^{**} \beta_1 + \frac{1}{2} J_{pp} (\varphi^{\circ})^2 - J_{px} \beta_2 \right. \\
&\quad \left. - J_{py} \beta_3 - J_{p\omega} \beta_6 + J_{pxy} \varphi^{\circ} \beta_4 - J_{pxx} \varphi^{\circ} \beta_5 \right\} \\
&\quad + \int_{Ae} \frac{R}{\rho} \sigma_{\theta}^r (x^2 + y^2) dA + \int_{Ap} \frac{R}{\rho} \sigma_Y \operatorname{sgn}(\varepsilon_{\theta}^{\circ} + \varepsilon_{\theta}^r)(x^2 + y^2) dA
\end{aligned} \tag{2.56f}$$

$$\begin{aligned}
M_{xy}^{\circ} &= \int_{Ae} (E\varepsilon_{\theta}^{\circ} + \sigma_{\theta}^r) \frac{xy}{\rho} dA + \int_{Ap} \sigma_Y \frac{xy}{\rho} \operatorname{sgn}(\varepsilon_{\theta}^{\circ} + \varepsilon_{\theta}^r) dA \\
&= E \left\{ J_{xy\rho} \varepsilon_z^{\circ} + \frac{1}{2} J_{xy\rho}^* \beta_1 + \frac{1}{2} J_{pxy} (\varphi^{\circ})^2 - D_2 \beta_2 \right. \\
&\quad \left. - D_1 \beta_3 - D_7 \beta_6 + D_5 \varphi^{\circ} \beta_4 - D_6 \varphi^{\circ} \beta_5 \right\} \\
&\quad + \int_{Ae} \sigma_{\theta}^r \frac{xy}{\rho} dA + \int_{Ap} \sigma_Y \frac{xy}{\rho} \operatorname{sgn}(\varepsilon_{\theta}^{\circ} + \varepsilon_{\theta}^r) dA
\end{aligned} \tag{2.56g}$$

$$\begin{aligned}
M_{yy}^{\circ} &= \int_{Ae} (E\varepsilon_{\theta}^{\circ} + \sigma_{\theta}^r) \frac{y^2}{\rho} dA + \int_{Ap} \sigma_Y \frac{y^2}{\rho} \operatorname{sgn}(\varepsilon_{\theta}^{\circ} + \varepsilon_{\theta}^r) dA \\
&= E \left\{ J_{x\rho} \varepsilon_z^{\circ} + \frac{1}{2} J_{x\rho}^* \beta_1 + \frac{1}{2} J_{pxx} (\varphi^{\circ})^2 - D_4 \beta_2 \right. \\
&\quad \left. - D_2 \beta_3 - D_8 \beta_6 + D_6 \varphi^{\circ} \beta_4 - D_3 \varphi^{\circ} \beta_5 \right\} \\
&\quad + \int_{Ae} \sigma_{\theta}^r \frac{y^2}{\rho} dA + \int_{Ap} \sigma_Y \frac{y^2}{\rho} \operatorname{sgn}(\varepsilon_{\theta}^{\circ} + \varepsilon_{\theta}^r) dA
\end{aligned} \tag{2.56h}$$

$$T_{zs}^{\circ} = \int_A \tau_s^{\circ} \Theta dA = J_G \left( \varphi^{\circ} - \frac{\Phi_y^{\circ} \cos \varphi^{\circ} + \Phi_x^{\circ} \sin \varphi^{\circ}}{R} \right) \tag{2.56i}$$

ここに,

$$\beta_1 = \Phi_x^{\circ 2} + \Phi_y^{\circ 2} \quad , \quad \beta_2 = \Phi_x^{\circ} \cos \varphi^{\circ} - \Phi_y^{\circ} \sin \varphi^{\circ} - (1 - \cos \varphi^{\circ}) / R$$

$$\begin{aligned}
\beta_3 &= \Phi_y^{\circ\prime} \cos\varphi^{\circ} + \Phi_x^{\circ\prime} \sin\varphi^{\circ} + \sin\varphi^{\circ}/R \quad , \quad \beta_4 = \Phi_x^{\circ\prime} \cos\varphi^{\circ} - \Phi_y^{\circ\prime} \sin\varphi^{\circ} \\
\beta_5 &= \Phi_x^{\circ\prime} \sin\varphi^{\circ} + \Phi_y^{\circ\prime} \cos\varphi^{\circ} \\
\beta_6 &= \varphi^{\circ\prime\prime} - (\Phi_y^{\circ\prime} \cos\varphi^{\circ} + \Phi_x^{\circ\prime} \sin\varphi^{\circ} + \beta_4 \varphi^{\circ\prime})/R
\end{aligned} \tag{2.57}$$

であり，積分  $\int_{Ap} ( \quad ) dA$  は降伏断面についての積分を表す．また， $\text{sgn}(\varepsilon)$  は  $\varepsilon$  が正のとき 1 に等しく， $\varepsilon$  が負のとき  $-1$  に等しい．

### (3) 剛性方程式

増分形式で書かれた（ただし，増分記号  $\Delta$  は簡単のため省略した）仮想仕事式(2.50)から剛性方程式を導くための概要を示す．

円弧要素の座標原点  $o$  を通る母線上の変位増分  $u_o$ ， $v_o$ ， $w_o$  および  $\varphi$  を円筒座標の偏角  $\theta$  の 3 次式で近似する．

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_o \\ \bar{v}_o \\ \bar{w}_o \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_o & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_o & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_o & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_o & d_1 & d_2 & d_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \theta \\ \theta^2 \\ \theta^3 \end{Bmatrix} \tag{2.58}$$

ここに， $\bar{u} = u/L_e$ ， $\bar{v} = v/L_e$  および  $\bar{w} = w/L_e$  であり， $L_e = R\theta_e$  および  $\theta_e =$  円弧要素の中心角である．

また，要素両端  $i, j$  での自由度として次式で表す節点変位増分を採用する．

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_a &= [\bar{v}_i, \bar{w}_i, \Phi_{xi}, \varepsilon_{zi}, \bar{v}_j, \bar{w}_j, \Phi_{xj}, \varepsilon_{zj}]^T \\
\mathbf{q}_c &= [\bar{u}_i, \Phi_{yi}, \varphi_i, \dot{\varphi}_i, \bar{u}_j, \Phi_{yj}, \varphi_j, \dot{\varphi}_j]^T
\end{aligned} \tag{2.59}$$

ここに， $\dot{\varphi} = \varphi' L_e = d\varphi/d\bar{\theta}$  および  $\bar{\theta} = \theta/\theta_e$  であり，記号  $(\dot{\quad})$  は  $\bar{\theta}$  に関する微分を意味する．したがって，ベクトル  $\mathbf{q}_a$  および  $\mathbf{q}_c$  は無次元量よりなる．

式(2.39)，式(2.41a)と同じ形で表される幾何学量の増分および式(2.59)から，式(2.58)はベクトル  $\mathbf{q}_a$  および  $\mathbf{q}_c$  を用いて表される．

$$\begin{aligned}
\bar{u}_o(\bar{\theta}) &= N_u \mathbf{q}_c, & \bar{v}_o(\bar{\theta}) &= N_v \mathbf{q}_a \\
\bar{w}_o(\bar{\theta}) &= N_w \mathbf{q}_a, & \varphi(\bar{\theta}) &= N_\varphi \mathbf{q}_c
\end{aligned} \tag{2.60a}$$

ここに，

$$\begin{aligned}
N_u &= [N_1, N_2, 0, 0, N_3, N_4, 0, 0] \\
N_v &= [N_1, -\theta_e N_2, N_2, 0, N_3, -\theta_e N_4, N_4, 0] \\
N_w &= [\theta_e N_2, N_1, 0, N_2, \theta_e N_4, N_3, 0, N_4] \\
N_\varphi &= [0, 0, N_1, N_2, 0, 0, N_3, N_4]
\end{aligned} \tag{2.60b}$$

および,

$$\begin{aligned}
N_1 &= 1 - 3\bar{\theta}^2 + 2\bar{\theta}^3, & N_2 &= \bar{\theta} - 2\bar{\theta}^2 + \bar{\theta}^3 \\
N_3 &= 3\bar{\theta} - 2\bar{\theta}^3, & N_4 &= -\bar{\theta}^2 + \bar{\theta}^3
\end{aligned} \tag{2.60c}$$

である.

さらに, その他の幾何学量の増分の定義に従って, 式(2.60a)を用いると,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_z(\bar{\theta}) &= B_z q_a, & \Phi_x(\bar{\theta}) &= B_{\phi_x} q_a, & \Phi_y(\bar{\theta}) &= B_{\phi_y} q_c \\
\dot{\Phi}_x(\bar{\theta}) &= \dot{B}_{\phi_x} q_a, & \dot{\Phi}_y(\bar{\theta}) &= \dot{B}_{\phi_y} q_c \\
\dot{\varphi}(\bar{\theta}) &= \dot{B}_\varphi q_c, & \ddot{\varphi}(\bar{\theta}) &= \ddot{B}_\varphi q_c
\end{aligned} \tag{2.61}$$

となる. また,  $S_n$  状態の変位および幾何学量は式(2.60a)および式(2.61)において,  $q_a$  および  $q_c$  をそれぞれ  $q_a^0$  および  $q_c^0$  として得られる. なお, 1行8列のベクトル  $B_z, B_{\phi_x}, \dots$  は付録2.3に示す.

式(2.46f)および式(2.51)における増分量に対して, 式(2.60a)および式(2.61)を代入すると, 式(2.50)における変位・幾何学量の増分およびその変分はすべて, 節点変位増分  $q_a$ ,  $q_c$  およびその変分  $\delta q_a^T$ ,  $\delta q_c^T$  で表すことができる. 得られた式を変分  $\delta q_a^T$  および  $\delta q_c^T$  について整理し, 変分の任意性から, これらの係数を零とおくことによって節点変位増分と荷重増分に関する剛性方程式が得られる. すなわち,

$$\begin{bmatrix} K_{aa} + N^0 & K_{ac} + T^0 \\ (K_{ac} + T^0)^T & (K_{cc} + M^0 + M_n^0)\mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_a \\ q_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_a - r_a^0 \\ (f_c - r_c^0)\mu \end{Bmatrix} \tag{2.62}$$

となる. ここに,  $\mu = I_y/I_x$ ,  $I_x = \int_A y^2 dA$  および  $I_y = \int_A x^2 dA$  である. また, それぞれのマトリックスおよびベクトルは文献(35)に従って次のように表される.

(a)マトリックス  $K_{aa}$ ,  $K_{ac}$  および  $K_{cc}$  はそれぞれ8行8列の無次元化された剛性マトリックスであり, その具体的内容を付録2.4に示す.

(b)マトリックス  $N^0$ ,  $T^0$ ,  $M^0$  および  $M_n^0$  はそれぞれ8行8列の無次元化された初期応力マト

リックスであり，その内容を付録2.5に示す．

(c)ベクトル  $f_a$  および  $f_c$  は荷重増分であり，次式で表される．

$$f_a = \frac{1}{\theta_e} \int_0^{\theta_e} (\bar{p}_y N_v^T + \bar{p}_\theta N_w^T) d\theta \quad (2.63a)$$

$$f_c = \frac{1}{\theta_e} \int_0^{\theta_e} \left\{ \bar{p}_x N_u^T + (\bar{m}_\theta \cos\varphi^\circ + \bar{m}_n \sin\varphi^\circ) N_\varphi^T \right\} d\theta \quad (2.63b)$$

ここに，無次元量を次のように定義した．

$$\begin{aligned} \bar{p}_x &= \frac{p_x L_e^3}{EI_y}, & \bar{p}_y &= \frac{p_y L_e^3}{EI_x}, & \bar{p}_\theta &= \frac{p_\theta L_e^3}{EI_x} \\ \bar{m}_\theta &= \frac{m_\theta L_e^2}{EI_y}, & \bar{m}_n &= \frac{m_n L_e^2}{EI_y}, \end{aligned} \quad (2.63c)$$

(d)残差ベクトル  $r_a^\circ$  および  $r_c^\circ$  は式(2.50b) から出てくる項であり，次式で表される．

$$\begin{aligned} r_a^\circ &= \frac{1}{\theta_e} \int_0^{\theta_e} \left\{ \bar{N}^\circ B_z^T + (\bar{N}^{\circ*} \dot{\Phi}_x^\circ + \bar{M}_\omega^\circ \theta_e \dot{\varphi}^\circ \mu \cos\varphi^\circ \right. \\ &\quad \left. + \bar{M}_{xy}^\circ \dot{\varphi}^\circ \cos\varphi^\circ - \bar{M}_{yy}^\circ \mu \dot{\varphi}^\circ \sin\varphi^\circ - \bar{T}_{zs}^\circ \theta_e \mu \sin\varphi^\circ \right) B_{\phi_x}^T \\ &\quad \left. - (\bar{M}_x^\circ \cos\varphi^\circ + \bar{M}_y^\circ \mu \sin\varphi^\circ - \bar{M}_\omega^\circ \mu \theta_e \sin\varphi^\circ) \dot{B}_{\phi_x}^T \right\} d\theta - f_a^\circ \end{aligned} \quad (2.64a)$$

$$\begin{aligned} r_c^\circ &= \frac{1}{\theta_e} \int_0^{\theta_e} \left[ \left\{ \bar{N}^{\circ*} \dot{\Phi}_y^\circ / \mu - \bar{M}_\omega^\circ \theta_e \dot{\varphi}^\circ \sin\varphi^\circ - (\bar{M}_{xy}^\circ \sin\varphi^\circ \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \bar{M}_{yy}^\circ \mu \cos\varphi^\circ) \dot{\varphi}^\circ / \mu - \bar{T}_{zs}^\circ \theta_e \cos\varphi^\circ \right\} B_{\phi_y}^T \right. \\ &\quad \left. + (\bar{M}_x^\circ \sin\varphi^\circ / \mu - \bar{M}_y^\circ \cos\varphi^\circ + \bar{M}_\omega^\circ \theta_e \cos\varphi^\circ) \dot{B}_{\phi_y}^T \right. \\ &\quad \left. + \left\{ (\bar{M}_x^\circ \cos\varphi^\circ + \bar{M}_y^\circ \mu \sin\varphi^\circ) \dot{\Phi}_y^\circ / \mu + (\dot{\Phi}_x^\circ + \theta_e) (\bar{M}_x^\circ \sin\varphi^\circ \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \bar{M}_y^\circ \mu \cos\varphi^\circ) / \mu - \bar{M}_\omega^\circ \theta_e (\dot{\Phi}_y^\circ \sin\varphi^\circ - \dot{\Phi}_x^\circ \cos\varphi^\circ + \dot{\varphi}^\circ \beta_5) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \dot{\varphi}^\circ \bar{M}_{xy}^\circ \beta_5 / \mu - \dot{\varphi}^\circ \bar{M}_{yy}^\circ \beta_4 - \bar{T}_{zs}^\circ \beta_4 \theta_e \right\} N_\varphi^T \right. \\ &\quad \left. + (\bar{K}^{\circ*} \dot{\varphi}^\circ + \bar{M}_\omega^\circ \beta_4 \theta_e + \bar{M}_{xy}^\circ \beta_4 / \mu - \bar{M}_{yy}^\circ \beta_5 + \bar{T}_{zs}^\circ) \dot{B}_\varphi^T \right. \\ &\quad \left. - \bar{M}_\omega^\circ \ddot{B}_\varphi^T \right] d\theta - f_c^\circ \end{aligned} \quad (2.64b)$$

ここに， $\beta_4$  および  $\beta_5$  は式(2.57)に定義した量であり， $f_a^\circ$  および  $f_c^\circ$  は  $S_n$  状態の荷重ベク

トルであってそれぞれ式(2.63a)および式(2.63b)の荷重を表す $\bar{p}_x$ 等に記号 $^{\circ}$ を付けたものである。また、式(2.56a～i)で表される断面力を次のように無次元化した。

$$\begin{aligned} \bar{N}^{\circ} &= \frac{N^{\circ} L_e^2}{EI_x} \quad , \quad \bar{M}_x^{\circ} = \frac{M_x^{\circ} L_e}{EI_x} \quad , \quad \bar{M}_y^{\circ} = \frac{M_y^{\circ} L_e}{EI_y} \\ \bar{K}^{\circ} &= \frac{K^{\circ}}{EI_y} \quad , \quad \bar{M}_{\omega}^{\circ} = \frac{M_{\omega}^{\circ}}{EI_y} \quad , \quad \bar{M}_{xy}^{\circ} = \frac{M_{xy}^{\circ} L_e}{EI_x} \\ \bar{M}_{yy}^{\circ} &= \frac{M_{yy}^{\circ} L_e}{EI_y} \quad , \quad \bar{T}_{zs}^{\circ} = \frac{T_{zs}^{\circ} L_e}{EI_y} \end{aligned} \quad (2.65)$$

ところで、式(2.50)における $\left[ \quad \right]_0^{\theta_e}$ の項は材端力のなす仮想仕事であり、それによる初期応力マトリックスおよび荷重ベクトルは式(2.62)に考慮されていない。

まず、式(2.55)で定義した材端力を、図-2.6に示すような無次元化した節点力で置き換える。すなわち、サフィックス $i$ および $j$ を付けて、

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{xi} &= -\frac{\tilde{Q}_{xi} L_e^2}{EI_y} \quad , \quad \bar{Q}_{yi} = -\frac{\tilde{Q}_{yi} L_e^2}{EI_x} \quad , \quad \bar{N}_i = -\frac{\tilde{N}_i L_e^2}{EI_x} \\ \bar{M}_{xi} &= \frac{\tilde{M}_{xi} L_e}{EI_x} \quad , \quad \bar{M}_{yi} = \frac{\tilde{M}_{yi} L_e}{EI_y} \quad , \quad \bar{M}_{zi} = -\frac{\tilde{M}_{zi} L_e}{EI_y} \\ \bar{M}_{\omega i} &= \frac{\tilde{M}_{\omega i}}{EI_y} \quad , \quad \bar{M}_{ni} = \frac{\tilde{M}_{ni} L_e}{EI_y} \end{aligned} \quad (2.66)$$

で表す。また、節点 $j$ の節点力と材端力の関係は上式において $i$ を $j$ に置き換え、符号を逆にしたものとする。

(e)  $S_n$ 状態の節点力による初期応力マトリックスを $\tilde{T}^{\circ}$ および $\tilde{M}^{\circ}$ とすれば、8行8列の要素は

$$\tilde{T}^{\circ}(3,3) = -\bar{M}_{xi}^{\circ} \sin \phi_i^{\circ} + \bar{M}_{yi}^{\circ} \mu \cos \phi_i^{\circ} + \bar{M}_{\omega i}^{\circ} \theta_e \mu \cos \phi_i^{\circ} \quad (2.67a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{M}^{\circ}(2,3) &= -\bar{M}_{xi}^{\circ} \cos \phi_i^{\circ} / \mu - (\bar{M}_{yi}^{\circ} + \bar{M}_{\omega i}^{\circ} \theta_e) \sin \phi_i^{\circ} \\ &= \tilde{M}^{\circ}(3,2) \end{aligned} \quad (2.67b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{M}^{\circ}(3,3) &= -\bar{M}_{zi}^{\circ} \sin \phi_i^{\circ} + \bar{M}_{ni}^{\circ} \cos \phi_i^{\circ} - \bar{M}_{xi}^{\circ} (\Phi_{xi}^{\circ} \cos \phi_i^{\circ} - \Phi_{yi}^{\circ} \sin \phi_i^{\circ}) / \mu \\ &\quad - (\bar{M}_{yi}^{\circ} + \bar{M}_{\omega i}^{\circ} \theta_e) (\Phi_{xi}^{\circ} \sin \phi_i^{\circ} + \Phi_{yi}^{\circ} \cos \phi_i^{\circ}) \end{aligned} \quad (2.67c)$$

である。節点力は式(2.66)の無次元量に対応し、 $S_n$  状態の量であることを表す記号 $^\circ$ を付けてある。 $\tilde{T}^\circ(7,7)$ 、 $\tilde{M}^\circ(6,7)$ 、 $\tilde{M}^\circ(7,6)$  および  $\tilde{M}^\circ(7,7)$  はそれぞれ  $\tilde{T}^\circ(3,3)$ 、 $\tilde{M}^\circ(2,3)$ 、 $\tilde{M}^\circ(3,2)$  および  $\tilde{M}^\circ(3,3)$  のサフィックス  $i$  を  $j$  に置き換えたものであり、その他の要素は零である。このようにして得られる節点力による初期応力マトリックスを考慮すると、式(2.62)のマトリックス  $T^\circ$  および  $M^\circ$  はそれぞれ  $T^\circ - \tilde{T}^\circ$  および  $M^\circ - \tilde{M}^\circ$  に書き換えられる。

(f) 一方、節点力による荷重ベクトルを  $\tilde{f}_a$  および  $\tilde{f}_c$  とすれば、

$$\tilde{f}_a = [\tilde{f}_{ai} \quad , \quad \tilde{f}_{aj}]^T \quad \tilde{f}_c = [\tilde{f}_{ci} \quad , \quad \tilde{f}_{cj}]^T \quad (2.68a)$$

で表される。ここに、

$$\tilde{f}_{ai} = [\bar{Q}_{yi} \quad , \quad \bar{N}_i \quad , \quad \bar{M}_{xi} \cos \varphi_i^\circ + (\bar{M}_{yi} - \bar{M}_{\omega i} \theta_e) \mu \sin \varphi_i^\circ \quad , \quad 0] \quad (2.68b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{ci} = & [\bar{Q}_{xi} \quad , \quad -\bar{M}_{xi} \sin \varphi_i^\circ / \mu + (\bar{M}_{yi} - \bar{M}_{\omega i} \theta_e) \cos \varphi_i^\circ \quad , \\ & \{\bar{M}_{zi} + (\bar{M}_{yi} - \bar{M}_{\omega i} \theta_e) \Phi_{xi}^\circ - \bar{M}_{xi} \Phi_{yi}^\circ / \mu\} \cos \varphi_i^\circ + \{\bar{M}_{ni} - (\bar{M}_{yi} \\ & - \bar{M}_{\omega i} \theta_e) \Phi_{yi}^\circ - \bar{M}_{xi} \Phi_{xi}^\circ / \mu\} \sin \varphi_i^\circ \quad , \quad \bar{M}_{\omega i}] \end{aligned} \quad (2.68c)$$

であり、 $\tilde{f}_{aj}$  および  $\tilde{f}_{cj}$  はそれぞれ式(2.68b) および式(2.68c)でサフィックス  $i$  を  $j$  に置き換えたものである。このようにして得られる節点力による荷重ベクトルを考慮すると、式(2.62)のベクトル  $f_a$  および  $f_c$  はそれぞれ  $f_a + \tilde{f}_a$  および  $f_c + \tilde{f}_c$  に書き換えられる。また、式(2.64)の  $f_a^\circ$  および  $f_c^\circ$  もそれぞれ  $f_a^\circ + \tilde{f}_a^\circ$  および  $f_c^\circ + \tilde{f}_c^\circ$  となる。ここに、 $\tilde{f}_a^\circ$  および  $\tilde{f}_c^\circ$  はそれぞれ式(2.68b) および式(2.68c)を  $S_n$  状態の節点力で書き換えたものである。

#### (4) 計算方法

解析は、剛性方程式(2.62)において、与えられた荷重増分に対する節点変位増分を求めることに帰着し、それを図-2.7に示したフローチャートにより説明する。図では式(2.62)を各分割要素について重ね合せたものをあらためて次式のように表している。

$$K_{eff} q_n = f_n - r_m^\circ \quad (2.69)$$

ここに、 $K_{eff}$  は有効剛性マトリックスとよび、剛性マトリックスおよび初期応力マトリックスの和を表す。また、荷重ステップをサフィックス  $n$  および  $m$  で表す。

a) 荷重増分は予想最高荷重に対する比で与え、その比は 0.1 ~ 0.004 の範囲で前回までの荷重ステップに対する荷重-変形挙動により決定する (step ①)。

b) まず、前荷重ステップ ( $n-1$ ) での不平衡力はないものとして、すなわち  $r_m^\circ = 0$  として式(2.69)を解き、変位増分  $q_n^\circ$  を求める (step ②)。

- c) 式(2.64)で得られる残差  $r_m^0$  を荷重とみなして、これによる変位増分  $q_m^T$  を求める (step ③④).
- d) 得られた変位増分  $q_m^T$  が荷重増分  $f_n$  に対する変位増分  $q_n^0$  の1%以内のとき、収束したのものとして次の荷重ステップへ移る (step ⑤⑥).
- e) 収束しないとき、新たに計算される残差  $r_m^0$  について c) ~ d) を繰り返す。このとき、図-2.1のように板幅方向に分割した微小断面を有する円弧要素の平均垂直ひずみを算定する。完全弾塑性体の仮定に従って弾性核を算定し、非弾性剛性値を求める (step ⑦⑧)。  
ただし、簡単のため1つの円弧要素内で弾性核は一定であるとする。したがって、新たに得られた弾性核と降伏部分の応力分布から計算することのできる断面力と既に求まっている断面力は異なる。この不平衡力も残差として処理する。
- f) c) ~ e) が収束しないとき (経験的に  $m > m_{max} = 15$ )、荷重増分が不適当であると考え、すべての状態量を荷重ステップ ( $n-1$ ) の終了状態に戻した後、2分の1の荷重増分について b) から繰り返す (step ⑩⑪⑫)。
- g) f) において荷重増分が予想最高荷重の0.002倍以下になったとき、(経験的に) 最高荷重が得られたものとする (step ⑬)。

なお、剛性マトリックス (式 (A2.16) ~ (A2.18))、初期応力マトリックス (式 (A2.20))、荷重ベクトル (式 (2.63)) および残差ベクトル (式 (2.64)) の積分は Gauss の求積法を用い、その積分点は文献 35) と同じく 15 とした。

## 2.4 数値計算結果

### (1) 伝達マトリックス法および剛性法による精度の比較

まず、伝達マトリックス法を用いた解析法の妥当性を検討するために、福本・西田<sup>29)</sup> の溶接I形曲線ばりの耐荷力実験結果との比較を行う。

図-2.8は、スパン中央でフランジ上に載荷され、両端でねじりと水平変位についても単純支持されたはりの荷重-変形曲線を示している。横軸はスパン中央の断面回転角  $\theta$  および図心の水平変位  $v$  を表す。供試体の諸元は、断面がI-250×100×6×8 mm、曲線スパン長  $L_s = 2800$  mm、曲率半径  $R = 3500$  mm、中心角  $\alpha = 4.6$  度 (図-2.9参照) であり、ヤング率  $E = 2.1 \times 10^6$  kg/cm<sup>2</sup> (206 kN/mm<sup>2</sup>)、降伏点応力度  $\sigma_Y = 3200$  kg/cm<sup>2</sup> (314 N/mm<sup>2</sup>) およびポアソン比  $\nu = 0.3$  である。

曲線ばりの半分を長さ方向に 14 分割し，格間伝達マトリックスを求めるための数値積分 (Runge-Kutta) の分割数は 3 とした．また，残留応力度は文献 (29) に与えられたものを用いた (図-2.8)．通常，3~4 回の収束計算で所定の精度 (1%) 内の解を得たが，耐力近くでは収束が悪くなる傾向を示した．図-2.8 に示すように解析値は実験値をよく近似しており，他の実験値との比較においてもほぼ同様な結果を得た．

剛性法を用いた解析法の妥当性については第 4 章において，溶接 I 形桁の横ねじれ座屈実験結果との比較により検討する．

第 3 章では初期変形を有するはりの横ねじれ耐力を求めるために，伝達マトリックス法を適用する．伝達マトリックス法は一般に演算誤差が累積しやすく，微小な曲率の影響を検討する場合，その影響が累積誤差によって打ち消されることも考えられる．そこで，比較的誤差が累積しにくい剛性法による解と伝達マトリックス法による解の比較を行った．図-2.10(a)，(b) は両端で面外および面内変形に対して単純支持されたはり (I-200×100×5.6×8.5 mm) が一様曲げを受けるときの荷重とスパン中央の断面回転角の関係を表している．図はそれぞれスパン長  $L$  を 1375 mm および 2560 mm とし，スパン中央でスパン長の約  $L/1000$  の初期横変形と図-2.1 の圧延タイプの残留応力 ( $\sigma_{rc} = 0.25 \sigma_Y$ ) を用いた場合の解析結果を示している．伝達マトリックス法および剛性法の結果は非常によく一致し，初期横変形を有するはりに伝達マトリックス法を適用しても，伝達マトリックス法特有の累積誤差の影響はないことがわかる．なお，分割要素数は共に 20 であるが，剛性法の解は荷重増分理論に基づいた高精度の計算手法を用いているため，CPU-Time は伝達マトリックス法の場合の約 3 倍を要している．

## (2) 曲線ばりの耐力

曲線ばりの耐力について検討するために，次式で表わされる無次元量を用いる．

$$\delta_r = \frac{M_U}{M_P} \quad (2.70a)$$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{M_P}{M_E}} \quad (2.70b)$$

これらは，直線ばりの横ねじれ座屈強度を表すために用いられているパラメータである．本章では， $M_U$  は曲線ばりの耐力を表わし，両端に等しいモーメント荷重が作用する場合はそのモーメント荷重で表わし，スパン中央に集中荷重  $P$  が作用する場合および等分布荷重  $q$  が作用する場合はそれぞれ  $P_U L_S / 4$  および  $q_U L_S^2 / 8$  で表わす．また， $M_P$  は断面の全塑性モーメントであり， $M_E$  は曲線ばりの円弧長と同じスパン長を有する直線ばりの弾性座屈モーメントを表わす．すなわち，

$$M_E = C_m \frac{\pi}{L_s} \sqrt{EI_z GK_T \left( 1 + \frac{\pi^2 EI_\omega}{GK_T L_s^2} \right)} \quad (2.71)$$

で表わされ、 $EI_z$ 、 $GK_T$  および  $EI_\omega$  はそれぞれ弱軸まわりの曲げ剛性、St. Venant のねじり剛性およびそり剛性であり、 $C_m$  は荷重の種類によって決る係数である<sup>30)</sup>。

以下の数値計算例に用いる I 形断面は I-200×100×5.6×8.5 mm (IPE200, 以後 SECTION A とよぶ) と I-600×220×12×19 mm (IPE600, 以後 SECTION B とよぶ) の 2 種である。はり は水平変位およびねじりに対しても両端で単純支持されているものとし、残留応力は図-2.1 のように仮定する。

図-2.11 および図-2.12 は圧延ばりの横ねじれ耐荷力曲線を表し、それぞれ両端に等モーメント荷重が作用する場合およびスパン中央で図心に集中荷重が作用する場合である。対象とした曲線ばりの中心角は  $\alpha = 0.5, 5$  および  $10$  度であり、それぞれ  $L_s/8R = 1/917, 1/92$  および  $1/46$  に対応する。なお、パラメータ  $L_s/8R$  はアーチのライズ比に相当するもので、偏心率と直線支間長の比を表す。また、 $\alpha = 0$  に対する曲線は同じ条件の下で固有値問題として解析した直線ばりの横ねじれ座屈曲線であり<sup>31)</sup>、実験値<sup>29), 32)</sup> は荷重タイプおよび境界条件を考慮した横ねじれ座屈強度式(3.3)により計算された点にプロットされている。図から断面の違いによる耐荷力曲線の差は一様な傾向を示し、SECTION B が常に低く、また、中心角が大きくなるとその差も大きくなる傾向を示す。中心角  $\alpha = 0.5$  度は初期変形程度 ( $L_s/8R = 1/1000$ ) の曲線ばりであり、この耐荷力曲線は直線ばりの実験値 ( $\alpha = 0$ ) に対する下限を与えるようである。また、曲線ばりの実験値と解析値についても良い結果を示している(図-2.12)。

図-2.13 は荷重タイプによる耐荷力曲線の相違を示している。 $\alpha$  および  $\bar{\lambda}$  が小さいほど耐荷力曲線の差が大きくなっている。これは降伏域のスパン方向への広がり程度が荷重タイプによって異なるためと思われる。すなわち、 $\bar{\lambda}$  が小さくなると非弾性域に達するが、集中荷重の場合にはスパン中央付近だけに降伏が生じ、はり全体としての剛性の低下はモーメント荷重の場合に比べて小さいためである。一方、 $\alpha$  が大きくなると幾何学的な影響が大きくなり、荷重タイプによる降伏域の差を生ずる以前の低い応力レベルで耐力を失うために、荷重タイプによる差が比較的小さくなる。

図-2.14 は、耐荷力に対する残留応力の分布型および大きさの影響について示している。残留応力は図-2.1 に示す圧延型と溶接型でありその大きさは図-2.14 中の表のようにした。また、荷重は両端に等モーメントを作用させた。図から、中心角  $\alpha$  が大きくなると残留応力の影響がほとんどなくなることがわかる。しかしながら、 $\alpha = 0.5$  度の場合には、残留応力の影響が顕著である。また、溶接型で  $\sigma_{rc} = 0.5\sigma_Y$  の場合は、 $\bar{\lambda} < 0.45$  において  $\alpha = 5$  度の耐荷力が  $\alpha = 0.5$  度の耐荷力より大きくなっている。これは図-2.15 に示すように降伏域の広がり方が大きく影響しているものと思われる。

図-2.15 は  $\bar{\lambda} = 0.4$  ( $L_s = 800$  mm) のはりに端モーメント  $M/M_p = 0.79$  が作用しているときの降伏域の広がりを示している。中心角  $\alpha = 0.5$  および 5 度ではそり応力の大きさが異なること、およびはり両端のモーメント荷重の作用方向が同じでないことが図のような降伏域の相違を生ぜしめているものと思われる。

## 2.5 結論

本章においては、曲線ばりの有限変位弾塑性解析に対する二つの手法を示した。まず、2.2 節では伝達マトリックス法を適用する方法を示した。すなわち、格間伝達マトリックスの誘導にあたっては、各要素ごとに弾性核が長さ方向に一定であるものとし、降伏部分が負担する力は外力として置き換える方法を用いた。また、格点伝達マトリックスは、格点で弾性核の中心が不連続になることを考慮して求めた。次に、2.3 節では増分理論に基づいた剛性法を適用する方法を示した。すなわち、文献 35) の手法を非弾性解析および任意の断面形状へ適用できるように拡張した。

次に、解析法に基づいた数値計算プログラムを開発し、曲線ばりの実験値との比較により解析法の妥当性を検証した。また、曲線ばりの耐荷力解析を行い、断面寸法、荷重タイプおよび残留応力の影響について検討した。

[付録 2.1] 式 (2.9) の係数  $A_1 \sim A_4$

$$A_1 = -\frac{N}{A_e} \quad (\text{A2.1})$$

$$A_2 = -C_1 M_z - \frac{y_m z_m M_y + z_m M_w}{I_\omega} + \left( C_1 M_y - \frac{y_m z_m M_z}{I_\omega} \right) \varphi \quad (\text{A2.2})$$

$$A_3 = C_2 M_y + \frac{y_m z_m M_z + y_m M_w}{I_\omega} + \left( C_2 M_z - \frac{y_m z_m M_y}{I_\omega} \right) \varphi \quad (\text{A2.3})$$

$$A_4 = -\frac{y_m M_y + z_m M_z + M_w}{I_\omega} + \frac{z_m M_y - y_m M_z}{I_\omega} \varphi \quad (\text{A2.4})$$

ここに、 $I_\omega$ 、 $C_1$  および  $C_2$  は式 (2.17) に定義されるものであり、また、記号  $M$ 、 $N$  および  $\varphi$  はそれぞれ収束計算における 1 回前に得られた曲げモーメントあるいはバイモーメント、軸方向力および断面回転角である。

【付録 2.2】 式(2.24)における行列  $T_k$  およびベクトル  $U_k$

行列  $T_k$  およびベクトル  $U_k$  の成分は次のようであり,

$$T_{2,5} = -\{(a_X - Y_c)\sin\beta - (b_X - Z_c)\cos\beta\}P_X \quad (\text{A2.5})$$

$$T_{4,5} = \{(a_X - Y_c)\cos\beta + (b_X - Z_c)\sin\beta\}P_X \quad (\text{A2.6})$$

$$T_{5,5} = (a_Y - Y_c)P_Y + (b_Z - Z_c)P_Z \quad (\text{A2.7})$$

$$U_1 = P_Y\cos\beta + P_Z\sin\beta \quad (\text{A2.8})$$

$$U_2 = -\{(a_X - Y_c)\cos\beta + (b_X - Z_c)\sin\beta\}P_X \quad (\text{A2.9})$$

$$U_3 = -P_Y\sin\beta + P_Z\cos\beta \quad (\text{A2.10})$$

$$U_4 = -\{(a_X - Y_c)\sin\beta - (b_X - Z_c)\cos\beta\}P_X \quad (\text{A2.11})$$

$$U_5 = (b_Y - Z_c)P_Y - (a_Z - Y_c)P_Z \quad (\text{A2.12})$$

$$U_6 = -P_X\omega_c \quad (\text{A2.13})$$

$$U_7 = P_X \quad (\text{A2.14})$$

他の成分はすべてゼロである.

【付録 2.3】 ベクトル  $B_z$ ,  $B_{\phi_x}$  . . . の内容

$$B_z = \{ \theta_e (-4\bar{\theta} + 6\bar{\theta}^2 - 2\bar{\theta}^3), (\theta_e^2 - 6)\bar{\theta} + (6 - 2\theta_e^2)\bar{\theta}^2 + \theta_e^2\bar{\theta}^3,$$

$$\theta_e (-\bar{\theta} + 2\bar{\theta}^2 - \bar{\theta}^3), 1 - 4\bar{\theta} + 3\bar{\theta}^2, 2\theta_e (-\bar{\theta} + \bar{\theta}^3),$$

$$6\bar{\theta} - (6 + \theta_e^2)\bar{\theta}^2 + \theta_e^2\bar{\theta}^3, \theta_e (\bar{\theta}^2 - \bar{\theta}^3), -2\bar{\theta} + 3\bar{\theta}^2 \}$$

$$B_{\phi_x} = \{ (\theta_e^2 - 6)\bar{\theta} + (6 - 2\theta_e^2)\bar{\theta}^2 + \theta_e^2\bar{\theta}^3, \theta_e (4\bar{\theta} - 6\bar{\theta}^2 + 2\bar{\theta}^3),$$

$$1 - 4\bar{\theta} + 3\bar{\theta}^2, \theta_e (\bar{\theta} - 2\bar{\theta}^2 + \bar{\theta}^3), 6\bar{\theta} - (6 + \theta_e^2)\bar{\theta}^2 + \theta_e^2\bar{\theta}^3,$$

$$2\theta_e (\bar{\theta} - \bar{\theta}^3), -2\bar{\theta} + 3\bar{\theta}^2, \theta_e (-\bar{\theta}^2 + \bar{\theta}^3) \}$$

$$B_{\phi_y} = \{ -6(\bar{\theta} - \bar{\theta}^2), 1 - 4\bar{\theta} + 3\bar{\theta}^2, 0, 0, 6(\bar{\theta} - \bar{\theta}^2),$$

$$-2\bar{\theta} + 3\bar{\theta}^2, 0, 0 \}$$

$$\begin{aligned}\dot{B}_{\phi_x} &= \frac{dB_{\phi_x}}{d\bar{\theta}} \quad , \quad \dot{B}_{\phi_y} = \frac{dB_{\phi_y}}{d\bar{\theta}} \quad , \quad \dot{B}_\varphi = \frac{dN_\varphi}{d\bar{\theta}} \\ \ddot{B}_\varphi &= \frac{d\dot{B}_\varphi}{d\bar{\theta}}\end{aligned}\tag{A2.15a ~g}$$

【付録 2.4】 剛性マトリックス  $K_{aa}$  ,  $K_{ac}$  ,  $K_{cc}$

$$\begin{aligned}K_{aa} = & \frac{1}{\theta_e} \int_0^{\theta_e} \{ F_1 B_z^T B_z + \dot{\varphi}^0 \{ F_1^* \Phi_x^0 + (F_{16} + F_4 \theta_e) \cos \varphi^0 \\ & - F_{17} \sin \varphi^0 \} (B_z^T B_{\phi_x} + B_{\phi_x}^T B_z) + \{ (F_4 \theta_e - F_3 \mu) \sin \varphi^0 \\ & - F_2 \cos \varphi^0 \} (B_z^T \dot{B}_{\phi_x} + \dot{B}_{\phi_x}^T B_z) + \{ F_1^{* *} \Phi_x^{0^2} + 2 \Phi_x^0 \dot{\varphi}^0 (F_4 \theta_e \cos \varphi^0 \\ & + F_{16} \cos \varphi^0 - F_{17} \sin \varphi^0) + \dot{\varphi}^{0^2} \cos^2 \varphi^0 (F_{10} \mu \theta_e^2 + 2 F_{26} \theta_e + F_{24}) \\ & - 2 \dot{\varphi}^{0^2} \cos \varphi^0 \sin \varphi^0 (F_{25} + F_{27} \theta_e) + (F_{22} \dot{\varphi}^{0^2} \\ & + F_{28} \mu \theta_e^2) \sin^2 \varphi^0 \} B_{\phi_x}^T B_{\phi_x} \\ & + \{ (F_9 - 2 F_7 \theta_e + F_{10} \theta_e^2) \mu \sin^2 \varphi^0 + F_8 \cos^2 \varphi^0 \\ & + 2 (F_5 - F_6 \theta_e) \sin \varphi^0 \cos \varphi^0 \} \dot{B}_{\phi_x}^T \dot{B}_{\phi_x} \\ & + \{ (F_4^* \theta_e - F_3^* \mu) \Phi_x^0 \sin \varphi^0 - F_2^* \Phi_x^0 \cos \varphi^0 + (F_{10} \mu \theta_e^2 \\ & - F_7 \mu \theta_e - F_{20} \mu + F_{23} + F_{26} \theta_e) \dot{\varphi}^0 \sin \varphi^0 \cos \varphi^0 - F_6 \theta_e \dot{\varphi}^0 \cos^2 \varphi^0 \\ & + F_{21} \dot{\varphi}^0 (\sin^2 \varphi^0 - \cos^2 \varphi^0) - F_{27} \theta_e \dot{\varphi}^0 \sin^2 \varphi^0 \} (B_{\phi_x}^T \dot{B}_{\phi_x} \\ & + \dot{B}_{\phi_x}^T B_{\phi_x}) \} d\theta\end{aligned}\tag{A2.16}$$

$$\begin{aligned}K_{ac} = & \frac{1}{\theta_e} \int_0^{\theta_e} \{ \{ F_1^* \Phi_y^0 - (F_4 \theta_e \sin \varphi^0 + F_{16} \sin \varphi^0 \\ & + F_{17} \cos \varphi^0) \dot{\varphi}^0 \} B_z^T B_{\phi_y} + \{ F_2 \sin \varphi^0 + (F_4 \theta_e - F_3 \mu) \cos \varphi^0 \} B_z^T \dot{B}_{\phi_y} \\ & - F_4 B_z^T \ddot{B}_\varphi - (F_3 \mu C_1 - F_2 C_2 + F_4 \theta_e C_3 + F_{16} \dot{\varphi}^0 C_4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + F_{17} \dot{\varphi}^{\circ} C_5 \mathbf{B}_z^T N_{\varphi} + (F_4 \theta_e C_5 + F_{16} C_5 - F_{17} C_4 + F_{11}^* \dot{\varphi}^{\circ}) \mathbf{B}_z^T \dot{\mathbf{B}}_{\varphi} \\
& + \{ F_{11}^{**} \Phi_x^{\circ} \Phi_y^{\circ} + \dot{\varphi}^{\circ} \Phi_y^{\circ} (F_4^* \theta_e \cos \varphi^{\circ} + F_{16}^* \cos \varphi^{\circ} - F_{17}^* \sin \varphi^{\circ}) \\
& - \dot{\varphi}^{\circ} \Phi_x^{\circ} (F_4^* \theta_e \sin \varphi^{\circ} + F_{16}^* \sin \varphi^{\circ} + F_{17}^* \cos \varphi^{\circ}) \\
& - (F_{10} \mu \theta_e^2 - F_{22} + F_{24} + 2F_{26} \theta_e) \dot{\varphi}^{\circ 2} \cos \varphi^{\circ} \sin \varphi^{\circ} \\
& + (F_{27} \theta_e + F_{25}) (\sin^2 \varphi^{\circ} - \cos^2 \varphi^{\circ}) \dot{\varphi}^{\circ 2} \\
& + F_{28} \theta_e \dot{\varphi}^{\circ 2} \cos^2 \varphi^{\circ} \} \mathbf{B}_{\phi_x}^T \mathbf{B}_{\phi_y} + \{ (F_4^* \theta_e \cos \varphi^{\circ} - F_3^* \mu \cos \varphi^{\circ} \\
& + F_2^* \sin \varphi^{\circ}) \Phi_x^{\circ} - (F_{20} \mu + F_7 \theta_e \mu - F_{26} \theta_e - F_{10} \theta_e \mu) \dot{\varphi}^{\circ} \cos^2 \varphi^{\circ} \\
& - F_{23} \dot{\varphi}^{\circ} \sin^2 \varphi^{\circ} + (F_6 \theta_e + 2F_{21} - F_{27} \theta_e) \dot{\varphi}^{\circ} \sin \varphi^{\circ} \cos \varphi^{\circ} \} \mathbf{B}_{\phi_x}^T \dot{\mathbf{B}}_{\phi_y} \\
& + \{ (F_2^* C_2 - F_3^* \mu C_1 - F_4^* \theta_e C_3) \Phi_x^{\circ} + (F_6 C_2 - F_5 \mu C_1 \\
& - F_{10} \mu \theta_e C_3) \theta_e \dot{\varphi}^{\circ} \cos \varphi^{\circ} + (F_{21} C_2 - F_{20} \mu C_1 \\
& - F_{26} C_3 \theta_e) \dot{\varphi}^{\circ} \cos \varphi^{\circ} + (F_{21} C_1 - F_{23} C_2 + F_{27} \theta_e C_3) \dot{\varphi}^{\circ} \sin \varphi^{\circ} \\
& - (F_{16} C_4 + F_{17} F_5) \dot{\varphi}^{\circ} \Phi_x^{\circ} - (F_{24} + F_{26} \theta_e) C_4 \dot{\varphi}^{\circ 2} \cos \varphi^{\circ} \\
& - (F_{25} + F_{27} \theta_e) C_5 \dot{\varphi}^{\circ 2} \cos \varphi^{\circ} + (F_{25} C_4 + F_{22} C_5) \dot{\varphi}^{\circ 2} \sin \varphi^{\circ} \\
& + F_{28} \mu \theta_e C_5 \sin \varphi^{\circ} \} \mathbf{B}_{\phi_x}^T N_{\varphi} \\
& + \{ F_{11}^{**} \dot{\varphi}^{\circ} \Phi_x^{\circ} + (F_{14} \theta_e + F_{18}) \dot{\varphi}^{\circ 2} \cos \varphi^{\circ} - F_{19} \mu \dot{\varphi}^{\circ 2} \sin \varphi^{\circ} \\
& + (F_4^* \theta_e + F_{16}) C_5 \Phi_x^{\circ} + (F_{10} \mu \theta_e^2 + 2F_{26} \theta_e + F_{24}) C_5 \dot{\varphi}^{\circ} \cos \varphi^{\circ} \\
& - (F_{25} + F_{27} \theta_e) \dot{\varphi}^{\circ} C_5 \sin \varphi^{\circ} - F_{17}^* \Phi_x^{\circ} C_4 + F_{22} \dot{\varphi}^{\circ} C_4 \sin \varphi^{\circ} \\
& - (F_{25} + F_{27} \theta_e) C_4 \dot{\varphi}^{\circ} \cos \varphi^{\circ} - F_{28} \mu \theta_e \sin \varphi^{\circ} \} \mathbf{B}_{\phi_x}^T \dot{\mathbf{B}}_{\varphi} \\
& - \{ F_4^* \Phi_x^{\circ} + (F_{10} \mu \theta_e + F_{26}) \dot{\varphi}^{\circ} \cos \varphi^{\circ} - F_{27} \dot{\varphi}^{\circ} \sin \varphi^{\circ} \} \mathbf{B}_{\phi_x}^T \ddot{\mathbf{B}}_{\varphi} \\
& + \{ (F_4^* \theta_e - F_3^* \mu) \Phi_y^{\circ} \sin \varphi^{\circ} - F_2^* \Phi_y^{\circ} \cos \varphi^{\circ} + (F_7 \\
& - F_{10} \theta_e) \mu \theta_e \dot{\varphi}^{\circ} \sin \varphi^{\circ} + F_6 \dot{\varphi}^{\circ} \theta_e \cos \varphi^{\circ} + F_{23} \dot{\varphi}^{\circ} \cos^2 \varphi^{\circ} + (F_{20} \mu \\
& - F_{26} \theta_e) \sin^2 \varphi_e + (2F_{21} + F_{27} \theta_e) \dot{\varphi}^{\circ} \sin \varphi^{\circ} \cos \varphi^{\circ} \} \dot{\mathbf{B}}_{\phi_x}^T \mathbf{B}_{\phi_y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \{ (F_9\mu - F_8 - 2F_7\mu\theta_e + F_{10}\mu\theta_e^2) \sin\varphi^\circ \cos\varphi^\circ \\
& + (F_5 - F_6\theta_e) (\cos^2\varphi^\circ - \sin^2\varphi^\circ) \} \dot{B}_{\phi_x}^T \dot{B}_{\phi_y} \\
& + \{ (F_9\mu C_1 - F_5 C_2 + F_6\theta_e C_2 - F_7\mu\theta_e C_1 + F_7\mu\theta_e C_3 \\
& - F_{10}\mu\theta_e^2 C_3) \sin\varphi^\circ + (F_5 C_1 - F_2 C_2 + F_6\theta_e C_3) \cos\varphi^\circ \\
& + (F_{20}\mu - F_{26}\theta_e) C_4 \dot{\varphi}^\circ \sin\varphi^\circ + (F_{21} - F_{27}\theta_e) C_5 \dot{\varphi}^\circ \sin\varphi^\circ \\
& + (F_{21} C_4 + F_{23} C_5) \dot{\varphi}^\circ \cos\varphi^\circ \} \dot{B}_{\phi_x}^T N_\varphi \\
& + \{ (F_{14}\theta_e - F_{13}\mu) \dot{\varphi}^\circ \sin\varphi^\circ - F_{12} \dot{\varphi}^\circ \cos\varphi^\circ + (F_{10}\theta_e^2 \mu - F_7\theta_e \mu \\
& + F_{26}\theta_e - F_{20}\mu) C_5 \sin\varphi^\circ - (F_6\theta_e + F_{21}) C_5 \cos\varphi^\circ \\
& + (F_{21} - F_{27}\theta_e) C_4 \sin\varphi^\circ - F_{23} C_4 \cos\varphi^\circ \} \dot{B}_{\phi_x}^T \dot{B}_\varphi \\
& + \{ F_6 \cos\varphi^\circ + (F_7 - F_{10}\theta_e) \mu \sin\varphi^\circ \} \dot{B}_{\phi_x}^T \dot{B}_\varphi \} d\theta \quad (A2.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{cc} = & \frac{1}{\theta_e} \int_0^{\theta_e} \{ \{ F_1^{**} \eta \Phi_y^{\circ 2} - 2\eta \Phi_y^\circ \dot{\varphi}^\circ (F_4^* \theta_e + F_{16}) \sin\varphi^\circ \\
& - 2\eta \Phi_y^\circ \dot{\varphi}^\circ F_{17} \cos\varphi^\circ + (F_{10}\theta_e^2 + 2F_{26}\eta\theta_e + F_{24}\eta) \dot{\varphi}^{\circ 2} \sin^2\varphi^\circ \\
& - (F_{28}\theta_e^2 - F_{22}\eta \dot{\varphi}^{\circ 2}) \cos^2\varphi^\circ \\
& + 2(F_{25} + F_{27}\theta_e) \eta \dot{\varphi}^{\circ 2} \cos\varphi^\circ \sin\varphi^\circ \} B_{\phi_y}^T B_{\phi_y} \\
& + \{ (F_4^* \theta_e \eta - F_3^*) \Phi_y^\circ \cos\varphi^\circ + F_2^* \eta \Phi_y^\circ \sin\varphi^\circ + (F_7\theta_e + F_{20} \\
& - F_{23}\eta - F_{26}\eta\theta_e - F_{10}\theta_e^2) \dot{\varphi}^\circ \sin\varphi^\circ \cos\varphi^\circ \\
& + (F_{21} - F_{27}\theta_e) \eta \dot{\varphi}^\circ \cos^2\varphi^\circ \\
& - (F_6\theta_e + F_{21}) \eta \dot{\varphi}^\circ \sin^2\varphi^\circ \} (B_{\phi_y}^T \dot{B}_{\phi_y} + \dot{B}_{\phi_y}^T B_{\phi_y}) \\
& + \{ (F_2^* \eta C_2 - F_3^* C_1 - F_4^* \eta \theta_e C_3 - F_{16}^* \eta \dot{\varphi}^\circ C_4 - F_{17}^* \eta \dot{\varphi}^\circ C_5) \Phi_y^\circ \\
& + (F_7\theta_e + F_{20}) C_1 \dot{\varphi}^\circ \sin\varphi^\circ - (F_6\theta_e + F_{21}) C_2 \eta \dot{\varphi}^\circ \sin\varphi^\circ \\
& + (F_{10}\theta_e + F_{26}\eta) \theta_e C_3 \dot{\varphi}^\circ \sin\varphi^\circ + (F_{24} + F_{26}\theta_e) \dot{\varphi}^{\circ 2} \eta C_4 \sin\varphi^\circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (F_{25} + F_{27}\theta_e)\dot{\varphi}^{\circ 2}\eta C_5 \sin\varphi^\circ + (F_{21}C_1 - F_{23}C_2 \\
& + F_{27}\theta_e C_3)\eta\dot{\varphi}^\circ \cos\varphi^\circ + (F_{22}C_5 + F_{27}C_4)\eta\dot{\varphi}^{\circ 2}\cos\varphi^\circ \\
& + F_{28}\theta_e^2 C_5 \cos\varphi^\circ \} (B_{\phi_y}^T N_\varphi + N_\varphi^T B_{\phi_y}) \\
& + \{F_{11}^{**}\eta\dot{\varphi}^\circ \Phi_y^\circ - (F_{14}\theta_e + F_{18})\eta\dot{\varphi}^{\circ 2}\sin\varphi^\circ - F_{19}\dot{\varphi}^{\circ 2}\cos\varphi^\circ \\
& + (F_4\theta_e C_5 + F_{16}^* C_5 - F_{17}^* C_4)\eta\Phi_y^\circ + (F_{25} + F_{27}\theta_e)C_4\eta\dot{\varphi}^\circ \sin\varphi^\circ \\
& - (F_{10}\theta_e^2 + 2F_{26}\eta\theta_e + F_{24}\eta)C_5\dot{\varphi}^\circ \sin\varphi^\circ + (F_{22}C_4 - F_{25}C_5 \\
& - F_{27}\theta_e C_5)\eta\dot{\varphi}^\circ \cos\varphi^\circ - F_{28}\theta_e \cos\varphi^\circ \} (B_{\phi_y}^T \dot{B}_\varphi + \dot{B}_\varphi^T B_{\phi_y}) \\
& + \{ (F_{10}\theta_e + F_{26}\eta)\dot{\varphi}^\circ \sin\varphi^\circ + F_{27}\eta\dot{\varphi}^\circ \cos\varphi^\circ - F_4^* \eta\Phi_y^\circ \} (B_{\phi_y}^T \ddot{B}_\varphi \\
& + \ddot{B}_\varphi^T B_{\phi_y}) + \{ (F_9 + F_{10}\theta_e^2 - 2F_7\theta_e)\cos^2\varphi^\circ + F_8\eta\sin^2\varphi^\circ \\
& + 2\eta(F_6\theta_e - F_5)\cos\varphi^\circ \sin\varphi^\circ \} \dot{B}_{\phi_y}^T \dot{B}_{\phi_y} \\
& + \{ (F_8C_2 - F_5C_1 - F_6\theta_e C_3)\eta\sin\varphi^\circ + (F_9C_1 - F_7\theta_e C_1 - F_5\eta C_2 \\
& + F_6\eta\theta_e C_2 + F_7\theta_e C_3 - F_{10}\theta_e^2)\cos\varphi^\circ \\
& + (F_{20} - F_{26}\eta\theta_e)C_4\dot{\varphi}^\circ \cos\varphi^\circ + (F_{21} - F_{27}\theta_e)\eta C_5\dot{\varphi}^\circ \cos\varphi^\circ \\
& - (F_{21}C_4 + F_{23}C_5)\eta\dot{\varphi}^\circ \sin\varphi^\circ \} (\dot{B}_{\phi_y}^T N_\varphi + N_\varphi^T \dot{B}_{\phi_y}) \\
& + \{ (F_{14}^*\eta\theta_e - F_{13}^*)\dot{\varphi}^\circ \cos\varphi^\circ + F_{12}^*\eta\dot{\varphi}^\circ \sin\varphi^\circ \\
& + (F_{10}\theta_e - F_7)C_5\theta_e \cos\varphi^\circ + F_6\eta\theta_e C_5 \sin\varphi^\circ + (F_{21}C_5 \\
& - F_{23}C_4)\eta\sin\varphi^\circ + (F_{21}C_4\eta - F_{20}C_5)\cos\varphi^\circ \\
& + (F_{26}C_5 - F_{27}C_4)\theta_e\eta\cos\varphi^\circ \} (\dot{B}_{\phi_y}^T \dot{B}_\varphi + \dot{B}_\varphi^T \dot{B}_{\phi_y}) \\
& + \{ (F_7 - F_{10}\theta_e)\cos\varphi^\circ - F_6\eta\sin\varphi^\circ \} (\dot{B}_{\phi_y}^T \ddot{B}_\varphi + \ddot{B}_\varphi^T \dot{B}_{\phi_y}) \\
& + \{ C_1^2 F_9 + C_2^2 F_8 + C_3^2 F_{10}\theta_e^2 + C_4^2 \eta\dot{\varphi}^{\circ 2} F_{24} + C_5^2 (F_{28}\theta_e^2 \\
& + \eta\dot{\varphi}^{\circ 2} F_{22}) + 2(C_1 C_3 F_7\theta_e - C_1 C_2 \eta F_5 - C_2 C_3 \eta F_6) \\
& + 2\dot{\varphi}^\circ (C_1 C_4 F_{20} + C_1 C_5 \eta F_{21} - C_2 C_4 \eta F_{21} - C_2 C_5 \eta F_{23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_3 C_4 \theta_e \eta F_{26} + C_3 C_5 \theta_e \eta F_{27} + C_4 C_5 \eta F_{25} \} N_\phi^T N_\phi \\
& + \{ (-F_{13}^* C_1 + F_{12}^* \eta C_2 - F_{14}^* \eta \theta_e C_3 - F_{18} \eta \dot{\phi}^\circ C_4 + F_{19} \dot{\phi}^\circ C_5) \dot{\phi}^\circ \\
& + F_{25} \eta \dot{\phi}^\circ C_4^2 - (F_{25} + F_{27} \theta_e) \eta \dot{\phi}^\circ C_5^2 + (F_6 \theta_e + F_{21}) \eta C_2 C_5 \\
& - (F_7 \theta_e + F_{20}) C_1 C_5 - (F_{10} \theta_e + F_{26} \eta) \theta_e C_3 C_5 - (F_{24} \\
& + F_{26} \theta_e) \eta \dot{\phi}^\circ C_4 C_5 + (F_{21} C_1 - F_{23} C_2 + F_{27} \theta_e C_3) \eta C_4 \\
& - F_{28} \theta_e C_4 C_5 \} (N_\phi^T \dot{B}_\phi + \dot{B}_\phi^T N_\phi) \\
& + \{ F_7 C_1 - F_6 \eta C_2 + F_{10} \theta_e C_3 + (F_{26} C_4 + F_{27} C_5) \eta \dot{\phi}^\circ \} (N_\phi^T \ddot{B}_\phi + \ddot{B}_\phi^T N_\phi) \\
& + \{ F_{15} \dot{\phi}^{\circ 2} + 2(F_{14}^* \eta \theta_e C_5 + F_{18} \eta C_5 / 2 - F_{19} C_4) \dot{\phi}^\circ \\
& + F_{22} \eta C_4^2 + (F_{10} \theta_e^2 + 2F_{26} \eta \theta_e + F_{24} \eta) C_5^2 - 2(F_{25} \\
& + F_{27} \theta_e) \eta C_4 C_5 + F_{28} C_5 \} \dot{B}_\phi^T \dot{B}_\phi \\
& - \{ F_{14}^* \eta \dot{\phi}^\circ - F_{27} \eta C_4 + (F_{10} \theta_e + F_{26} \eta) C_5 \} (\dot{B}_\phi^T \ddot{B}_\phi + \ddot{B}_\phi^T \dot{B}_\phi) \\
& + F_{10} \ddot{B}_\phi^T \ddot{B}_\phi \} d\theta \tag{A2.18}
\end{aligned}$$

ここに，式(2.52)に定義した断面量を次のように無次元化した。

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{A_e L_e^2}{I_x} & , & \quad F_2 = \frac{J_x L_e}{I_x} & , & \quad F_3 = \frac{J_y L_e}{I_y} \\
F_4 &= \frac{J_\omega}{I_x} & , & \quad F_5 = \frac{J_{xy}}{I_x} & , & \quad F_6 = \frac{J_{x\omega}}{I_x L_e} \\
F_7 &= \frac{J_{y\omega}}{I_y L_e} & , & \quad F_8 = \frac{J_{xx}}{I_x} & , & \quad F_9 = \frac{J_{yy}}{I_y} \\
F_{10} &= \frac{J_{\omega\omega}}{I_y L_e^2} & , & \quad F_{11} = \frac{J_p}{I_x} & , & \quad F_{12} = \frac{J_{px}}{I_x L_e} \\
F_{13} &= \frac{J_{py}}{I_y L_e} & , & \quad F_{14} = \frac{J_{p\omega}}{I_x L_e^2} & , & \quad F_{15} = \frac{J_{pp}}{I_y L_e^2} \\
F_{16} &= \frac{J_{xy\rho} L_e}{I_x} & , & \quad F_{17} = \frac{J_{xx\rho} L_e}{I_x} & , & \quad F_{18} = \frac{J_{pxy}}{I_x L_e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{19} &= \frac{J_{pxx}}{I_y L_e} & , & \quad F_{20} = \frac{D_1}{I_y} & , & \quad F_{21} = \frac{D_2}{I_x} \\
F_{22} &= \frac{D_3}{I_x} & , & \quad F_{23} = \frac{D_4}{I_x} & , & \quad F_{24} = \frac{D_5}{I_x} \\
F_{25} &= \frac{D_6}{I_x} & , & \quad F_{26} = \frac{D_7}{I_x L_e} & , & \quad F_{27} = \frac{D_8}{I_x L_e} \\
F_{28} &= \frac{J_G}{EI_y} & , & \quad \mu = \frac{I_y}{I_x} & , & \quad \eta = \frac{1}{\mu}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1 &= (\dot{\Phi}_x^\circ + \theta_e) \cos \varphi^\circ - \dot{\Phi}_y^\circ \sin \varphi^\circ \\
C_2 &= (\dot{\Phi}_x^\circ + \theta_e) \sin \varphi^\circ + \dot{\Phi}_y^\circ \cos \varphi^\circ \\
C_3 &= (\dot{\Phi}_y^\circ + \Phi_x^\circ \dot{\varphi}^\circ) \sin \varphi^\circ - (\dot{\Phi}_x^\circ - \Phi_y^\circ \dot{\varphi}^\circ) \cos \varphi^\circ \\
C_4 &= \Phi_y^\circ \cos \varphi^\circ + \Phi_x^\circ \sin \varphi^\circ & , & \quad C_5 = \Phi_x^\circ \cos \varphi^\circ - \Phi_y^\circ \sin \varphi^\circ \quad (\text{A2.19})
\end{aligned}$$

また、式 (A2.17) および式 (A2.18) における上付記号\*は式 (A2.19) で断面量に上付記号\*を付けることを表す (たとえば、 $F_1^*$  は式 (A2.19) で  $A_e$  を  $A_e^*$  とすればよい)。

【付録 2.5】 初期応力マトリックス  $N^\circ$  ,  $T^\circ$  ,  $M^\circ$  ,  $K_n^\circ$

$$N^\circ = \frac{1}{\theta_e} \int_0^{\theta_e} (\bar{N}^{\circ*} B_{\phi_x}^T B_{\phi_x}) d\theta \quad (\text{A2.20a})$$

$$\begin{aligned}
T^\circ &= \frac{1}{\theta_e} \int_0^{\theta_e} \left[ \{ \bar{M}_x^\circ \sin \varphi^\circ - (\bar{M}_y^\circ - \bar{M}_\omega^\circ \theta_e) \mu \cos \varphi^\circ \} \dot{B}_{\phi_x}^T N_\varphi \right. \\
&\quad + \{ (\bar{M}_{xy}^\circ + \bar{M}_\omega^\circ \mu \theta_e) \cos \varphi^\circ - \bar{M}_{yy}^\circ \mu \sin \varphi^\circ \} B_{\phi_x}^T \dot{B}_\varphi \\
&\quad \left. - \{ (\bar{M}_{xy}^\circ + \bar{M}_\omega^\circ \mu \theta_e) \dot{\varphi}^\circ \sin \varphi^\circ + (\bar{M}_{yy}^\circ \mu \dot{\varphi}^\circ + \bar{T}_{zs}^\circ \theta_e) \cos \varphi^\circ \} B_{\phi_x}^T N_\varphi \right] d\theta \\
&\quad (\text{A2.20b})
\end{aligned}$$

$$M^\circ = \frac{1}{\theta_e} \int_0^{\theta_e} \left[ \bar{N}^{\circ*} B_{\phi_y}^T B_{\phi_y} + \bar{K}^{\circ*} \dot{B}_\varphi^T \dot{B}_\varphi \right]$$

$$\begin{aligned}
& - \{ (\bar{M}_\omega^\circ \theta_e + \bar{M}_{xy}^\circ \eta) \dot{\varphi}^\circ \cos \varphi^\circ \\
& - (\bar{M}_{yy}^\circ \dot{\varphi}^\circ - \bar{T}_{zs}^\circ \theta_e) \sin \varphi^\circ \} (B_{\phi_y}^T N_\phi + N_\phi^T B_{\phi_y}) \\
& - \{ (\bar{M}_{xy}^\circ \eta + \bar{M}_\omega^\circ \theta_e) \sin \varphi^\circ + \bar{M}_{yy}^\circ \cos \varphi^\circ \} (B_{\phi_y}^T \dot{B}_\phi + \dot{B}_\phi^T B_{\phi_y}) \\
& + \{ (\bar{M}_y^\circ - \bar{M}_\omega^\circ \theta_e) \sin \varphi^\circ + \bar{M}_x^\circ \eta \cos \varphi^\circ \} (\dot{B}_{\phi_y}^T N_\phi + N_\phi^T \dot{B}_{\phi_y}) \\
& + \{ \bar{M}_x^\circ \eta C_1 + \bar{M}_y^\circ C_2 - \bar{M}_\omega^\circ \theta_e (C_5 \dot{\varphi}^\circ + C_2 - \theta_e \sin \varphi^\circ) \\
& - \bar{M}_{xy}^\circ \eta \dot{\varphi}^\circ C_5 + (\bar{M}_{yy}^\circ \dot{\varphi}^\circ + \bar{T}_{zs}^\circ \theta_e) C_4 \} N_\phi^T N_\phi \\
& - \{ \bar{M}_{yy}^\circ C_5 + (\bar{M}_{xy}^\circ \eta + \bar{M}_\omega^\circ \theta_e) C_4 \} (N_\phi^T \dot{B}_\phi + \dot{B}_\phi^T N_\phi) \Big] d\theta \quad (A2.20c)
\end{aligned}$$

$$M_n^\circ = \frac{1}{\theta_e} \int_0^{\theta_e} (\bar{m}_\theta^\circ \sin \varphi^\circ + \bar{m}_n^\circ \cos \varphi^\circ) N_\phi^T N_\phi d\theta \quad (A2.20d)$$

ここに，荷重および断面力は式(2.63c)および式(2.65)のように無次元化した．

用いた記号 I [ 2.2節に対して ]

- $A_e$  : 弾性核の断面積
- $B_x, B_\xi$  : 有限変位理論によるねじりモーメント
- $B_y, B_z, B_\eta, B_\zeta$  : 有限変位理論による曲げモーメント
- $E$  : 弾性係数
- $F$  : 格間伝達マトリックス
- $G$  : せん断弾性係数
- $H$  : 有限変位理論による軸方向力
- $I_\omega$  : そり2次モーメント
- $I_y, I_z$  :  $y$  および  $z$  軸に関する断面2次モーメント
- $K_T$  : St. Venantのねじり定数
- $L_S$  : 断面図心を通る円弧長さ
- $M_E$  : 理想弾性座屈モーメント
- $M_P$  : 断面の全塑性モーメント
- $M_U$  : 耐荷力に対応するモーメント
- $M_x, M_\xi$  : 微小変位理論あるいは収束計算で1回前に得られたねじりモーメント

- $M_y, M_z, M_\eta, M_\zeta$  : 微小変位理論あるいは収束計算で1回前に得られた曲げモーメント  
 $N$  : 微小変位理論あるいは収束計算で1回前に得られた軸方向力  
 $P$  : 格点伝達マトリックス  
 $P_X, P_Y, P_Z$  :  $X, Y$ および $Z$ 軸方向の集中荷重  
 $Q_y, Q_z$  : 微小変位理論あるいは収束計算で1回前に得られたせん断力  
 $q_Y, q_Z$  :  $Y$ および $Z$ 軸方向の分布荷重  
 $R$  : 断面図心に関する曲率半径  
 $t_x$  : 分布ねじりモーメント荷重  
 $u$  : 弾性核の図心における $x$ 軸方向変位  
 $V$  : 状態量ベクトル  
 $V_y, V_z$  : 有限変位理論によるせん断力  
 $v$  : 弾性核の図心における $y$ 軸方向変位  
 $w$  : 弾性核の図心における $z$ 軸方向変位  
 $\alpha$  : 曲線ばりの中心角  
 $\beta$  :  $y$ 軸および $Y$ 軸のなす角  
 $\varepsilon$  : 部材軸方向の全ひずみ  
 $\varepsilon_r$  : 残留ひずみ  
 $\varepsilon_Y$  : 降伏ひずみ  
 $\theta$  : 断面回転角  
 $\sigma$  : 部材軸方向の直応力  
 $\omega$  : 正規化したそり関数

用いた記号Ⅱ { 2.3節に対して }

- $A_e$  : 弾性核  
 $A_p$  : 降伏断面  
 $E$  : 弾性係数  
 $f_a, f_c$  : 荷重増分ベクトル  
 $G$  : せん断弾性係数  
 $I_x, I_y$  :  $x, y$ 軸まわりの断面2次モーメント  
 $K_{aa}, K_{ac}, K_{cc}$  : 剛性マトリックス  
 $K_{eff}$  : 有効剛性マトリックス  
 $L_e$  : 円弧要素長

- $M^0, M_n^0$  : 初期応力マトリックス  
 $N^0$  : 初期応力マトリックス  
 $q_a, q_c$  : 節点変位増分ベクトル  
 $q_x^0, q_y^0, q_\theta^0$  : 体積力  
 $r_a^0, r_c^0$  : 残差ベクトル  
 $R$  : 座標原点の曲率半径  
 $T^0$  : 初期応力マトリックス  
 $u, v, w$  :  $x, y, z$  方向の変位  
 $u_0, v_0, w_0$  :  $x-y$  座標原点の  $x, y, z$  方向の変位  
 $\gamma_s$  : せん断ひずみ  
 $\varepsilon_\theta$  : 直ひずみ  
 $\eta$  :  $= I_x/I_y$   
 $\theta$  : 円筒座標の偏角  
 $\theta_e$  : 円弧要素の中心角  
 $\mu$  :  $= I_y/I_x$   
 $\nu$  : ポアソン比  
 $\rho$  : 任意点の曲率半径  
 $\sigma_\gamma$  : 降伏点応力度  
 $\sigma_\theta$  : 直応力  
 $\sigma_\theta^r$  : 残留応力  
 $\tilde{\sigma}_\theta^0$  : 要素端の  $\theta$  方向の単位面積に作用する表面力  
 $\tau_s$  : せん断応力  
 $\tilde{\tau}_{x\theta}^0, \tilde{\tau}_{y\theta}^0$  : 要素端の  $x, y$  方向の単位表面力  
 $\varphi$  : 断面回転角  
 $\Phi_x, \Phi_y$  : 幾何学量 [式 (2.39)]  
 $\Psi_z$  : 幾何学量 [式 (2.39)]  
 $\omega$  : 座標原点  $o$  に関するそり関数

## 参考文献

- 1) 平井 敦，倉西 茂：曲線橋の理論について，土木技術，1958年7月。
- 2) 小西一郎：鋼橋・設計編Ⅱ，丸善，1976年1月。
- 3) 坂井藤一，長井正嗣：ブロック有限要素法による薄肉曲線桁の立体解析，土木学会論文報告集，第295号，1980年3月，pp.1-13.
- 4) 中井 博，村山泰男：ダイヤフラムを有する曲線箱桁橋のずり応力の解析と設計への応用，土木学会論文報告集，第309号，1981年5月，pp.25-39.
- 5) 倉西 茂，樋渡 滋：曲げを受ける曲線プレートガーダーのウェブプレートの弾性挙動について，土木学会論文報告集，第315号，1981年11月，pp.1-11.
- 6) 中井 博，他：曲線桁橋腹板の実績調査，橋梁と基礎，Vol.15, No.5, 1981年5月，pp.38-43.
- 7) 米沢 博，三上市蔵：曲線格子桁の極限解析について，土木学会論文集，第132号，1966年8月，pp.18-26.
- 8) 小暮 深，倉西 茂，矢吹哲哉：曲線橋の耐荷力特性について，土木学会第35回年次学術講演会講演概要集 I-128, 1980年9月。
- 9) 今井富士夫，太田俊昭：円弧格子桁の崩壊性状について，土木学会第35回年次学術講演会講演概要集 I-129, 1980年9月。
- 10) Chu, K., and Thelen, A. : Plastic Analysis of Circular Balcony Girders, Journal of the Structural Division, Proc. of ASCE, Vol.89, No.ST6, December, 1963, pp.159-186.
- 11) Imegwu, E.O. : Ultimate Strength of Plane Curved Girders, Structural Engineer, Vol.42, No.4, April, 1964, pp.129-134.
- 12) Yoo, C.H., and Heins, C.P. : Plastic Collapse of Horizontally Curved Bridge Girders, Journal of the Structural Division, Proc. of ASCE, Vol.98, No.ST4, April, 1972, pp.899-914.
- 13) 中井 博，事口寿男：曲線I桁橋の横倒れ座屈強度と設計法に関する研究（英文），土木学会論文報告集，第339号，1983年11月，pp.195-205.
- 14) 高橋 清，倉西 茂：曲線プレートガーダーフランジの面外強度について，土木学会第36回年次学術講演会講演概要集 I-161, 1981年10月。
- 15) 阪神高速道路公団：鋼構造物設計基準，第2部，4章，1978年4月。
- 16) The Task Committee on Curved Girders of the ASCE-AASHTO Committee on Flexural Members of the Committee on Metals of the Structural Division, Armstrong, W.L., Chmn. : Curved I-Girder

Bridge Design Recommendations, Journal of the Structural Division, Proc. of ASCE, Vol.103, No.ST5, May, 1977, pp.1137 - 1168.

- 17) 遠田良喜：伝達マトリックス法による薄肉開断面曲線ばりの有限変位理論の解析，土木学会論文報告集，第199号，1972年3月，pp.11-20.
- 18) 薄木征三，稼農知徳，渡辺昇：有限なねじれを考慮した薄肉曲線部材の変形解析，土木学会論文報告集，第290号，1979年10月，pp.1-15.
- 19) 薄木征三：変形を考慮した薄肉断面円弧アーチの曲げねじれ座屈，土木学会論文報告集，第263号，1977年7月，pp.35-48.
- 20) Galambos, T.V. : Structural Members and Frames, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1968 . (福本喙士，西野文雄 共訳：鋼構造部材と骨組－強度と設計－，丸善，1970年.)
- 21) 西野文雄，倉方慶夫，長谷川彰夫，奥村敏恵：軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材，土木学会論文報告集，第225号，1974年4月，pp.1-15.
- 22) 西野文雄，深沢泰晴：ひずみ場の仮定に基づく薄肉曲がりばりの静的挙動の定式化，土木学会論文報告集，第247号，1976年3月，pp.9-19.
- 23) 深沢泰晴：薄肉曲線部材の静力学的解析に関する基礎的研究，土木学会論文報告集，第110号，1964年10月，pp.30-51.
- 24) Vlasov, V.Z. (奥村敏恵ほか共訳)：薄肉弾性ばりの理論，技報堂，1967年.
- 25) 遠田良喜：伝達マトリックス法による薄肉開断面曲線ばりの2次応力問題の解析，土木学会論文報告集，第210号，1973年2月，pp.1-11.
- 26) 成岡昌夫，遠田良喜：伝達マトリックス法・コンピューターによる構造工学講座I-2-B，培風館，1974年.
- 27) Becker, G. : Ein Beitrag zur statischen Berechnung beliebig gelagerter ebener gekrümmter Stäbe mit einfach symmetrischen dünnwandigen offenen Profilen von in Stabachse veränderlichem Querschnitt unter Berücksichtigung der Wölbklufttorsion, Der Stahlbau, Heft 11, Nov., 1965, s.334 -346.
- 28) 高岡宣善：構造部材のねじり解析，共立出版，1975年.
- 29) Fukumoto, Y., and Nishida, S. : Ultimate Load Behavior of Curved I-Beams, Journal of Engineering Mechanics Division, Proc. of ASCE, Vol.107, No.EM2, April, 1981, pp.367 - 385 .
- 30) 小堀為雄，吉田博：鋼構造設計理論，森北出版，1977年.
- 31) 吉田博，井本芳宏：拘束を受けるばりの弾性および非弾性横倒れ座屈解析，土木学会論

- 文報告集，第 208 号，1972 年 12 月，pp.1 -12.
- 32) Fukumoto, Y., and Kubo, M. : An Experimental Review of Lateral Buckling of Beams and Girders, International Colloquium on Stability of Structures under Static and Dynamic Loads, ASCE, 1977, pp.541 -562.
- 33) 中井 博，北田俊行，大南亮一：曲線桁橋腹板の曲げ強度に関する実験的研究，土木学会論文報告集，第 340 号，1983 年 12 月，pp.227 -236.
- 34) 中井 博，北田俊行，大南亮一，福本和弘：曲線プレートガーダーのせん断強度に関する実験的研究，土木学会論文報告集，第 350 号，1984 年 10 月，pp.281-290.
- 35) 渡辺 昇，稼農知徳，薄木征三：薄肉曲線桁の変位場に基づく有限ねじれ変形解析，土木学会論文報告集，第317号，1982年1月，pp.31 -45.
- 36) 前川幸次，吉田 博：伝達マトリックス法による曲線 I 形ばりの耐荷力解析，土木学会論文報告集，第312号，1981年8月，pp.27 - 37 .
- 37) Yoshida, H. and Maegawa, K. : Ultimate Strength Analysis of Curved I-Beams, Journal of the Engineering Mechanics Division, Proc. of ASCE, Vol.109, No.EM1, February, 1983, pp.192 -214 .
- 38) 前川幸次，吉田 博，本多伸弘：曲率を考慮した曲線桁の有限変位解析，土木学会中部支部研究発表会，1984年3月，pp.44 - 45 .

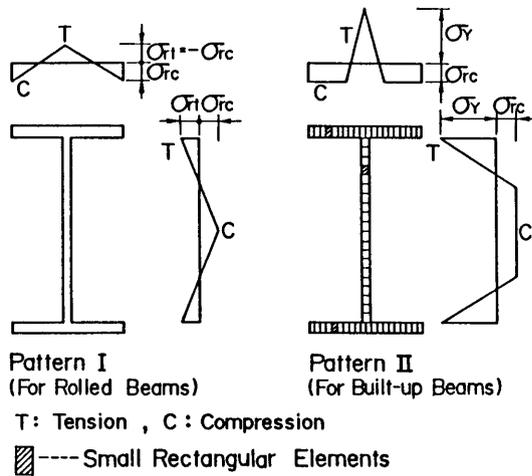


Fig. 2.1 Residual Stress Distributions

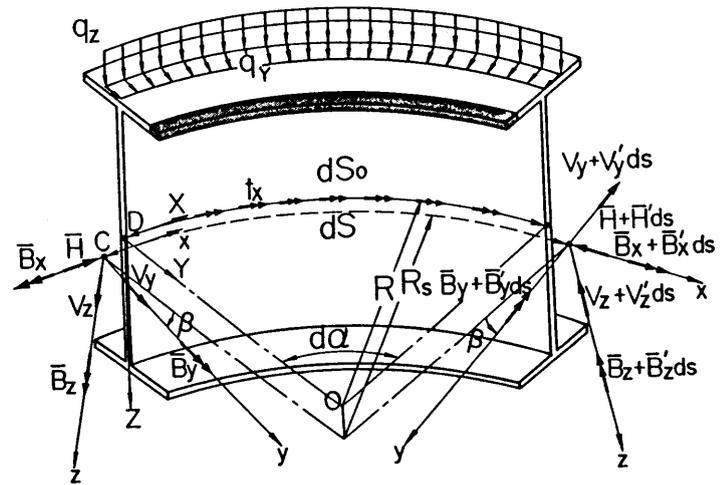


Fig. 2.2 Force and Displacement of an Infinitesimal Small Element

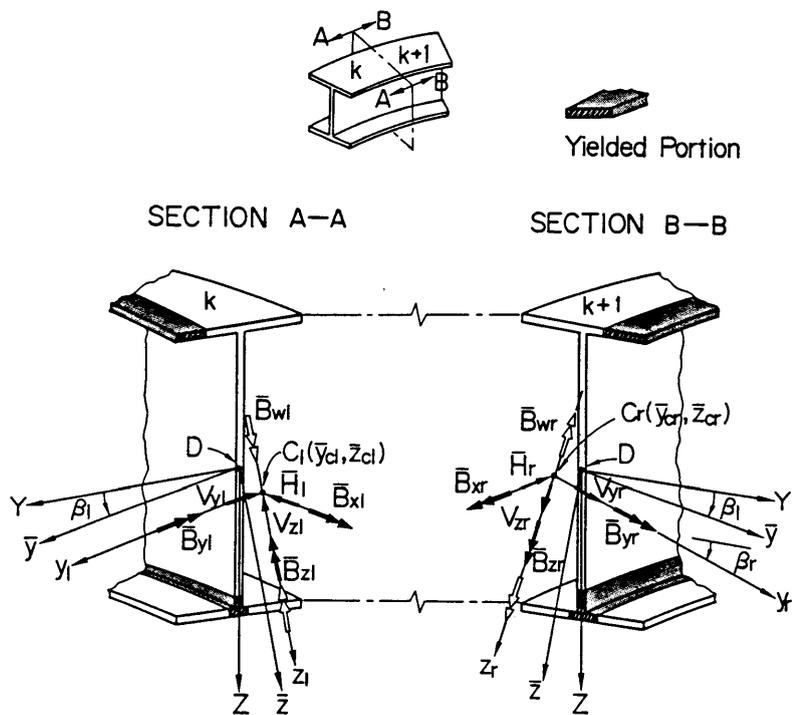


Fig. 2.3 Coordinate and Forces at Left and Right Sides of Node k

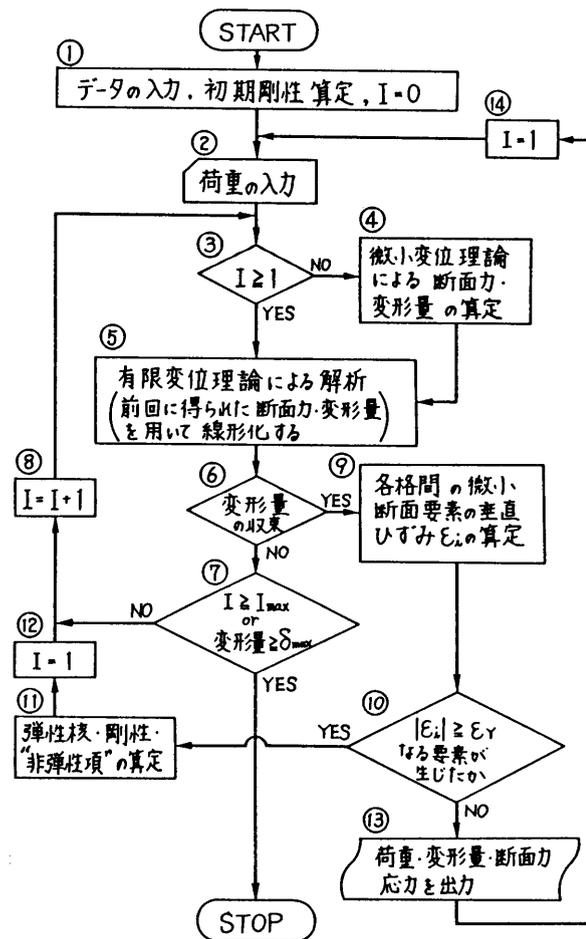


Fig. 2.4 Flow-Diagram of Numerical Calculation (T.M.M.)

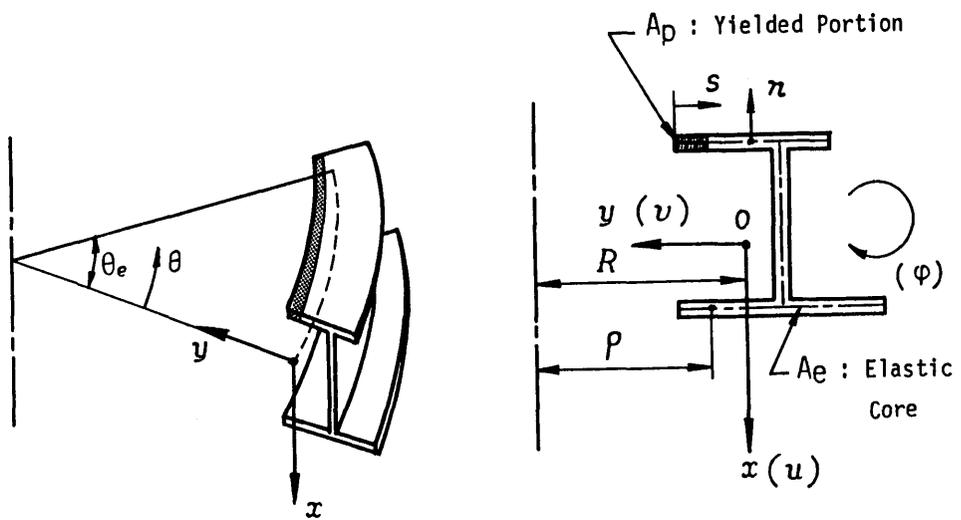


Fig. 2.5 Coordinate of a Curved Beam Element

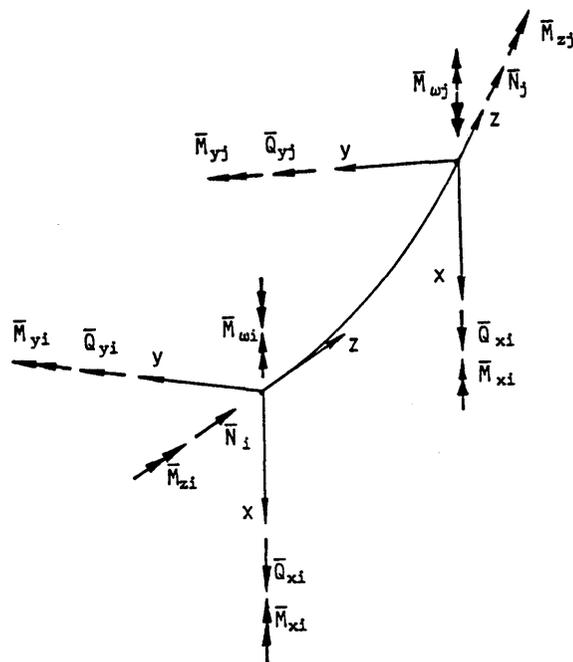


Fig. 2.6 Nodal Forces

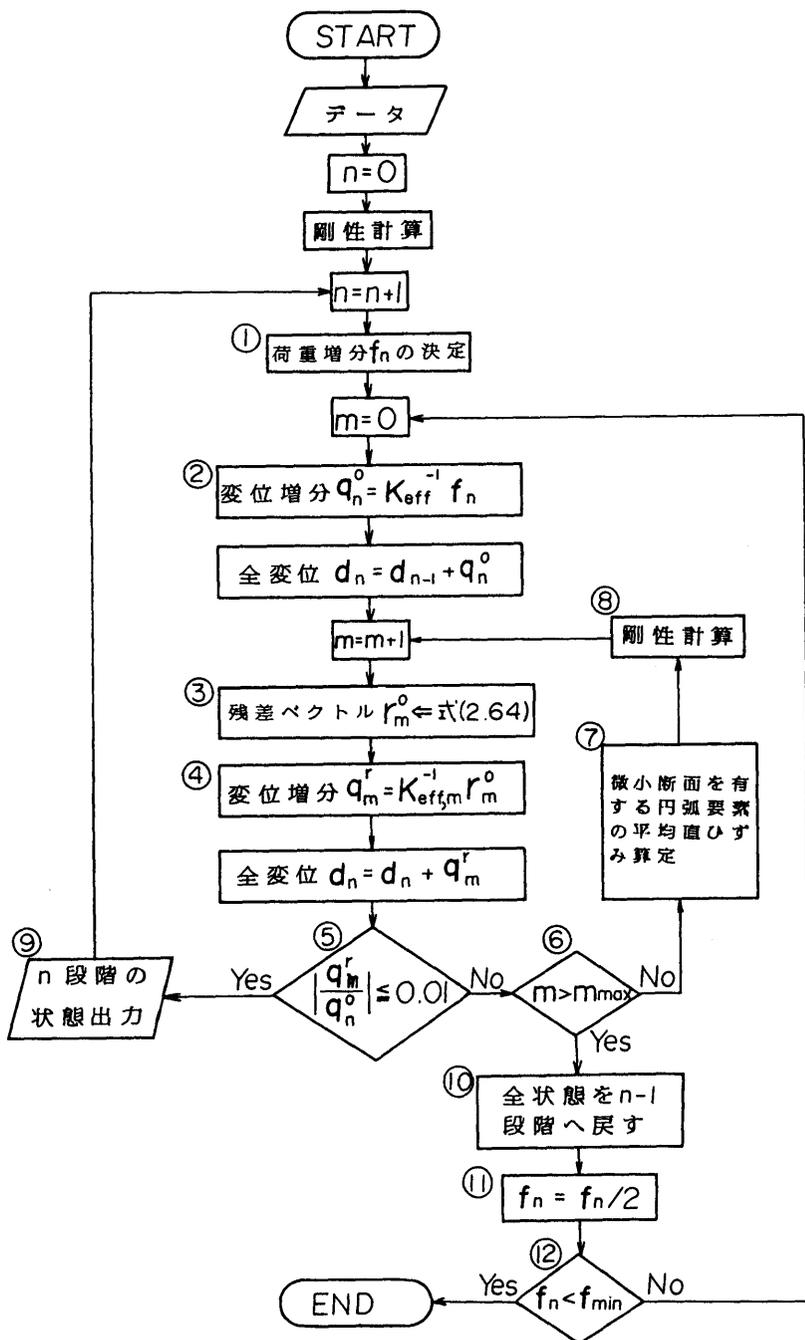


Fig. 2.7 Flow-Diagram of Numerical Calculation (F.E.M.)

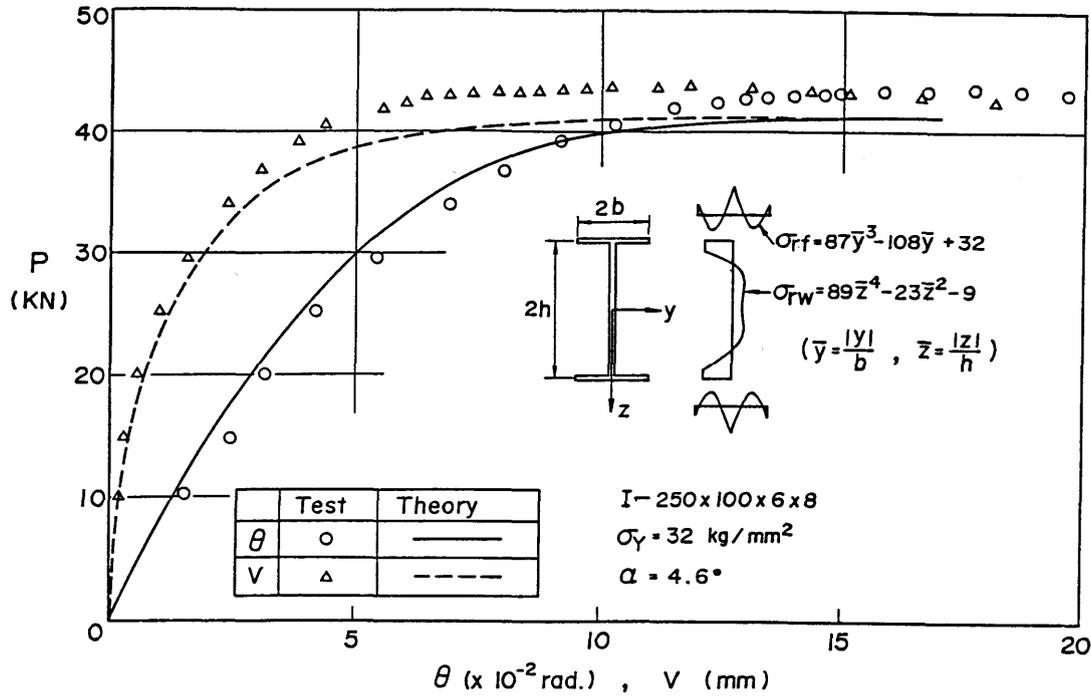


Fig. 2.8 Comparison with Test Results

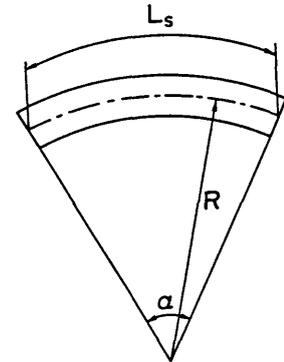


Fig. 2.9 Curved Beam

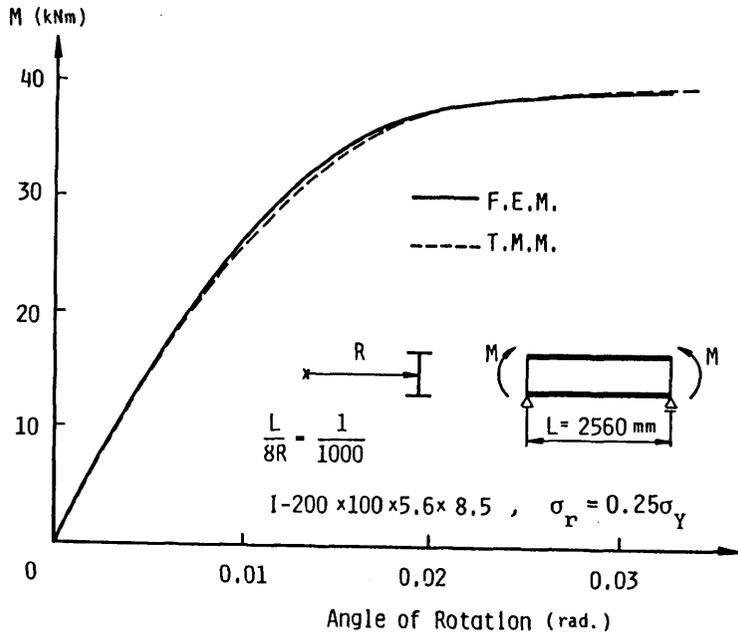


Fig. 2.10(a) Comparison between Numerical Calculations by T.M.M. and F.E.M.

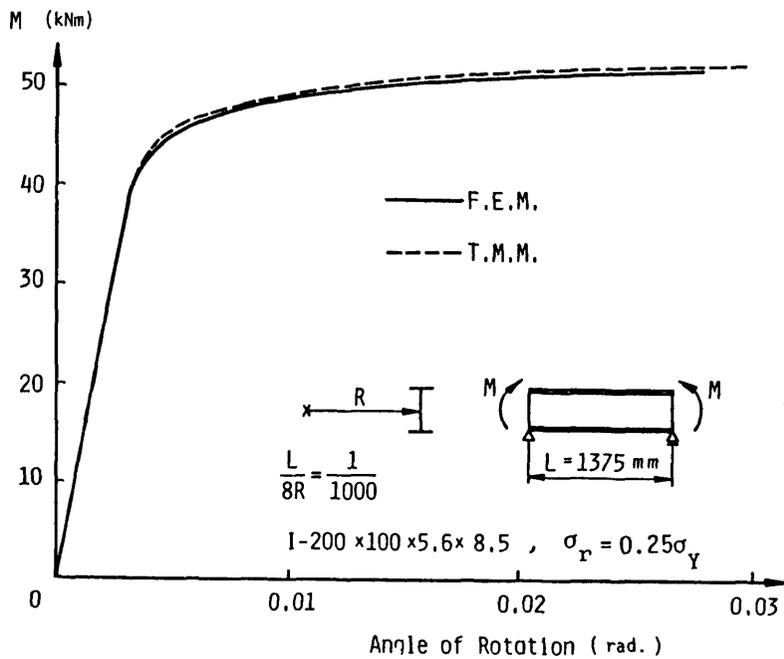


Fig. 2.10(b) Comparison between Numerical Calculations by T.M.M. and F.E.M.

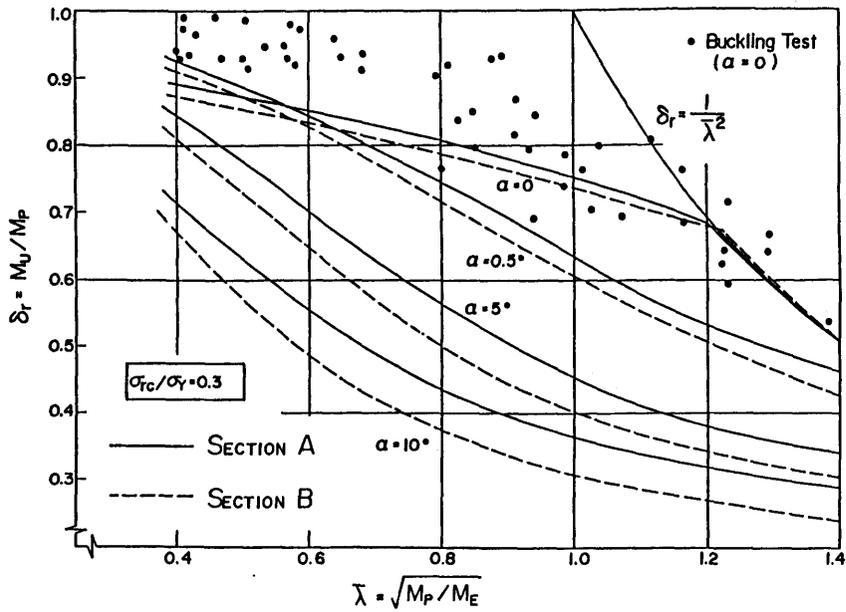


Fig. 2.11 Ultimate Strength Curves for Curved Beams under Equal End Moments

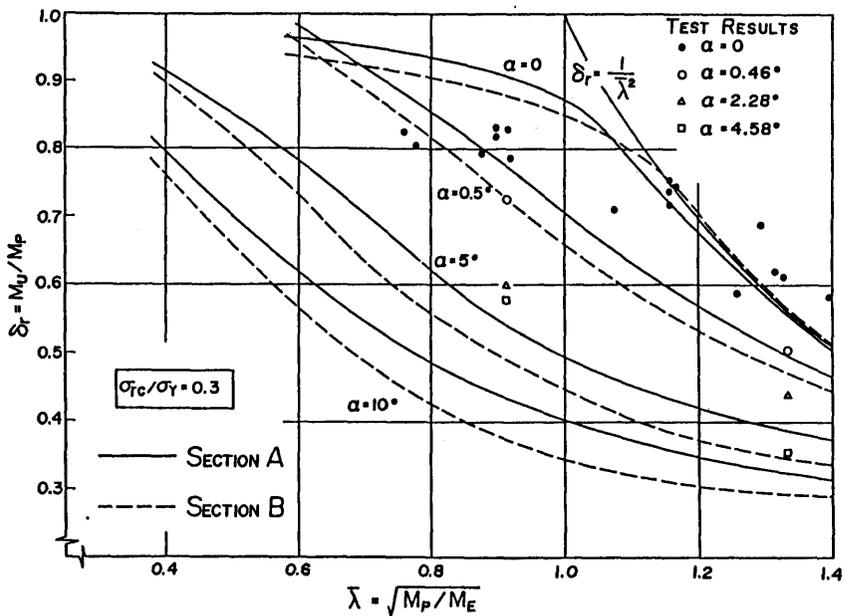


Fig. 2.12 Ultimate Strength Curves for Curved Beams under a Central Concentrated Load

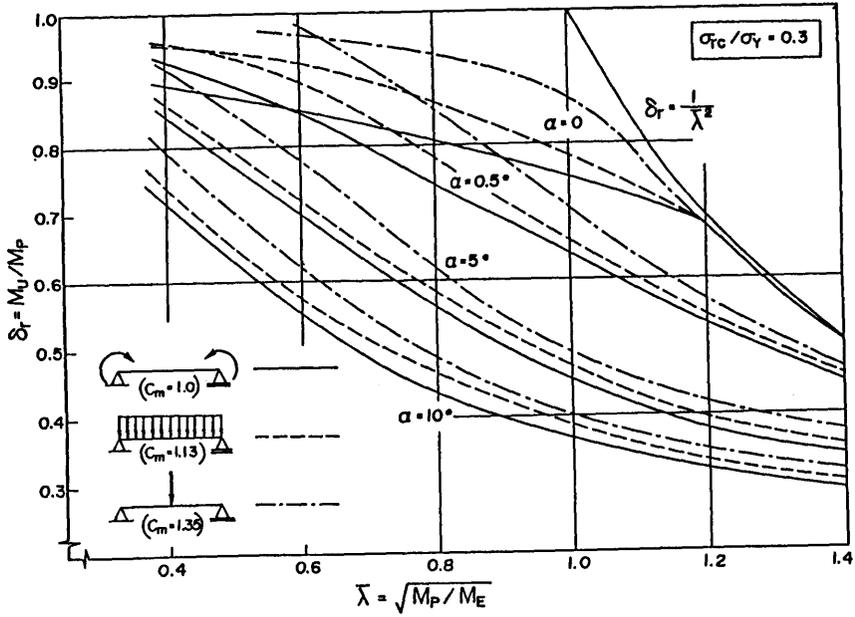


Fig. 2.13 Ultimate Strength Curves of Curved Beams for Three Types of Loading

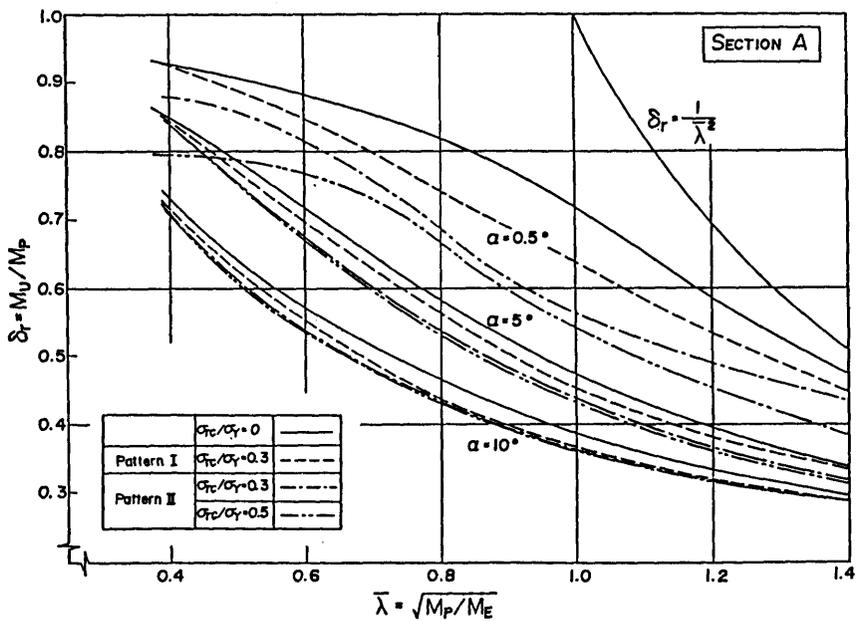
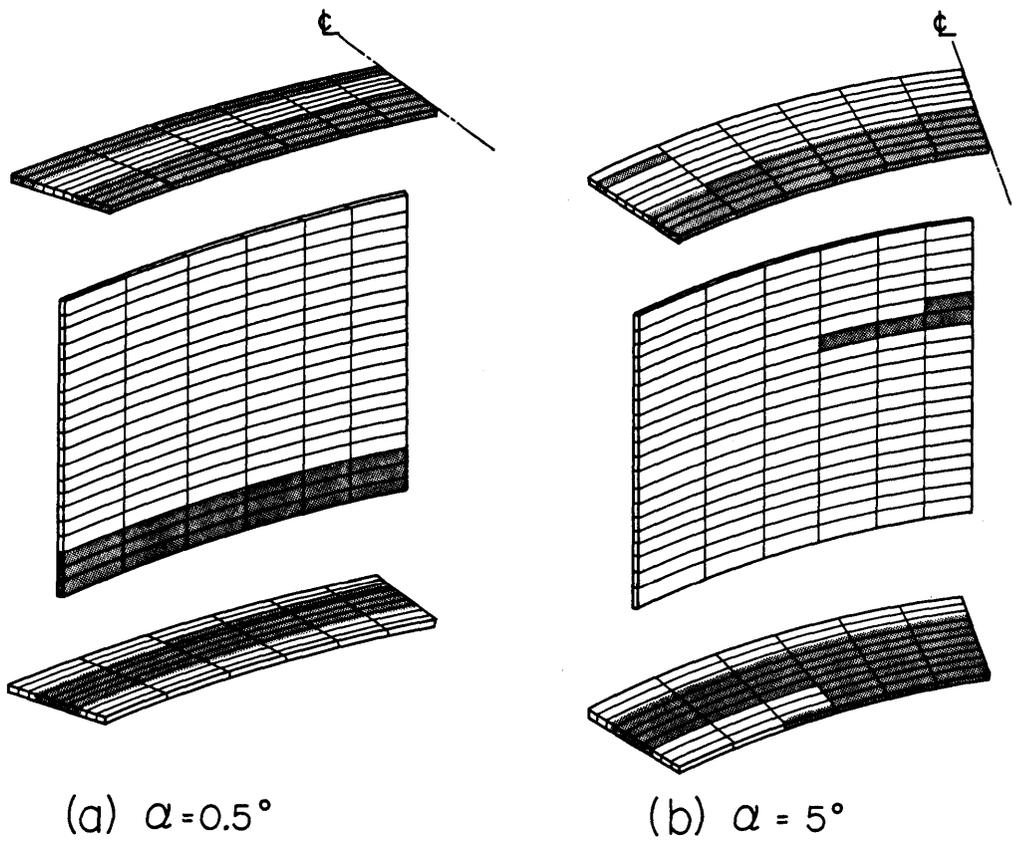


Fig. 2.14 Effect of Residual Stresses on Ultimate Strength



--- Yielded Portion ,  $\bar{\lambda} = 0.378 (L_s = 0.8 \text{ m})$  ,  
 $M = 4.8 \text{ t-m}$  , SECTION A , Pattern II ( $\sigma_{rc} = 0.5\sigma_Y$ )

Fig. 2.15 Yield Portions of Curved Beams  
under Equal End Moments

## 第3章 鋼 I 形ばりの横ねじれ安定性の評価方法

### 3.1 緒言

通常の I 形断面ばりにおいては、荷重の作用により強軸まわりの曲げが生じ、荷重の増大とともに、はり鉛直方向に変形する。しかし、荷重がある値に近づくと、断面の回転を伴う横変形が急激に生じ、はりは不安定な状態となる。この現象をはりの横ねじれ不安定現象という。

はりが完全に真直ぐで、荷重が偏心することなく作用する場合には、荷重がある値に達するまでは断面の回転および横変位が生ずることなく、はりは鉛直方向にのみ変位し、荷重がある値に到達してはじめて、断面の回転を伴う横変位、すなわち荷重面外の変位が突然生じ、はりは横ねじれ不安定現象を生ずる。この荷重をはりの分岐問題に対する固有値として得られる横ねじれ座屈荷重である。通常、構造部材として使用されるはりは、初期応力（残留応力）などの材料的初期不整のみならず、初期変形および初期ねじれ、荷重偏心などの幾何学的初期不整を有している。このようなはりでは、荷重の増加とともにわずかではあるが面外変形を生じ、ある荷重に近づくと面外変形が急激に増大し、はりは不安定な状態となり、これ以上の荷重に抵抗できなくなる。このような荷重、すなわち、荷重—変形曲線における最大荷重をはりの横ねじれ耐荷力または単にはりの耐荷力という。

一般には、横ねじれ座屈強度と横ねじれ耐荷力を総称して、広い意味で、はりの横ねじれ座屈強度またははりの横座屈強度とよばれている。また、弾性横ねじれ座屈荷重は設計のための指標として広く用いられており、細長いはりでは、横ねじれ座屈荷重と横ねじれ耐荷力はほぼ一致する。しかし、本章では両者を区別して用いる。

横ねじれ座屈強度に関しては、1899年に Michel<sup>1)</sup> および Prandtl<sup>2)</sup> がほぼ同時に研究成果を挙げて以来、多くの研究者が扱ってきた問題である。横ねじれ座屈は多くの場合、閉じた解になり得ないので、基本的には数値的な解となる。したがって、近年のコンピューターの進歩とともに複雑な問題も解かれるに至った。たとえば、残留応力の影響を考慮した非弾性解析<sup>3),4)</sup>、断面変形を考慮した解析<sup>5)</sup> および変断面<sup>6)</sup> や連続ばり<sup>7)</sup> の研究がある。

一方、横ねじれ耐荷力に関しては、材料および幾何学的初期不整を考慮して得られる荷重—変形関係の最大強度として取り扱われており、Klöppel ら<sup>8)</sup> は集中荷重が偏心作用する片持ちばりの解析および実験を行い、偏心量と横ねじれ耐荷力の関係を調べている。また、Lindner<sup>9)</sup> は各種の組合わされた荷重状態について集中荷重や等分布荷重の偏心作用を考慮した解析、および集中荷重が偏心して作用する単純ばりの実験を行っている。ECCS（ヨーロッパ鋼構造連合）ではそれらの研究を基礎として、はりの強度に関する設計式を提案している<sup>17)</sup>。ところが、これらの研究は、幾何学的初期不整を主に偏心荷重のみで表したものであり、初期横変形およびその大きさと横

ねじれ耐荷力の関係についてはあまり検討されていない。また、横ねじれ耐荷力と横ねじれ座屈強度の関連性およびそれらに対する残留応力の影響について、Vinnakota<sup>10)</sup>は数例の初期変形を有するはりに対して差分法による弾塑性有限変形解析を行い、横ねじれ座屈強度に関する実験および解析的研究との比較を試みている。その他に、文献に報告されたすべての実験値を統計的に処理し、報告した福本ら<sup>11),12),13)</sup>のユニークな研究がある。

本章では、これまで一般に、はりの横ねじれ安定性を評価するために用いられてきた真直ぐなはりを対象とした横ねじれ座屈強度と、初期横変形あるいは荷重偏心などの初期不整を有するはりの横ねじれ耐荷力との相違について、また、横ねじれ耐荷力におよぼす残留応力、荷重状態および幾何学的初期不整の大きさの影響について、荷重-変形挙動あるいは部材断面の降伏領域の広がり等より検討を行う。さらに、横ねじれ安定性の指標として初期不整を有するはりの横ねじれ耐荷力を求めたこれまでのモデルの妥当性についての検討を行い、また、これまで提案されているはりの強度式と著者らの数値計算結果について比較検討も行う。なお、本章は文献(27)~(30)に発表した内容をとりまとめたものである。

### 3.2 解析方法および初期不整のモデル化

前章において、曲線I形ばりの横ねじれ耐荷力解析の二つの手法を示した。本章では、その手法のうち2.2節に示した伝達マトリックス法を用いて初期横変形あるいは荷重偏心のような初期不整を有するはりの横ねじれ耐荷力解析を行う。すなわち、初期横変形を有するはりの場合、その軸線が円弧である曲線ばりで近似することになる。

横ねじれ耐荷力に関するこれまでの研究において用いられてきたモデルおよび横ねじれ耐荷力と横ねじれ座屈強度の関係について検討を行うために、図-3.1に示すような横方向変位およびねじれに対しても両端で単純支持されたI形ばりについて次の5つのモデルを採用する。

**Model- I** 初期横変形を有するはりであり、その初期横変形を $L/8R$ で表す。ここに、 $L$ および $R$ はそれぞれはりのスパン長および初期横変形の曲率半径を表し、 $L/8R$ はアーチのライズ比に相当する量である。

**Model- II** 直線ばりの上フランジ上に鉛直荷重を偏心載荷する場合である。偏心量は直線ばりの中心線から載荷点までの水平距離 $e$ で表す。

**Model- III** 鉛直集中荷重 $P_z$ および水平集中荷重 $P_y$ がスパン中央で上フランジ中央に作用し、2軸曲げおよびねじりを受ける直線ばりである。荷重の大きさの比を $\gamma = P_y/P_z$ で表し、 $\gamma$ を一定に保つ。

**Model- IV** 初期横変形を有し、鉛直荷重がフランジ上に偏心して作用するはりである。

**Model- V** 直線ばりの横ねじれ座屈強度解析<sup>3)</sup>のモデルを表す。

なお、端部にモーメント荷重が作用する Model- I の場合、モーメント荷重は曲率半径方向を向く軸まわりに作用させるものとする。このような荷重の作用軸および境界条件を用いることは、対象とするはりが初期横変形を有するはりであることから、厳密には正しくない。しかし、 $L/8R = 1/500 \sim 1/5000$  であることから、その影響は無視できよう。

本章の数値計算では図-3.2 に示す残留応力の分布形を用いる。図-3.2(b), (c), (e) および (f) はそれぞれ文献(14), (12), (15) および (16) に示されている。また、材料は完全弾塑性体とし、ひずみの反転は起らないものとする。横ねじれ耐荷力を荷重-変形曲線における接線勾配がゼロになる荷重であると定義し、数値計算においては、荷重の微小増分により変位が発散するときの荷重とした。

### 3.3 横ねじれ耐荷力曲線

#### (1) 横ねじれ座屈パラメータ

横ねじれ耐荷力および横ねじれ座屈強度曲線を ECCS の提案式<sup>17)</sup>と同様に、修正細長比 $\bar{\lambda}$ および低減係数 $\delta_r$ を用いて表す。 $\bar{\lambda}$ および $\delta_r$ は次式で表される。

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{M_p}{M_E}} \quad (3.1)$$

$$\delta_r = \frac{M_U}{M_p} \quad (3.2)$$

ここに、 $M_p$  = 全塑性モーメント、 $M_U$  = 最高荷重のもとでの最大曲げモーメントであり、 $M_E$  は次式で表される理想弾性横ねじれ座屈モーメントである。

$$M_E = C_1 \frac{\pi^2 EI_y}{(kL)^2} \left\{ C_2 g + C_3 j + \sqrt{(C_2 g + C_3 j)^2 + \frac{I_\omega}{I_y} \left( 1 + \frac{GK_T (kL)^2}{\pi^2 EI_\omega} \right)} \right\} \quad (3.3)$$

ここに、 $j = f + \frac{1}{2I_x} \int_A y (x^2 + y^2) dA$ ,  $f$  = セン断中心から図心までの距離、

$g$  = 分布荷重あるいは集中荷重の載荷点とセン断中心の距離であり、係数 $k$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  および  $C_3$  はさまざまな荷重状態および拘束条件に対して文献(18)および(19)に与えられている。

このようなパラメータ $\delta_r$  および  $\bar{\lambda}$  を用いてECCSでは、はりの横ねじれ耐荷力を次式で提案

している。

$$\delta_r = \left( \frac{1}{1 + \bar{\lambda}^{2n}} \right)^{1/n} \quad (3.4)$$

ここに、 $n$ はシステム係数であり、横ねじれ耐荷力の平均値を最もよく表現する値として $n = 2.5$ を提案している。本章では、主として、実際の構造物に最もよく用いられている部材の $\bar{\lambda}$ の範囲( $0.4 \leq \bar{\lambda} \leq 1.4$ )を対象として考察を進める。

## (2) 解析結果

図-3.3は幾何学的初期不整を有するはりのモデルとして仮定した *Model*- I, II, III および IV に対する横ねじれ耐荷力の比較を行ったものである。基本的には初期横変形量  $L/8R = 1/1000$  を有し、断面が IPE200 (I-200×100×5.6×8.5 mm) の単純ばりに、スパン中央の上フランジ上に集中荷重が作用する場合を想定したものである。*Model*- I, II および IV については、図-3.1 の両支点のフランジ中央を結ぶ直線に対して載荷点が水平方向に約  $L/1000$  だけ偏ることになる。一方、*Model*- IIIについては、変形を無視した場合、鉛直荷重によるトルクは生じないので、鉛直荷重に対する比  $\gamma = P_y/P_z$  をある値に保った水平荷重によってトルクを生じさせるものとする。そこで、*Model*- III A では、そのトルクが *Model*- II の鉛直荷重によるトルクに等しくなるような  $\gamma$  について、また *Model*- III B では、Lindner が一つの試みとして文献 9) において等分布荷重の場合に用いた  $\gamma = 0.1$  について検討を行った。

*Model*- I, II および IV では、横ねじれ耐荷力の大小に一応の傾向はあるものの、ほぼ同一の曲線としてみなすことができる。同様な結果が他の断面 (IPE600) を有するはりに対しても得られている。しかし、水平荷重が作用する *Model*- III の場合は、水平荷重によるトルクに加えて、弱軸回りの曲げ変形および断面回転に伴う鉛直荷重によるトルクが生ずるため、耐荷力の低下が著しくなっている。図-3.4 にはその例が示されている。図-3.4 には *Model*- II および III A で、 $\bar{\lambda} = 1.0$  ( $L = 2.4$  m) のはりに  $P = 59$  kN (6.0 ton) が作用したときの水平変位  $v$ 、断面回転角  $\theta$  およびねじりモーメント  $M_x$  の分布を半スパンについて示している。図のように、*Model*- III A の水平変位および断面回転角はともに *Model*- II のそれらに比べてかなり大きくなっている。したがって、断面の回転に伴って生ずる鉛直荷重による付加的なトルクが大きく影響し、スパン中央におけるねじりモーメント  $M_x$  に差が生じている。また *Model*- III A では、支点およびスパン中央におけるねじりモーメントの差が大きくなるのは、*Model*- III A の載荷点の水平変位が非常に大きくなることによるものである。

図-3.5は残留応力の分布形による影響を検討したものであり、仮定した残留応力および断面寸法は図中および図-3.2に示されている。実線は *Model*- I ( $L/8R = 1/1000$ ) の横ねじれ耐荷力曲線であり、破線は *Model*- V の横ねじれ座屈曲線を表す。横ねじれ座屈曲線には残留応力

の分布形による影響が顕著に表れるが、横ねじれ耐荷力曲線ではその影響が比較的小さい。 $\bar{\lambda}$ の比較的大きな領域における横ねじれ耐荷力曲線は、同じ残留応力に対する横ねじれ座屈曲線よりも下側に位置する。しかしながら、 $\bar{\lambda}$ の小さな領域におけるその位置は逆転する傾向を示している。特に曲線5および曲線⑤において顕著である。

溶接タイプの残留応力分布に対する横ねじれ耐荷力曲線 (Nos. ⑤, ⑥および⑦) は圧延タイプに対するそれら (Nos. ②, ③および④) よりも、 $\bar{\lambda}$ の全領域で、下側に位置している。これは用いた断面寸法の差よりもむしろ残留応力の分布形の影響が大きいためと考えられる。

図-3.5に示した一点鎖線は、ECCSの提案式(3.4)でシステム係数に $n=1.5$ を用いたものであり、図における横ねじれ耐荷力曲線の下限值を表すと考えてよい。

図-3.6および図-3.7はそれぞれ一様曲げおよび集中荷重が作用する場合を対象とし、初期横変形( $L/8R=1/1000$ )を有するはり(便宜上、モーメント荷重が作用する場合も *Model-I* とよぶ)ならびに *Model-V* のはりについて、横ねじれ耐荷力ならびに横ねじれ座屈強度に及ぼす残留応力の影響を表している。断面は IPE200 を使い、残留応力は図-3.2(a)の分布形に対して $\sigma_{c1}=0, 0.25\sigma_Y(71\text{N/mm}^2)$ および $0.5\sigma_Y(142\text{N/mm}^2)$ を仮定した。図から残留応力による強度の低下は、*Model-I*では比較的小さく、*Model-V*では大きいことがわかる。また、*Model-I*では、解析した $\bar{\lambda}$ の全範囲にわたって横ねじれ耐荷力曲線が残留応力の大きさによってほぼ一様に、下位に位置している。さらに、残留応力が大きくなると横ねじれ耐荷力が横ねじれ座屈強度を上回る $\bar{\lambda}$ の範囲も、広がっている。これは初期変形ばりに発生するそり応力のため、部材の降伏領域の広がり方が初期変形ばりと直線ばりでは異なるためであることを示している。一般に、曲線ばりでは残留応力が横ねじれ耐荷力に及ぼす影響は小さいと言われているが、初期変形程度のはりについては、直線ばりの横ねじれ座屈強度のように敏感ではないにしても、残留応力の影響によって横ねじれ耐荷力は下がると考える方が妥当である。

図-3.8~図-3.11はそれぞれ、初期変形を有するはり(*Model-I*)の両端にモーメント荷重が作用する場合で、断面が IPE200, IPE600, W8×31 および W27×94 の横ねじれ耐荷力曲線を表している。実線は初期横変形が  $L/8R=1/500, 1/1000$  および  $1/2000$  (IPE200 については  $1/5000$  も示す) のはりの横ねじれ耐荷力曲線を示し、破線(*Model-V*)は固有値計算から得られた横ねじれ座屈強度曲線を示している。残留応力は図-3.2(a)の圧延タイプで $\sigma_{c1}=0.25\sigma_Y$ を仮定した。また、図-3.8に示す○印は福本ら<sup>11)</sup>によって整理された I 形断面はり (I-200×100×5.5×8 mm) の実験値である。これらの図から以下のことが推論される。

1) 比較的大きな $\bar{\lambda}$ の領域 ( $1.1 \leq \bar{\lambda} \leq 1.3$ ) においては、横ねじれ耐荷力は横ねじれ座屈強度よりもかなり低くなり、初期横変形の影響が顕著である。

2)  $\bar{\lambda}$ の小さい領域では、初期横変形の影響は比較的小さいが、初期横変形の大きいものほど耐荷力がわずかに大きくなる傾向を示し、真直ぐなはりの横ねじれ座屈強度に比べて横ねじれ耐荷力の方が上回るようである。これは、初期横変形を有するはりにおけるそり応力の発生が部材の降伏

に影響するためであると考えられる。詳細は次節に示す。

3) 図-3.8に示した $L/8R = 1/5000$ のように初期横変形が小さい場合<sup>注)</sup>には横ねじれ耐荷力と横ねじれ座屈強度が $\bar{\lambda}$ の小さい範囲( $\bar{\lambda} < 0.9$ )においてよく一致する。したがって、初期横変形に関する脚注のような実例もあることから、 $\bar{\lambda}$ が小さい場合に限り、圧延I形直線ばりの横ねじれ強度は座屈解析でも評価できるものと思われる。また、 $L/8R = 1/5000$ に対する曲線は実験値<sup>11)</sup>の下限に相当している。

次に、Galambosら<sup>20)</sup>が荷重抵抗係数設計(LRFD)規準において非弾性域に用いた曲げ抵抗強度 $\phi \cdot M_n$ は次のような直線式で表されている。

$$\phi \cdot M_n = \phi \left\{ M_p - (M_p - M_r) \frac{L - L_p}{L_y - L_p} \right\}, \quad \text{ただし, } L_p \leq L \leq L_y \quad (3.5)$$

ここに、 $\phi$  = 抵抗係数であり、0.86が提案されている。また、 $M_n$  = 公称抵抗モーメント、 $M_p$  = 全塑性モーメント、 $M_r$  = 残留応力による低下を考慮した降伏モーメント、 $L$  = 固定点間距離、 $L_p$  および  $L_y$  は次のようにして得られる限界補剛間長さである。すなわち、一様曲げを受けるはりに対して<sup>20)</sup>、

$$L_p = \frac{2500 r_y}{\sqrt{\sigma_Y (\text{kg/cm}^2)}} \quad (3.6)$$

ここに、 $r_y$  は弱軸に関する断面2次半径である。また、式(3.3)における $M_E$ を $M_r$ で置き換えた後、一様曲げとして(すなわち $C_1 = k = 1.0$ ,  $C_2 = C_3 = 0$ ) $L$ について解けば $L_y$ を得る。

降伏点応力度 $\sigma_Y = 2530 \text{ kg/cm}^2 (248 \text{ N/mm}^2)$  および残留応力度 $\sigma_{cl} = 703 \text{ kg/cm}^2 (69 \text{ N/mm}^2 = 0.28 \sigma_Y)$ を仮定し、式(3.5)で得られる各断面のはりに対する曲げ抵抗強度 $\phi M_n$ を $\delta_r - \bar{\lambda}$ 座標にプロットすると、図-3.8~図-3.11の一点鎖線のようになる。図より、式(3.5)は初期横変形量 $L/8R = 1/2000$ 程度までのはりの横ねじれ耐荷力を保障すると考えられる。 $L/8R = 1/2000$ の大きさの初期横変形量は、圧延I形ばりの場合、前述のようにかなり大きい値であり妥当な結果と思われる。

一方、道路橋示方書<sup>21)</sup>では、許容曲げ応力度の評価のために横ねじれ座屈強度を、 $A_w/A_c$ および $l/b$ の関数として近似し、一様曲げを受ける場合に対して次の基本式を用いている。

$$\begin{aligned} \sigma_{cr}/\sigma_Y &= 1.0 & (\alpha \leq 0.2) \\ \sigma_{cr}/\sigma_Y &= 1.0 - 0.412(\alpha - 0.2) & (\alpha > 0.2) \end{aligned} \quad (3.7a)$$

ここに、

注) 福本らの行った圧延I形ばり(1-200×100×5.5×8 mm)の実験データ<sup>12)</sup>によると、弱軸に関する初期横変形 $m+2s$ はほぼ $L/8R = 1/5000$ 程度である。ここに、 $m$ は平均値であり、 $s$ は標準偏差である。

$$\alpha = \frac{2}{\pi} K \sqrt{\frac{\sigma_Y}{E}} \cdot \frac{l}{b} \quad (3.7b)$$

$$K = 2 \quad (A_w/A_c \leq 2)$$

$$= \sqrt{3 + \frac{A_w}{2A_c}} \quad (A_w/A_c > 2) \quad (3.7c)$$

であり、 $A_w$  = ウェブの断面積、 $A_c$  = 圧縮フランジの断面積、 $l$  = 圧縮フランジの固定点間距離、および  $b$  = 圧縮フランジ幅である。

鋼種をSS41とし、図-3.8~図-3.11の各断面寸法のはりに対して式(3.7)を適用し、得られた横ねじれ座屈強度を $\delta_r - \bar{\lambda}$ 座標上にプロットすると図-3.8~図-3.11の二点鎖線のようになる。ただし、道路橋示方書における限界値 $l/b \leq 30$ の範囲で示した。W8×31断面のように比較的ずんぐりしたはりでは、横ねじれ耐荷力と式(3.7)による値はかなり差が大きくなっている。これは、式(3.7)がプレートガーダーを対象とした近似式であるにもかかわらず、圧延I形ばりに対しても座屈パラメーターを $\alpha$ で近似していることによるものと思われる。また、全体として、式(3.7)による結果は、圧延I形ばりに対してはやや安全側過ぎるようである。

図-3.12は横ねじれ耐荷力曲線における4種類の断面形状による差を表している。はりの初期横変形および残留応力はそれぞれ $L/8R = 1/1000$ (Model-I)および $\sigma_{cl} = 0.25\sigma_Y$ (図-3.2(a))であり、一様な曲げの場合を対象としている。図中の破線はECCSの提案式(3.4)において $n = 2.5$ および $1.5$ を用いた場合である。圧延I形ばりの横ねじれ耐荷力に関する実験値の平均値に対しては $n = 2.5$ を、下限値に対しては $n = 1.5$ を用いて表せることが提案されている<sup>11)</sup>。初期横変形量 $L/8R$ を、はりではかなり大きいと思われる $1/1000$ としたため、各断面の耐荷力曲線はやや低目になっているが、W8×31のようなずんぐりした断面を除けば1本の耐荷力曲線で近似できることがわかる。

図-3.13はIPE200断面で初期横変形を有するはりに、単一集中荷重がスパン中央で上フランジ上に作用する場合の横ねじれ耐荷力曲線を示している。図-3.8の一様曲げの結果と同様に、 $\bar{\lambda}$ の小さい範囲では初期横変形の差による横ねじれ耐荷力の差はあまりないが、図-3.8の場合と違って、横ねじれ耐荷力がModel-Vの横ねじれ座屈強度を上回るような傾向は示さない。

$L/8R = 1/5000$ のように初期横変形がわずかなはりの耐荷力曲線は、他の大ききの初期横変形を有するはりのそれと異なり、破線で示した横ねじれ座屈強度曲線に近い曲線形状となっている。

図-3.14は初期横変形( $L/8R = 1/1000$ )を有するはりについて、3種類の荷重状態による横ねじれ耐荷力曲線の違いを検討したものである。荷重状態は図中に示すように、スパン中央に作用する集中荷重、等分布荷重および両端に作用するモーメント荷重であり、横ねじれ耐荷力曲線に対してはそれぞれ記号p、qおよびMを付けて示した。また、用いた断面はIPE200および

IPE600 であり、それぞれ実線および破線で表す。 $\bar{\lambda}$  が小さくなると荷重状態によって横ねじれ耐荷力曲線に差を生じる。これは、修正細長比 $\bar{\lambda}$ には、弾性座屈荷重 $M_E$ を用いて荷重状態を考慮しているが、部材軸方向の降伏域の広がりやを考慮していないためであり、横ねじれ座屈の数値解析においても同様な傾向を示すことが知られている。ECCSでは断面寸法および荷重状態にかかわらず、横ねじれ耐荷力の平均値を表すものとして $n = 2.5$ （式（3.4））を提案しているが、荷重状態ごとに横ねじれ耐荷力曲線を与えるか<sup>22),23)</sup>あるいは1本の曲線で表すためには、荷重状態による部材の降伏領域の影響を考慮するパラメータを導入する必要がある。<sup>24),25),26)</sup>ここでは、式（3.4）と同様な次式を用いて荷重状態ごとに横ねじれ耐荷力曲線を近似する。

$$\delta_r = \left( \frac{1}{1 + \bar{\lambda}^A n} \right)^{1/Bn} \quad (3.8)$$

ここに、 $A$ および $B$ は図-3.14中に示される荷重状態によって決められた係数であり、それらは数値解析結果に対して、最小2乗法を適用して求めた。なお、 $n = 2.5$ が用いられている。

### 3.4 荷重-変形特性および降伏領域の広がりについて

前節においては、モデル化、残留応力、断面寸法および荷重状態について、それらと横ねじれ耐荷力曲線の関連性を検討した。本節では、その横ねじれ耐荷力を得るために用いた個々のはりから代表的なものについて荷重-変形挙動および降伏領域の広がりについて検討する。

図-3.15，図-3.16および図-3.17では縦軸に荷重，横軸にスパン中央断面の図心の水平変位 $v$ ，鉛直たわみ $w$ および断面回転角 $\theta$ がとられている。各図において表される荷重-変形曲線の傾向は、荷重の種類および断面寸法によって特に異なることから、IPE200の断面を有するはりのスパン中央で上フランジ上に集中荷重を作用させたときを例として示す。また、図-3.18～図-3.22はフランジおよびウェブの平面図に最高荷重近傍における降伏領域の広がりを図示したものである。部材長さ方向には半スパンを破線で示すような14不等分割とし、各板要素の幅方向には40分割（板厚方向の応力勾配は無視）した微小要素の直応力について降伏の判定を行った。

図-3.15には図-3.3の $\bar{\lambda} = 0.6$ に対応する各モデルの荷重-変形曲線が示されている。**Model- I**，**II**および**IV**については耐荷力だけでなく荷重，変形関係もほとんど同じである。しかし、**Model- III**では鉛直荷重に対する水平荷重の割合が比較的微小な**Model- IIIA**（ $\bar{\lambda} = 0.6$ では $\gamma = 0.0125$ ）の場合でも弱軸回りの曲げ変形のために、水平変位は他のモデルと大きく異なり、断面回転角も荷重の増加とともに差を生じている。また**Model- IIIB**では水平荷重の割合が大きいので、水平変位および断面回転角はともに他とまったく異なる性状を示している。これらのはりの最高荷重近傍での降伏領域が**Model- I**，**IIIA**および**IIIB**についてそれぞれ図-3.18(a)，

(b)および(c)に示されている。なお、Model- IIおよびModel- IVはModel- Iとほぼ同じような降伏状態であることが認められた。図- 3.18 から、Model- IおよびIII Aでは荷重の大きさは異なるが、降伏領域はほぼ同じである。また、Model- III Bでは上フランジの内側に大きな降伏領域が存在し、外側にも降伏を生じている。この外側の降伏は引張によるものであり、そり変形および弱軸回りの曲げの影響が非常に大きいためである。

図- 3.16(a) および(b)はModel- Iで初期横変形の大きさによる影響について比較したものであり、それぞれ $\bar{\lambda} = 1.0$ および $0.6$ の場合を示している。鉛直変位については最高荷重近くまで初期横変形による差はほとんどないが、水平変位および断面回転角については、載荷当初から差が現われている。また、初期横変形の小さいはりほど最高荷重近くで、水平変位および断面回転角が急激に増加し、分岐座屈現象の挙動を示している。一方、前節において記述したように、 $\bar{\lambda}$ が小さくなると初期横変形が異なることによる横ねじれ耐荷力の差は小さくなり、初期横変形の小さいはりが必ずしも横ねじれ耐荷力が大きいとはいえない(図- 3.16(b))。これは部材の降伏領域の広がりによる影響であると思われる。それを図- 3.19 および図- 3.20に、それぞれ $\bar{\lambda} = 1.0$ および $0.6$ のはりに対して示す。まず、 $\bar{\lambda} = 1.0$ で $L/8R = 1/500$ のはりは、荷重が小さいにもかかわらず降伏領域は広く、その形状から上フランジにおいては、そり応力および残留応力分布のため、曲率中心側(内側)から降伏が進むことを説明できる。一方、 $\bar{\lambda} = 0.6$ で $L/8R = 1/5000$ のはりでは部材長さ方向の降伏領域の広がりには $L/8R = 1/500$ のはりに比べて小さいが、上フランジの外側からも降伏を生じている。このように $\bar{\lambda}$ が小さいはりでは、初期横変形の大小に起因する部材の降伏領域の広がりへの差が剛性に影響し、横ねじれ耐荷力の大きさは初期横変形の大きさのみで単純に決まらないものと思われる。同様に、図- 3.21には、図- 3.8で $\bar{\lambda} = 0.6$ に対応するモーメント荷重を受けるはり( $L/8R = 1/500$ および $L/8R = 1/5000$ )の最高荷重近傍における降伏領域の広がり示されている。両端で等しい大きさのモーメント荷重を受けているため、部材軸方向全体にわたって降伏を生ずるが、集中荷重の場合と同様に、初期横変形の大きさによって降伏領域の広がり明瞭な差が現われている。

図- 3.17には、残留応力の影響について検討した図- 3.7の $\bar{\lambda} = 0.6$ に対応するはりの荷重-変形曲線が示されている。図から、上フランジ内側に降伏部分が発生し始めると、残留応力の大きさによって変形挙動に差を生じ、それ以後、剛性の低下に伴う大きな変形が現われるものと思われる。その降伏領域の広がりを図- 3.22に示す。いずれも圧縮フランジでは主として曲率中心側から徐々に降伏するという、初期横変形を有するはりの特徴が認められるが、大きな残留応力の場合、はりの長さ方向へ降伏が大きく広がっている。その結果、剛性が低下するため、直線ばりの横ねじれ座屈強度ほど残留応力に敏感ではないにしても、初期横変形を有するはりの横ねじれ耐荷力は残留応力の存在およびその大きさによって低下すると考えられる。

### 3.5 結論

本章では第2章において展開した，曲線I形ばりの横ねじれ耐荷力解析の手法（伝達マトリックス法）を適用し，初期横変形，荷重偏心および残留応力などの初期不整を有する圧延I形断面ばりの横ねじれ耐荷力について，修正細長比 $\bar{\lambda}$ および低減係数 $\delta_r$ を用いた座標上で検討した．得られた主な結果は次のとおりである．

- (1) *Model* - I, IIおよびIVによる横ねじれ耐荷力の差はほとんどない．しかし，*Model* - IIIによる横ねじれ耐荷力は，他の *Models* によるものと顕著な差を生ずる．
- (2) 初期横変形を有するはりの横ねじれ耐荷力に対する残留応力の影響は，真直なはりの横ねじれ座屈に対する影響に比べれば小さい．
- (3)  $\delta_r - \bar{\lambda}$  で整理された横ねじれ耐荷力曲線は，残留応力の分布形によって影響される．
- (4) 比較的大きな $\bar{\lambda}$  ( $\bar{\lambda} = 1.1$ )の近傍では，初期横変形を有するはりの横ねじれ耐荷力が固有値解析から得られた直線ばりの横ねじれ座屈強度よりもかなり低くなる．一方， $\bar{\lambda}$ の小さい範囲では，初期横変形の大きさによる横ねじれ耐荷力の差およびそれらと横ねじれ座屈強度の差は小さいが，初期横変形の大きさはりが必ずしも低い横ねじれ耐荷力を示さず，横ねじれ座屈強度を上回る傾向がみられる．
- (5) 荷重抵抗係数設計 (LRFD) 規準<sup>20)</sup> は，圧延はりの横ねじれ耐荷力に対する合理的な下限値となり得る．一方，道路橋示方書<sup>21)</sup>における横ねじれ座屈の基準強度式はやや安全側すぎるようである．（ただし，圧延はりを対象に考えた場合である．）
- (6) はりの断面寸法の違いによる横ねじれ耐荷力曲線の差はあまりない．
- (7)  $\delta_r - \bar{\lambda}$  座標を用いた場合であっても横ねじれ耐荷力の強度式は，荷重状態による非弾性域での差を考慮する必要がある．
- (8) 横ねじれ耐荷力に対する種々の初期不整の影響，横ねじれ耐荷力と横ねじれ座屈強度の関係および不安定に至るプロセスは部材における降伏領域の広がりから明確に説明できる．

#### 用いた記号

$A_c, A_w$  : 圧縮フランジの断面積，ウェブの断面積

$b$  : 圧縮フランジ幅

$E$  : 弾性係数

$G$  : せん断弾性係数

$I_x, I_y$  : 強軸および弱軸に関する断面2次モーメント

$I_w$  : そり2次モーメント

- $K_T$ : St.Venantのねじり定数  
 $L$ : 固定点間距離  
 $L_p, L_y$ : LRFD規準における限界補剛間長さ [式 (3.6)]  
 $L/8R$ : 初期横変形を表すパラメーターであり，アーチのライズ比に相当する。  
 $M_E$ : 理想弾性横ねじれ座屈モーメント [式 (3.3)]  
 $M_n$ : LRFD規準における公称抵抗モーメント  
 $M_p$ : 断面の全塑性モーメント  
 $M_U$ : 横ねじれ耐荷力に対応する最大曲げモーメント  
 $n$ : システム係数 [式 (3.4)]  
 $P_y, P_z$ : 水平荷重および鉛直荷重  
 $R$ : 曲率半径  
 $r_y$ : 弱軸に関する断面2次半径  
 $\alpha$ : 道示橋示方書の座屈パラメータ [式 (3.7)]  
 $\gamma$ :  $= P_y/P_z$   
 $\delta_r$ : 低減係数 ( $= M_u/M_p$ )  
 $\bar{\lambda}$ : 修正細長比 ( $= \sqrt{M_p/M_E}$ )  
 $\sigma_Y$ : 降伏点応力度  
 $\sigma_r$ : 残留応力度

## 参考文献

- 1) Michell, A.G.M. : Elastic Stability of Long Beams under Transverse Forces, Philosophical Magazine, Vol.48, September, 1899.
- 2) Prandtl, L. : Kipperscheinungen, Doctoral Thesis, Munich, November, 1899.
- 3) 吉田 博, 井本芳宏 : 拘束を受けるはりの弾性および非弾性横倒れ座屈解析, 土木学会論文報告集, 第 208 号, 1972年 12 月, pp.1 -12.
- 4) Galambos, T.V. : Inelastic Lateral Buckling of Beams, Journal of the Structural Division, Proc. of ASCE, Vol.89, No.ST5, Oct., 1973, pp.217 -242.
- 5) Johnson, C.P. and Will, K.M. : Beam Buckling by Finite Element Procedure, Journal of the Structural Division, Proc. of ASCE, Vol.100, No.ST3, March, 1974, pp.669 -685.
- 6) Trahair, N.S. and Kitipornchai, S. : Elastic Lateral Buckling of Stepped I-Beams, Journal of the Structural Division, Proc. of ASCE, Vol.97, No.ST10, Oct., 1971, pp.2535 -2548.
- 7) Yoshida, H., Nethercot, D.A. and Trahair, N.S. : Analysis of Inelastic Buckling of Continuous Beams, IABSE Proceedings, P-3/77, 1977, pp.1-14.
- 8) Klöpel, K, and Unger B. : Eine experimentelle Untersuchung des Kippverhaltens von Kragträgern in elastischen und plastischen Bereich in Hinblick auf eine Neufassung des Kippsicherheitsnachweises der DIN4114, Der Stahlbau 40, Heft 11/12, Nov./Dezember, 1971, s.321 - 329/s.375 -383.
- 9) Lindner, J. : Der Einfluß von Eigenspannungen auf die Traglast von I-Trägern, Der Stahlbau 43, Heft 2/3, Febr./März, 1974, s.39 - 45/s.86-91.
- 10) Vinnakota, S. : Inelastic Stability of Laterally Unsupported I-Beams, Computer & Structures, Proc. of ASCE, Vol.7, July, 1977, pp.377 -389.
- 11) Fukumoto, Y. and Kubo, M. : An Experimental Review of Lateral Buckling of Beams and Girders, Proc. of International Colloquium

on Stability of Structures under Static and Dynamic Loads, ASCE, Washington, D.C., May, 1977, pp.541-562.

- 12) Fukumoto, Y., Itoh, Y. and Kubo, M. : Strength Variation of Laterally Unsupported Beams, Journal of the Structural Division, Proc. of ASCE, Vol.106, No.ST1, Jan., 1980, pp165 -181.
- 13) 福本秀士 , 伊藤義人 : 座屈実験データベースによる鋼はりの横ねじれ基準強度に関する実証的研究 , 土木学会論文報告集 , 第341号, 1984年1月, pp.137-146.
- 14) Young, B.W. : Residual Stress in Hot-Rolled Members, International Colloquium on Column Strength, IABSE, Paris, 1972.
- 15) Fukumoto, Y., Itoh, Y. : Statistical Study of Experiments on Welded Beams, Journal of the Structural Division, Proc. of ASCE, Vol.107, No.ST1, January, 1981, pp.89 -103.
- 16) Fukumoto, Y. and Nishida, S. : Ultimate Load Behavior of Curved I-Beams, Journal of Engineering Mechanics Division, Proc. of ASCE, Vol.107, No.EM2, April, 1981, pp.367 -385.
- 17) European Convention for Constructional Steelwork : Introductory Report, 2nd. International Colloquium on Stability of the Structures, Liege, Apr., 1977.
- 18) Clark, J.W. and Hill, H.N. : Lateral Buckling of Beams, Journal of the Structural Division, Proc. of ASCE, Vol.86, No.ST7, July, 1960, pp175-196.
- 19) Johnston, B.G., ed. : Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures, 3rd. ed., John Wiley & Sons, New York, 1976.
- 20) Yura, J.A., Galambos, T.V. and Ravindra, M.K. : The Bending Resistance of Steel Beams, Journal of the Structural Division, Proc. of ASCE, Vol.104, No.ST9, Sept., 1978, pp.1355 -1369.
- 21) 日本道路協会 : 道路橋示方書 ( I 共通編・II 鋼橋編 ) ・同解説, 1980年.
- 22) Dux, P.F. and Kitipornchai, S. : Buckling Approximations for Inelastic Beams, Journal of the Structural Division, Proc. of ASCE, Vol.110, No.ST3, March, 1984, pp.559 -574.
- 23) Narayanan, R., ed. : Beams and Beam Columns (Stability and Strength), Chapter 2, Applied Science Publishes, 1983.
- 24) 西沢辰夫 他 : はりの非弾性横倒れ座屈強度に関する考察 , 第35回土木学会年次学術講演会概要集, 1980年 , pp.257 -258.

- 25) 榎谷 浩 他：はりの横倒れ座屈曲線について，土木学会中部支部研究発表会講演概要集，1981年，pp.16 -17.
- 26) Nethercot, D.A. and Trahair, N.S. : Inelastic Lateral Buckling of Determinate Beams, Journal of the Structural Division, Proc. of ASCE, Vol.102, No. ST4, Apr., 1976, pp.701 -716 .
- 27) 前川幸次，吉田 博：伝達マトリックス法による曲線 I 形ばりの耐荷力解析，土木学会論文報告集，第312号，1981年8月，pp.27 - 37 .
- 28) 前川幸次，吉田 博：鋼 I 形はりの横倒れ安定性の評価方法に関する研究，土木学会論文報告集，第331号，1983年3月，pp.55 - 63 .
- 29) Yoshida, H. and Maegawa, K. : Lateral Instability of H-Beams with Imperfections, Third International Colloquium on Stability of Metal Structures, Paris, November, 1983, pp.93 - 99 .
- 30) Yoshida, H. and Maegawa, K. : Lateral Instability of I-Beams with Imperfections, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol.110, No.8, August, 1984, pp.1875-1892 .

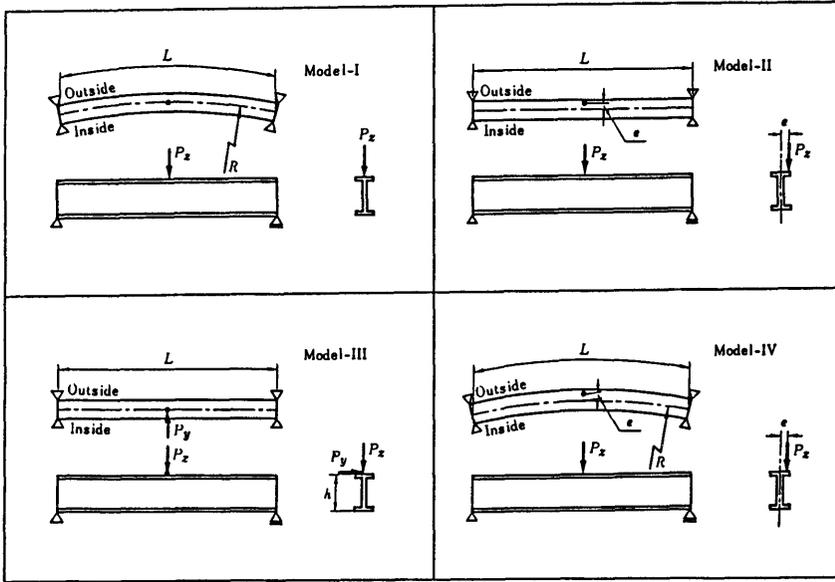
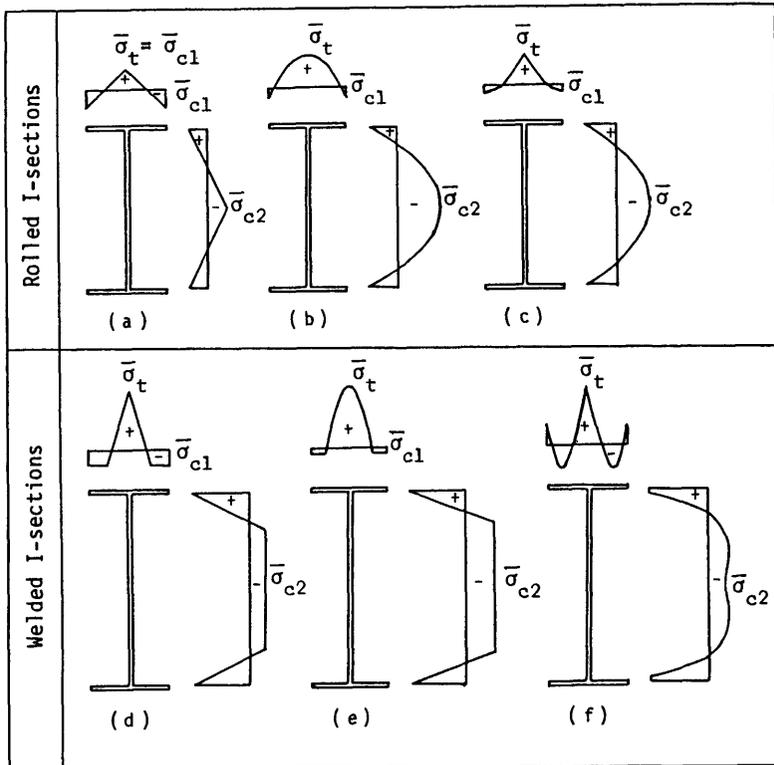


Fig. 3.1 Idealization of Beams with Geometrical Imperfection



\*  $\bar{\sigma} = \sigma / \sigma_Y$ ,  $\sigma_Y =$  yield stress.

Fig. 3.2 Residual Stress Distributions

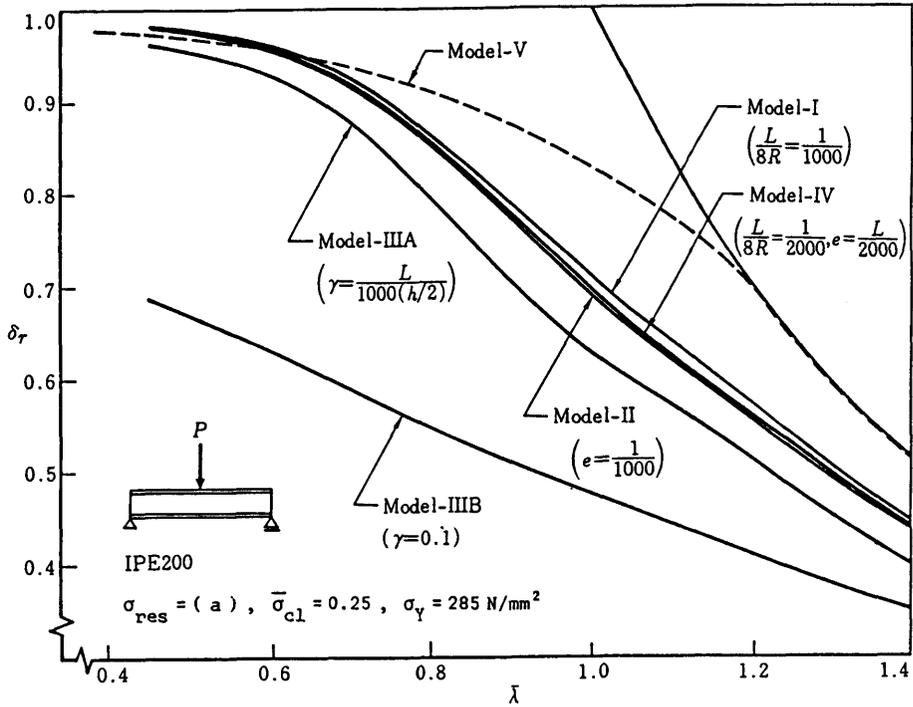


Fig. 3.3 Comparison between Ultimate Strength for Models

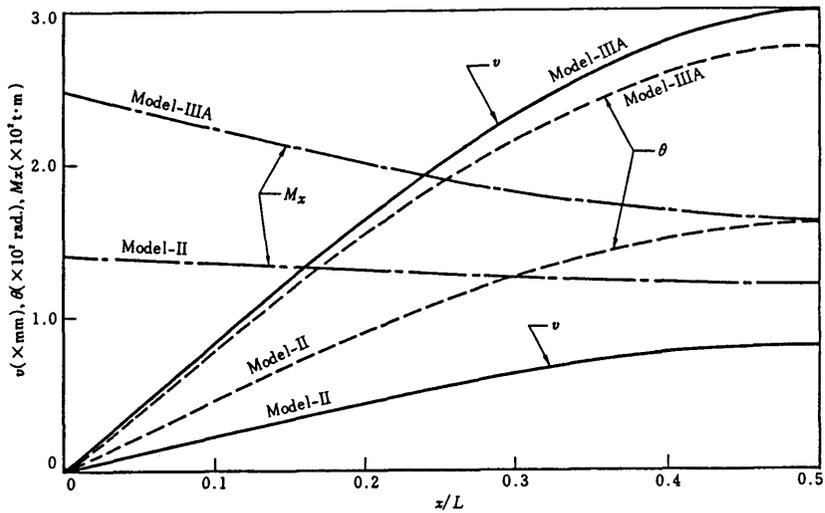


Fig. 3.4 Displacements and Torsional Moment along Beams for Model-II and Model-III A

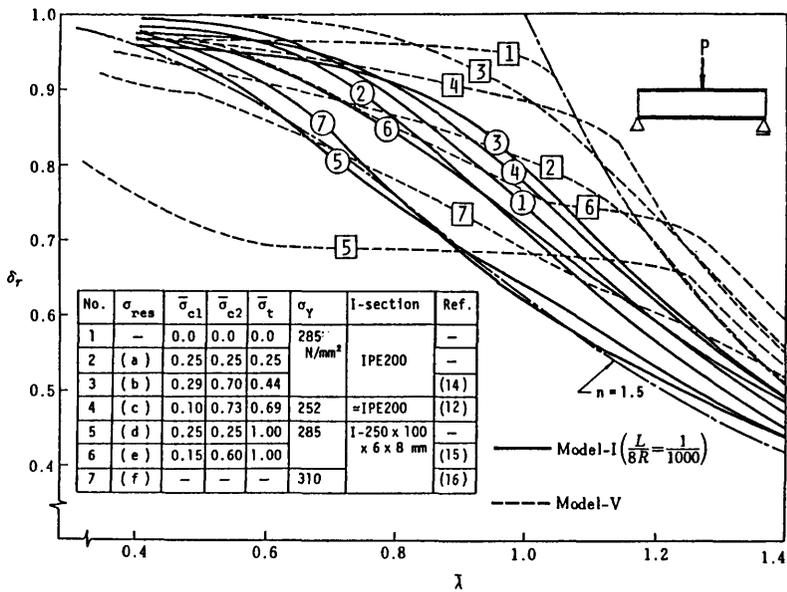


Fig. 3.5 Effect of Patterns of Residual Stress Distribution

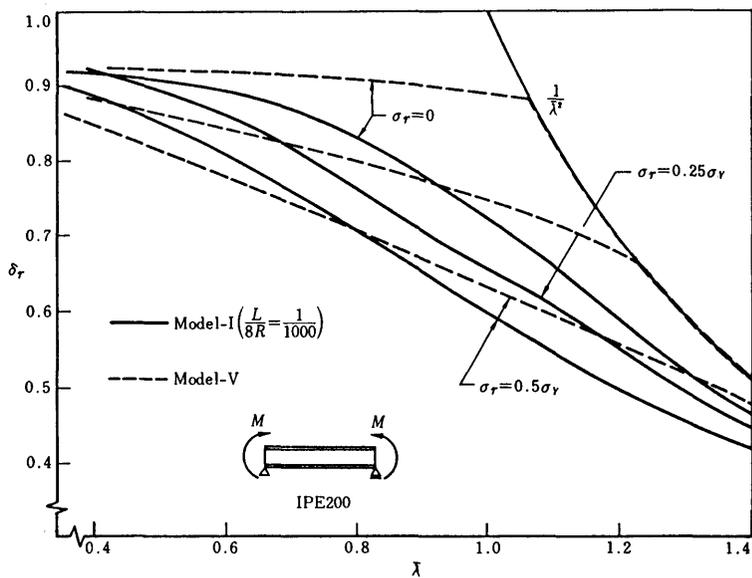


Fig. 3.6 Effect of Residual Stress Levels (Equal End Moments)

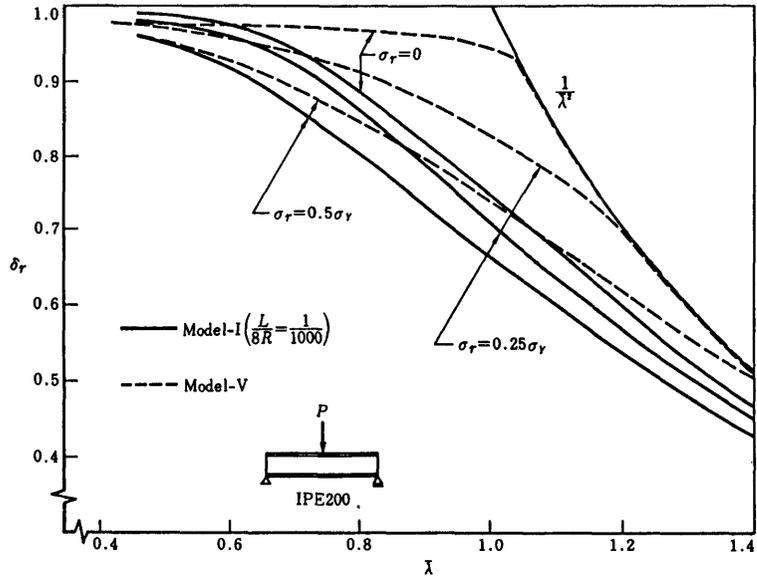


Fig. 3.7 Effect of Residual Stress Levels (Central Concentrated Loads)

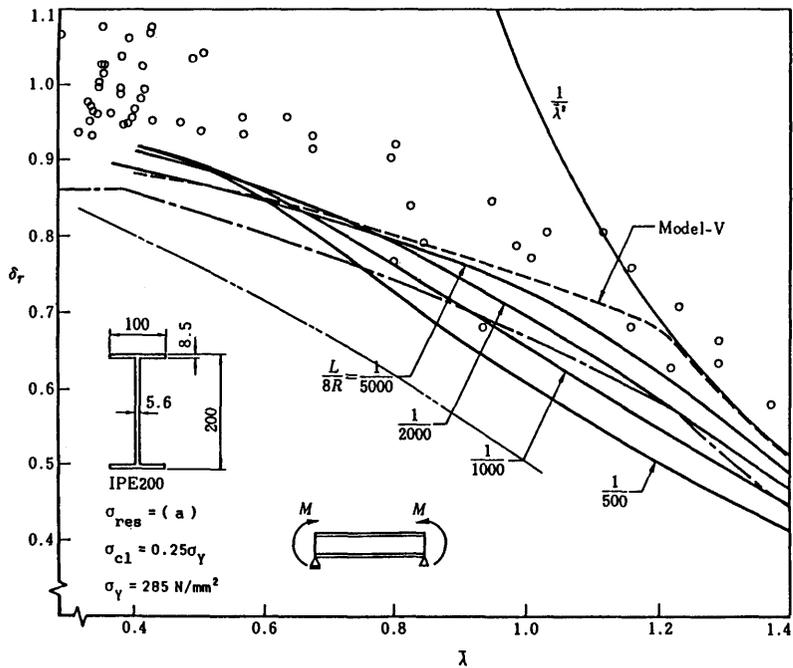


Fig. 3.8 Ultimate Strength Curves of Model-I under Equal End Moments (IPE200)

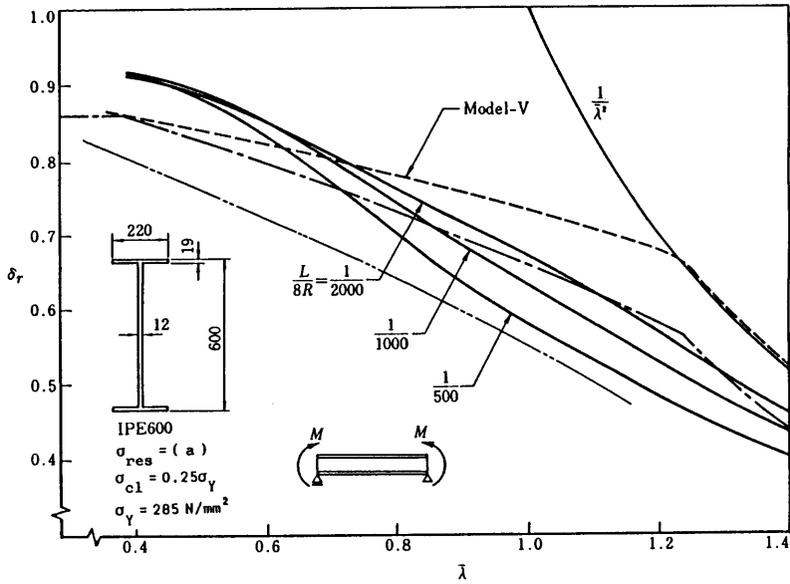


Fig. 3.9 Ultimate Strength Curves of Model- I under Equal End Moments (IPE600)

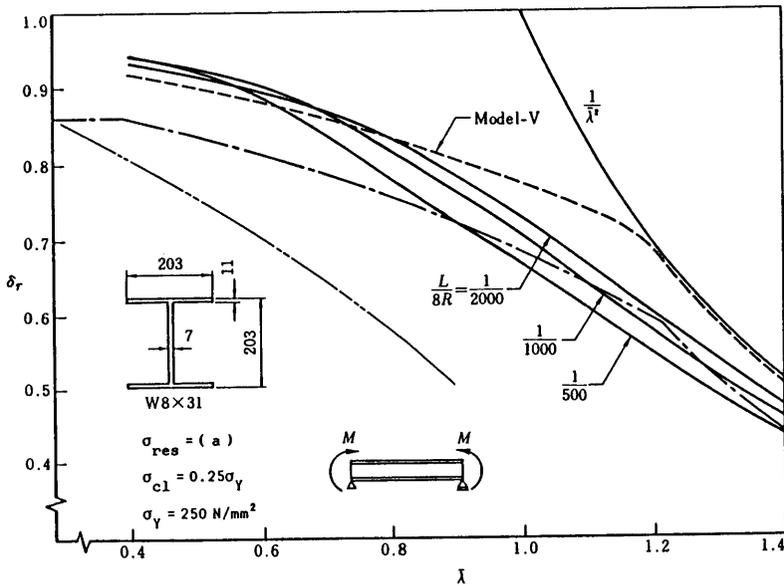


Fig. 3.10 Ultimate Strength Curves of Model- I under Equal End Moments (W8 x 31)

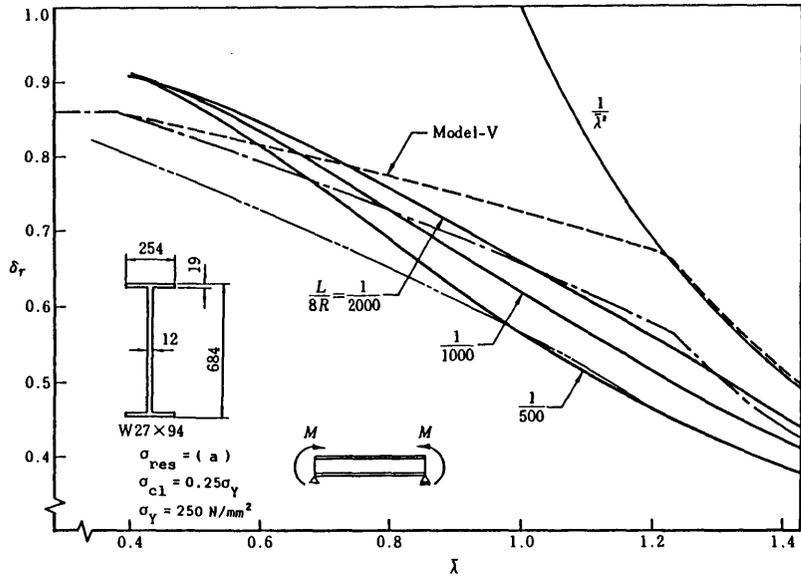


Fig. 3.11 Ultimate Strength Curves of Model-I under Equal End Moments (W27 x 94)

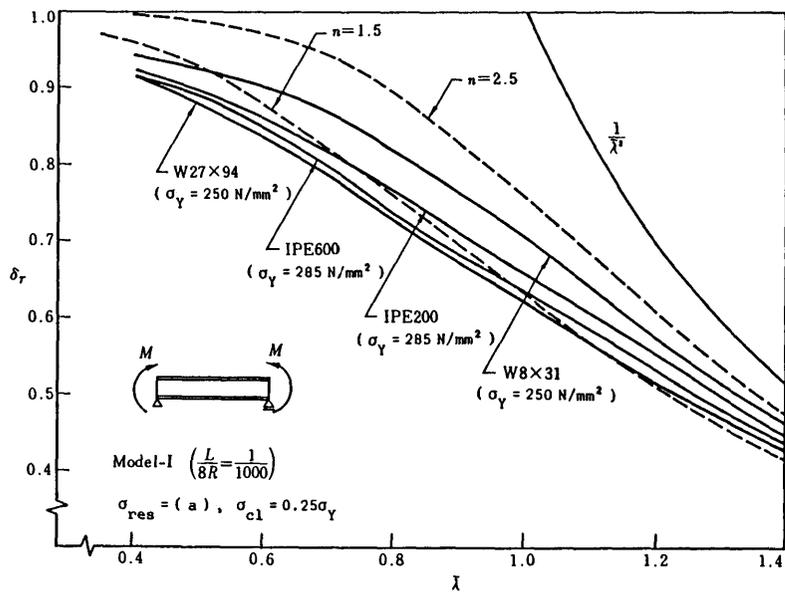


Fig. 3.12 Effect of Cross Sectional Dimensions on Ultimate Strength Curves

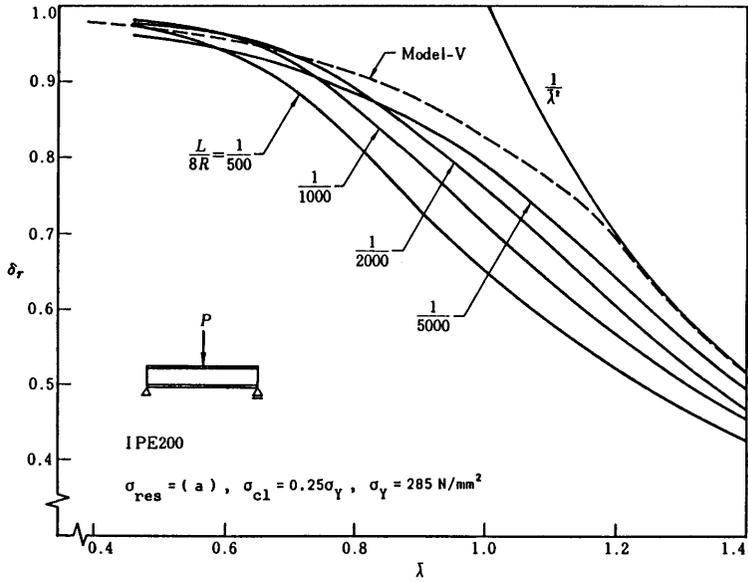


Fig. 3.13 Ultimate Strength Curves of Model-I under a Central Concentrated Load (IPE200)

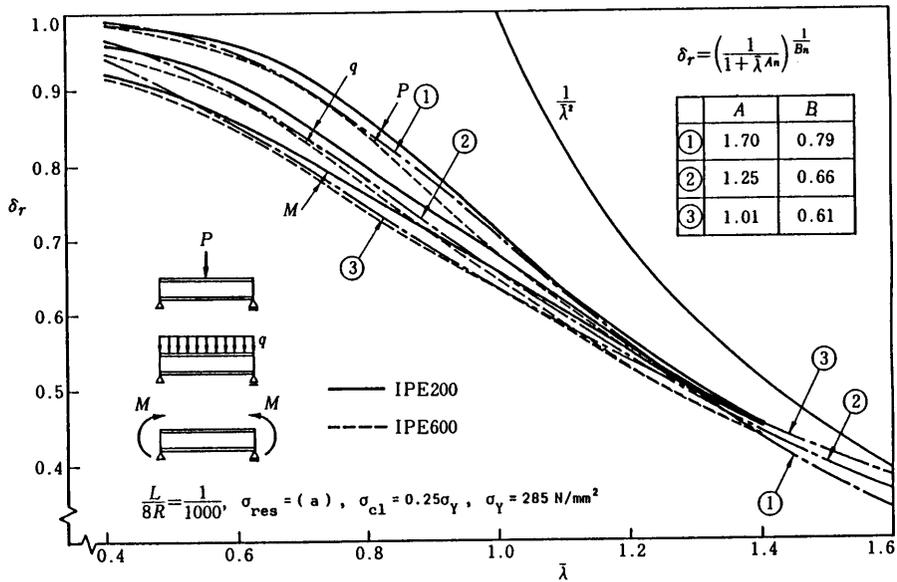


Fig. 3.14 Comparison between Ultimate Strength Curves for Three Loading Conditions

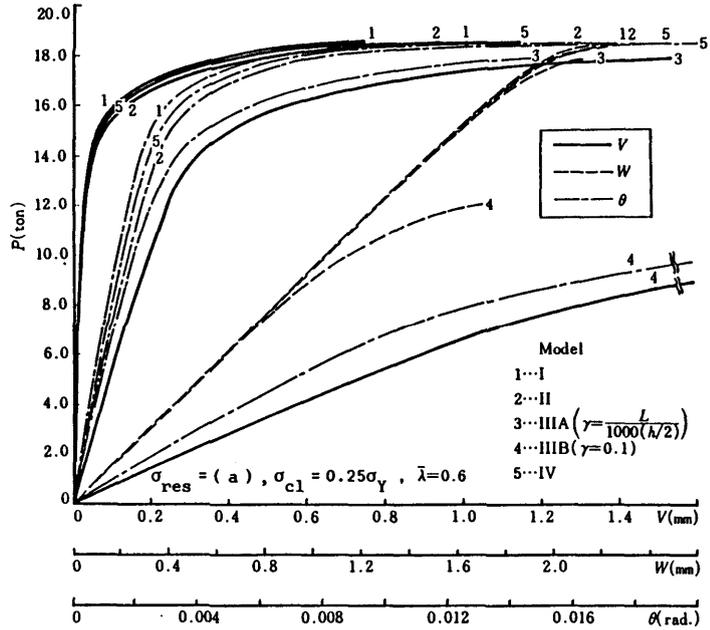


Fig. 3.15 Load-Displacement Relationships for Models

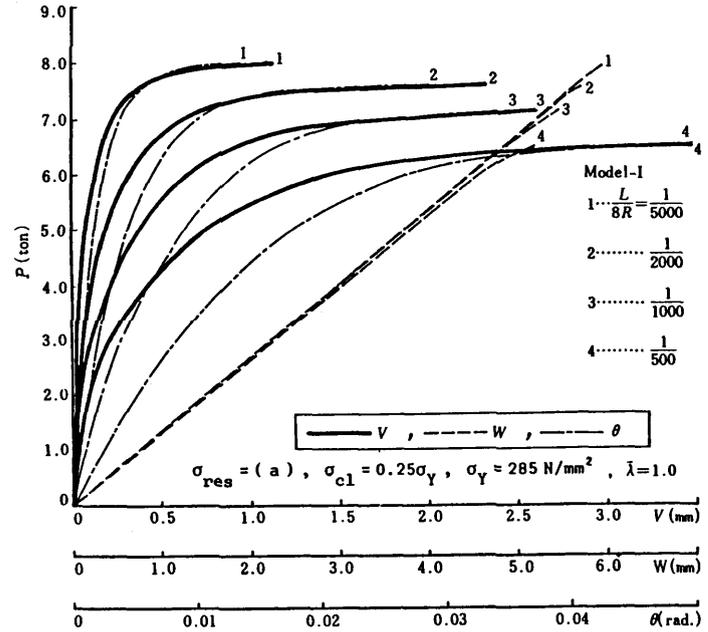


Fig. 3.16(a) Load-Displacement Relationships of Model-I ( $\bar{\lambda} = 1.0$ )

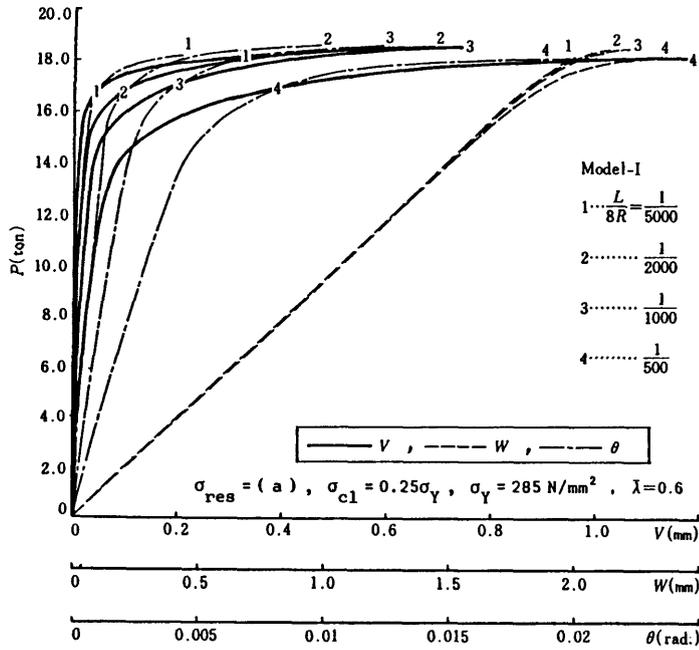


Fig. 3.16(b) Load-Displacement Relationships of Model-I ( $\bar{\lambda} = 0.6$ )

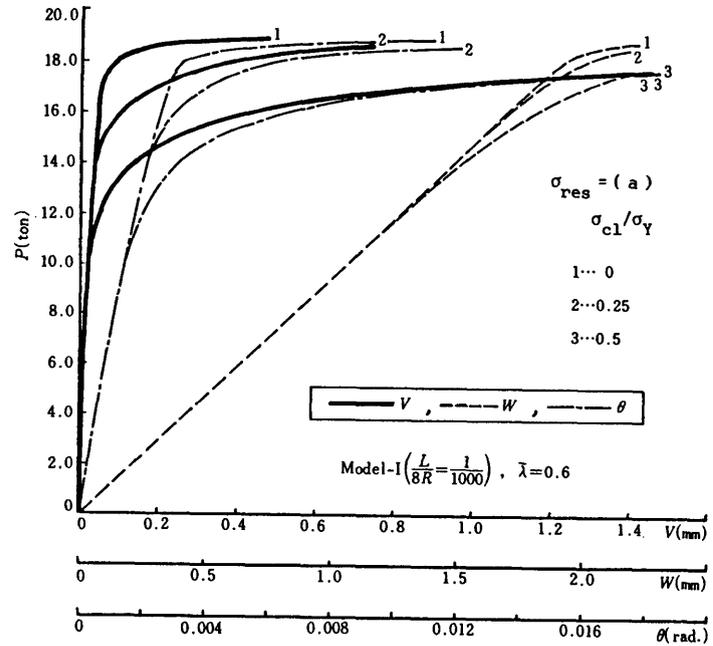


Fig. 3.17 Effect of Residual Stress Levels on Load-Displacement Curves

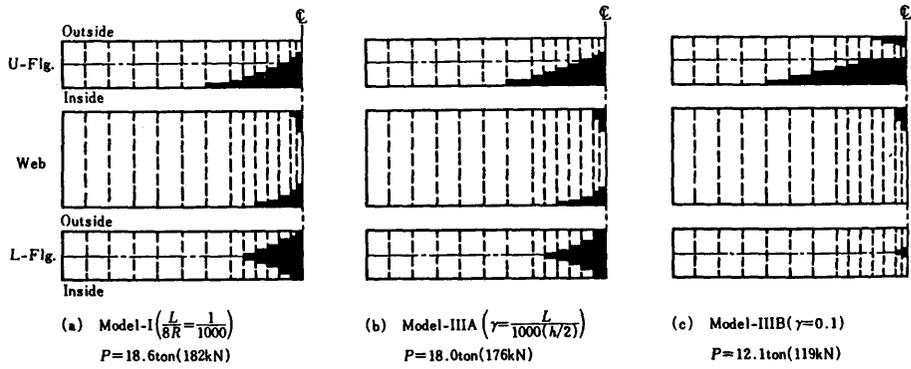


Fig. 3.18 Comparison between Yielded Portions for Models

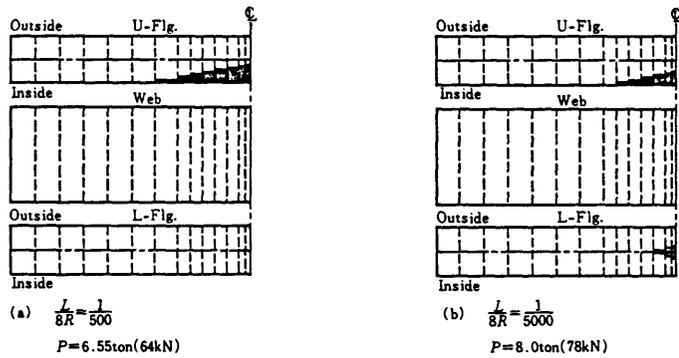


Fig. 3.19 Yielded Portions of Model-I under a Central Concentrated Load ( $\bar{\lambda} = 1.0$ )

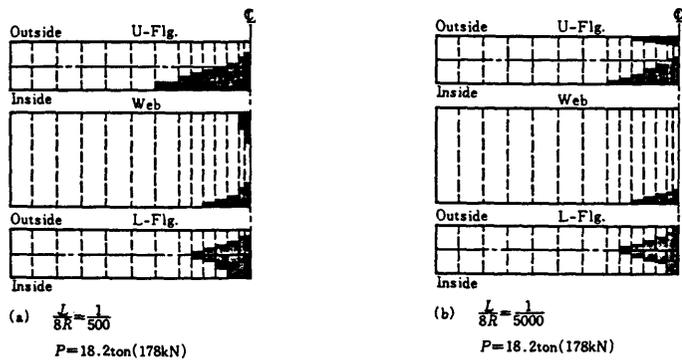


Fig. 3.20 Yielded Portions of Model-I under a Central Concentrated Load ( $\bar{\lambda} = 0.6$ )

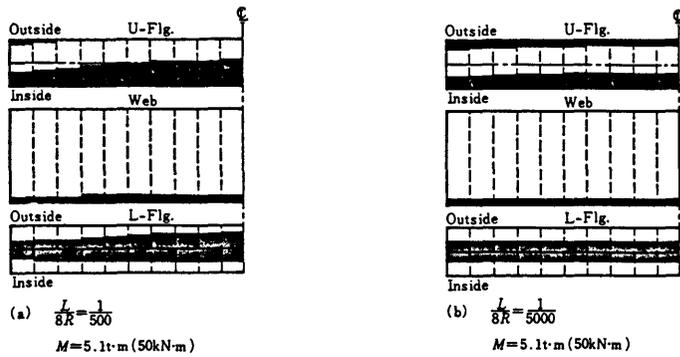


Fig. 3.21 Yielded Portions of Model-I under Equal End Moments ( $\bar{\lambda} = 0.6$ )

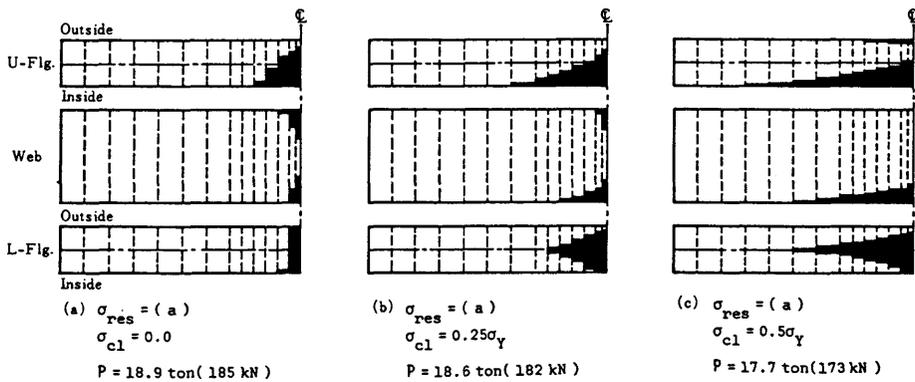


Fig. 3.22 Comparison between Yielded Portions for Residual Stress Levels

## 第4章 溶接 I 形桁の横ねじれ座屈実験

### 4.1 緒言

横ねじれ座屈現象は、曲げを受ける I 形断面部材の耐荷力を決める重要な要素である。すなわち、構造設計における圧縮フランジの許容曲げ応力度<sup>15)</sup> は、横ねじれ座屈に関する多くの実験および理論的研究<sup>2),3),6)</sup> により提案された基準強度式を基に決められている。通常、桁の座屈強度は桁両端において断面の両主軸まわりの曲げおよびねじれに対して単純支持された桁に、強軸まわりに一様曲げが作用するときを基準とし、モーメント勾配があるときは修正係数により補正する方式がとられている。この修正係数は主として弾性座屈解をもとに求められており、これを弾塑性座屈にも適用している。なお、弾塑性域での修正係数に関しては、文献 1), 16) がある。これらの基礎となった実験の多くは一様曲げの状態で行われており、しかも過去の横ねじれ座屈実験をまとめた報告 8), 10) は、2 点荷重曲げによるスパン中央部の拘束点間（一様曲げの桁区間）に注目し、弾性解による有効座屈長を用いて、単純支持された桁としての評価を行っている。

一方、ECCS（ヨーロッパ鋼構造連合）<sup>5)</sup> の基準強度式では、荷重形式（載荷高、荷重の種類およびモーメント勾配）および境界条件を考慮した弾性座屈強度をベースとした修正細長比 $\bar{\lambda}$ を用いることでこれらの条件の違いの影響を考慮することなく単一の曲線による強度の評価が行われるものとし、圧延ばりあるいは溶接ばりによって異なる初期不整の影響はシステム係数  $n$  により評価できるものとしている<sup>8)</sup>。

しかしながら、これらの評価方法は載荷状態によって異なる桁の降伏域のひろがりの影響を考慮できない。そこで、基準強度式にこれの影響を積極的に取り入れる提案がそれぞれ文献 13) および文献 18) に見られる。また、Dux<sup>4)</sup> はモーメント勾配を考慮した実験を行い、Nethercot<sup>13)</sup> の提案した multiple curves の妥当性を検討している。しかし、これらは圧延ばりを対象としたものであり、溶接桁についての検討はほとんどないのが現状である。

特にプレートガーダーの横ねじれ座屈を対象とした実験としては、文献 6), 7), 9) および 15) 等があり、そのうち Nethercot<sup>15)</sup> は実橋の 1/3 スケールで不等フランジの桁にモーメント勾配のある載荷を行っているが、初期不整による影響に主眼が置かれている。

そこで本研究は、垂直補剛材をもつ溶接桁（プレートガーダー）の横ねじれ耐荷力におよぼすモーメント勾配の影響を実験的に検討するため、i) 片曲げ、および ii) 一様曲げの二通りのモーメント勾配を考え、それぞれ支点と載荷点の横変形を拘束した i) スパン中央 1 点載荷桁 4 体、および ii) 対称 2 点載荷桁 4 体によって実施した。試験桁は実橋の約 1/3 スケールのプレートガーダーであり実橋に準じた方法で製作した。なお、用いた供試体の断面寸法は、桁の横ねじれ強度に注目するため、圧縮フランジの局部座屈、および腹板の曲げ座屈が早期に発生しないように選んだ。

このようにして得られた実験値により，横ねじれ耐荷力の基準強度式にモーメント勾配による非弾性域のひろがりの影響を取り入れる合理性を示す．また，非弾性有限変位解析結果および実験値から，中間横拘束された桁の横ねじれ耐荷力の評価の問題点について示す．なお，本章は文献(19)，(20)に発表したものをとりまとめたものである．

## 4.2 実験概要

### (1) 実験桁

本研究の主目的であるモーメント勾配による横ねじれ耐荷力への影響を検討するために，表-4.1に示すような2種類の载荷状態を考えた．試験桁 GA ~ GD ではスパン中央で，また，試験桁 GE ~ GH ではスパンの3等分点で等しい集中荷重を作用させ，支点および载荷点では面外変形（水平変位およびねじり）を拘束した．したがって1点载荷の場合は左右二つの拘束点間要素（以後，*segment* という）が横ねじれ座屈に対して *critical* な *segment* となり，横ねじれ座屈に対して両端で単純支持され片曲げを受ける桁に対応する．また，2点载荷の場合は中央の *segment* が *critical* な *segment* となり，一様曲げを受ける桁に対応する．ただし，2点载荷では外側の *segment*（拘束 *segment*）による面外変形に対する拘束の影響を受けることになる．試験桁は SS41 鋼板を溶接組立てした8体のプレートガーダーであり，その内，試験桁 GB および GF の詳細を図-4.1に示し，写真-4.1に桁 GB を示す．他の桁についてはスパン長およびパネル長が異なるだけで断面寸法は同じである（表-4.1参照）．本研究の目的から，非弾性域での横ねじれ座屈実験を行うために，修正細長比（ $\bar{\lambda} = \sqrt{M_P/M_E}$ ，ここに， $M_P$  = 全塑性モーメント， $M_E$  = 理想弾性横ねじれ座屈モーメント）を 0.5 ~ 1.1 と変化させる必要性があったこと，また，試験機的能力によって形状が制限されたことからプレートガーダーとしては実橋の 1/3 程度のスケールとした．そのためフランジ厚および腹板厚はそれぞれ 8mm および 4.5mm 厚の鋼板を用いた．また，フランジ幅  $b$ ，フランジ厚  $t$ ，腹板高  $h$ ，腹板厚  $t_w$ ，および垂直補剛材間隔  $a$  で表されるフランジの突出幅厚比  $b/2t = 6.9$ ，腹板の幅厚比  $h/t_w = 112$  およびパネルの縦横比  $a/h = 0.99 \sim 1.49$  を用いた．中間垂直補剛材は等間隔で片側配置することを原則とし，2点载荷の拘束 *segment* についてはせん断座屈に備えて，斜張力場を確保するため両側配置とした．また，载荷点には板厚 10mm の垂直補剛材を両側に溶接し，これを鉛直下方へ引張ることで载荷した（図-4.1断面 C-C 参照）．製作過程で生ずる桁の曲がりおよび腹板のたわみに対してはそれぞれプレス矯正および点加熱（Spot Heating）矯正を施した．

### (2) 断面寸法・素材試験・残留応力・初期たわみ

試験桁の断面寸法は桁長方向に5箇所についてそれぞれ表-4.2に示す寸法を測定した．なお，

腹板厚は，桁端部でのみ測定した．

試験桁は3枚の原板より溶断・製作されたので，それぞれの原板から3本ずつJIS1号試験片を切り出し引張試験を行った．残留応力の測定は試験桁GAと同一寸法の桁GRを製作し，3断面について切断法により行った．写真－4.2(a),(b)および(c)にはそれぞれ切断前，大切断後および小切断後の試験体を示す．初期たわみとしては，圧縮フランジの水平たわみと腹板パネルの面外たわみを測定した．前者は水系とノギスを用いてフランジと腹板の接合線の水平たわみを測定し，後者は感度1/100mmの変位計を用いて1パネルあたり35箇所測定した．後者の様子を写真－4.3に示す．

### (3) 静的曲げ試験

前述のように，曲げ試験は1点荷重および2点荷重による二通りに分けられ，図－4.2には1点荷重の方法を示す．試験桁の両端および荷重点では横ねじれ変形を防止するために，上フランジ上に溶接した鋼棒（32φ）に4個のユニバーサルジョイントを有するブレーシング装置<sup>17)</sup>を取り付け，これを試験桁両側のフレームに固定した（写真－4.4）．また，下フランジ側ではシュー，ソールプレートおよび荷重枠にV溝および円錐孔を掘り，直径が51mmの鋼球をはめ込んだ（写真－4.5）．これにより桁の両端では面内変形および面外変形に対して単純支持を満足し，荷重点では鉛直変位は自由に，水平変位およびねじりだけを拘束することになる．荷重はMTS製35ton(340kN)の油圧ジャッキ1基（1点荷重の場合）あるいは2基（2点荷重の場合）により荷重枠を介して垂直補剛材を引張ることにより作用させ（写真－4.6），予想最高荷重の約25%まで予備荷重を行い，ブレーシング装置，荷重枠および試験桁の正常な働きを確認した後，本荷重を行った．荷重ステップは0.5ton(4.9kN)を原則とし，圧縮フランジの水平変位の増分が大きくなった後は変位制御を行った．各荷重段階での変位（約40点）およびひずみ（約100点）は多点デジタルひずみ計およびパーソナルコンピュータを用いて瞬時に測定した．なお，変位は精度1/100mmのしゅう動形変位計を，試験桁に取り付けたアルミ製アングルに接触させて測定し，ひずみはゲージ長10mmの単軸抵抗線ゲージにより測定した．桁GBの測定点の位置を図－4.3に示す．

## 4.3 実験結果および考察

### (1) 断面諸量および素材試験

各試験桁の断面寸法および断面諸定数を表－4.2に示す．各断面寸法は，5つの断面での測定値を平均したものである．桁高の左右の値は $d_n < d_s$ なる傾向を示した．これは溶接によりフランジの直角度が保たれていないことおよびフランジが変形していることを表している．なお，桁高と

しては両者の平均値によって代表させた。

素材試験の結果を表-4.3に示す。横ねじれ座屈実験の耐荷力値の整理には、フランジの降伏点応力 $\sigma_{yf} = 2770 \text{ kg/cm}^2$  (271MPa), 腹板の降伏点応力 $\sigma_{yw} = 3240 \text{ kg/cm}^2$  (318MPa), 弾性係数 $E = 2.19 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  (215GPa)およびせん断弾性係数 $G = 8.53 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$  (83.6GPa) を用いた。

## (2) 残留応力

残留応力は試験桁 GA と同一寸法で製作された桁 GR を用い、図-4.4(a)に示す3つの断面 (RA, RB および RC) で測定した。ゲージ長 100mm で打ち込んだ直径 1/16inch の鋼球を標点とし、切断前後の標点間長をコンタクトゲージにより計測した。板面表裏について実施し、表裏の平均値から求めたひずみ量に弾性係数 $E$ をかけた値が図-4.4(b)の残留応力分布である。腹板では点加熱の影響で乱れているが、3断面とも腹板中央部の残留応力の値は小さい。またフランジでは、フランジ縁端の溶断と腹板結合部の溶接の両方の影響を受けた残留応力分布となっている。なお、数値解析を行うために測定値を基に自己つり合いを満足させた残留応力分布を図-4.19(a)のように仮定する。

## (3) 初期たわみ

本試験桁の初期たわみとして、圧縮フランジと腹板の接合線の水平たわみを測定した。測定は、試験桁を載荷装置にセットする前に行ったものである。表-4.4には最大初期たわみ量 $\delta_{max}$ を圧縮部材の製作許容値 $l_0/1000$ で無次元化して示す。ここに、 $l_0$ は試験桁の支間長である。許容値を越えるものは桁 GA のみであり、最大初期たわみの平均値は $l_0/2000$ である。

一方、各腹板パネルについて、上下フランジと腹板との接合線を基準にしたときの最大初期たわみ量 $\delta_w$ 、垂直補剛材で囲まれた板パネルの四隅を基準にしたときの最大初期たわみ量 $W_p$ を求め、各腹板パネルから求まるそれらの値の最大値および平均値をそれぞれ $\delta_{wmax}$ 、 $W_{pmax}$  および $\delta_{wmean}$ 、 $W_{pmean}$  で表わす。これらを製作許容値 $h/250$ で無次元化して表-4.4に示す。ここに、 $h$ は腹板高である。点加熱により矯正を施したにもかかわらず、逆に加熱により局部的に変形している箇所もあり、許容値を越えているパネルは約半数を占めた。

## (4) 荷重-変形挙動

図-4.5および図-4.6はそれぞれ桁 GC および桁 GF の荷重-変形関係を示している。それぞれ圧縮フランジの水平変位およびスパン中央の鉛直たわみの実測値である。なお、荷重段階は図中に示すものより多いが省略してある。一点鎖線はせん断力を考慮したスパン中央の鉛直たわみの理論値を表わし、図中に示した桁の弾性限荷重 $P_y$ の約60%までは理論値と実験値はよく一致している。また、図の圧縮フランジの水平変位から、ほぼ分岐形座屈変形が認められ、中間横拘束点で

の十分な拘束効果が確保できていることがわかる。他の試験桁についても同様な荷重－変形挙動が得られた。

図－4.7および図－4.8はそれぞれ1点載荷桁および2点載荷桁の荷重とスパン中央の鉛直たわみの関係を示している。縦軸の荷重 $P$ は桁の弾性限荷重 $P_Y$ で無次元化し、横軸のたわみ $\delta$ は弾性限荷重に対するせん断力を考慮したスパン中央の弾性たわみ $\delta_Y$ で無次元化してある。比較的長い桁GC、GD、GGおよびGHでは、変形に対するねばりがあまり期待できず変形の小さい段階で急激に荷重が除荷することがわかる。これは横ねじれ座屈変形に伴う除荷であると考えられる。一方、短い桁GA、GB、GEおよびGFでは、降伏による剛性低下の影響も含まれるため変形に対するねばりが期待できる。

図－4.9は各試験桁の圧縮フランジの初期横たわみおよび最高荷重に対する付加水平変位を示している。それぞれ製作許容値 $l_0/1000$ で無次元化されており、負のたわみは中間垂直補剛材が取り付けられている側へのたわみを表す。ここに、初期横たわみは試験装置にセットして整置する前のテストベッド上での測定値であり、必ずしも整置時の初期横たわみであるという保証はない。しかしながら、桁GA、GCおよびGEの付加変位は初期横たわみによる影響が明瞭である。また、*critical segment*のフランジの付加水平変位は、1点載荷ではほぼ正の値が卓越し、2点載荷ではすべて正のたわみになっている。この原因として、初期横たわみの影響、4.3.(1)で述べたフランジと腹板の直角度の影響、および垂直補剛材の片側配置の影響が考えられる。中間垂直補剛材は片側配置であり、引張りフランジとはメタルタッチである。したがって、横ねじれに伴う圧縮フランジの垂直補剛材側（負側）への付加変位は、メタルタッチした状態を保ち、垂直補剛材によって抵抗される。一方、正の側への付加変位はメタルタッチ部が開く方向となり横ねじれに対する垂直補剛材の抵抗は、負の方向の場合より小さいと考えられる。

図－4.10(a)、(b)、(c)および(d)はそれぞれ桁GA、GB、GEおよびGFの荷重段階ごとの圧縮フランジの水平変位を示している。図より、最高荷重 $P_U$ の約85%においても桁の横ねじれ座屈波形はほとんど認められず、むしろ横拘束点のわずかな移動による変形形状が顕著である。しかし、最高荷重に対する変形形状、さらには除荷が十分に進行したときの変形形状は、理想的な横ねじれ座屈波形を生じていることがわかる。

### (5) 崩壊形式

図－4.11は腹板の初期たわみおよび初期たわみを考慮した付加変形形状を示している。破線は腹板とフランジの接合線を基準にした初期たわみを表し、実線は各荷重段階でのフランジの横ねじれ変形を含んだ断面の変形形状である。腹板の面外変位は、腹板とフランジの接合線上に固定した測定棒に取付けた変位計による読みであり、接合線の変位はフランジの水平変位で表されるものとしている。なお、変形は腹板の製作許容値 $h/250$ で無次元化し、横軸は縦軸（桁高）に対して25

倍に拡大されている。図中にはパネル名（たとえば、記号 AP2 の A は GA 桁を表し、P2 は片側垂直補剛材の取付け面に向かって左側から 2 番目のパネルを意味する）と測定断面も示し、また、表には荷重段階  $P$  を最高荷重  $P_U$  に対する比で表し、( ) 内には測定断面における曲げモーメント  $M$  を降伏モーメント  $M_Y$  の比で表した。図から引張フランジの水平変位は圧縮フランジのそれと比べて極めて小さいことがわかる。また、腹板と上下フランジの接合点を結んだ一点鎖線を基準とした変形形状（純面外変形）から腹板の面外変形がわかる。最高荷重レベルの低い桁 GC、GD、GG および GH では腹板の面外変形はほとんど生じず、桁としての横ねじれ変形が卓越している。一方、最高荷重レベルの高い桁 GA、GB、GE および GF では腹板の純面外変形が初期たわみと同一方向に進展する傾向があり、横ねじれ変形の他に断面変形（distortion）が顕著である。

図-4.12 は荷重レベルの高い桁 GA、GB、GE および GF の代表的パネルについて、図-4.11 と同じ測定位置の腹板の桁長方向のひずみ分布を示している。実線は表側（中間補剛材側）を意味し、破線は裏側を、また一点鎖線はそれらの平均値を表す。荷重段階は、荷重  $P$  および測定位置の曲げモーメント  $M$  をそれぞれ最高荷重  $P_U$  および降伏モーメント  $M_Y$  で無次元化して表し、ひずみは腹板の降伏ひずみ  $\varepsilon_{Yw}$  で無次元化してある。最高荷重におけるひずみ分布は極端に乱れており、これは腹板に面外変形が生じていることを意味する。表裏のひずみの乱れは、図-4.11 に示した腹板の面外たわみにより説明できる。すなわち、腹板は図-4.11 のようにパネル長方向にも半波のたわみが卓越するものとすれば、それによるパネル長方向のひずみの圧縮側（図-4.11 のたわみ形の凹側）はパネル AP2 および FP3 では表側となり BP4 および EP3 では裏側となる。これは図-4.12 の実線（表側）と破線（裏側）の大小関係を表している。他のパネルについても表裏のひずみ分布と変形形状には同様な対応が認められた。図-4.11 および図-4.12 における測定断面はパネルの中央だけであり、腹板の曲げ座屈現象について考察することはできないが（試験桁のパネルのアスペクト比は 1.0～1.5 であり、測定位置は曲げを受ける四辺単純支持板の座屈変形の節になり得る）、実験中の目視では明瞭な 2 半波の変形は確認できなかった。表-4.5 には、各試験桁の最高荷重に対応する最大曲げモーメント  $M_U$  および腹板の弾性座屈に対する桁の最大曲げモーメント  $M_Y$  を示した。ここに、 $M_Y$  は 2 点載荷桁については腹板を一樣曲げが作用する四辺単純支持板と考えたときの弾性座屈モーメントに等しく、1 点載荷桁については同様にして得られる弾性座屈モーメントがスパン中央に最も近いパネルの中央断面の曲げモーメントであると、これをスパン中央断面の曲げモーメントに換算して表した。表から、どの試験桁も  $M_Y > M_U$  であり、この結果からも腹板の曲げ座屈は起っていないと考えられる。

図-4.13 は、図-4.12 と同じパネルについて、圧縮フランジの左右端における表裏のひずみと荷重の関係を示している。縦軸は荷重  $P$  の最高荷重  $P_U$  に対する比を表し、横軸は図中に示すようなひずみの比を表す。なお、記号  $\varepsilon_{i+j}$  は測定点  $i$  および  $j$  のひずみの和を表す。一点鎖線は圧縮フランジの水平変位に伴う曲率中心側（圧縮側）のフランジ端の平均ひずみレベルを表し、ひずみレベルが非常に大きくなならない限り、破線および実線はそれぞれ圧縮フランジの曲率中心側のね

じれ座屈現象および圧縮フランジの水平座屈現象を表すと考えてよい。パネル BP4 , EP3 および FP3 では、破線はひずみ比がほぼ 1.0 上にあるのに比べて実線はある荷重レベル以上ではひずみ比が 1.0 から分岐する傾向が強い。これは、圧縮フランジの水平座屈（桁の横ねじれ座屈）現象が卓越していることを意味している。また、高い荷重レベルでの破線の乱れは、水平座屈に伴うフランジのねじれ変形、突出板としての局部座屈あるいは腹板の面外変形に伴うフランジの連続条件から生ずるねじれ変形を意味する。

一方、パネル AP2 では、破線および実線が  $P/P_U = 0.55$  でほぼ同時にひずみ比が 1.0 から分岐し、圧縮フランジの水平変形およびねじれ変形が顕著である。また、パネル AP2 には圧縮フランジの水平変形に伴う引張側のひずみを二点鎖線で示したが、これより、引張側でのねじれ変形は生じていないことがわかる。 $P/P_U = 0.55$  での圧縮フランジ端の平均ひずみ（一点鎖線）はフランジのねじれ座屈変形が進展するレベルではないが、特に桁 GA では測定断面よりもひずみレベルが高くなるスパン中央寄りの断面でねじれ変形を生じ、この変形の連続性として図のような分岐が現れたものと考えられる。文献 11) では圧縮板の最高荷重における板端部のひずみレベル ( $\epsilon_U/\epsilon_Y$ ) について検討されており、次式で表される本試験桁の圧縮フランジの等価幅厚比

$$R_f = \frac{b_o}{t} \sqrt{\frac{\sigma_Y \cdot 12(1-\nu^2)}{E \cdot \pi^2 k_{cr}}} = 0.41 \quad (4.1)$$

に対しては、 $\epsilon_U/\epsilon_Y > 3.0 \sim 4.0$  が報告されている。すなわち  $\epsilon_U/\epsilon_Y = 3.0 \sim 4.0$  になってはじめて圧縮フランジの突出板としての強度が失われるのである。図から、早期にねじれ変形は起っているが、その段階では圧縮フランジの突出板としての強度は失われていないことがわかる。なお、式(4.1)において  $b_o =$  フランジ突出幅、 $t =$  フランジ板厚、 $\nu =$  ポアソン比および  $k_{cr} =$  板の座屈係数 ( $k_{cr} = 0.42$ ) を表す。写真-4.7に崩壊した試験桁の変形状況を示し、写真-4.8にガス切断した実験後の主要パネルの断面形状を示す。圧縮フランジのねじれを伴う水平座屈、および腹板の変形が認められる。

#### 4.4 横ねじれ耐荷力の検討

##### (1) 基準強度式との比較

4.3.(5) で述べたように崩壊形式としては圧縮フランジの水平座屈が卓越していた。表-4.5には本実験の最高荷重すなわち横ねじれ耐荷力および各種参考荷重の計算値を示す。弾性座屈モーメント  $M_E$  は中間横方向拘束を考慮し、伝達マトリックス法<sup>21)</sup>により求めた数値解であり、試験桁 GA ~ GD についてはモーメント勾配の影響が含まれ、試験桁 GE ~ GH については拘束 segment の影響が含まれる。なお、数値解から、 $k = k_y = k_z$  として有効座屈長を求めると、

桁 GE ~ GH はほぼ等しく  $k = 0.854$  を得た<sup>12)</sup> . ここに,  $k_y$  および  $k_z$  はそれぞれ水平変位およびねじれに関する有効長さ係数である .

図 - 4.14 では, 縦軸には実験値の最大曲げモーメント  $M_U$  を降伏モーメント  $M_Y$  で無次元化したものを, 横軸には次式で表される修正細長比を用いている .

$$\bar{\lambda}_0 = \sqrt{\frac{M_Y}{M_{ocr}}} \quad (4.2)$$

ここに,  $M_{ocr}$  は一様曲げを受けるはりの弾性横ねじれ座屈モーメントである . したがって, 弾性横ねじれ座屈曲線 (一点鎖線で表す) は荷重条件 (ここでは図 - 4.14 に示すようなモーメント勾配  $\rho$ ) によって異なり, 一般に, 次式のようなモーメント修正係数  $m$  による補正が行われる<sup>12)</sup>

$$m = 1.75 - 1.05\rho + 0.3\rho^2 \quad (4.3)$$

本実験値を表す記号  $\triangle$  および  $\circ$  はそれぞれ片曲げを受ける桁 (1点載荷) および一様曲げを受ける桁 (2点載荷) の横ねじれ耐荷力に対応し, 記号  $\blacktriangle$  および  $\bullet$  は本実験と同様な載荷状態で行われた圧延ばりの実験値<sup>4)</sup> を表す . なお, 2点載荷の実験値は図中に示す弾性座屈解析による有効座屈長を用いてプロットした . 図中の  $\rho = 1.0$  に対する実線は福本ら<sup>6)</sup> により次式で提案された横ねじれ基準強度式である .

$$\frac{M_U}{M_Y} = 1.0 - 0.412(\bar{\lambda}_0 - 0.2) , \quad \text{ただし, } \bar{\lambda}_0 \geq 0.2 \quad (4.4)$$

ただし, 文献 6) では式 (4.2) の  $M_{ocr}$  として St. Venant のねじり剛性を無視した近似式を用いている . 図から, 細長比  $\bar{\lambda}_0$  が  $\bar{\lambda}_0 < 0.7$  の場合, 基準強度式は十分に安全であり,  $\bar{\lambda}_0 > 0.7$  の範囲においても下限値をおさえていると言える . 一方,  $\rho = 0$  で示した実線は片曲げの場合に対して, 式 (4.4) に式 (4.3) を乗算し補正したものであり, 実験値に対して安全側を確保しているとは言えない . これは弾性解析により得られたモーメント修正係数を用いて基準強度を割増すことの不合理性を示すものである .

宇佐美<sup>16)</sup> はモーメント勾配の影響を非弾性座屈解析により検討し, 式 (4.4) に修正項を付加した次式を提案している . ただし, 文献 16) では  $\bar{\lambda}_0$  に含まれる  $M_{ocr}$  に 1 軸対称断面に適用できる近似式を用いている .

$$\frac{M_U}{M_Y} = 1.0 - 0.412(\bar{\lambda}_0 - 0.2) + 0.32(1.0 - \rho) \quad (4.5)$$

式 (4.5) で  $\rho = 0$  の場合を破線で示す . これも実験値に対して必ずしも安全側とは言えないが, 簡単な修正項を付加することで近似できることを示した点が評価できる . このように, 片曲げを想定した 1点載荷の本実験値の場合, これまで提案されている強度式あるいはモーメント修正係数は

必ずしも妥当でないことがわかる。

## (2) 数値解析による検討

本実験をシミュレートするために、2.3節で示した剛性法を用いた非弾性有限変位解析法を適用する。その手法は円弧ばりを対象として定式化されており、ここでは初期横たわみを円弧で近似して表す。

図-4.15 および図-4.16 は、それぞれ試験桁 GB および GF について、仮定した初期横たわみ、数値解析における最高荷重時およびその約 70% 時の桁の変形モードを示している。図-4.15 に示した 1 点荷重の場合は荷重点を節とする 2 半波形の初期横たわみを仮定し、図-4.16 に示した 2 点荷重の場合はスパン長全体について 1 半波形の初期横たわみを仮定した。また、その大きさは横拘束点間距離  $L$  に対して  $L/8R = 1/4000$  とした。ここに、 $R$  は曲率半径であり、パラメータ  $L/8R$  はアーチのライズ比に相当する。断面寸法および材料定数は表-4.2 および表-4.3 に示した値を用い、残留応力は実測値を基に自己つり合いを満足するように決定した図-4.19(a) を用いた。

桁の水平変位  $v$  および断面回転角  $\phi$  の変形モードは、1 点荷重の場合、荷重の大きさにかかわらずほぼ同様であるが、最高荷重近くでは降伏による剛性低下のため変形モードの最大位置が荷重点側へ移動している。一方、2 点荷重の場合、1 半波の円弧で仮定した初期横たわみの影響が大きく、最高荷重の約 70% 程度では変形モードが理想的な横ねじれ座屈モードになっていないが、変形の絶対量は極僅かであり、最高荷重近くにおいては横ねじれ座屈モードを生じている。また、その荷重-変形関係を実測値とともに図-4.17 に示す。

図-4.17 の解析値は実測位置での変位で表されており、実測値とほぼ同様な傾向を示している。解析においては変形の収束が得られなくなったときを最高荷重とし、荷重の除荷は行っていない。これらの結果から、2 点荷重桁に 1 半波形の初期横たわみを仮定してもその初期横たわみは外乱を与える役割を果すだけであり、横ねじれ耐荷力の推定は可能であると考えられる。なお、図-4.17 に示した直線ばりとしての鉛直たわみの理論値（一点鎖線および実線）はそれぞれせん断力の影響を考慮した場合および考慮しない場合を表している。低い荷重段階においては、実験値は前者に一致し、解析値は後者に一致していることが明らかである。

図-4.18 は図-4.14 と同じ実験値および数値解析結果を示しており、縦軸には実験値の最大曲げモーメント  $M_U$  を全塑性モーメント  $M_P$  で無次元化したものを、横軸には次式で表される修正細長比を用いている。

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{M_P}{M_E}} \quad (4.6)$$

ここに、 $M_E$  は荷重状態および境界条件を考慮した弾性座屈モーメントであり、弾性座屈曲線はこ

これらの条件の違いにかかわらず図中の一点鎖線、 $M_U/M_P = 1/\bar{\lambda}^2$  で表される。しかし、非弾性域では、初期不整（残留応力および初期たわみ）のみならずモーメント勾配の違いによる降伏領域のひろがりの違いにより横ねじれ耐荷力に差が生じ、 $M_U/M_P - \bar{\lambda}$  軸上での実験点にばらつきが生ずる。本実験値を表す記号△および○はそれぞれ片曲げを受ける桁（1点載荷）および一様曲げを受ける桁（2点載荷）の耐荷力に対応し、それらは非弾性域（ $\bar{\lambda} < 1.2$ ）で明確な差を生じている。また、圧延ばりの実験値<sup>4)</sup>（記号▲および●）からも同様な結果が得られている。図-4.18に示した実線および破線は、非弾性有限変位解析による横ねじれ耐荷力曲線を表している。解析では初期横たわみを水平面内の円弧で表し、荷重-変形曲線から求められる最高荷重を横ねじれ耐荷力とした。図中の桁の初期横たわみを表すパラメータ  $L/8R$  はアーチのライズ比に相当するもので、 $L$  は横拘束点間長さ、および  $R$  は曲率半径を表す。本実験値における圧縮フランジの初期横たわみおよび圧延ばりの実験値におけるせん断中心の初期横たわみをよく表す値としてそれぞれ  $L/8R = 1/4000$  および  $L/8R = 1/2500$  を用いて数値解析を行った。前述のように、このような初期横たわみは数値解析上の外乱を与えるためであり、修正細長比によっても異なるが、 $L/8R = 1/2500$  以下の初期横たわみであれば、同一載荷状態におけるはりの耐荷力は数%上下する程度である<sup>18)</sup>。なお、1点載荷の場合の初期横たわみは図中のように仮定し、残留応力分布は実測値を基に自己つり合いを満足するように決定された図-4.19(a) および(b)の分布形をそれぞれ本実験桁および圧延ばりに適用した。解析法は断面変形を生じないはりタイプの横ねじれ挙動をシミュレートするものであるが、解析値は圧延ばりの実験値<sup>4)</sup>のみならず本実験値とも極めてよく一致している。したがって、本試験桁のように横ねじれ座屈（圧縮フランジの水平座屈）が支配的である桁では腹板の変形および圧縮フランジのねじれ変形は耐荷力にほとんど影響を与えないものと考えられる。なお、試験桁 GA、GE 等では圧縮フランジのねじれ座屈現象が比較的顕著であったが、4.3.(5) で述べたように本試験桁では圧縮フランジ先端のひずみレベル  $\epsilon_U/\epsilon_Y$  が 3.0~4.0 以上になるまで突出板としての強度が保たれることから、ねじれ座屈は考慮していないが降伏の影響を剛性の低下として考慮している本解析値は実験値とよく一致したものと考えられる。本実験桁のように腹板およびフランジの幅厚比を小さくして各板要素の局部座屈を防止するような断面構成をもつプレートガーダーでは、断面変形を考慮しない数値解析による横ねじれ耐荷力の推定が可能である。一方、腹板およびフランジの幅厚比が大きく、各要素が早期に局部座屈を起こすような場合は、それらと圧縮フランジの水平座屈との非弾性域での相互作用についての検討が必要であろう。

### (3) 実験値を評価する上での問題点

2点載荷桁の *critical segment* は横ねじれ座屈変形に対して、拘束 *segment* による拘束を受けている。図-4.14 および図-4.18 においては、この影響は有効座屈長を用いて考慮され

ており、通常、実験値を整理するためにこの手法が用いられている。ところが、荷重の増加に伴う *segment* の降伏領域の進展に応じて拘束 *segment* による拘束効果に変化し、実際の有効座屈長は弾性座屈解析による値より小さくなる。そこで図-4.20(a)には、図-4.18 に示した2点載荷桁に対する解析結果から求めた有効座屈長係数  $k$  を示す。すなわち、図-4.16 に示したように2点載荷桁に対して初期横たわみを1半波形で仮定しても最高荷重近くでは理想的な横ねじれ座屈モードを生じるので、ここでは、そのときの変形モードの変曲点間距離を有効座屈長と考える。図では、水平変位  $v$  から求まる有効座屈長係数  $k_y = l_v/L$  を記号  $\Delta$  で表し、断面回転角  $\phi$  から求まる有効座屈長係数  $k_z = l_\phi/L$  を記号  $\square$  で示した。ここに、 $l_v$  および  $l_\phi$  はそれぞれ変形  $v$  および  $\phi$  から求まる変曲点間距離を表し、 $L$  は横拘束点間距離である。数値計算における最高荷重近くでの変形の収束は悪く、得られた有効座屈長は2~3%の誤差を含むものと思われるが、最高荷重の増加に伴って有効座屈長は明らかに減少している。なお、本試験桁タイプについて弾性座屈解析によって得られる座屈荷重から、前述のように  $k = k_y = k_z$  として逆算すると、有効座屈長係数は  $k \approx 0.85$  となる。したがって、図-4.14 および図-4.18 における2点載荷桁の実験値を一様曲げが作用する桁の横ねじれ耐荷力とみなすと過大評価することになる。

図-4.20(b) に示した実線は、両端に等モーメント荷重が作用し、両端で単純支持された桁の耐荷力解析結果を示している。解析には本試験桁の断面諸量を用い、初期横たわみを  $L/8R = 1/4000$  に仮定した。横軸の修正細長比  $\bar{\lambda} = \sqrt{M_P/M_E}$  における弾性横ねじれ座屈モーメント  $M_E$  は式(3.3)で  $C_1 = k = 1.0$ ,  $C_2 = C_3 = 0$  として評価した。記号  $\circ$  で示した2点載荷桁の本実験値は同様に式(3.3)で  $C_1 = 1.0$ ,  $k = 0.85$ ,  $C_2 = C_3 = 0$  として評価し、プロットしてある。本実験値は解析結果よりも6~12%高くなっている。この差は数値解析モデルの誤差も含んでいるが、上述した拘束効果の変化に伴う実験値の過大評価を意味するものと思われる。一方、図-4.20(b) に示した記号  $\bullet$  は図-4.20(a) のようにして得られた有効座屈長係数  $k$  を用いて、一様曲げとしての弾性座屈モーメント  $M_E$  (式(3.3)) を評価し、そのときの  $\bar{\lambda} = \sqrt{M_P/M_E}$  に対して本実験値をプロットしたものである。ただし、 $k = k_y (\approx k_z)$  とした。このようにプロットした実験値はほぼ図中の実線上に分布しており、これは横ねじれ耐荷力に対しても有効座屈長の概念を用いることの妥当性を示すものと考えられる。ただし、非弾性域における有効座屈長係数を用いなければならない。図-4.20(a) のように数値解析をすることなく、非弾性域における有効座屈長係数を簡単に求める方法は次章に示す。

#### 4.5 結論

本章においては溶接I形断面桁の横ねじれ耐荷力におよぼす強軸まわりのモーメント勾配の影響を検討するために、実橋の1/3程度のプレートガーダーを製作し、載荷点の横変位を拘束した1

点載荷（片曲げを受ける桁を想定）および2点載荷（一様曲げを受ける桁を想定）による曲げ耐荷力実験を行った。圧縮フランジのねじれ座屈および腹板の曲げ座屈については道路橋示方書<sup>14)</sup>の基準強度式を用いて、フランジが降伏するまでそれらが発生せず、桁の横ねじれ座屈（圧縮フランジの水平座屈）が先行するように部材寸法を決定した。実験および同時に行った数値解析から、次のような結論が得られた。

- (1) 支点および載荷点に用いた横変位拘束治具は簡単でしかも十分な精度を有する。
- (2) 桁の崩壊形式はすべて横ねじれ座屈（圧縮フランジの水平座屈）が主であったが、崩壊における応力レベルが高くなる桁の圧縮フランジ、あるいは圧縮フランジの水平座屈による曲率中心側のフランジにおいてはねじれ変形が確認できた。しかし、このようなねじれ変形が発生した後も耐力を保つことがわかった。
- (3) 腹板の荷重による面外たわみは初期たわみの形状に影響される。
- (4) 圧縮フランジの水平座屈変形の方法は圧縮フランジの初期横たわみ、フランジと腹板の直角度および片側中間垂直補剛材によって影響される。なお、本実験の範囲では、桁の横ねじれ耐荷力に対する中間垂直補剛材の剛度、間隔の効果について明らかにすることはできなかった。
- (5) はり理論に基づく非弾性有限変位解析により得られた横ねじれ耐荷力は本実験値と極めてよく一致し、本試験桁のようにフランジおよび腹板の幅厚比が小さいプレートガーターでは、そのような解析法により横ねじれ耐荷力を推定できる。
- (6) 弾性横ねじれ座屈強度を用いた無次元化座標 ( $M_U/M_Y - \bar{\lambda}_0 = \sqrt{M_Y/M_{ocr}}$ ) あるいは ( $M_U/M_P - \bar{\lambda} = \sqrt{M_P/M_E}$ ) 上での横ねじれ耐荷力曲線は非弾性域でモーメント勾配によって明確な差を生じている。したがって、基準強度曲線をモーメント勾配別に multiple curves で表すことが合理的である。
- (7) 中間横拘束のある桁では、降伏に伴う拘束効果（有効座屈長）の変化について把握しておく必要がある。

(6) および (7) については次章において検討する。

## 用いた記号

- $a$  : 垂直補剛材間隔
- $b, b_0$  : フランジ全幅, フランジ突出幅
- $d, d_n, d_s$  : 桁高, 垂直補剛材のない側の桁高, 垂直補剛材のある側の桁高
- $E$  : ヤング率
- $G$  : せん断弾性係数
- $h$  : 腹板高

- $k_{cr}$  : 板の座屈係数  
 $k, k_y, k_z$  : 有効座屈長係数, 水平変位およびねじれに関する有効座屈長係数  
 $L$  : 横拘束点間距離  
 $l_o$  : 桁長  
 $l_u, l_\phi$  : 水平変位および断面回転角に関する変形モードの変曲点間距離  
 $M_E$  : 荷重形式および境界条件を考慮した弾性横ねじれ座屈モーメント  
 $M_{ocr}$  : 両端単純支持桁が一様曲げを受けるときの弾性横ねじれ座屈モーメント  
 $M_P$  : 断面の全塑性モーメント  
 $M_U$  : 桁の最高荷重における最大曲げモーメント  
 $M_W$  : 腹板の弾性座屈荷重に対する桁の最大曲げモーメント  
 $M_Y$  : 桁の降伏モーメント  
 $m$  : モーメント修正係数  
 $P_U$  : 桁の最高荷重  
 $P_Y$  : 桁の弾性限荷重  
 $R_f$  : 等価幅厚比  
 $t, t_w$  : フランジおよび腹板の板厚  
 $v$  : 桁の水平変位  
 $W_p$  : 腹板パネルの最大初期たわみ (パネルの四隅を基準にしたとき)  
 $\delta_{max}$  : 圧縮フランジの初期横たわみの最大値  
 $\delta_w$  : 腹板の最大初期たわみ (フランジとの接合線を基準にしたとき)  
 $\delta_Y$  : 桁の降伏荷重に対する桁の最大たわみ  
 $\epsilon_U$  : 最高荷重に対するひずみ  
 $\epsilon_{Yf}, \epsilon_{Yw}$  : フランジおよび腹板の降伏ひずみ  
 $\bar{\lambda}_o$  : 修正細長比 ( =  $\sqrt{M_Y/M_{ocr}}$  )  
 $\bar{\lambda}$  : 修正細長比 ( =  $\sqrt{M_P/M_E}$  )  
 $\nu$  : ポアソン比  
 $\rho$  : モーメント勾配  
 $\sigma_{Yf}, \sigma_{Yw}$  : フランジおよび腹板の降伏点応力  
 $\phi$  : 断面回転角

## 参考文献

- 1) 青島泰之：圧延H型鋼ばりの横倒れ座屈公式，土木学会論文報告集，第267号，1977年11月，pp.1-8.
- 2) Basler, K., Yen, B.T., Mueller, J.A. and Thürlimann, B. : Web Buckling Test on Welded Plate Girders, Welding Research Bulletin Series, No.64, September, 1960, pp.1-63.
- 3) Basler, K. and Thürlimann, B. : Strength of Plate Girder in Bending, Trans. of ASCE, Vol.128, 1963, pp.653-682.
- 4) Dux, P.F. and Kitipornchai, S. : Inelastic Beam Buckling Experiments, Research Report No.CE24, Department of Civil Engineering, University of Queensland, May, 1981, pp.1-36.
- 5) ECCS : Manual of the Stability of Steel Structures, Introductory Report, 2nd International Colloquium on Stability of Structures, Liege, April, 1977.
- 6) 福本嘯士，藤原稔，渡辺信夫：溶接I型部材の横倒れ座屈に関する実験的研究，土木学会論文報告集，No.189，1971年5月，pp.39-51.
- 7) Fukumoto, Y. : Lateral Collapse of Plate Girders in Bending, Proceeding of Design of Plate and Box Girders for Ultimate Strength, IABSE, London, 1971, pp.28-38.
- 8) Fukumoto, Y and Kubo, M. : An Experimental Review of Lateral Buckling of Beams and Girders, International Colloquium on Stability of Steel Structures under Static and Dynamic Loads, ASCE, 1977, pp.541-562.
- 9) Fukumoto, Y. and Kubo, M. : Ultimate Bending Strength of Plate Girders with Longitudinal Stiffeners Failed by Lateral Instability, Der Stahlbau, 12/1977, pp.365-371.
- 10) 福本嘯士，伊藤義人：座屈実験データベースによる鋼はりの横ねじれ基準強度に関する実証的研究：土木学会論文報告集，第341号，1984年1月，pp.137-146.
- 11) Fukumoto, Y. and Itoh, Y. : Basic Compressive Strength of Steel Plates from Test Data, Proc. of JSCE, No.344, April, 1984, pp.129-139.
- 12) Nethercot, D.A. and Trahair, N.S. : Lateral Buckling Approximations for Elastic Beams, The Structural Engineer,

Vol.54, June, 1976, pp.197 - 204 .

- 13) Nethercot, D.A. and Trahair, N.S. : Inelastic Lateral Buckling of Determinate Beams, Journal of the Structural Division, Proc.of ASCE, Vol.102, No.ST4, April, 1976, pp.701 - 717 .
- 14) 日本道路協会：道路橋示方書／同解説，1980年2月．
- 15) ÓhEachteirn, and Nethercot, D.A. : Lateral Torsional Buckling Tests on Reduced Scale Welded Steel Bridge Girders, Report No.BE/22/2/065/3, University of Sheffield, September, 1982.
- 16) Usami, T. : Inelastic Lateral Buckling Strength of Monosymmetric I-Girders, Research Bulletin of the Faculty of Engineering, Gifu University, No.23, March, 1973, pp.81 - 94 .
- 17) Yarimci, E., Yura, J.A. and Lu, L.W. : Techniques for Testing Structures Permitted to Sway, Experimental Mechanics, August, 1967, pp.321 - 331 .
- 18) Yoshida, H. and Maegawa, K. : Lateral Instability of I-Beams with Imperfections, ASCE, Journal of Structural Engineering, Vol.110, No.8, August, 1984, pp.1875-1892 .
- 19) 福本 昉士， 前川幸次， 伊藤義人， 浅里芳行：モーメント勾配による溶接 I 形桁の横ねじれ座屈実験， 土木学会論文報告集，No.362/I-4，1985年 10 月．
- 20) 福本 昉士， 前川幸次， 伊藤義人， 浅里芳行：モーメント勾配を持つプレートガーダーの横倒れ耐荷力実験， 土木学会中部支部研究発表会，1985年 3 月， pp.48 - 49 .
- 21) 小堀為雄， 吉田 博：鋼構造設計理論， 第9章， 森北出版，1977年．



Photo 4.1 Test Girder ( GB )

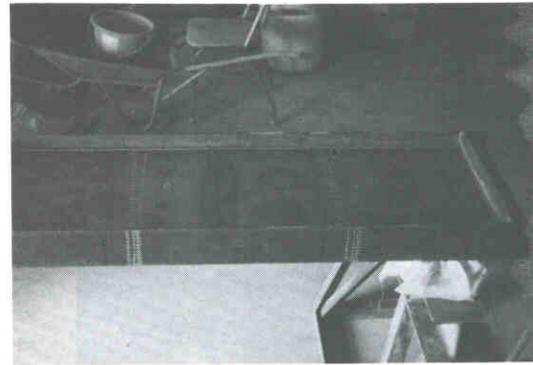


Photo 4.2(a) Residual Stress Measurements  
(before cutting)

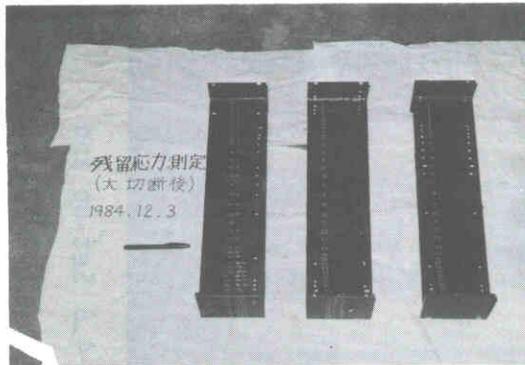


Photo 4.2(b) Residual Stress Measurements  
(after cutting off greater blocks)

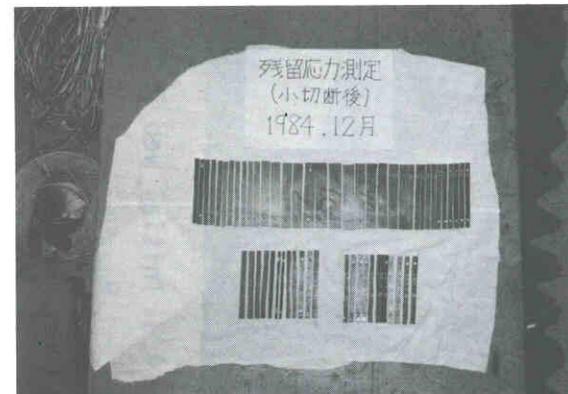


Photo 4.2(c) Residual Stress Measurements  
(after cutting off 57 pieces from a block)

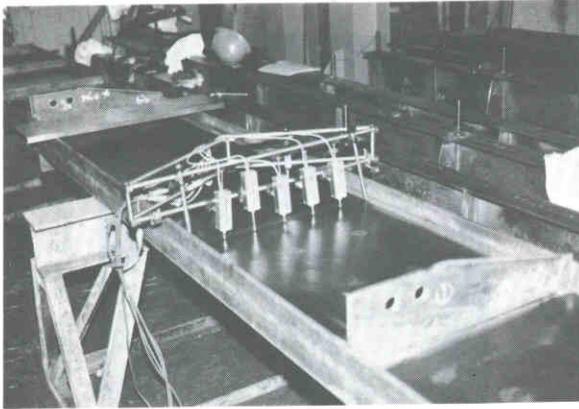


Photo 4.3 Initial Web Deflection Measurements

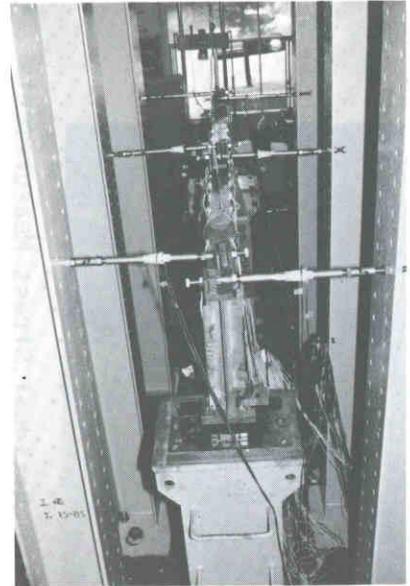


Photo 4.4 Lateral Bracing Apparatuses for Upper Flange

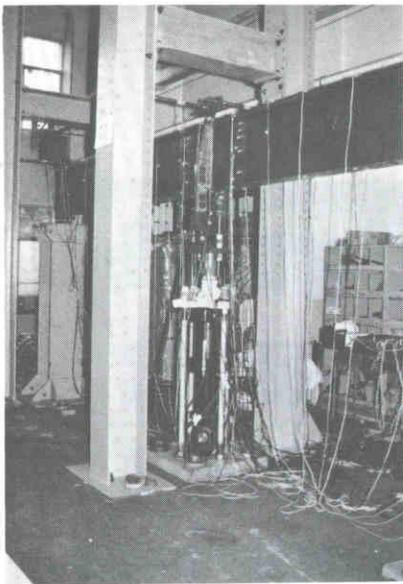


Photo 4.6 Set-up and Loading Equipment

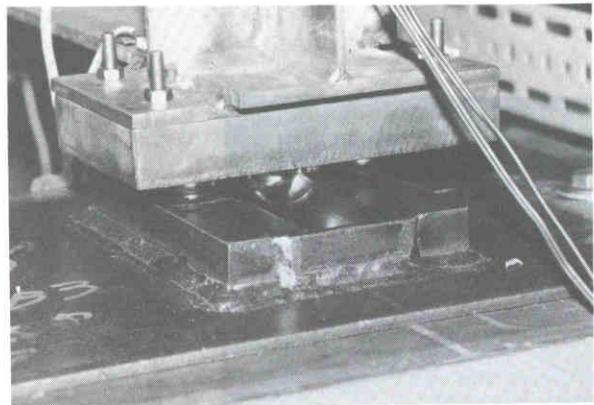


Photo 4.5 Simple Shoe of Notch and Steel Balls

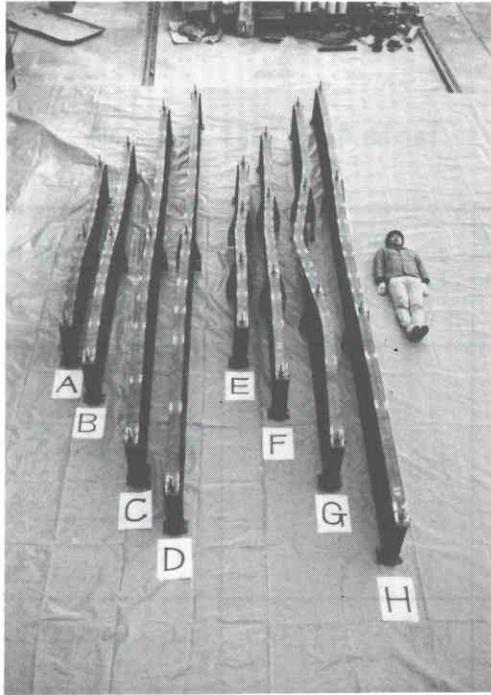
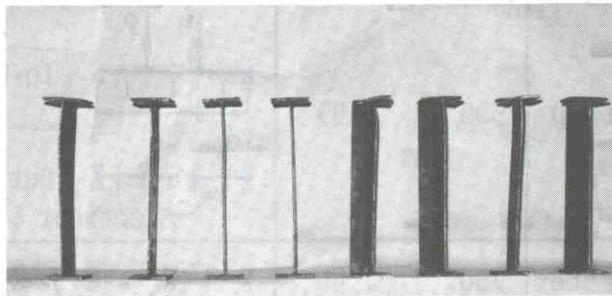


Photo 4.7 Lateral-Torsional Buckling Modes ( GA—GH )



AP3 BP3 CP6 DP7 EP4 FP4 GP5 HP7

Photo 4.8 Typical Cross-Sections after Collapse

Table 4.1 Test Program

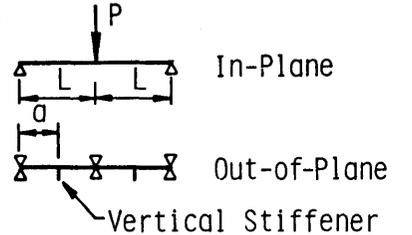
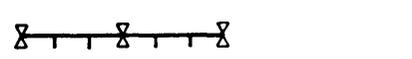
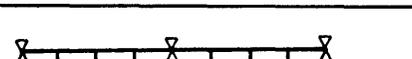
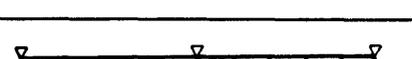
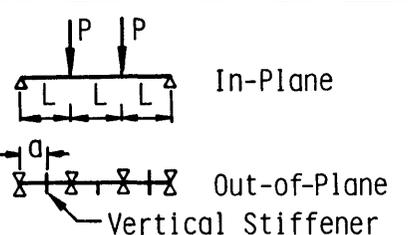
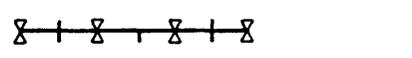
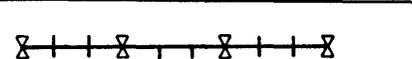
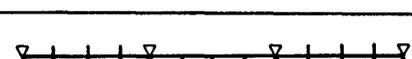
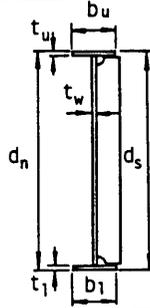
Test Girders	Segment Length L (mm)	Panel		Loading and Boundary Conditions
		Length a (mm)	Aspect Ratio a/h	
G A	1 500	750	1.49	 <p>In-Plane</p> <p>Out-of-Plane</p> <p>Vertical Stiffener</p>
G B	2 000	667	1.32	
G C	3 000	750	1.49	
G D	3 500	700	1.39	
G E	1 000	500	0.99	 <p>In-Plane</p> <p>Out-of-Plane</p> <p>Vertical Stiffener</p>
G F	1 500	750	1.49	
G G	2 000	667	1.32	
G H	2 500	625	1.24	

Table 4.2 Dimensions of Test Girders

Test Girders	$d_n$ (mm)	$d_s$ (mm)	$b_u$ (mm)	$b_l$ (mm)	$t_w$ (mm)	$t_u$ (mm)	$t_l$ (mm)	$I_x$ (cm <sup>4</sup> )	$I_y$ (cm <sup>4</sup> )	$K_T$ (cm <sup>4</sup> )	$I_w$ (cm <sup>6</sup> )
GA	517.8	520.8	110.9	111.3	4.27	8.11	8.10	16290	185.5	5.26	120900
GB	518.3	520.7	110.6	110.5	4.28	8.09	8.11	16260	182.7	5.25	119300
GC	519.1	520.9	110.4	110.0	4.27	8.06	8.04	16120	179.0	5.10	117100
GD	518.6	520.1	109.8	110.6	4.25	8.10	8.11	16180	181.1	5.22	118100
GE	519.8	520.6	110.6	110.4	4.28	8.11	8.12	16320	182.8	5.28	119600
GF	517.7	520.6	110.4	110.4	4.26	8.02	8.08	16130	180.9	5.16	117900
GG	517.8	521.4	110.0	110.3	4.27	8.08	8.08	16190	180.3	5.20	117700
GH	517.8	521.6	110.1	110.6	4.25	8.09	8.11	16210	181.5	5.22	118500
Ave.	519.6		110.4		4.27	8.09		16210	181.7	5.21	118600



note:  $I_x$  = Moment Inertia about Major Axis,  $I_y$  = Moment Inertia about Minor Axis  
 $K_T$  = Torsion Constant,  $I_w$  = Warping Moment Inertia

Table 4.3 Tensile Coupon Test Results

Coupon Mark	Test Girders	Coupon Thickness (mm)	$\sigma_Y$ (N/mm <sup>2</sup> )	$\sigma_U$ (N/mm <sup>2</sup> )	$\nu$	E (kN/mm <sup>2</sup> )	G (kN/mm <sup>2</sup> )
TA1	Flange	8.05	269	446	0.273	210	82.5
TA2		8.06	270	449	0.284	212	82.6
TA3		8.10	275	451	0.287	211	82.0
Ave.			271	449			
TB1	Web (GC, GF, GG)	4.28	321	458	0.280	215	84.0
TB2		4.28	314	453	0.284	214	83.3
TB3		4.29	307	443	0.281	213	83.1
TC1	Web (GA, GB, GD) GE, GH	4.26	321	457	0.284	219	85.3
TC2		4.25	319	460	0.292	219	84.8
TC3		4.26	324	460	0.282	218	85.0
Ave.			318	455			
Ave.					0.282	215	83.6

Table 4.4 Initial Maximum Deflections of Compressive Flange (lateral direction) and Web Panel (out-of-plane)

Test Girders	Upper Flange	Web Panel			
	$\frac{\delta_{max}}{l_0/1000}$	$\frac{\delta w_{max}}{h/250}$	$\frac{\delta w_{mean}}{h/250}$	$\frac{W_p_{max}}{h/250}$	$\frac{W_p_{mean}}{h/250}$
G A	1.48	0.99	0.73	1.69	1.02
G B	0.28	2.00	1.26	2.23	1.47
G C	0.88	2.77	1.52	2.85	1.77
G D	0.24	2.48	2.00	3.09	2.14
G E	0.58	1.93	0.81	2.31	1.02
G F	0.17	3.26	1.23	3.44	1.48
G G	0.24	2.30	1.10	2.76	1.41
G H	0.20	2.42	1.29	2.73	1.42
Ave.	0.50	2.27	1.24	2.64	1.47

$l_0$  = Length of Test Girder,  $h$  = Height of Web

Table 4.5 Summary of Experimental Results and Reference Moments

Test Girders	$P_U$ (kN)	$M_U$ (kN·m)	$M_P$ (kN·m)	$M_Y$ (kN·m)	$M_E$ (kN·m)	$M_W$ (kN·m)	note:
G A	278.0	208.5	210.2	169.9	825.6	279.0	$P_U$ = Experimental Maximum Load
G B	187.7	187.7	209.9	169.5	464.4	250.0	$M_U$ = Experimental Maximum Bending Moment
G C	97.0	145.4	208.9	168.0	210.2	239.0	$M_P$ = Full Plastic Moment
G D	72.9	127.5	208.9	168.8	159.9	231.0	$M_Y$ = Yield Moment
G E	202.6	202.6	210.5	170.0	1357.0	220.0	$M_E$ = Elastic Lateral-Torsional Buckling Moment
G F	118.3	177.5	208.4	168.3	600.2	209.0	
G G	75.1	150.3	209.0	168.7	340.5	208.0	$M_W$ = Elastic Web Buckling Moment
G H	53.3	133.3	209.1	169.0	222.3	208.0	

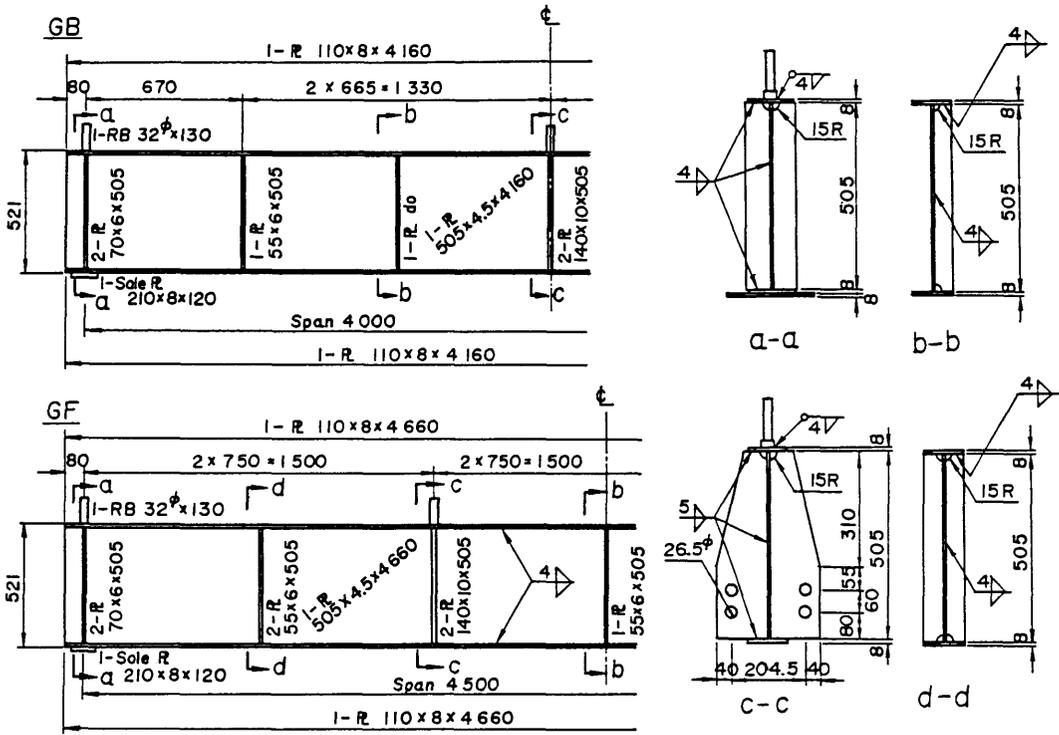


Fig. 4.1 Details of Test Girders (GB and GF)

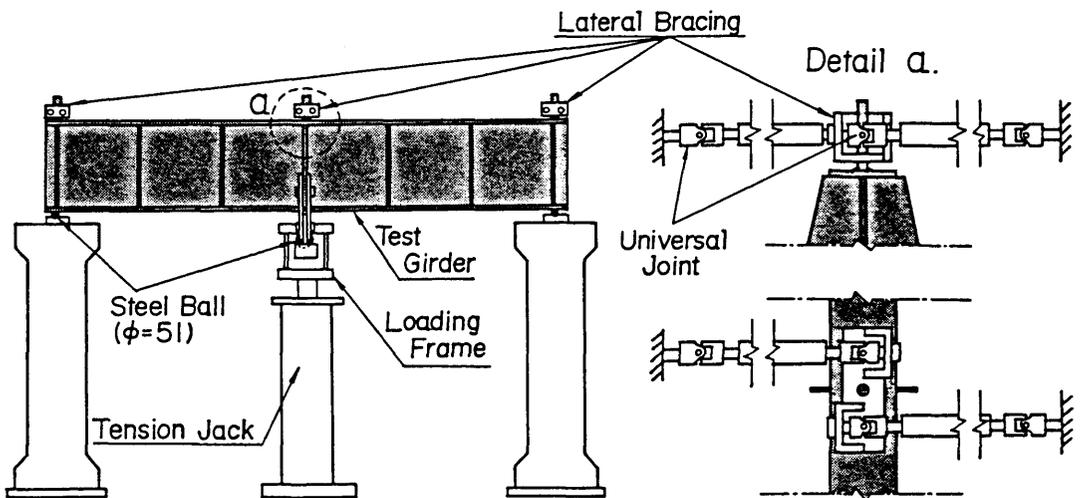


Fig. 4.2 Test Set-up

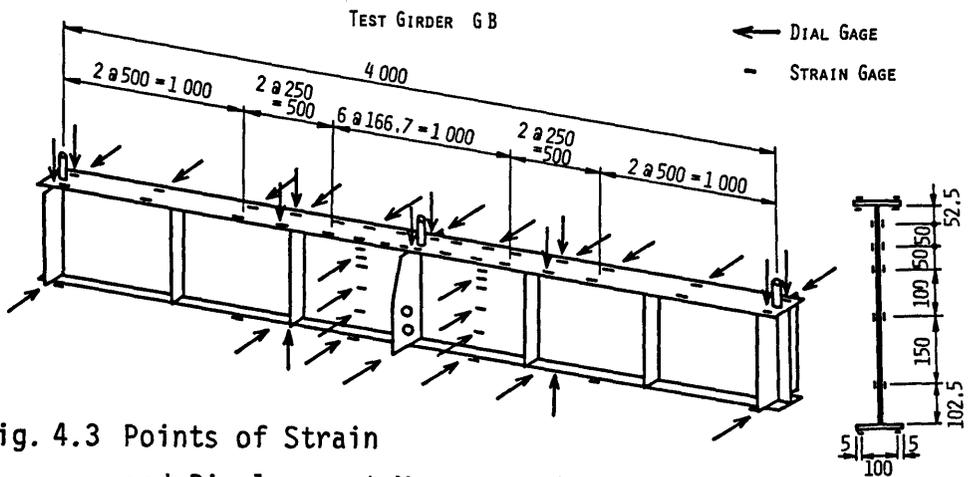


Fig. 4.3 Points of Strain and Displacement Measurements

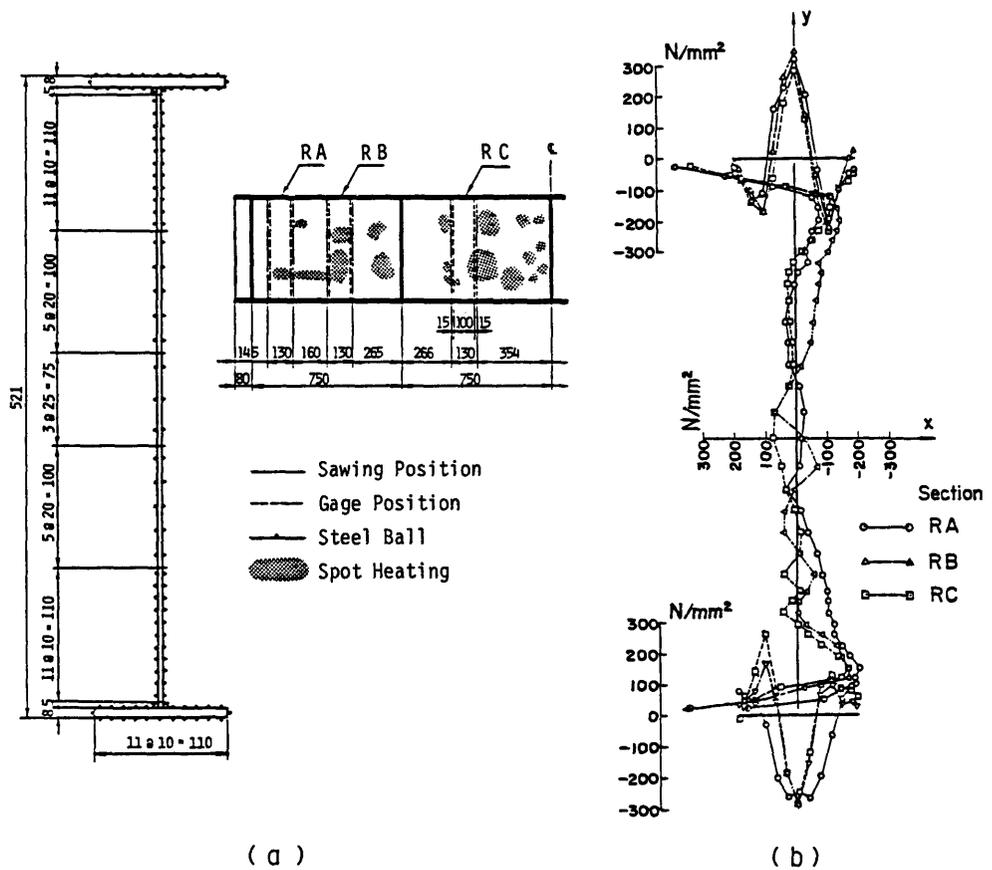


Fig. 4.4 Residual Stress Measurements and Measured Patterns

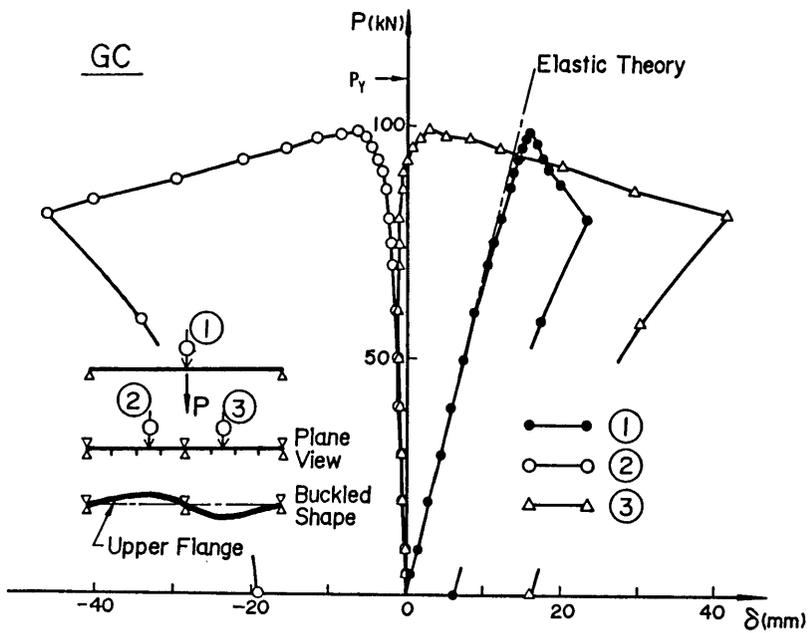


Fig. 4.5 Load-Deflection Curves (GC)

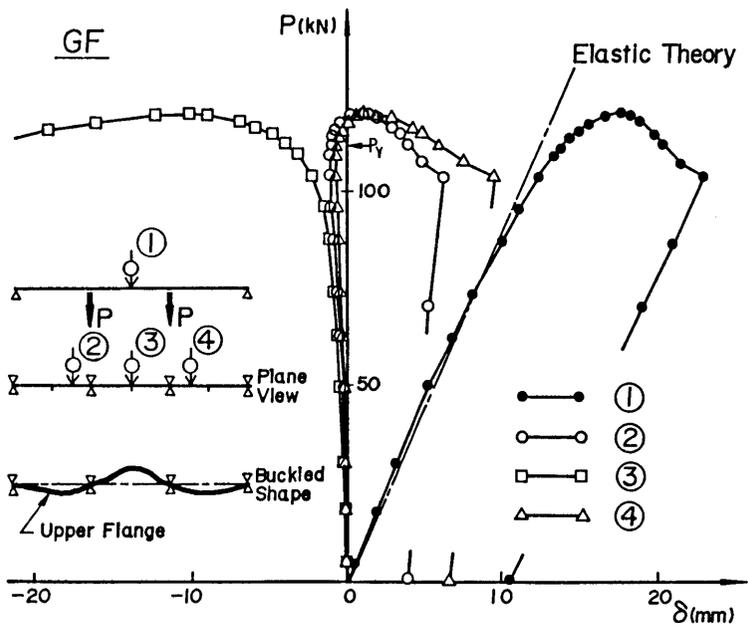


Fig. 4.6 Load-Deflection Curves (GF)

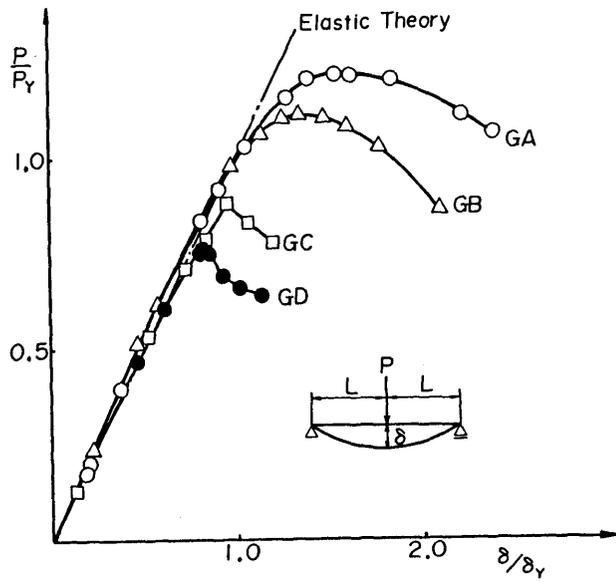


Fig. 4.7 Nondimensionalized Load-Vertical Deflection Curves ( GA – GD )

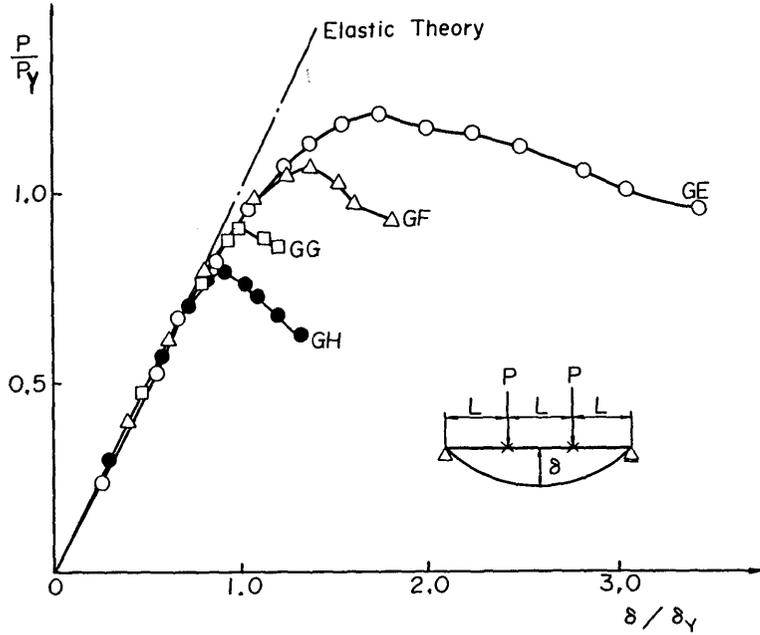


Fig. 4.8 Nondimensionalized Load-Vertical Deflection Curves ( GE – GH )

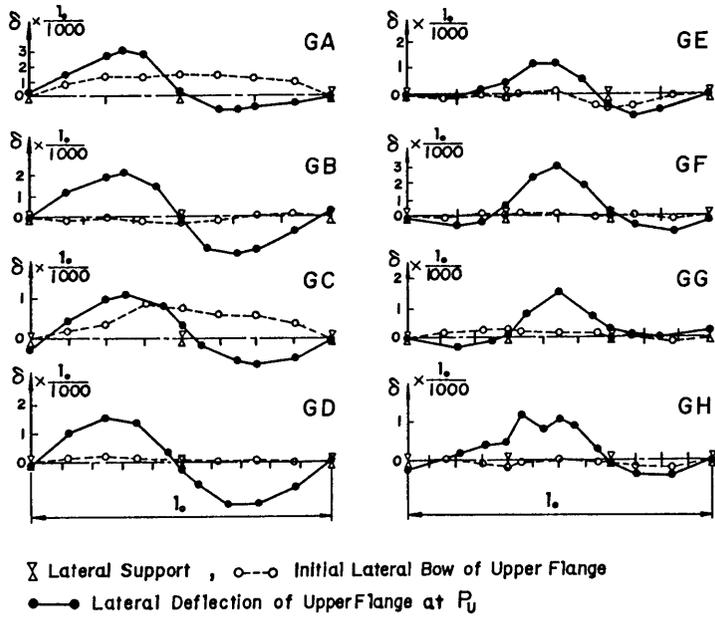


Fig. 4.9 Initial Lateral Bow and Net Deflections

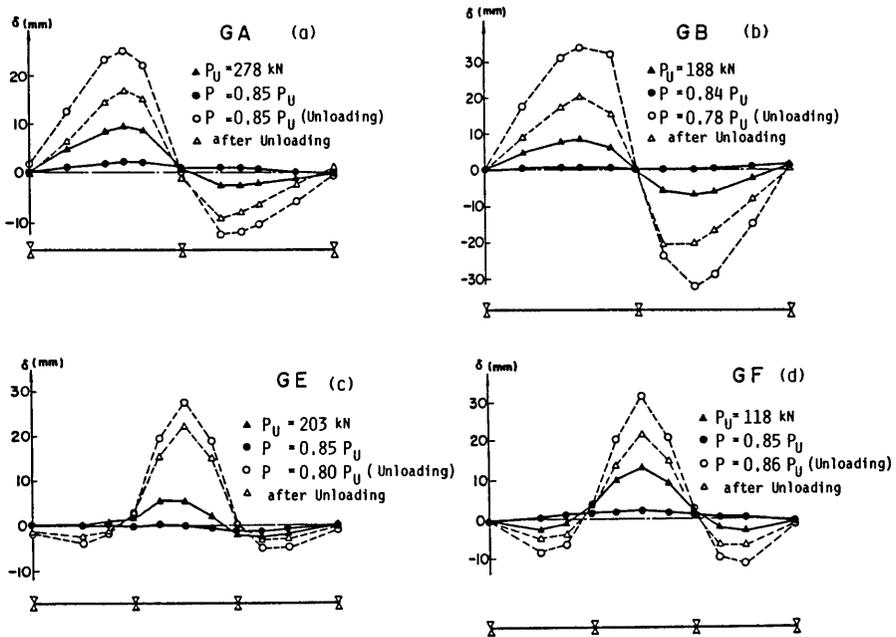


Fig. 4.10 Lateral Deflection Mode of Upper Flange

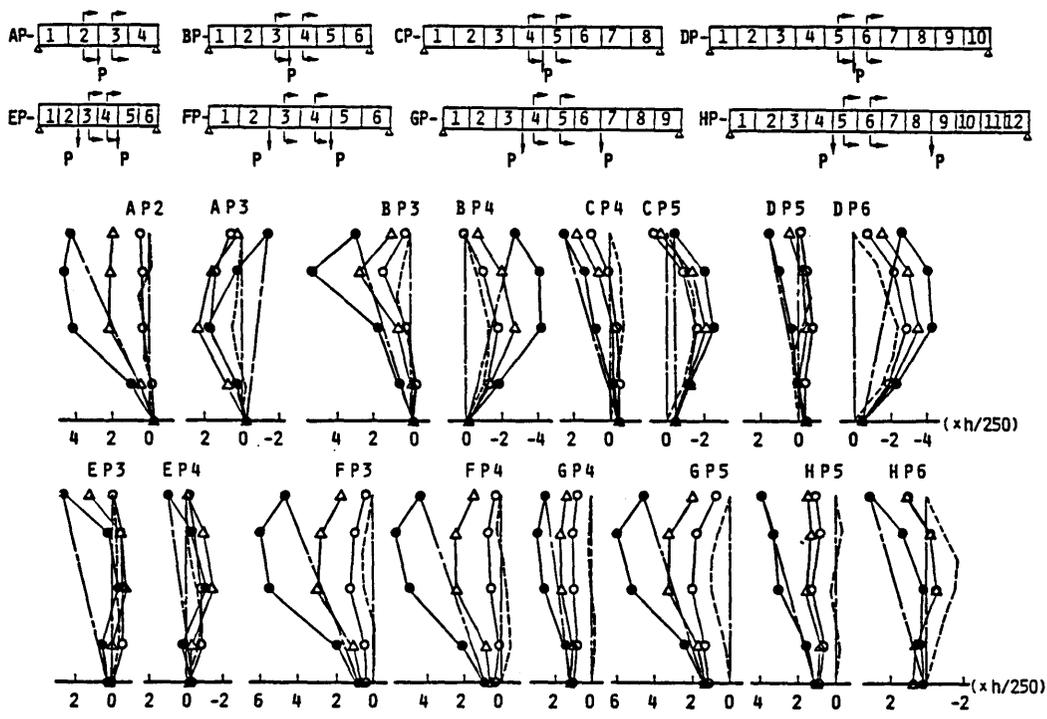


Table of Load  $P/P_U$  ( $M/M_Y$ )

Panel-	AP	BP	CP	DP	EP	FP	GP	HP
○	0.71 (0.66)	0.68 (0.63)	0.71 (0.54)	0.68 (0.46)	0.70 (0.85)	0.69 (0.73)	0.72 (0.64)	0.70 (0.56)
△	0.95 (0.89)	0.95 (0.85)	0.96 (0.73)	0.95 (0.65)	0.95 (1.15)	0.95 (1.01)	0.95 (0.85)	0.95 (0.76)
●	1.0 (0.93)	1.0 (0.93)	1.0 (0.76)	1.0 (0.69)	1.0 (1.21)	1.0 (1.06)	1.0 (0.90)	1.0 (0.80)

note:  $P_U$  = Ultimate Load-carrying Capacity,  $M_Y$  = Yield Moment of Cross Section

Fig. 4.11 Initial and Additional Web Deflections

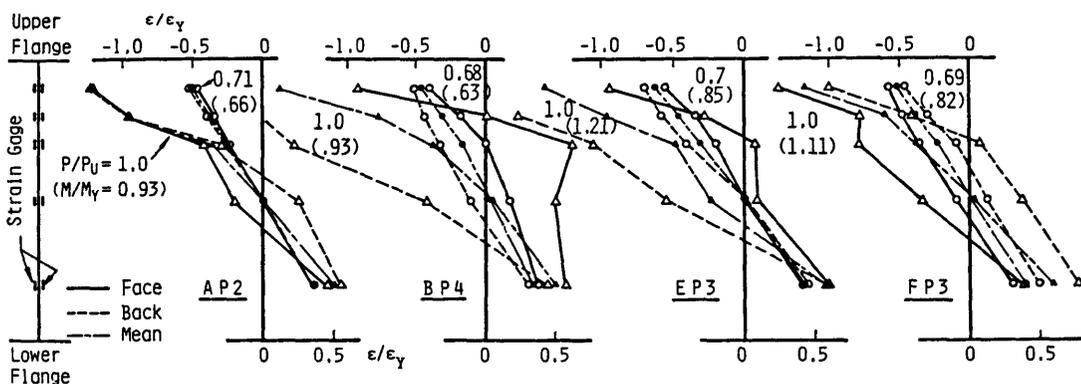


Fig. 4.12 Distributions of Normal Strain of Web Panels

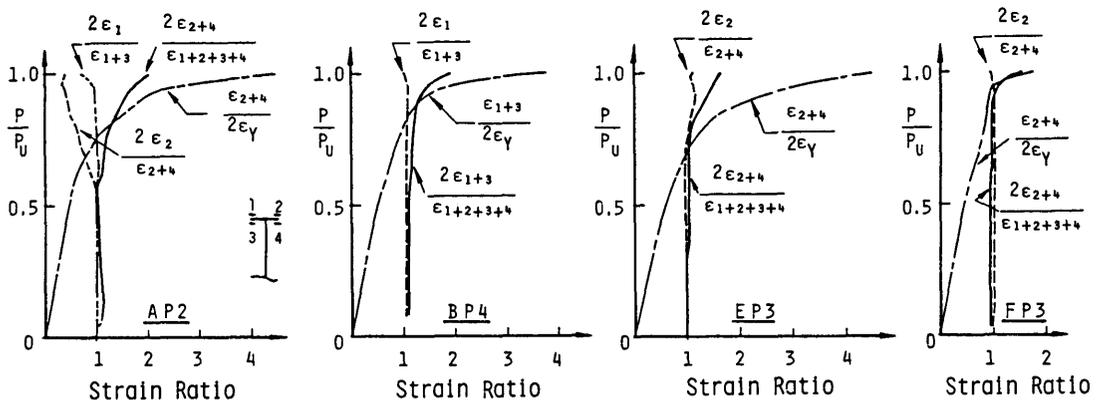


Fig. 4.13 Nondimensionalized Load-Reference Strain of Compressive Flange

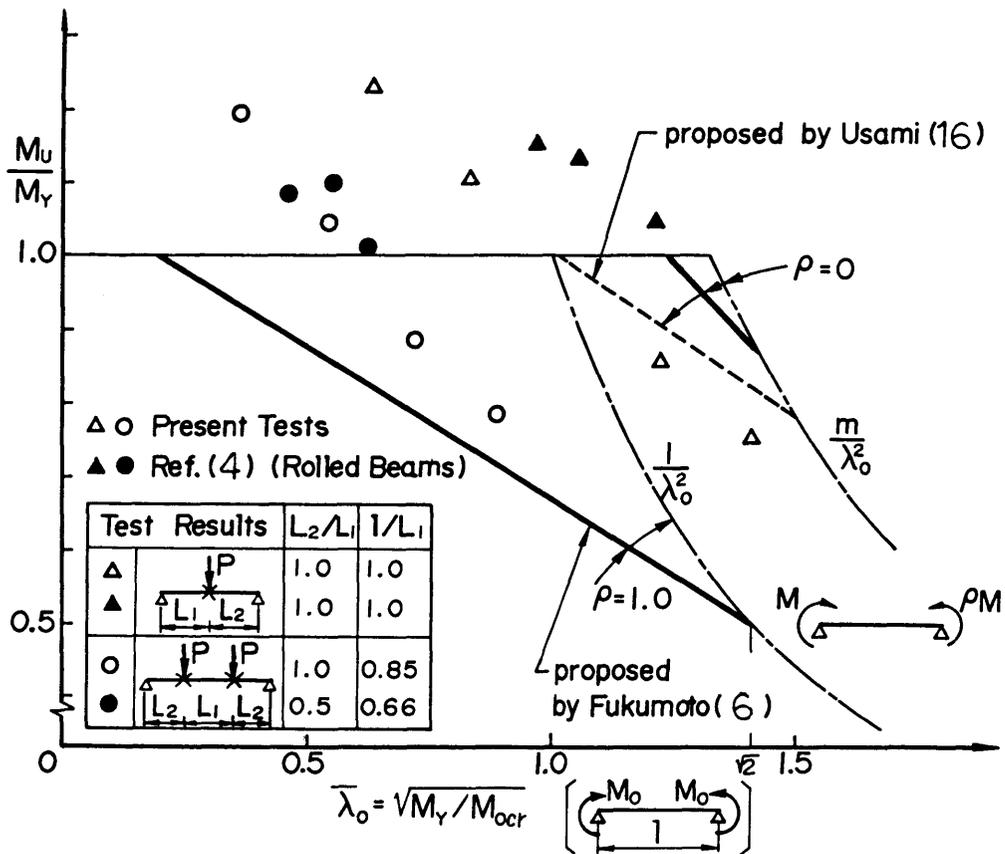


Fig. 4.14 Comparison between Experimental Results and Design Formulas

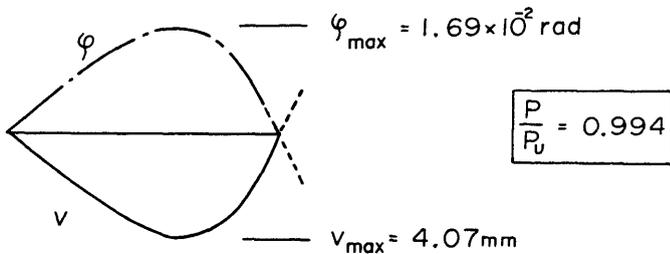
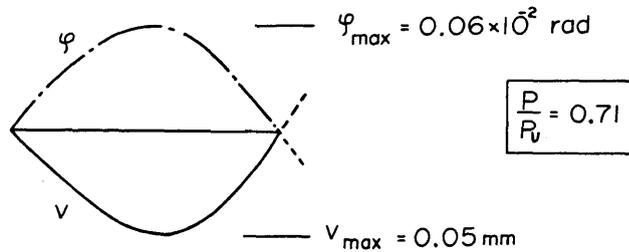
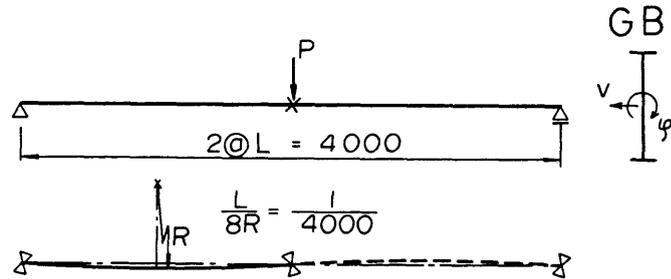


Fig. 4.15 Model for Computer Simulation (GB)

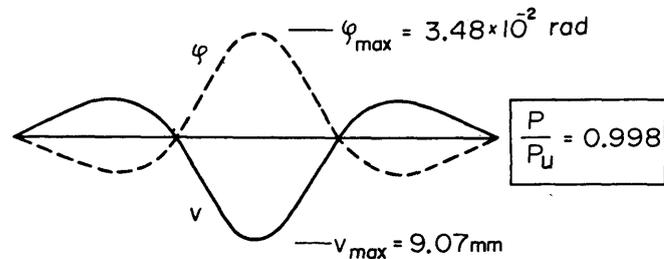
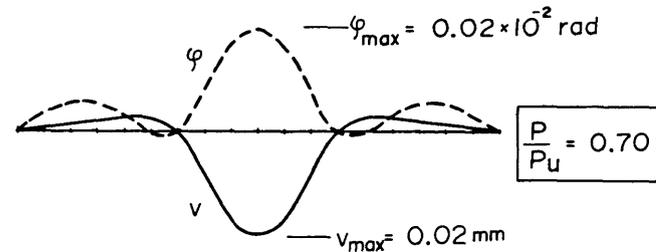
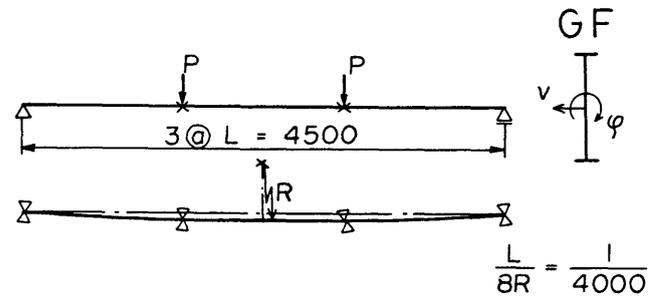


Fig. 4.16 Model for Computer Simulation (GF)

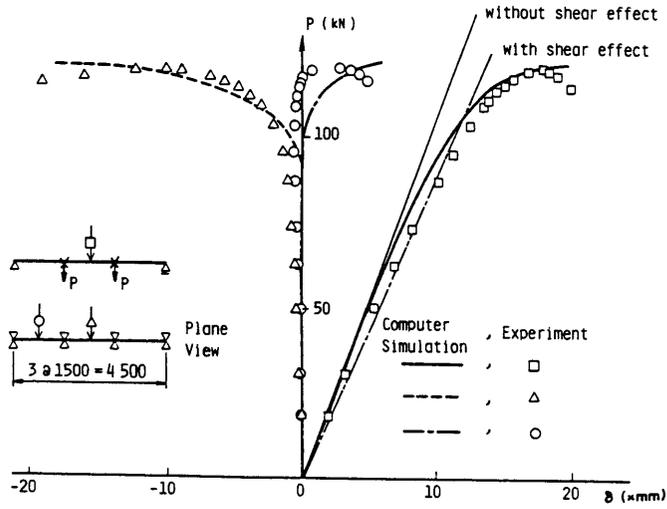


Fig. 4.17 Load-Deflection Curves from Computer Simulation (GF)

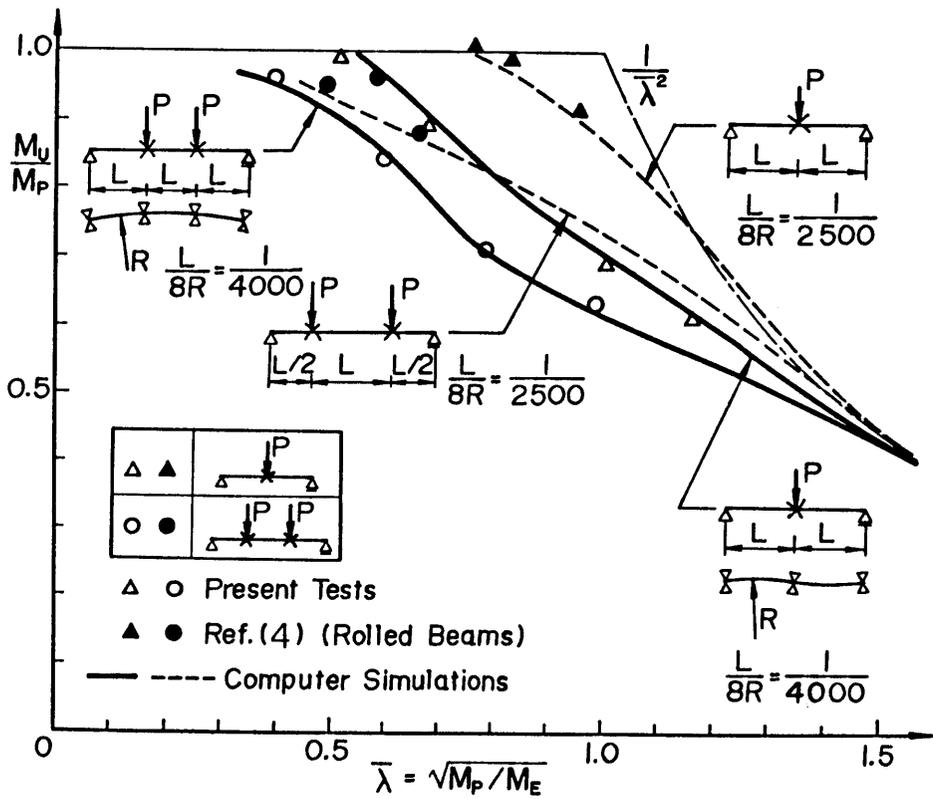


Fig. 4.18 Experimental and Analytical Results

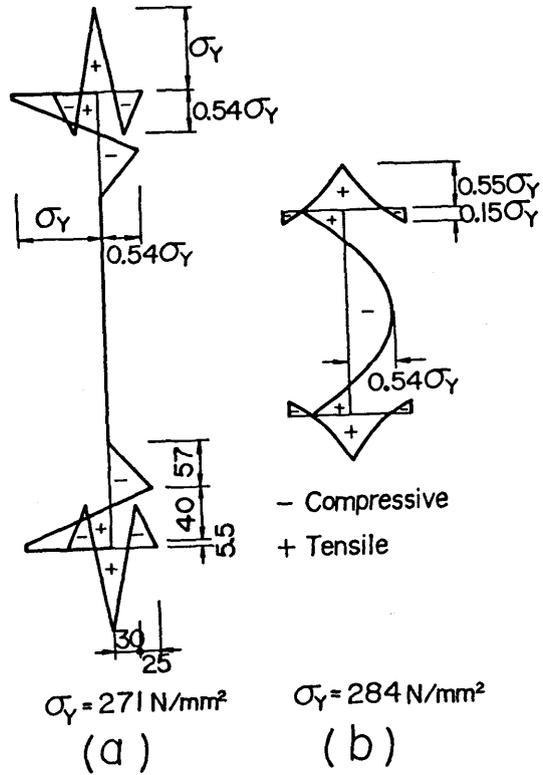


Fig. 4.19 Idealized Residual Stress Distributions

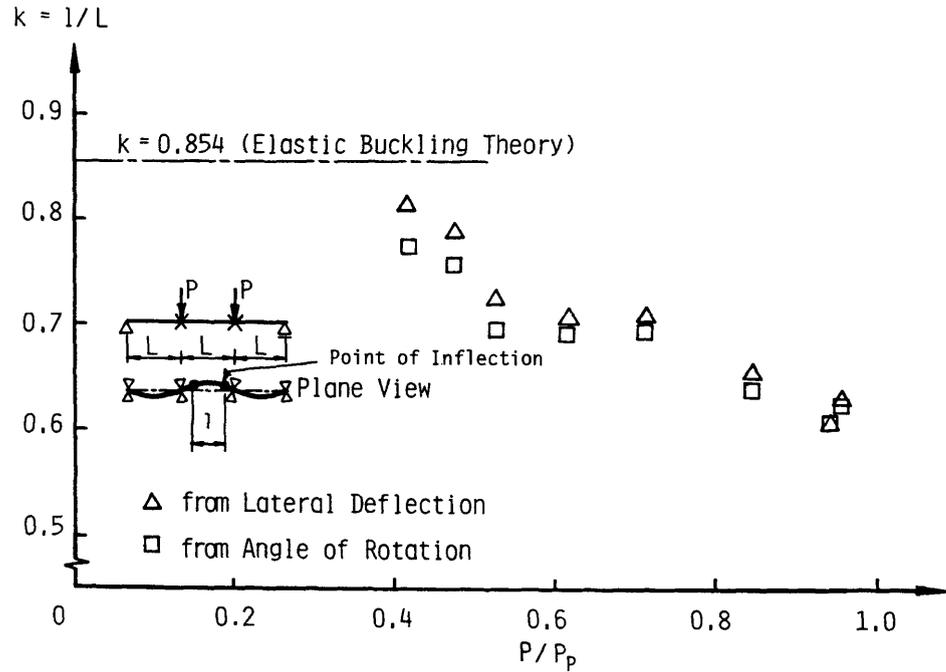


Fig. 4.20 (a) Inelastic Effective Length Factor from Computer Simulation

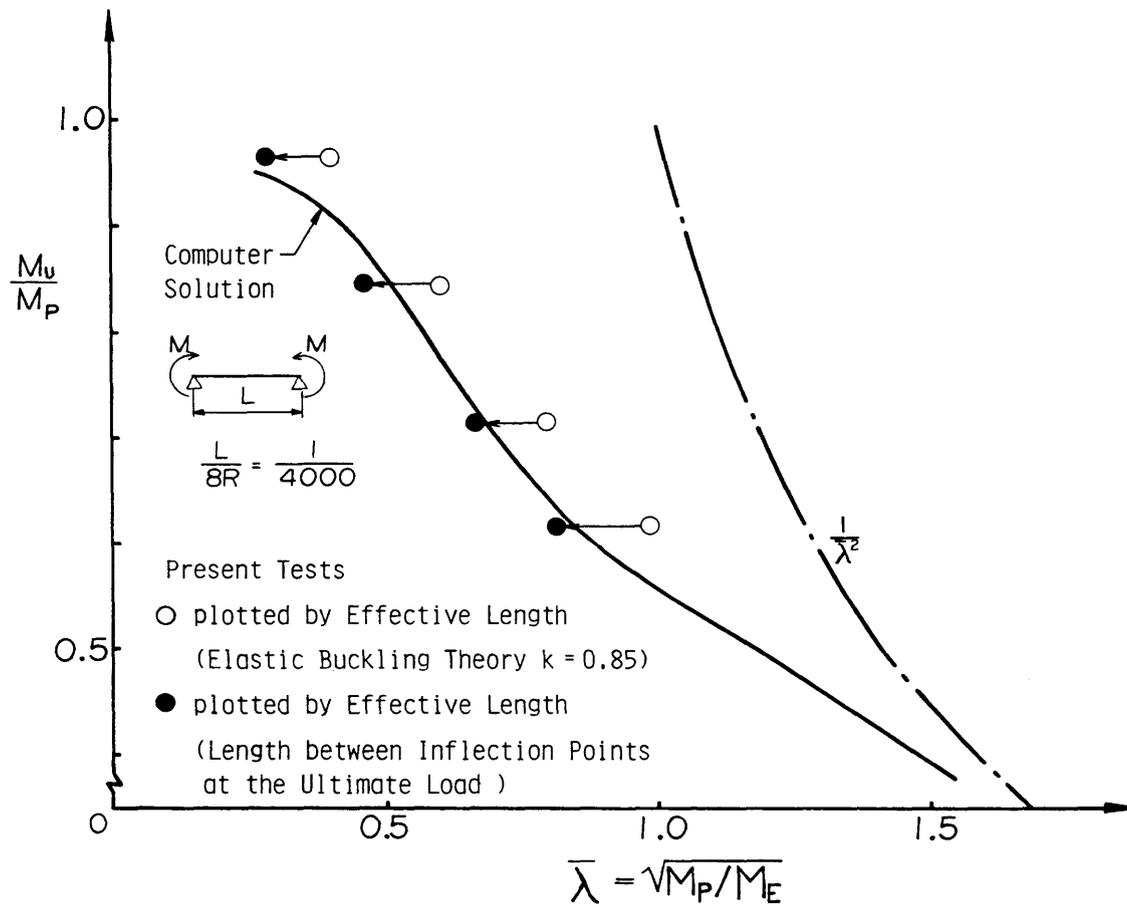


Fig. 4.20(b) Evaluation of Experimental Results by Inelastic Effective Length

## 第5章 不等曲げを受けるはりの横ねじれ基準強度

### 5.1 緒言

はりの横ねじれ耐荷力に影響する要因には、(1)降伏点応力度および残留応力度の大きさと分布形、(2)初期たわみ、(3)断面形状、(4)荷重状態(荷重の種類、モーメント分布および断面内の載荷高)、(5)端部の拘束条件および隣接部材による拘束、(6)断面変形および局部座屈との連成などがある。

本論文では、第3章において(1)、(2)、(3)および(4)の荷重の種類について、第4章において(4)のモーメント分布および(6)の断面変形について、解析および実験による検討を行った。本章ではこれらの知見を基に、はりおよび桁の設計においてもっとも一般的な荷重状態であるモーメント勾配を持つ桁の横ねじれ耐荷力の推定式を提案する。

横ねじれ安定性に対する通常の設計は示方書によって規定された安全側の設計式(通常、一様曲げが作用する桁を対象とし、長い桁では弾性座屈曲線で表され、非常に短い桁では全塑性モーメント  $M_p$  あるいは降伏モーメント  $M_y$  になり、それらの中間では、経験的な非弾性座屈遷移曲線で表される)によって行われている。また、その座屈パラメータ(細長比)についても簡便さおよび精度を加味して種々の提案が行われている<sup>1)~4)</sup>。ところで、座屈パラメータの選定あるいは非弾性座屈強度の推定に当たって基本的に重要な役割を果たすのが弾性横ねじれ座屈荷重である。

はりおよび桁の弾性横ねじれ座屈の厳密解(閉じた解)は一様曲げのように簡単な荷重状態の場合にのみ容易に求めることができる。他の種々の荷重状態(荷重の種類、拘束条件、載荷高)に対する座屈荷重は近似解析が必要である。2軸対称断面はりにおける種々の荷重状態に対する解は、一様曲げに対する座屈荷重を修正することで行われ、その修正係数は図表で与えられている<sup>5)~8)</sup>。それらのうち、不等モーメント荷重が作用する場合の横ねじれ座屈に関する研究は、Horne<sup>9)</sup>、Salvadori<sup>10),11)</sup>によって初めて行われ、Salvadori、Massonnet<sup>12)</sup>、Austin<sup>13)</sup>らはそれぞれモーメント修正係数を提案している。すなわち、図-5.1のようなモーメント荷重が作用するはりの弾性横ねじれ座屈モーメント(ただし、大きい方の端モーメント)は次式で表される。

$$M_{cr} = m M_{ocr} \quad (5.1a)$$

ここに、 $M_{ocr}$  = 一様曲げに対する弾性横ねじれ座屈の厳密解および  $m$  = モーメント修正係数であり、

$$M_{ocr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_y GK_T \left( 1 + \frac{\pi^2 EI_\omega}{GK_T L^2} \right)} \quad (5.1b)$$

$$m = 1.75 - 1.05\rho + 0.3\rho^2 \leq 2.3 \quad (\text{Salvadori}) \quad (5.1c)$$

$$m = \frac{1}{\sqrt{0.3 + 0.4\rho + 0.3\rho^2}} \quad (\text{Massonnet}) \quad (5.1d)$$

$$m = \frac{1}{0.6 + 0.4\rho} \quad (\text{Austin}) \quad (5.1e)$$

である。また、 $I_y$  = 弱軸まわりの断面二次モーメント、 $I_\omega$  = そり二次モーメント、 $K_T$  = St. Venant のねじり定数、 $E$  = 弾性係数、 $G$  = せん断弾性係数および  $\rho$  = モーメント勾配を表し、 $-1.0 \leq \rho \leq 1.0$ 、 $\rho \geq 0$  は単一正の曲率を示す。

式(5.1c)、(5.1d)、および(5.1e)のモーメント修正係数についてはさまざまな数値計算により弾性域でのそれらの妥当性が確認されている。

しかし、これらは弾性解であって、弾塑性域での有効性については保証されていないにもかかわらず、簡便さのため、設計のための基準強度式にも適用されている。たとえばAISC設計規準<sup>4)</sup>や道路橋示方書<sup>3)</sup>では、非弾性座屈解析あるいは実験値をもとに決められた一様曲げに対する横ねじれ基準強度に式(5.1e)を乗算して、モーメント勾配を持つ桁の横ねじれ基準強度としている。

一方、青島<sup>1)</sup>、宇佐美<sup>14)</sup>、Nethercotら<sup>15)</sup>およびDuxら<sup>16)</sup>は非弾性域でのモーメント修正係数あるいはモーメント勾配を考慮した横ねじれ基準強度式を提案している。しかし、これらは圧延ばりの研究が中心であり、青島を除いて分岐座屈を対象としている。また、Fukumotoら<sup>17)</sup>は大量の実験値から強度の変動におよぼす影響を検討するとともに、文献に報告されたすべての実験値を統計的に処理し圧延ばりあるいは溶接桁によって異なる初期不整の違いの影響はECCS(ヨーロッパ鋼構造連合)の基準強度式においてシステム係数 $n$ により評価できることを示している。しかし、モーメント勾配など荷重状態による降伏領域の広がりや差の影響に対しては検討されていない。

本章では、モーメント勾配を持つはりあるいは桁の横ねじれ挙動を、第4章においてその精度を確認した有限変位解析法(2.3節に示した剛性法)によりシミュレートし、圧延ばりならびに溶接桁の横ねじれ耐荷力を表す簡単な近似曲線(横ねじれ基準強度式)を提案する。また、得られた基準強度式と拘束柱の有効座屈長係数の手法<sup>19), 21)</sup>を用いて、中間に横方向拘束材をもち、横変形に対して連続な桁の横ねじれ耐荷力の算定方法を提案する。最後に、ECCSの横ねじれ基準強度式に、非弾性域におけるモーメント勾配の影響を取り入れるための修正式を提案する。なお、本章は文献(23)の一部と新たな検討によって構成されている。

## 5.2 横ねじれ座屈パラメータ

前章において、修正細長比  $\bar{\lambda} = \sqrt{M_P/M_E}$  および低減係数  $\delta_r = M_U/M_P$  で表される無次元座標を用いれば桁の断面形状、荷重状態および拘束条件にかかわらず弾性横ねじれ座屈強度は一本の曲線で表せるが、非弾性域ではモーメント勾配によって異なる桁の降伏領域のひろがりの影響のため一本の曲線で表すことの不合理が明かとなった。ここに、 $M_P =$  全塑性モーメント、 $M_U =$  横ねじれ強度、 $M_E =$  荷重状態および境界条件を考慮した弾性横ねじれ座屈モーメントである。Nethercotら<sup>15)</sup> および Duxら<sup>16)</sup> は横ねじれ基準強度の提案において、上記の座屈パラメータを用い、さらに非弾性域での基準強度式にモーメント勾配による修正を行っている。すなわち、修正細長比 $\bar{\lambda}$ と基準強度式の両方にモーメント勾配による修正を行っている。座屈パラメータは基準強度式をより簡単に表現できる方がよく、ここでは経験的に次式を用いることにした。

$$\bar{\lambda}_o = \sqrt{\frac{M_P}{M_{ocr}}} \quad (5.2a)$$

$$\delta_r = \frac{M_U}{M_P} \quad (5.2b)$$

ここに、 $M_{ocr}$  は考えているはりと同じスパン長を持つ両端単純支持されたはりに一様曲げが作用する場合の弾性横ねじれ座屈モーメントである (= 式(5.1b))。

したがって、モーメント勾配をもつ両端単純支持されたはりの弾性横ねじれ座屈モーメント  $M_{cr}$  は、

$$\frac{M_{cr}}{M_P} = \frac{m}{\bar{\lambda}_o^2} \quad (5.3)$$

となる。なお、本章ではモーメント修正係数  $m$  として式(5.1c)を採用する。

## 5.3 圧延ばりの横ねじれ基準強度式の提案

解析のモデルとして用いるはりは Kitipornchaiら<sup>18)</sup> が横ねじれ座屈実験に使用したものである。すなわち、断面は 250UB37.3 (I-256×146×6.4×10.9 mm)，フランジおよび腹板の降伏点応力度はそれぞれ  $\sigma_{yf} = 284 \text{ N/mm}^2$  および  $\sigma_{yw} = 321 \text{ N/mm}^2$ ，弾性係数  $E = 210 \text{ kN/mm}^2$  および全塑性モーメント  $M_P = 139 \text{ kNm}$  とする。また、残留応力は図-4.19(b) に示したように実測値を近似した放物線分布を用いる。断面形状によっても異なるが、図-4.19(b) のような放物線形状の残留応力分布の場合、有効ねじり剛性  $GK_T + \bar{K}$  において、断面に生ずる垂直応力によって発生する付加ねじりモーメント (式(2.8c)) に対応する  $\bar{K}$  が正

値になる。したがって、有効ねじり剛性  $GK_T + \bar{K}$  は残留応力がない場合よりも大きくなるため、弾性域においては解析値が弾性座屈曲線を上回ることがある。しかし、これらの実測データを用いた耐荷力の解析値が実験値と極めて一致することは、前章の図-4.18 に示したとおりである。

図-5.2 は、両端に不等モーメント荷重が作用する圧延ばりの横ねじれ耐荷力の解析結果（実線）、その近似曲線（一点鎖線）および残留応力を考慮しない弾性座屈曲線（破線）を、それぞれ  $\rho = 1.0, 0.5, 0.0, -0.5$  について示している。実線のうち、太線は初期横たわみを表すパラメータ  $L/8R = 1/1000$  としたもので、製作許容値とされている。一方、細線は  $L/8R = 1/2500$  としたものであり、実測値<sup>18)</sup> のほぼ平均を表すものと考えられる。弾性座屈曲線については式(5.3)を用いてプロットしてある。

解析値が弾性座屈曲線を上回る範囲があるが、これは前述の残留応力による有効ねじり剛性の影響であると考えられる。

一点鎖線で示した近似曲線は、一様曲げ ( $\rho = 1.0$ ) の場合に対する近似曲線をモーメント勾配  $\rho$  に応じて縦軸に平行に移動したものである。式(5.1a)のようにモーメント修正係数を乗算するのに比べて近似し易いことは、宇佐美<sup>14)</sup> によっても示されている。近似曲線は次式で表される。

$$\frac{M_U}{M_P} = 1 - 0.427(\bar{\lambda}_0 - 0.2) + \beta_1 \quad (5.4a)$$

$$\frac{M_U}{M_P} = \frac{\beta_2}{\bar{\lambda}_0^2} \quad (5.4b)$$

ここに、 $\beta_1$ 、および  $\beta_2$  はモーメント勾配による修正項であり、

$$\beta_1 = 0.29 - 0.33\rho + 0.04\rho^2 \quad (5.5a)$$

$$\beta_2 = m = 1.75 - 1.05\rho + 0.3\rho^2 \quad (5.5b)$$

となる。通常のはりでは式(5.4a)が基準強度を与え、非常に長いはりでは式(5.4b)の弾性座屈強度が適用されるものとする。すなわち、式(5.4a)の直線が式(5.4b)の曲線と交差した後は式(5.4b)が基準強度を与える。これらの式は製作許容値  $L/1000$  なる初期たわみに対する耐荷力曲線を近似したものであり、下限値を表すと考えてよい。その適用範囲は、

$$\frac{M_U}{M_P} \leq 1.0 \quad (5.6)$$

とする。

図-5.3は式(5.4)とこれまで圧延ばりを対象として提案されている横ねじれ基準強度式を  $\bar{\lambda}_0 - \delta_r$  座標上で比較したものである。図中の曲線は次式で与えられている。

(a) Nethercot and Trahair<sup>15)</sup> :

$$\frac{M_U}{M_P} = 0.7 + 0.3 \left( \frac{1 - 0.7 \frac{\bar{\lambda}_0^2}{m}}{0.61 + 0.3\rho + 0.07\rho^2} \right), \quad \text{ただし, } 0.7 \leq \frac{M_U}{M_P} \leq 1.0 \quad (5.7)$$

(b) Dux and Kitipornchai<sup>16)</sup> :

$$\frac{M_U}{M_P} = \frac{8 + \sqrt{1 - \rho}}{8 \left( 1 + \frac{\bar{\lambda}_0^2}{3.5m} \right)}, \quad \text{ただし, } 0.03 \frac{m}{\bar{\lambda}_0^2} \leq \frac{M_U}{M_P} \leq \frac{m}{\bar{\lambda}_0^2} \quad (5.8)$$

(c) 青島<sup>1)</sup> :

$$\frac{M_U}{M_P} = C \left\{ 1 - \frac{4}{9} \left( \frac{L}{L_e} - 0.1 \right) \right\}, \quad \text{ただし, } 0.1 \leq \frac{L}{L_e} \leq 1.5 \quad (5.9a)$$

$$C = 1.6 - 0.6\rho, \quad \text{ただし, } \rho \geq 0 \quad (5.9b)$$

ここに、 $m =$  式 (5.1c) のモーメント修正係数、 $L_e =$  式 (5.1b) で  $M_{ocr} = M_Y$  となる部材長 (ただし、文献1)では面内変形の影響を考慮した式を用いている)、 $M_Y =$  弾性限モーメントである。

式 (5.7) および式 (5.8) は分岐座屈を基礎としているのに対して、式 (5.9) は初期変位が  $L/1000$  であるはりを二軸曲げの問題として解析した結果を近似したものである。青島は実用上のはりが  $L/L_e \leq 1.5$ 、 $\rho \geq 0$  であるとしていることから、図-5.3における式 (5.9) はその範囲で示した。  $\rho = 1.0$  の場合、青島の式と著者の式は (これらを前者とよぶ)  $\bar{\lambda}_0 \leq 1.0$  において差がほとんどなく、また、Nethercotらの式と Dux らの式は (これらを後者とよぶ) 差がほとんどない。しかし、前者と後者ではかなりの差がある。これは、前述のように、前者は初期変形 ( $L/1000$ ) を考慮した横ねじれ耐力解析による下限値を近似しているのに対して、後者は非弾性座屈解析結果の近似あるいは非弾性座屈を根拠とした理論に基づいていることによる。

一方、モーメント勾配をもつはり ( $\rho \leq 1.0$ ) の場合、各々の曲線の差が顕著になっている。モーメント勾配の影響を取り入れるために修正係数を乗算する青島の式と修正係数を加算する著者の式の差が明瞭であり、青島の式は弾性域においてかなり安全側を近似しているように思われる。

#### 5.4 溶接 I 形桁の横ねじれ基準強度式の提案

解析のモデルとして用いる桁は第 4 章において横ねじれ座屈実験に使用した溶接 I 形桁である。すなわち、断面は I-521×110×4.5×8.0 mm，フランジおよび腹板の降伏点応力度はそれぞれ  $\sigma_{yf} = 271\text{N/mm}^2$  および  $\sigma_{yw} = 318\text{N/mm}^2$ ，弾性係数  $E = 215\text{kN/mm}^2$  および全塑性モーメント  $M_p = 210\text{kNm}$  とする。また，残留応力は図-4.19(a) に示したように実測値を近似した直線分布を用いる。これらの実測データを用いた耐荷力の解析値が実験値と極めて一致することは，前章の図-4.18 に示したとおりである。

図-5.4 は，両端に不等モーメント荷重が作用する溶接 I 形桁の横ねじれ耐荷力の解析結果（実線），その近似曲線（一点鎖線）および残留応力を考慮しない弾性座屈曲線（破線）を，それぞれ  $\rho = 1.0, 0.5, 0.0, -0.5$  について示している。実線のうち，太線は初期たわみを表すパラメータ  $L/8R = 1/1000$  としたもので，製作許容値とされている。一方，細線は  $L/8R = 1/4000$  としたものであり，実測値（表-4.4）のほぼ平均を表すものと考えられる。弾性座屈曲線については式(5.3)を用いてプロットしてある。

一点鎖線で示した近似曲線は，一様曲げ ( $\rho = 1.0$ ) の場合に対する近似曲線をモーメント勾配  $\rho$  に応じて縦軸に平行移動するものである。それらは次式で表される。

$$\frac{M_U}{M_p} = 1 - 0.657(\bar{\lambda}_o - 0.2) + \beta_1, \quad \text{ただし, } \bar{\lambda}_o \leq \bar{\lambda}_{os} \quad (5.10a)$$

$$\frac{M_U}{M_p} = 1 - 0.309(\bar{\lambda}_o + 0.59) + \beta_2, \quad \text{ただし, } \bar{\lambda}_o > \bar{\lambda}_{os} \quad (5.10b)$$

ここに， $\beta_1$  および  $\beta_2$  はモーメント勾配による修正項であり，

$$\beta_1 = 0.34 - 0.35\rho + 0.01\rho^2 \quad (5.11a)$$

$$\beta_2 = 0.21 - 0.28\rho + 0.07\rho^2 \quad (5.11b)$$

となる。また， $\bar{\lambda}_{os}$  は直線式(5.10a)と直線式(5.10b)の交点における細長比であり，次式で表される。

$$\bar{\lambda}_{os} = 1.276 - 0.201\rho - 0.172\rho^2 \quad (5.11c)$$

これらの式は製作許容値  $L/1000$  なる初期横たわみに対する耐荷力曲線を近似したものであり，下限値を表すと考えてよい。なお，近似曲線と弾性座屈曲線の接続は考えず，その適用範囲を，

$$\frac{M_U}{M_p} \leq 1.0, \quad \text{ただし, } 0 < \bar{\lambda}_o \leq 2.0 \quad (5.12)$$

とする。実用上の桁では $\bar{\lambda} < 1.5$ 程度であり、式(5.12)の適用範囲に含まれる。

## 5.5 横変形に対して中間支持された桁の横ねじれ耐荷力

### (1) 計算手法の概説

図-5.5に示すような、横ねじれ変形が両端および中間で拘束されたはり（横方向に連続はり）の横ねじれ座屈強度の近似計算法は、設計上の簡便さから関心もたれ、精度の向上のための改良が行われている。

この問題を初めて扱った Salvadori<sup>10),11)</sup> は、拘束点間のはり要素（以後、*segment*とよぶ）を個々に取り出し、それらの*segment*が両端で横ねじれ変形に対して単純支持されているものとして、与えられたモーメント勾配に対する横ねじれ座屈荷重を計算した。そのようにして得られる各*segment*の座屈荷重のうち、最小値がはりの横ねじれ座屈荷重を表すものとした。この理論によれば、*segment*相互の拘束効果を考慮していないため、はりの座屈荷重の下限値を与えることになる。その後、*segment*相互の拘束効果を考慮するために、一連の近似計算手法が提案されている<sup>15),16),20),21)</sup>。それらの基本的な手順は次のようである。

まず、中間拘束点での連続性を無視し、各*segment*の座屈荷重からいわゆる Salvadori の下限解を求め、*critical segment* および拘束*segment*を定める。次に、拘束*segment*による拘束効果を考慮するために、*critical segment* と拘束*segment*の弱軸まわりの曲げに関する剛比を拘束柱の設計に用いられている有効座屈長係数のノモグラフ（図-5.6）に用いて、*critical segment* の有効座屈長を求める。それをはりの横ねじれ基準強度式に用いることによって、中間に横方向拘束材をもち、横変形に対して連続なはりの横ねじれ座屈強度を算定する。図-5.6における剛比  $G_A$  あるいは  $G_B$  は次式で表わされる。

$$G_A = \frac{\alpha_C}{\alpha_{RA}}, \quad G_B = \frac{\alpha_C}{\alpha_{RB}} \quad (5.13)$$

ここに、 $\alpha_C$  および  $\alpha_R$  はそれぞれ *critical segment* の剛性および拘束*segment*の剛性であり、次式で表わされる。

$$\alpha_C = \left( \frac{2jEI_y}{L} \right)_C, \quad \alpha_R = \left( \frac{n\gamma jEI_y}{L} \right)_R \quad (5.14)$$

また、 $n$ は、図-5.7(a)、(b)および(c)の各境界条件によって決まる定数で、それぞれ  $n = 2, 3$  および  $4$  である。 $\gamma$ は拘束*segment*自体の横ねじれ座屈現象に伴う拘束力の低減を表す安定低

減係数であり， $j$  は非弾性剛性を表す剛性修正係数である．これまで提案されているそれぞれの手法においては<sup>15),16)</sup>，安定低減係数  $\gamma$  および剛性修正係数  $j$  の決定方法が異なるだけである．なお，係数  $\gamma$  および  $j$  は実際の作用モーメントレベルに従って変化すべきものであり，それを繰り返し計算手法によって考慮している Dux ら<sup>16)</sup> の方法が最も合理的であると思われる．

Dux and Kitipornchai<sup>16)</sup> は安定低減係数  $\gamma$  として次式を用いている．

$$\gamma = 1 - \left( \frac{M}{M_l} \right)^2 \quad (5.15)$$

ここに， $M =$  作用している端モーメントおよび  $M_l =$  拘束 segment の非弾性横ねじれ座屈強度である．

また，Dux らは図-5.8のようなモーメント荷重が作用するはりの非弾性剛性の分布から剛性修正係数  $j$  を求めている．すなわち， $j$  は，一様でない曲げモーメント分布により部分的に降伏したはりにおいて，長手方向に一様でない弱軸回りの曲げ剛性を一様で等価な曲げ剛性に交換する係数であると考えている．文献16)においては，予め計算された断面定数の低減率を用いて，部分的に降伏したはりに一様な弱軸まわりの曲げが作用した場合の曲げ剛性  $(M_y/\theta_{yA})_{inelas.}$

$= (2jEI_y)/L$  と弾性の曲げ剛性  $(M_y/\theta_{yA})_{elas.} = (2EI_y)/L$  の比として剛性修正係数  $j$  を求め，そのようにして得られた  $j$  の数値解を次の直線式で近似している．

$$j = 3.5 \left( 1 + \frac{\sqrt{1-\rho}}{8} - \frac{M}{M_p} \right), \quad \text{ただし, } 0.03 \leq j \leq 1.0 \quad (5.16)$$

ここに， $M$  は端部の大きい方の作用モーメントである．また，弱軸まわりの曲げが一様でない場合，すなわち，図-5.7のような境界条件をもつ拘束 segment に対しても同様な考察から  $j$  の数値解を求めており，この場合も式 (5.16) は安全側で，近似式として使用できることを示している．

近似的にそり剛性および St. Venant のねじり剛性についても弱軸回りの曲げ剛性と同じ低減係数  $j$  が成り立つものと仮定し，非弾性座屈強度  $M_l$  と弾性横ねじれ座屈強度  $M_{ocr}$  について次式が成り立つものとしている．

$$M_l = m \frac{\pi}{L} \sqrt{jEI_y jGK_T \left( 1 + \frac{\pi^2 jEI_\omega}{L^2 jGK_T} \right)} = jmM_{ocr} \quad (5.17)$$

ここに， $M_{ocr} =$  式 (5.1b) で表される弾性横ねじれ座屈モーメント， $m =$  式 (5.1c) で表されるモーメント修正係数である．Nethercot ら<sup>15)</sup> も式 (5.17) と等価な式  $j = M_l / (mM_{ocr})$  を用いているが，柱の非弾性有効座屈長に関する研究において Yura<sup>22)</sup> が行ったのと同様に，予め設計式として与えられている非弾性座屈強度  $M_l$  から  $j$  を求める点が Dux らと異なる．

式 (5.16) を式 (5.17) に代入すると，式 (5.8) の非弾性横ねじれ座屈強度を得る．このよう

にして得られた座屈強度と固有値解析によって得られる非弾性横ねじれ座屈強度は、一様曲げの場合を除いて、一致せず、これをどのように解釈するかについては議論されていない。ただ、Duxらの手法によれば、彼らの実験値を数%の誤差で安全側に推定できたということが注目されよう。これまでに提案されている手法は横ねじれ座屈を基礎としており、その基準強度式の提案にも上述のような矛盾がある。また、耐荷力レベルの議論は行われていない。

第4章の図-4.20に示したように、横変形に対して連続ばりの耐荷力問題においても有効座屈長の概念に基づいて単純ばりの基準強度式を利用することができる。そこで本節では、耐荷力から得られた基準強度式(5.4)あるいは式(5.10)を基礎とし、これまで提案されている手法を耐荷力レベルの手法に拡張する。そこで、剛性修正係数 $j$ および安定低減係数 $\gamma$ は次のような考えのもとに決定する。まず、式(5.4)あるいは式(5.10)で与えられる横ねじれ基準強度を $M_U$ とし、それと弾性横ねじれ座屈強度 $M_{ocr}$ は式(5.17)と同様な関係式で表されるものと仮定する。

$$M_U = m \frac{\pi}{L} \sqrt{jEI_y jGK_T \left( 1 + \frac{\pi^2 jEI_\omega}{L^2 jGK_T} \right)} = jmM_{ocr} \quad (5.18)$$

長いはり(弾性はり)では $j = 1.0$ であり、また、初期たわみの影響は小さく近似的に $M_U = mM_{ocr}$ と考えてよいから、式(5.18)は弾性はりに対しても適合する。式(5.18)のように予め与えられた基準強度曲線と弾性座屈曲線の関係を剛性低下の影響として考慮した例は文献(15)、(22)に見られる。はりの横ねじれ耐荷力の問題では非弾性域での降伏による有効断面が2軸対称にならないが、ここでは近似的に2軸対称断面の横ねじれ座屈式が有効であると仮定する。また、そり剛性およびSt. Venantのねじり剛性についても弱軸まわりの曲げ剛性に等しい剛性修正係数 $j$ が成り立つものと仮定する。

次に、細長比が $\bar{\lambda}_g$ でモーメント勾配 $\rho$ を持つはりの端モーメントの大きいほうが $M$ のとき、剛性修正係数 $j$ は次式により評価する(図-5.9参照)。

$$j = \frac{\bar{M}}{\bar{M}_e}, \quad \text{ただし, } j \leq 1.0 \quad (5.19a)$$

$$\bar{M}_e = \frac{m}{\bar{\lambda}_r^2} \quad (5.19b)$$

ここに、 $\bar{\lambda}_r$ は圧延ばりおよび溶接桁に対してそれぞれ次式で定義される細長比である。

for Rolled Beams :

$$\bar{\lambda}_r = \min(\bar{\lambda}_a, \bar{\lambda}_b) \quad (5.20a)$$

$$\bar{\lambda}_a = \frac{1 - \bar{M} + \beta_1}{0.427} + 0.2 \quad (5.20b)$$

$$\bar{\lambda}_b = \sqrt{\frac{\beta_2}{\bar{M}}} \quad (5.20c)$$

for Welded Girders :

$$\bar{\lambda}_r = \max(\bar{\lambda}_a, \bar{\lambda}_b) \quad (5.21a)$$

$$\bar{\lambda}_a = \frac{1 - \bar{M} + \beta_1}{0.657} + 0.2 \quad (5.21b)$$

$$\bar{\lambda}_a = \frac{1 - \bar{M} + \beta_2}{0.309} - 0.59 \quad (5.21c)$$

ここに、 $m =$  式(5.1c) ,  $\bar{M} = M/M_p$  であり、 $\beta_1$ および $\beta_2 =$  圧延はりに対しては式(5.5a)で、溶接桁に対しては式(5.11)で表される。また、記号  $\min( \quad , \quad )$  および  $\max( \quad , \quad )$  はそれぞれ最小値および最大値を選ぶことを意味する。

式(5.20)あるいは式(5.21)はそれぞれ端モーメントレベル $\bar{M}$ が、モーメント勾配 $\rho$ を持つはりの横ねじれ基準強度 $M_{U}/M_p$ に等しくなるような細長比 $\bar{\lambda}_r$ を式(5.4)あるいは式(5.10)から逆算することを意味している。また式(5.19)から、そのようにして得られた細長比 $\bar{\lambda}_r$ に対する弾性座屈モーメント $\bar{M}_e$ と端モーメントレベル $\bar{M}$ の比として剛性修正係数 $j$ を得る。したがって、図-5.8のように、はりの長手方向の有効剛性の分布形がモーメント勾配とモーメントレベルによってのみ決まるものとすれば、 $j$ は与えられたはりの細長比 $\bar{\lambda}_g$ によらず、モーメント勾配 $\rho$ および端モーメントレベル $\bar{M}$ のみで決定できることになる。

このようにして得られる剛性修正係数 $j$ と端モーメントレベル $\bar{M} = M/M_p$ の関係は、モーメント勾配 $\rho$ をパラメータとして、圧延はりおよび溶接桁についてそれぞれ図-5.10(a)および図-5.10(b)に実線で示した。なお、図-5.10(a)にはDuxら<sup>16)</sup>が用いた近似式(5.16)を破線で示した。本手法による $j$ とDuxらの $j$ では、低いモーメントレベルで大きな差を示している。これは、Duxらが1軸曲げによる非弾性剛性に基づいているのに対して、本手法は初期たわみを考慮した2軸曲げによる強度(下限値)に基づいていることによる差である。図-5.10(b)で $\rho \geq 0$ の場合、端モーメントレベルが低くなっても $j$ は1.0にならず、逆に1.0より小さくなる傾向を示している。これは式(5.10)が直線であること、ならびに弾性座屈曲線との交差を考えていないためである。しかし、この範囲では $j \approx 1.0$ であることと、この範囲の荷重レベルは実用上あまり意味がないことから問題にならない。また、 $j$ と $M/M_p$ の関係をDuxらのように直線式で近似すれば便利であるが、式(5.19)~式(5.21)は簡単なポケットコンピューターを用いれば容易に計算できる(本節に提案する手法は繰り返し計算を要するので、ポケットコンピューターを用いると便利である)。

一方、安定低減係数 $\gamma$ は合理的な係数であるが、式(5.15)のように2次式で表す根拠はなく、Nethercot<sup>15)</sup>は1次式を用いている。ここでは経験的に、次式を用いる方がより良い近似解が

得られることがわかった。

$$\gamma = 1 - \left( \frac{M}{M_U} \right)^4 \quad (5.22)$$

ここに、 $M$ は端モーメント、 $M_U$ は式(5.4)および式(5.10)で与えられる拘束segmentの横ねじれ基準強度である。式(5.4)および式(5.10)においては、基準強度式の意味合いから、 $M_U \leq M_P$ を適用範囲としたが、モーメント勾配 $\rho$ をもつ短いはりでは、 $M_P$ を超えても、すぐに横ねじれ座屈現象により崩壊するわけではない。そのような拘束segmentの場合に、式(5.22)において $M_U \leq M_P$ とすることは、安定低減係数 $\gamma$ の物理的意味からすれば、端モーメントが $M_P$ に近いときの拘束効果を過小評価することになる。そこで、式(5.22)における $M_U$ に対しては適用範囲の制限を設けず、式(5.4)あるいは式(5.10)から得られる値を用いる。

## (2) 計算手順および適用例

前述のように、ここに提案する手法はこれまで提案されている手法と基本的には同じであるが、耐荷力レベルに基づいていること、それによって剛性修正係数 $j$ の決定方法が従来の手法と異なる点の特徴である。その計算手順は次のようである。

1. 各segmentの弾性剛性 $EI_y$ 、 $EI_\omega$ 、 $GK_T$ を計算する。
2. 荷重面内の曲げモーメント分布から各segmentのモーメント勾配 $\rho$ を決める。
3. 各segmentの有効座屈長係数を $k = 1.0$ に仮定し、細長比 $\bar{\lambda}$ を式(5.2a)より求める。圧延ばりでは式(5.4)、溶接桁では式(5.10)から耐荷力 $M_U$ を求め、対応する荷重係数 $F = P/P_P$ を各segmentについて計算する。ここに、 $P$ は代表点に作用する荷重強さ(基準荷重とよぶ)および $P_P$ は基準荷重の作用点ではりに塑性ヒンジを発生させる荷重強さである。最も小さな荷重係数 $F_m$ を持つsegmentをcritical segmentとし、その他を拘束segmentとする。
4. 得られた最小荷重係数 $F$ に対応するモーメントレベル $M$ を各segmentに対して求め、式(5.19)～式(5.21)および式(5.22)を用いて剛性修正係数 $j$ および安定低減係数 $\gamma$ を求める。
5. 得られた $j$ および $\gamma$ を式(5.13)および式(5.14)に用いて、 $G_A$ および $G_B$ を求め、図-5.6からcritical segmentの有効座屈長係数 $k$ を求める。
6. critical segmentの有効座屈長を $kL$ とし、細長比 $\bar{\lambda}$ 。(式(5.2a))を修正する。得られた細長比 $\bar{\lambda}$ に対する耐荷力 $M_U$ (式(5.4)あるいは式(5.10))と対応する荷重係数 $F$ を計算し、Step 4へもどる。荷重係数 $F$ が前Stepの値と差がなくなるまでStep 4-6を繰り返す。

図-5.11の溶接桁(I-520×110×4.3×8 mm)を用いてその適用例を示す。

1.  $I_y = 182 \text{ cm}^4$ ,  $I_w = 118600 \text{ cm}^6$ ,  $K_T = 5.2 \text{ cm}^4$ .
2.  $\rho_{1-2} = 0$ ,  $\rho_{2-3} = 0.7$ ,  $\rho_{3-4} = 0$ .
3.  $\bar{\lambda}_{o,1-2} = \bar{\lambda}_{o,2-3} = \bar{\lambda}_{o,3-4} = 0.699$ ,  $F_{1-2} = 1.01$ ,  $F_{2-3} = 0.772$ ,  $F_{3-4} = 1.44$ .
4. Segment 2-3が *critical segment* となり,  $F_m = 0.772$  となる. 各segmentのモーメントレベルは  $M_{1-2} = M_{2-3} = 0.772M_P$ ,  $M_{3-4} = 0.540M_P$  となり, 式(5.19) ~ (5.21) より,  $j_{1-2} = 0.5$ ,  $j_{2-3} = 0.325$ ,  $j_{3-4} = 0.768$ ,  $\gamma_{1-2} = 0.659$ ,  $\gamma_{3-4} = 0.918$ .
5. 式(5.13)および式(5.14)より  $G_A = 0.655$ ,  $G_B = 0.307$  を得, 図-5.6から *critical segment* の有効座屈長係数  $k = 0.68$  が求まる.
6.  $k = 0.68$  としたときの  $\bar{\lambda}_{o,2-3} = 0.478$  に対して基準強度式(5.10)から求まる荷重係数は  $F = 0.917$  となる.
7.  $F = 0.917$  について, 各segmentのモーメントレベルは  $M_{1-2} = M_{2-3} = 0.917M_P$ ,  $M_{3-4} = 0.642M_P$  となり,  $j_{1-2} = 0.373$ ,  $j_{2-3} = 0.180$ ,  $j_{3-4} = 0.585$ ,  $\gamma_{1-2} = 0.325$ ,  $\gamma_{3-4} = 0.838$ ,  $G_A = 0.993$ ,  $G_B = 0.245$  となる.
8. 図-5.6から  $k = 0.685$  となり, これに対する  $\bar{\lambda}_{o,2-3} = 0.481$  から荷重係数は  $F = 0.915$  を得る. 前回の荷重係数に比べて  $-0.2\%$  である.

中間横拘束点間の初期たわみを  $L/1000$  として剛性法による耐荷力解析から得られる荷重係数は  $F(\text{theory}) = 0.943$  であり, 本手法は  $-3\%$  の精度で近似解を得る. また第4章のように, 解析から得られた水平変位の変曲点間距離から求まる有効座屈長係数は  $k = 0.688$  である. このように, 剛性修正係数  $j$  を計算する上での大胆な仮定はあるものの, 得られる結果の精度は満足できるものである.

表-5.1~5.4は種々の適用例を示している. 表における "Computer Simulations" の欄には, 第4章の数値解析と同様, 剛性法を用いた有限変位解析により得られた最高荷重(係数)および水平変位の変曲点間距離として求めた有効座屈長係数を示した. 解析では初期横たわみとして  $L/8R = 1/1000$  なる円弧を仮定し, 断面諸量および材料定数は実験から得られた値を用いた. "Elastic  $k$ " の欄には Nethercot らの手法<sup>20)</sup>により得られた弾性有効座屈長係数  $k$  を用いて, 本章の単一げたに対する基準強度式(5.4)あるいは式(5.10)から算定した強度を示した. 同様に, "Salvadori's  $k$ " の欄には  $k = 1.0$  を用いたときの強度を示した. また, ( ) 内には数値解析結果に対する誤差を示した.

表-5.1および表-5.2は耐荷力レベルの高いはりの例であり, 降伏による影響を考慮した本手法はモーメント勾配のある場合も含めて, 数値解析結果の数%内の近似解を与えている. 拘束segmentのスパン長が短く弾性有効座屈長係数  $k$  が小さい場合は, "Manual Method  $k$ " 欄の値の差は小さく, 降伏の影響を考慮した有効座屈長係数を求める意味はあまりないようである.

表-5.3および表-5.4は細長比を変化させた場合の近似計算手法の精度を示している。本手法は細長比にかかわらず数%内の近似解を与えている。近似解の精度には、有効座屈長係数を求めるための種々の仮定の影響だけでなく、提案した基準強度式(5.4)あるいは式(5.10)の精度も影響していると考えられる。

## 5.6 ECCSの横ねじれ基準強度式に対する修正式の提案

ECCS(ヨーロッパ鋼構造連合)<sup>2)</sup>では、荷重形式(載荷高, 荷重の種類およびモーメント勾配)および境界条件を考慮した弾性座屈強度 $M_E$ をベースとした修正細長比 $\bar{\lambda} = \sqrt{M_P/M_E}$ を用いることで、これらの条件の違いの影響を考慮することなく、横ねじれ基準強度 $M_U$ は次式で表されるとしている。

$$\delta_r = \frac{M_U}{M_P} = \left( \frac{1}{1 + \bar{\lambda}^{2n}} \right)^{1/n} \quad (5.23)$$

ここに、 $n$ はシステム係数であり、ECCSの提案式では実験強度の平均値を表すものとして、 $n = 2.5$ を推奨している。また、Fukumotoら<sup>17)</sup>は多くの実験データの検討により、実験強度の平均値および下限値を表すものとして、圧延ばりに対してそれぞれ $n = 2.5$ および $n = 1.5$ 、ならびに溶接桁に対してそれぞれ $n = 2.0$ および $n = 1.0$ を提案している。

しかし、座屈パラメータに $\bar{\lambda}$ を用いても、非弾性域においては荷重形式によって横ねじれ強度曲線に差を生ずることは既述したとおりである(たとえば、式(3.8)および4.4(2)節)。そこで、5.2節~5.4節では非弾性域での荷重形式(ここではモーメント勾配)の影響を考慮するとともに、横ねじれ基準強度式を簡単に表現するための検討を行った。

本節では、ECCSの提案式(5.23)に簡単な修正を行うことで、非弾性域でのモーメント勾配の影響を考慮できることを示す。そのためのデータは5.3節および5.4節で用いた数値解析結果である。

図-5.12および図-5.13はそれぞれ圧延ばりおよび溶接桁の横ねじれ強度を表している。実線は初期横たわみとして $L/1000$ を考慮した数値解析結果であり、下限値を表すと考えてよい。また、破線は弾性座屈曲線を表し、一点鎖線は数値解析結果を近似するためにECCSの提案式(5.23)を修正したものであり、次式で表される。

$$\delta_r = \frac{M_U}{M_P} = \left( \frac{1}{\alpha + \bar{\lambda}^{2n}} \right)^{1/n} \leq 1.0 \quad (5.24a)$$

ここに、 $\bar{\lambda} = \sqrt{M_P/M_E}$ 、 $M_E = M_{cr}$  = 式(5.1a)、 $M_P$  = 全塑性モーメント、 $\rho$  = モーメント勾配であり、 $\rho \geq 0$ は単一正の曲率を表す。また、係数 $n$ は

$$n = n_1 + n_2 \quad (5.24b)$$

で表される。係数 $n_1$ は式(5.23)におけるシステム係数 $n$ に対応し、数値解析結果は下限値を表すことから、圧延ばりおよび溶接桁に対して係数 $n_1$ 、 $n_2$ および $\alpha$ は次式で与えられる。

for Rolled Beams :

$$\begin{aligned} n_1 &= 1.5 \\ n_2 &= 2(1 - \rho) \\ \alpha &= 1 - 0.15(1 - \rho) = 1 - 0.075n_2 \end{aligned} \quad (5.24c)$$

for Welded Girders :

$$\begin{aligned} n_1 &= 1.0 \\ n_2 &= 0.32(1 - \rho) \\ \alpha &= 1 - 0.2(1 - \rho) = 1 - 0.625n_2 \end{aligned} \quad (5.24d)$$

ここに、式(5.24c)ならびに式(5.24d)の係数 $n_2$ および $\alpha$ は試行錯誤によって決定した式である。

式(5.24a)は弾性座屈曲線 $1/\bar{\lambda}^2$ と交わることはないが、解析値は $\bar{\lambda}$ の大きな範囲において弾性座屈曲線と交わる傾向を示している。解析値をより精度良く近似するには次式が有効である。

$$\delta_r = \left( \frac{1}{\alpha + \bar{\lambda}^{-1.7n}} \right)^{1/n} \leq 1.0 \quad , \quad \text{ただし} \quad \delta_r \leq \frac{1}{\bar{\lambda}^2} \quad (5.25)$$

ここに、 $n = n_1 + n_2$ ならびに $\alpha$ は圧延ばりおよび溶接桁に対してそれぞれ式(5.24c)および式(5.24d)が適用され、その結果を図-5.14および図-5.15に示す。

解析値は詳細な実験データに基づいてはいるが、圧延ばりおよび溶接桁それぞれについて一断面例に対するものである。しかし、一様曲げを受ける圧延断面(IPE200, IPE600)に対して求めた近似式(3.8)と式(5.25)が一致すること、ならびに $\delta_r - \bar{\lambda}$ 座標上での横ねじれ強度は断面寸法による差はほとんど現れないという第3章の知見から、式(5.25)は他の断面に対しても有効であると考えられる。

ところで、ECCSの提案式(5.23)はMerchant-Rankin式、すなわち、

$$\left( \frac{1}{M_U} \right)^n = \left( \frac{1}{M_E} \right)^n + \left( \frac{1}{M_P} \right)^n \quad (5.26)$$

を書き換えた式である<sup>24),25)</sup>。ところが、式(5.24c)および式(5.24d)のように $\alpha$ を $n_2$ の

関数（ひいては $n$ の関数）とすること，あるいは式(5.25)のように $\bar{\lambda}^{2n}$ の代りに $\bar{\lambda}^{1.7n}$ とすることによって，Merchant-Rankin 式の物理的な意味を失うことになる．ただ，そのような簡単な修正を行うことによって，数値解析結果をより忠実に表現できることは図-5.12～図-5.15より明らかである．

## 5.7 結論

本章においては，まず，モーメント勾配を持つはりの横ねじれ耐荷力を有限変位解析により検討し，圧延ばりおよび溶接桁の基準強度曲線を提案した．通常のはりでは， $\delta_r - \bar{\lambda}$  座標上で表した耐荷力曲線は断面形状による差がわずかであり，耐荷力曲線に影響するのはむしろ残留応力と初期たわみの大きさである（第3章）．基準強度式は下限値を与えることを意図し，残留応力は実測値を，初期たわみは  $L/1000$  を用いた数値解析結果を近似曲線で表した．また，提案式は残留応力の違いによる差を明確にするために，圧延タイプと溶接タイプ（ガス切断）に分けることにし，そこで数値解析は，詳細な実験データを利用することのできた圧延ばり（文献18）および溶接桁（文献23）について，それぞれ一断面でのみ行った．提案した基準強度式は簡単で，しかも一般的であると考えられ，特に一様曲げの場合，圧延ばりに対する本提案式(5.4)は，青島が初期たわみを持つ圧延ばりに対して提案している強度式と極めて良く一致した．

次に，横変形に対して中間拘束されたはりの耐荷力を求めるために，提案した単一ばりの基準強度式と有効座屈長の概念を用いる近似計算手法を提案した．手法はNethercotらおよびDuxらにより確立された感はあるが，先達は座屈強度を基礎としているのに対して，ここでは耐荷力レベルから求めた合理的な基準強度を基礎としている．そこで，有効座屈長係数の算定において部材の降伏による拘束 *segment* と *critical segment* の剛比の変化を考慮するために，基準強度式と弾性座屈強度の関係を利用した．提案した近似計算手法は有限変位解析により求めた解析値に対して数%の誤差でしかも，一部を除いて，安全側に評価できることがわかった．

最後に，ECCSの横ねじれ基準強度式に対するモーメント勾配による簡単な修正式を提案し，解析値を精度よく近似することができた．

### 用いた記号

- $E$  : 弾性係数
- $F$  : 荷重係数

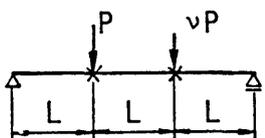
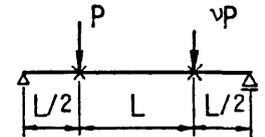
- $G$  : せん断弾性係数  
 $G_A, G_B$  : 有効座屈長係数を求めるための剛比  
 $I_y$  : 弱軸に関する断面2次モーメント  
 $I_\omega$  : そり2次モーメント  
 $j$  : 剛性修正係数  
 $K_T$  : St. Venant のねじり定数  
 $\bar{K}$  : 垂直応力によって発生する付加ねじりモーメント  
 $k$  : 有効座屈長係数  
 $L$  : 横拘束点間長さ  
 $M_{cr}$  : 不等曲げを受ける両端単純支持はりの弾性横ねじれ座屈モーメント  
 $M_e$  : 弾性横ねじれ座屈モーメント (式(5.19))  
 $M_E$  : 荷重および境界条件を考慮した弾性横ねじれ座屈モーメント  
 $M_{ocr}$  : 一様曲げを受ける両端単純支持はりの弾性横ねじれ座屈モーメント  
 $M_I$  : 非弾性座屈モーメント  
 $M_P$  : 全塑性モーメント  
 $M_U$  : 横ねじれ耐荷力  
 $M_Y$  : 弾性限モーメント  
 $m$  : 弾性モーメント修正係数  
 $n, n_1$  : システム係数  
 $R$  : 曲率半径  
 $\alpha_C, \alpha_R$  : はりの弱軸曲げに関する曲げ剛性, サフィックス  $C$  は *critical segment*,  $R$  は拘束 *segment* を表す  
 $\beta_1, \beta_2$  : 提案式におけるモーメント修正係数  
 $\gamma$  : 安定低減係数 (式(5.22))  
 $\delta_r$  : ( $= M_U / M_P$ )  
 $\bar{\lambda}$  : ( $= \sqrt{M_P / M_E}$ )  
 $\bar{\lambda}_o$  : ( $= \sqrt{M_P / M_{ocr}}$ )  
 $\rho$  : モーメント勾配

## 参考文献

- 1) 青島泰之：圧延H型鋼ばりの横倒れ座屈公式，土木学会論文報告集，第267号，1977年11月，pp.1-8.
- 2) European Convension for Constructional Steelwork : Introductory Report, 2nd. International Colloquium on Stability of the Structures, Liege, Apr., 1977.
- 3) 日本道路協会：道路橋示方書（Ⅰ共通編・Ⅱ鋼橋編）・同解説，1980年.
- 4) AISC : Specification for the Design, Fabrication and Erection of Structural Steel for Buildings, American Institute of Steel Construction, 1978.5)  
Timoshenko, S.P. and Gere, J.M. : Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill Book Co., New York., 1961.
- 6) Vlasov, V.Z. (奥村敏恵ほか共訳)：薄肉弾性ばりの理論，技報堂，1967年.
- 7) Clark, J.W. and Hill, H.N. : Lateral Buckling of Beams, Journal of the Structural Division, Proc. of ASCE, Vol.86, No.ST7, July, 1960, pp175-196.
- 8) Nethercot, D.A. and Rockey, K.C. : A Unified Approach to the Elastic Lateral Buckling of Beams, Structural Engineer, Vol.49, No.7, July, 1971, pp.321-330.
- 9) Horn, M.R. : The Flexural-Torsional Buckling of Members of Symmetrical I-Section under Combined Thrust and Unequal Terminal Moments, Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol.7, Part 4, 1954, pp.410-426.
- 10) Salvadori, M.G. : Lateral Buckling of I-Beams, Transactions, ASCE, Vol.120, 1955, pp.1165-1177.
- 11) Salvadori, M.G. : Lateral Buckling of Eccentrically Loaded I-Columns, Transactions, ASCE, Vol.121, 1956, pp.1163-1178.
- 12) Campus, F. and Massonnet, C. : Recherches sur le flambement de colonnes en acier A37, à profil en double T, sollicitées, obliquement, C.R. Rech., IRSIA, April, 1956.
- 13) Austin, W.J. : Strength and Design of Metal Beam-Columns, Journal of the Structural Division, Proc. of ASCE, Vol.87, No.ST4, April, 1961, pp.1-32.

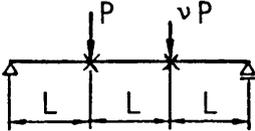
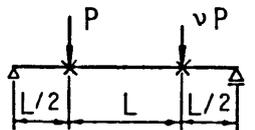
- 14) Usami, T. : Inelastic Lateral Buckling Strength of Monosymmetric I-Girders, Research Bulletin of the Faculty of Engineering, Gifu University, No.23, March, 1973, pp.81 - 94 .
- 15) Nethercot, D.A. and Trahair, N.S. : Inelastic Lateral Buckling of Determinate Beams, Journal of the Structural Division, Proc.of ASCE, Vol.102, No.ST4, April, 1976, pp.701 - 717 .
- 16) Dux, P.F. and Kitipornchai, S. : Buckling Approximations for Inelastic Beams, Journal of the Structural Division, Proc. of ASCE, Vol.110, No.ST3, March, 1984, pp.559 - 574.
- 17) Fukumoto, Y. and Kubo, M. : An Experimental Review of Lateral Buckling of Beams and Girders, Proc. of International Colloquium on Stability of Structures under Static and Dynamic Loads, ASCE, Washington, D.C., May, 1977, pp.541-562.
- 18) Dux, P.F. and Kitipornchai, S. : Inelastic Beam Buckling Experiments, Research Report No.CE24, Department of Civil Engineering, University of Queensland, May, 1981, pp.1 - 36 .
- 19) Galambos, T.V. : Structural Members and Frames, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1968 . (福本嘸士 , 西野文雄 共訳 : 鋼構造部材と骨組 - 強度と設計 - , 丸善 , 1970年 . )
- 20) Nethercot, D.A. and Trahair, N.S. : Lateral Buckling Approximations for Elastic Beams, The Structural Engineer, Vol.54, June, 1976, pp.197 - 204 .
- 21) Dux, P.F. and Kitipornchai, S. : Elastic Buckling of Laterally Continuous I-Beams, Journal of the Structural Division, Proc. of ASCE, Vol.108, No.ST9, September, 1982, pp.2099 - 2116.
- 22) Yura, J.A. : The Effective Length of Columns in Unbraced Frames, Engineering Journal of AISC, Vol.8, April, 1971, pp.37 - 42.
- 23) 福本嘸士 , 前川幸次 , 伊藤義人 , 浅里芳行 : モーメント勾配による溶接 I 形桁の横ねじれ座屈実験 , 土木学会論文報告集, No.362/I-4, 1985年 10 月 .
- 24) 久保全弘 : 鋼薄肉断面桁の曲げによる横ねじれ座屈強度と耐荷力に関する研究 , 名古屋大学提出学位論文 , 1980年 .
- 25) Allen, D. : Merchant-Rankin Approach to Member Stability, Journal of the Structural Division, Proc. of ASCE, Vol.104, No.ST12, December, 1978, pp.1909 - 1914.

Table 5.1 Comparison of Proposed Load Factors  $F$  and Effective Length Factors  $k$  with Computer Simulations ( Rolled Beams )

Rolled Beams I-256 x 146 x 6.4 x 11	$\nu$	Critical Segment			Load Factor $F = P/P_p$ and Effective Length Factor $k$			
		$\rho$	$L$ (m)	$\bar{\lambda}_0$	Computer Simulations ( Ultimate Strength )	$F = \text{estimated by Eq. (5.4)}$		
						Proposed Manual Method $k$	Elastic $k$ ( Ref. 20 )	Salvadori's $k$ ( $k = 1.0$ )
	1.0	1.0	3.0	0.823	$F = 0.815$ $k = 0.650$	$F = 0.835$ (+2.5%) $k = 0.673$	$F = 0.777$ (-4.6%) $k = 0.85$	$F = 0.734$ (-12%)
	0.308	0.7	3.0	0.823	$F = 0.930$ $k = 0.682$	$F = 0.915$ (-1.6%) $k = 0.670$	$F = 0.857$ (-7.8%) $k = 0.85$	$F = 0.813$ (-11%)
	1.0	1.0	3.5	0.931	$F = 0.863$ $k = 0.580$	$F = 0.834$ (-3.3%) $k = 0.580$	$F = 0.804$ (-6.9%) $k = 0.66$	$F = 0.688$ (-20%)
	0.478	0.7	3.5	0.931	$F = 0.975$ $k = 0.525$	$F = 0.915$ (-6.2%) $k = 0.575$	$F = 0.883$ (-9.4%) $k = 0.66$	$F = 0.767$ (-21%)

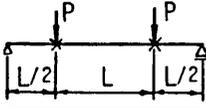
( ) = represents difference from computer simulation.

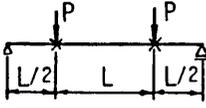
Table 5.2 Comparison of Proposed Load Factors  $F$  and Effective Length Factors  $k$  with Computer Simulations (Welded Girders)

Welded Girders I-520 x 110 x 4.3 x 8	$\nu$	Critical Segment			Load Factor $F = P/P_p$ and Effective Length Factor $k$			
		$\rho$	$L$ (m)	$\bar{\lambda}_o$	Computer Simulations (Ultimate Strength)	$F =$ estimated by Eq. (5.10)		
						Proposed Manual Method $k$	Elastic $k$ (Ref. 20)	Salvadori's $k$ ( $k = 1.0$ )
	1.0	1.0	1.5	0.699	$F = 0.844$ $k = 0.650$	$F = 0.820$ (-2.9%) $k = 0.675$	$F = 0.738$ (-13%) $k = 0.85$	$F = 0.672$ (-20%)
	0.308	0.7	1.5	0.699	$F = 0.943$ $k = 0.688$	$F = 0.915$ (-3.0%) $k = 0.685$	$F = 0.840$ (-11%) $k = 0.85$	$F = 0.772$ (-18%)
	1.0	1.0	1.5	0.699	$F = 0.894$ $k = 0.604$	$F = 0.867$ (-3.0%) $k = 0.572$	$F = 0.827$ (-7.5%) $k = 0.66$	$F = 0.672$ (-25%)
	0.478	0.7	1.5	0.699	$F = 0.948$ $k = 0.556$	$F = 0.965$ (+1.8%) $k = 0.57$	$F = 0.928$ (-2.1%) $k = 0.66$	$F = 0.772$ (-19%)

( ) = represents difference from computer simulation.

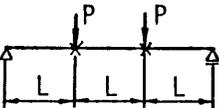
Table 5.3 Comparisons for Various Span Lengths ( Rolled Beams )

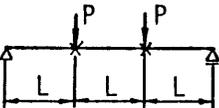


		Load Factor $F = P/P_p$ and Effective Length Factor $k$			
		Computer Simulations ( Ultimate Strength )	$F =$ estimated by Eq. (5.4)		
$L$ ( m )	$\bar{\lambda}_0$		Proposed Manual Method $k$	Elastic $k = 0.66$ ( Ref. 20 )	Salvadori's $k$ ( $k = 1.0$ )
2.5	0.706	$F = 0.935$ $k = 0.550$	$F = 0.907$ ( -3.0% ) $k = 0.560$	$F = 0.877$ ( -6.2% )	$F = 0.784$ ( -16% )
3.0	0.823	$F = 0.904$ $k = 0.540$	$F = 0.869$ ( -3.9% ) $k = 0.575$	$F = 0.840$ ( -7.1% )	$F = 0.734$ ( -19% )
3.5	0.931	$F = 0.863$ $k = 0.580$	$F = 0.834$ ( -3.3% ) $k = 0.580$	$F = 0.804$ ( -6.9% )	$F = 0.688$ ( -20% )
4.5	1.123	$F = 0.805$ $k = 0.612$	$F = 0.763$ ( -5.2% ) $k = 0.600$	$F = 0.737$ ( -8.5% )	$F = 0.604$ ( -25% )
6.0	1.367	$F = 0.715$ $k = 0.680$	$F = 0.669$ ( -6.4% ) $k = 0.620$	$F = 0.649$ ( -9.3% )	$F = 0.502$ ( -30% )
7.5	1.572	$F = 0.630$ $k = 0.654$	$F = 0.589$ ( -6.5% ) $k = 0.630$	$F = 0.573$ ( -9.1% )	$F = 0.405$ ( -36% )
10.0	1.861	$F = 0.470$ $k = 0.670$	$F = 0.471$ ( -0.2% ) $k = 0.650$	$F = 0.465$ ( -1.0% )	$F = 0.289$ ( -39% )

( ) = represents difference from computer simulation.

Table 5.4 Comparisons for Various Span Lengths ( Welded Girders )



		Load Factor $F = P/P_p$ and Effective Length Factor $k$			
		Computer Simulations ( Ultimate Strength )	$F =$ estimated by Eq. (5.10)		
$L$ ( m )	$\bar{\lambda}_0$		Proposed Manual Method $k$	Elastic $k = 0.85$ ( Ref. 20 )	Salvadori's $k$ ( $k = 1.0$ )
1.0	0.469	$F = 0.947$ $k = 0.597$	$F = 0.942$ ( -0.5% ) $k = 0.615$	$F = 0.868$ ( -8.3% )	$F = 0.824$ ( -13% )
1.5	0.699	$F = 0.844$ $k = 0.650$	$F = 0.820$ ( -2.9% ) $k = 0.675$	$F = 0.738$ ( -12.6% )	$F = 0.672$ ( -20% )
2.0	0.926	$F = 0.690$ $k = 0.690$	$F = 0.693$ ( +0.4% ) $k = 0.720$	$F = 0.610$ ( -11.6% )	$F = 0.532$ ( -23% )
2.5	1.147	$F = 0.585$ $k = 0.700$	$F = 0.578$ ( -1.1% ) $k = 0.725$	$F = 0.513$ ( -12.3% )	$F = 0.463$ ( -21% )
3.5	1.571	$F = 0.465$ $k = 0.740$	$F = 0.443$ ( -4.5% ) $k = 0.755$	$F = 0.398$ ( -14.3% )	$F = 0.332$ ( -29% )
4.0	1.772	$F = 0.388$ $k = 0.771$	$F = 0.389$ ( +0.3% ) $k = 0.765$	$F = 0.343$ ( -11.6% )	$F = 0.270$ ( -30% )

( ) = represents difference from computer simulation.

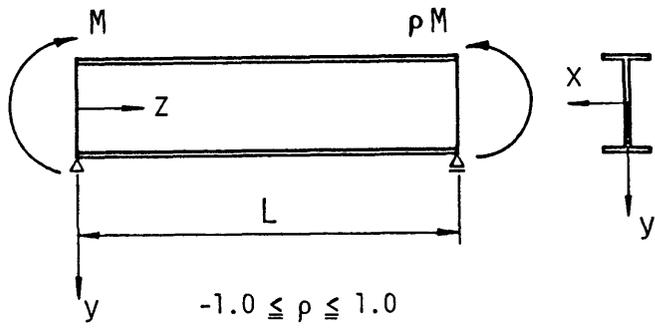


Fig. 5.1 Laterally Unsupported Beam under Moment Gradient

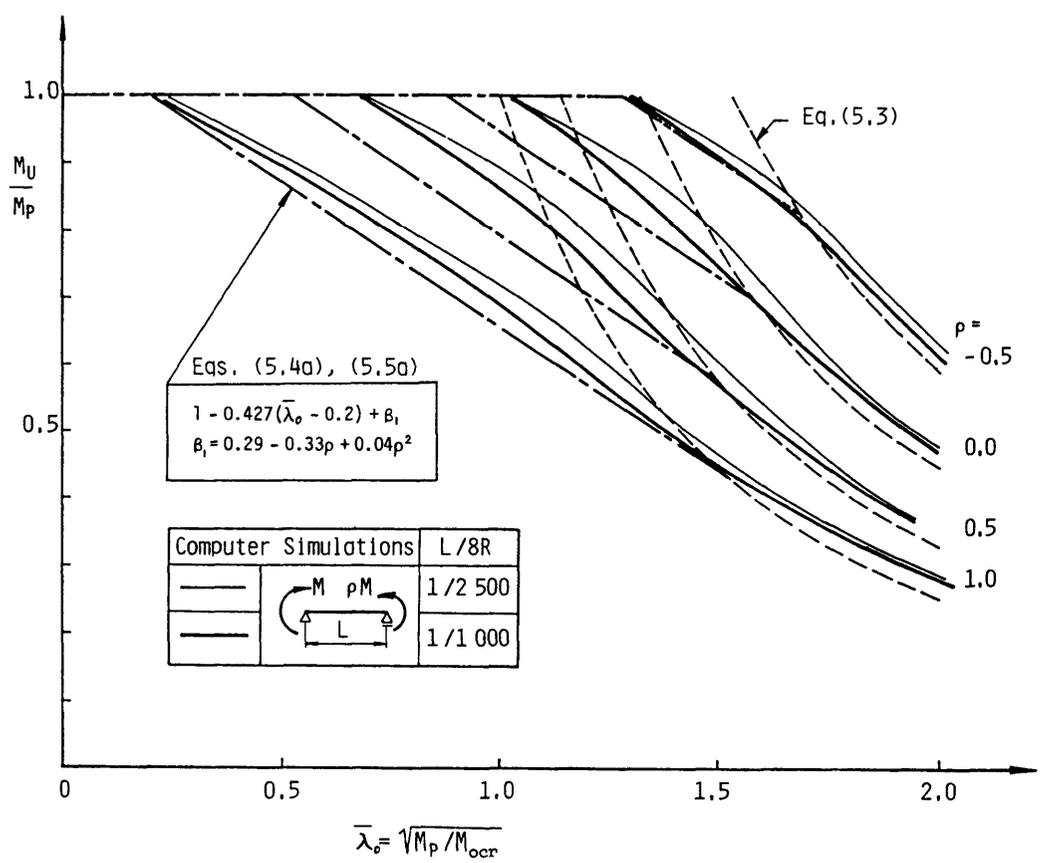


Fig. 5.2 Design Formulas for Rolled Beams for Moment Gradient

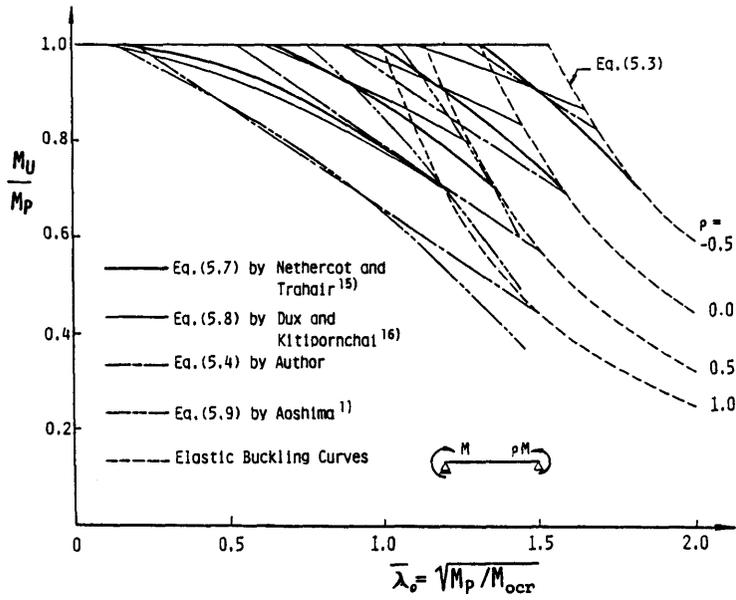


Fig. 5.3 Comparison of Lower Bound Strength Approximations for Moment Gradient

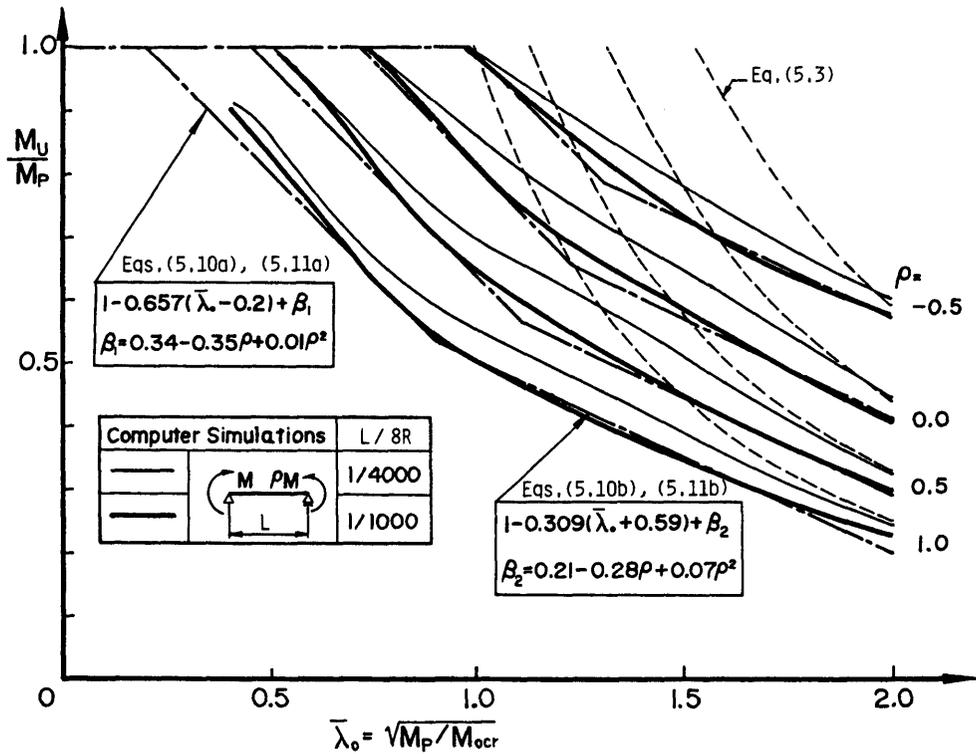


Fig. 5.4 Design Formulas for Welded Girders for Moment Gradient

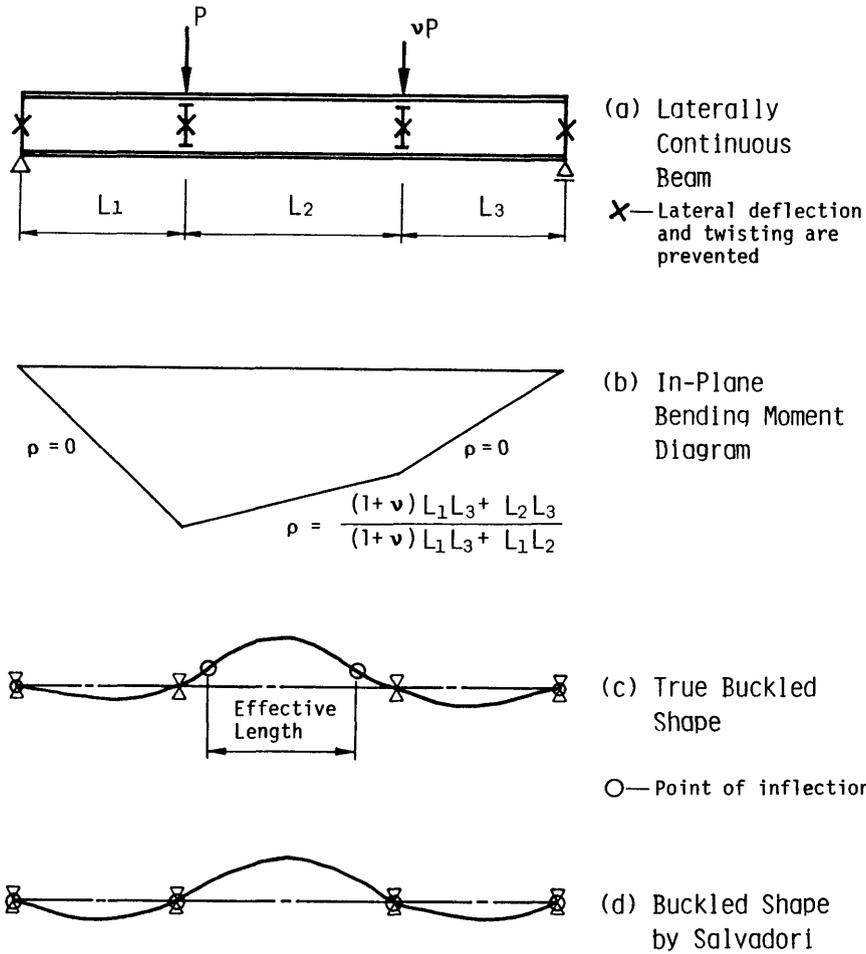


Fig. 5.5 Laterally Continuous Beam

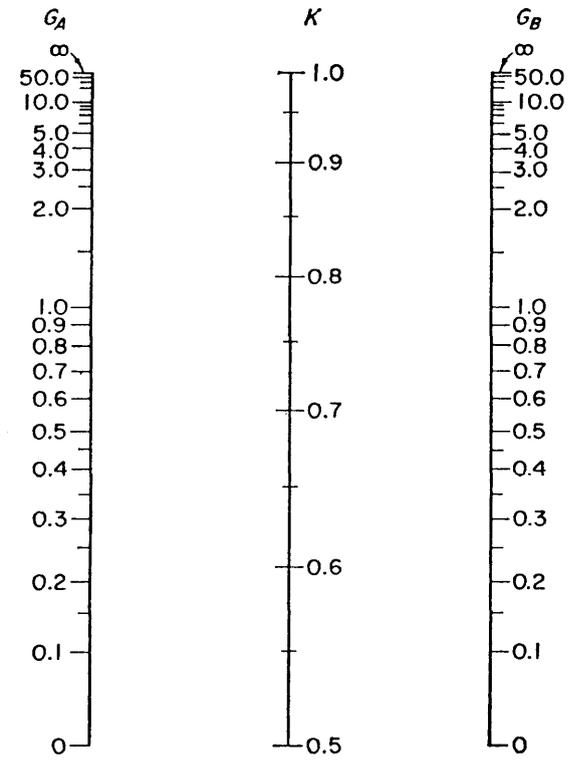


Fig. 5.6 Effective Length Factors for Restrained Member (Ref.19)

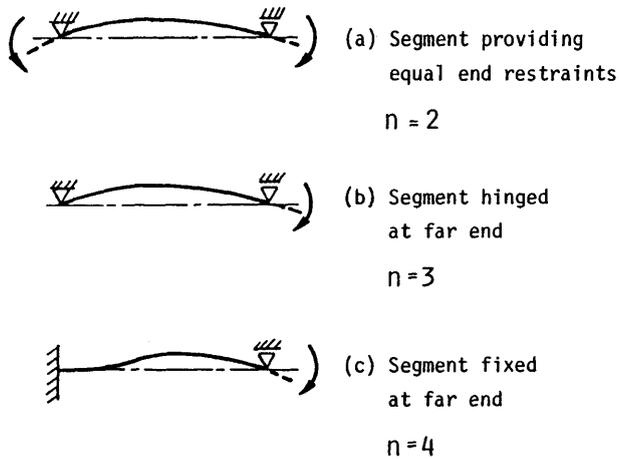
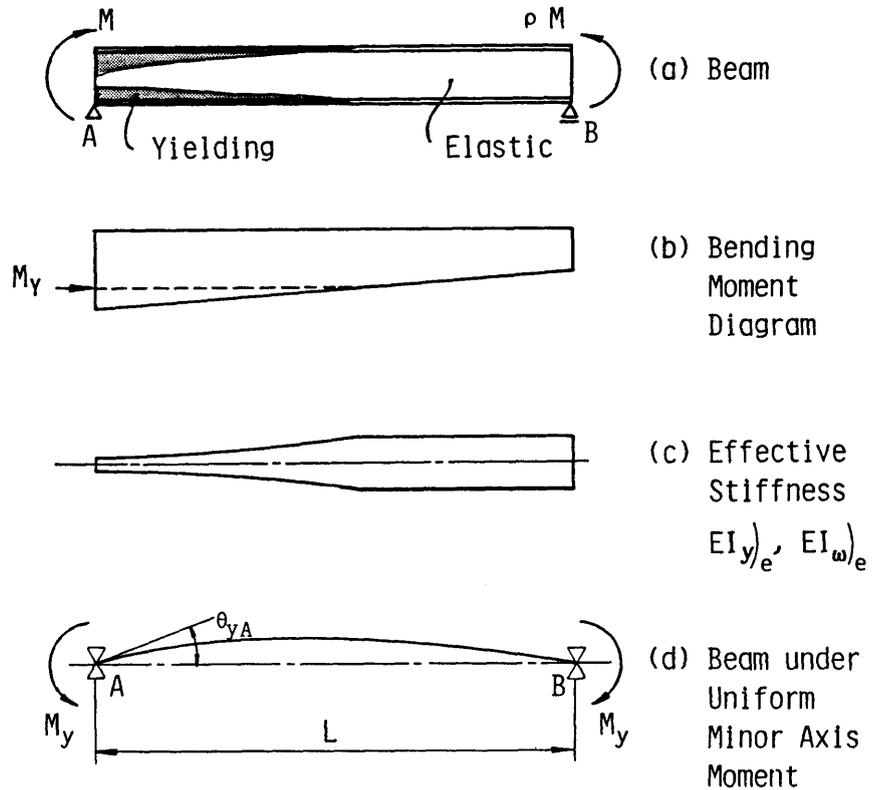


Fig. 5.7 Stiffness Approximations for Restraining Segment (Ref.15)



$EI_y)_e$  = Effective Minor Axis Bending Rigidity  
 $EI_\omega)_e$  = Effective Warping Rigidity

Fig. 5.8 Inelastic Beam

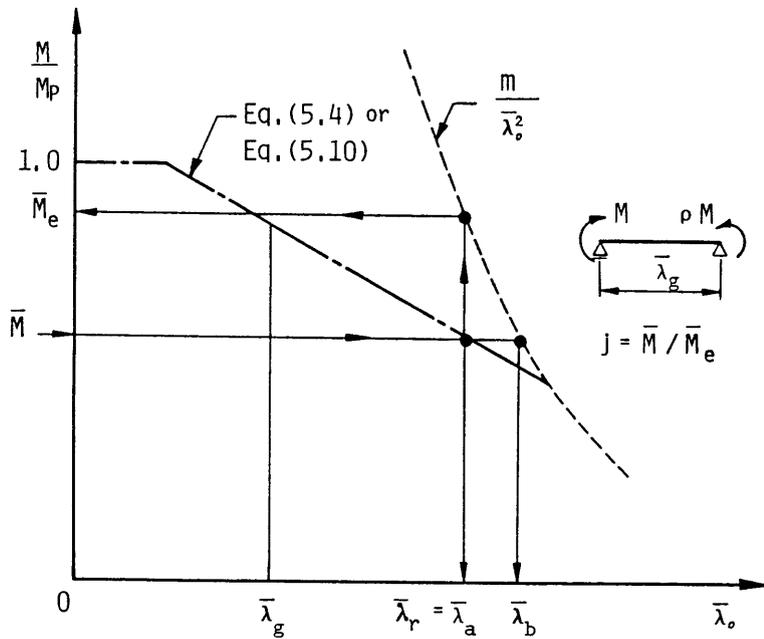


Fig. 5.9 Procedure for Evaluating Stiffness Modification Factor  $j$

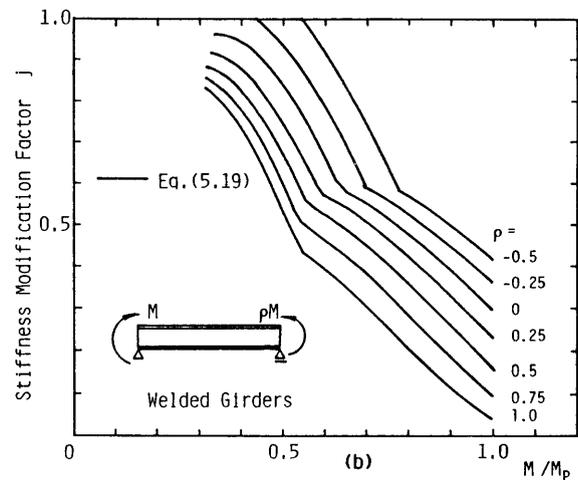
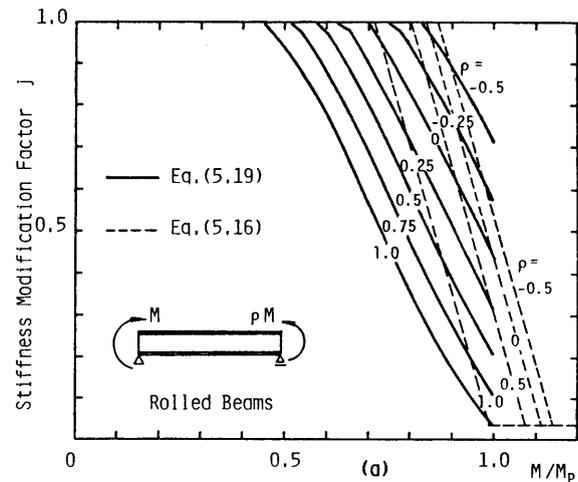


Fig. 5.10 Stiffness Modification Factors

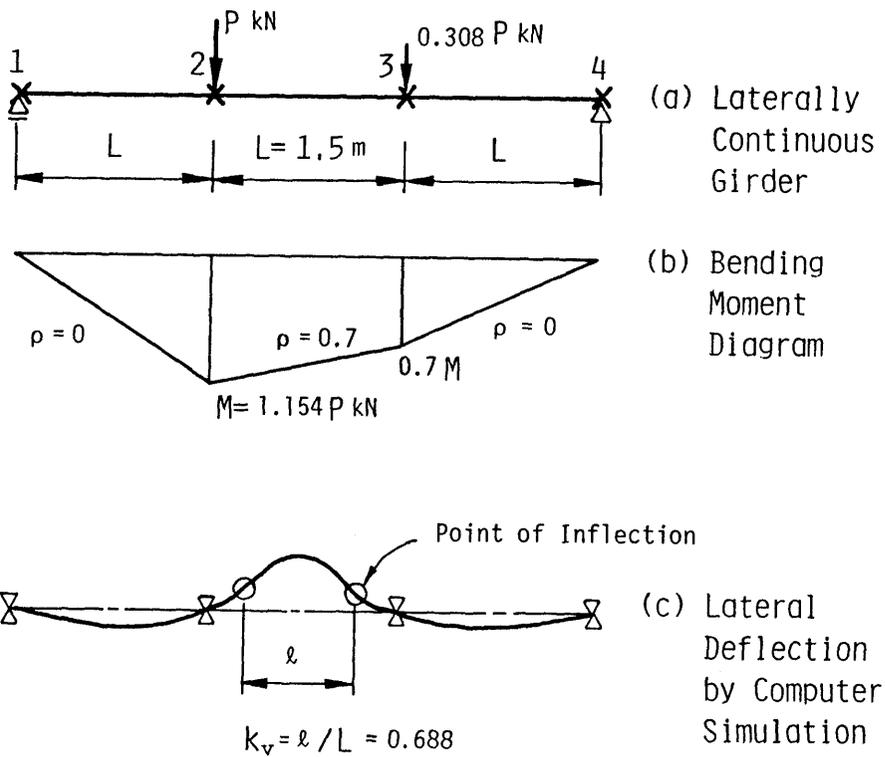


Fig. 5.11 An Example of Manual Method for Welded Girder

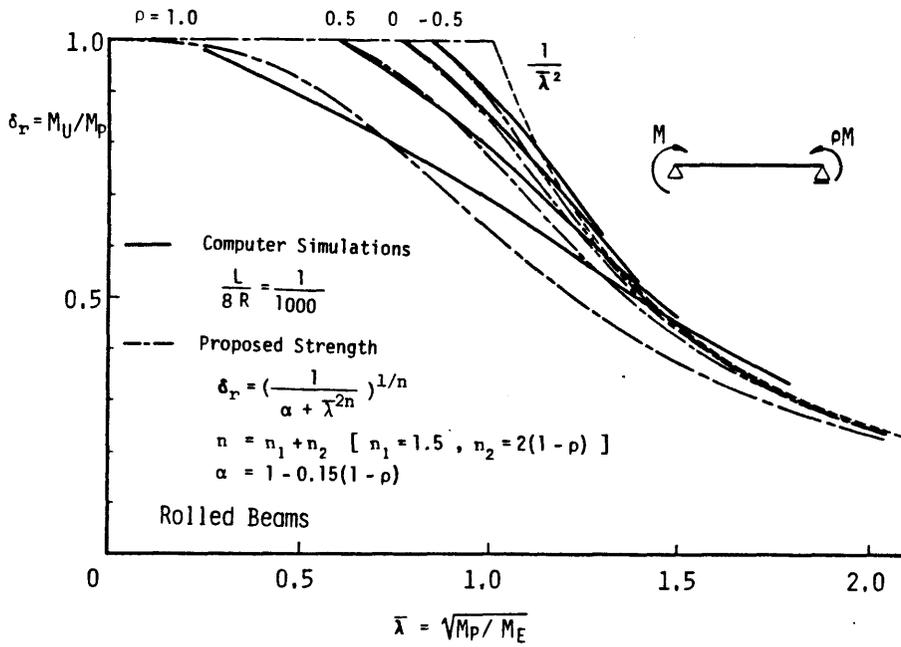


Fig. 5.12 Modified ECCS Formula, Eq.(5.24a), for Rolled Beams for Moment Gradient

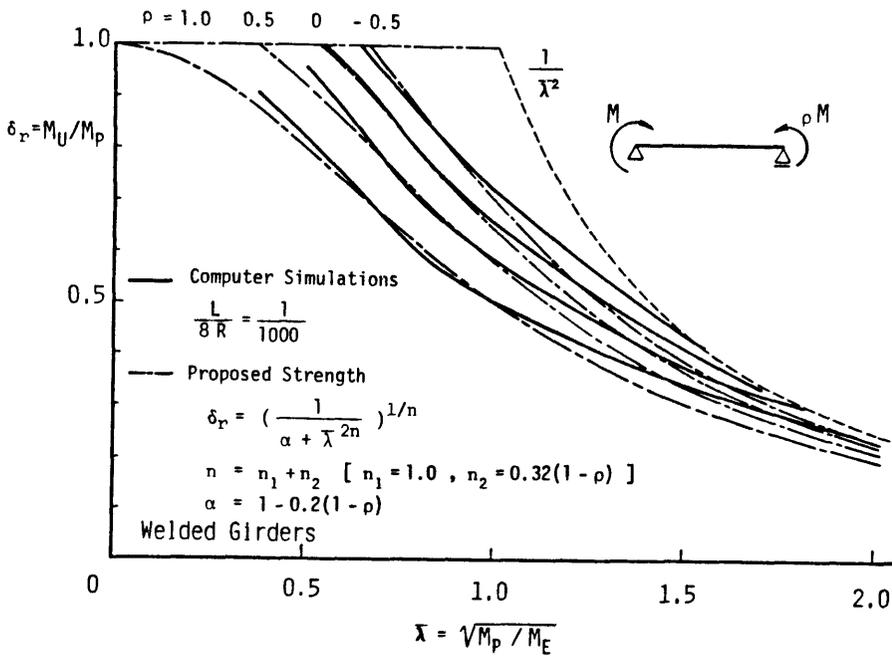


Fig. 5.13 Modified ECCS Formula, Eq.(5.24a), for Welded Girders for Moment Gradient

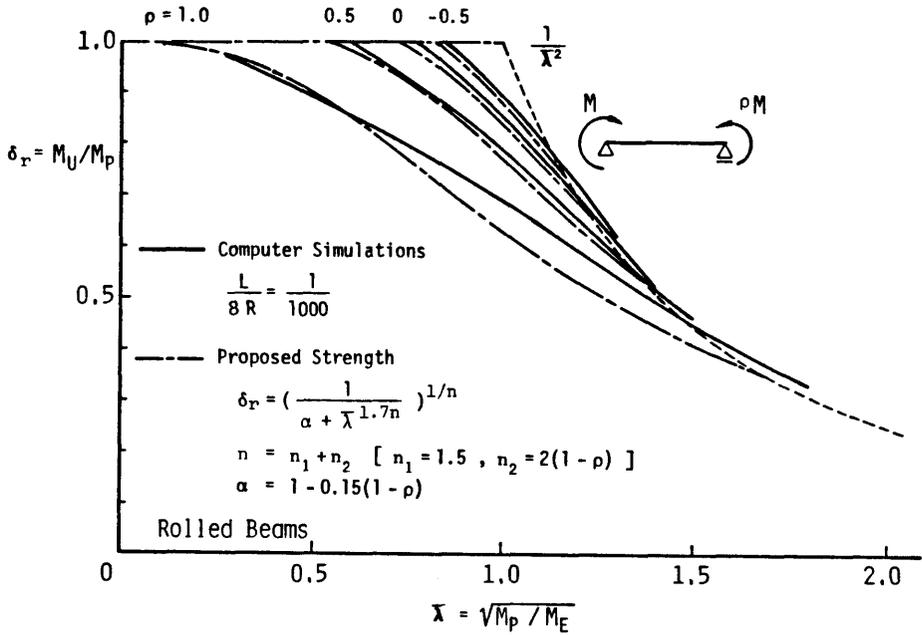


Fig. 5.14 Modified ECCS Formula, Eq.(5.25), for Rolled Beams for Moment Gradient

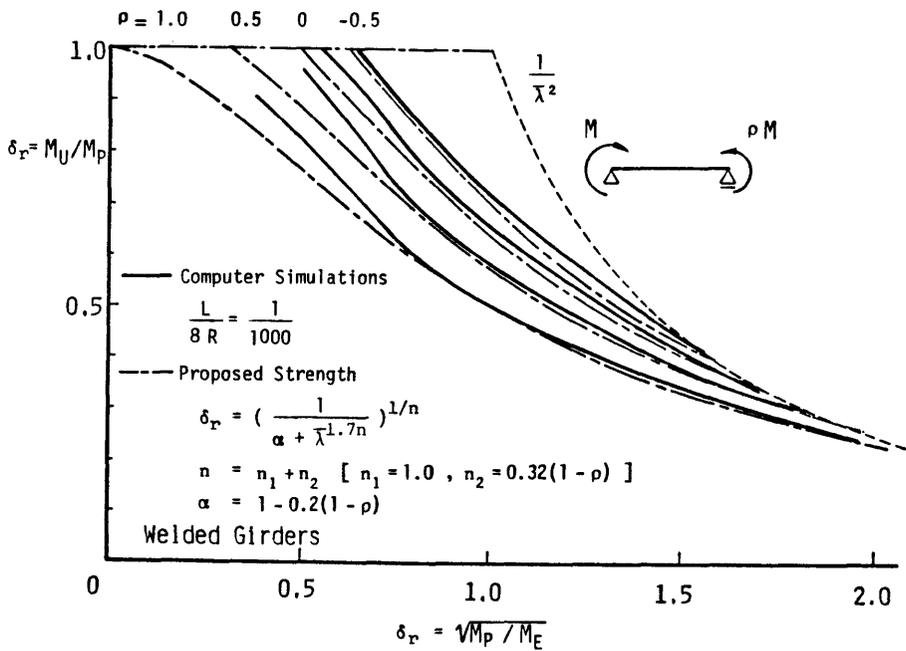


Fig. 5.15 Modified ECCS Formula, Eq.(5.25), for Welded Girders for Moment Gradient

## 第6章 結語

本論文では鋼薄肉 I 形断面桁の横ねじれ安定問題について、解析理論の展開、数値解析による考察、実験による現象の把握、および設計のための横ねじれ基準強度式の提案を行った。第1章には横ねじれ座屈に関する既往の研究を概説するとともに、本論文の内容と構成について述べた。また、各章で得られた結論はそれぞれの章末に述べたが、本章ではそれらの要約ならびに補足を行う。

第2章では鋼薄肉曲線桁の非弾性有限変位解析法について詳細な定式化を示した。著者がこの研究を始めた当時(1978年)、曲線桁(橋)の設計のための構造解析手法を論じたものはあっても強度設計については確立されておらず、直線桁(橋)の規定が準用されていた。そのようなことから曲線桁の横ねじれ現象(応力および変形問題)を把握するために、数値解析プログラムの開発を進め、若干の数値解析とその考察も行った。ところが同じ頃、直線桁の横ねじれ座屈現象(不安定問題)を初期たわみを持つ桁の横ねじれ耐荷力(荷重-変形曲線の最高荷重)として扱う機運が高まり、本論文も横ねじれ耐荷力に的を絞ってまとめることにした。そこで第3章以下の数値解析では、初期横たわみを円弧で表すことにし、曲線桁を対象として開発した非弾性有限変位解析プログラムを適用した。その適用精度については複数の実験値との比較により妥当性を確認したが、解析プログラムは(1)本論文では完全弾塑性体を仮定しているが、完全弾塑性体とは異なった応力-ひずみ関係および、ひずみ硬化を考慮した場合の影響、(2)ひずみの反転を考慮した場合の影響、(3)降伏条件にせん断応力を含めた場合の影響などの点について今後検討されるべきである。

第3章では初期横たわみ、荷重偏心および残留応力などの初期不整を持つ圧延 I 形はりの横ねじれ耐荷力を数値解析により求め、修正細長比  $\bar{\lambda} = \sqrt{M_P/M_E}$  および低減係数  $\delta_r = M_U/M_P$  を用いた座標上で検討した。得られた結果は次のようである。

- 1) 幾何学的な初期不整を初期横たわみ、荷重偏心あるいはそれらの合成されたもので表した場合、偏心量が同じであれば、横ねじれ耐荷力の差はほとんどない。
- 2) 横ねじれ耐荷力に対する残留応力の影響は、固有値解析から得られる横ねじれ座屈強度に対する影響に比べれば小さい。
- 3) 初期横たわみの影響は修正細長比  $\bar{\lambda}$  が 1.1 付近で最も大きい(横ねじれ耐荷力と横ねじれ座屈強度の差が大きくなる)。
- 4)  $\bar{\lambda} - \delta_r$  座標上では、特に広幅フランジでない限り、はりの断面寸法の違いによる横ねじれ耐荷力曲線の差は少ない。
- 5) パラメータ  $\bar{\lambda} - \delta_r$  を用いれば、断面寸法、荷重状態(荷重の種類、載荷高)および境界条件にかかわらず、はりの弾性横ねじれ座屈強度は 1 本の弾性座屈曲線で表されるが、荷重状態あるいは境界条件による非弾性域での降伏領域の広がりへの影響は考慮できない。したがって、ECCS の提案曲線のように、すべてのはりの横ねじれ耐荷力曲線を 1 本の曲線で表すことには無理がある。

6) 横ねじれ耐荷力に対する種々の初期不整の影響，横ねじれ耐荷力と横ねじれ座屈強度の関係および不安定に至るプロセスは部材における降伏領域の広がりから明確に説明できる．

以上のように，横ねじれ耐荷力に対する基本的な考察を行ったが，(1)種々の境界条件による影響，(2)初期ねじれ変形の影響，(3)残留応力および材料定数などに実測データを用いた場合の影響などの点について今後検討されるべきである．

第4章では溶接I形断面桁の横ねじれ耐荷力におよぼす強軸まわりのモーメント勾配の影響を検討するために，実橋の1/3程度のプレートガーダーを製作し，載荷点の横変位を拘束した1点載荷（片曲げを受ける桁を想定）および2点載荷（一様曲げを受ける桁を想定）による曲げ耐荷力実験を行った．得られた結果は次のようである．

- 1) 支点および載荷点に用いた横変位拘束治具は簡単でしかも十分な精度を有する．
- 2) 桁の崩壊形式はすべて横ねじれ座屈（圧縮フランジの水平座屈）が主であったが，崩壊における応力レベルが高くなる桁の圧縮フランジ，あるいは圧縮フランジの水平座屈による曲率中心側のフランジにおいてはねじれ変形が認められた．しかし，このようなねじれ変形が発生した後も耐力を保つ．
- 3) 腹板の荷重による面外たわみは初期たわみの形状に影響される．
- 4) 桁の横ねじれ耐荷力に対する中間垂直補剛材の剛度，間隔の効果について明らかにすることはできなかった．
- 5) はり理論に基づく非弾性有限変位解析により得られた横ねじれ耐荷力は実験値と極めてよく一致し，フランジおよび腹板の幅厚比が小さいプレートガーダーでは局部座屈および断面変形が横ねじれ耐荷力におよぼす影響は小さく，このような解析法によりこの種のプレートガーダーの横ねじれ耐荷力を推定できる．
- 6) 弾性横ねじれ座屈強度を用いた無次元化座標上 ( $\bar{\lambda} - \delta_r$ ) での耐荷力曲線は非弾性域でモーメント勾配によって明確な差を生じている．したがって，基準強度曲線をモーメント勾配別に multiple curves で表わすことが合理的である．

7) 2点載荷桁のように中間拘束された桁の実験値を両端にモーメント荷重が作用する桁の横ねじれ耐荷力として評価するために，有効座屈長係数を利用することができる．その場合，弾性拘束効果のみならず非弾性域での降伏に伴う拘束効果（有効座屈長係数）の変化を考慮する必要がある．

第5章では，まず，モーメント勾配を考慮した横ねじれ基準強度式の提案を行った．初期不整（初期たわみ，残留応力）の大きさを強度式のパラメータに取り入れることは困難であるので，次のような考えに基づいて行った横ねじれ耐荷力解析結果から強度式を近似した．

- 1) 基準強度式は下限値を与えるように，製作許容値であるところの  $L/1000$  を初期たわみとして採用した．
- 2) 残留応力の違いによる横ねじれ耐荷力の差を明確にするために，圧延タイプと溶接タイプ（ガス切断）に分けて，基準強度式を提案した．そこで詳細な残留応力の実測データを利用することの

できた圧延ばりおよび溶接桁についてそれぞれ一断面を用いて数値解析を行った。また、鋼種はSS41クラスを対象とした。

3) モーメント勾配のある桁の横ねじれ基準強度は、無次元座標  $\bar{\lambda}_o = \sqrt{M_P/M_{ocr}} - \delta_r = M_U/M_P$  を用い、モーメント修正係数を一様曲げの場合の基準強度式に加算する方式で提案した(式(5.4) および式(5.10))。これは、通常行われているようなモーメント修正係数を乗算する方式よりも横ねじれ耐荷力を近似し易い。

次に、横変形に対して中間で拘束されたはりの横ねじれ耐荷力を求めるために、提案した基準強度式と有効座屈長を用いる近似計算手法を提案した。有効座屈長係数の算定において部材の降伏による critical segment と隣接 segment の剛比の変化を考慮するために、基準強度と弾性横ねじれ座屈強度の関係を用いた。近似計算手法は有限変位解析により求めた解析値に対して数%の精度で、しかも安全側に評価できた。

最後に、ECCSによって提案されている横ねじれ基準強度式に対して、モーメント勾配による影響を取り入れるための修正式を提案し、数値解析結果を精度よく近似できることを示した。

以上のように、設計において最も一般的な荷重状態に対する基準強度式を提案し、また、先達によって提案された隣接 segment の拘束効果を考慮する手法を耐荷力レベルへ拡張した。これらは合理的な設計のための一助となると確信するが、(1)より多くの実測データを用いたシミュレーションによる提案式の妥当性の検証、(2)種々の拘束条件への対応、(3)中間荷重およびその載荷高への対応 などの点について今後検討されるべきである。

## 研究業績 (1978年～現在)

### 論文

1. Yoshida, H. and Maegawa, K. : Local and Member Buckling of H-Columns, Journal of Structural Mechanics, Vol.6, No.1, 1978, pp.1 - 27 .
2. 吉田 博, 前川幸次: 縦および横方向に補剛された板の座屈強度解析, 土木学会論文報告集, 第282号, 1979年2月, pp.15 - 29 .
3. Yoshida, H. and Maegawa, K. : The Buckling Strength of Orthogonally Stiffened Plates under Uniaxial Compression, Journal of Structural Mechanics, Vol.7, No.2, 1979, pp.161 -191.
4. Yoshida, H. and Maegawa, K. : The Optimum Cross Section of Channel Columns, International Journal of Mechanical Sciences, Vol.21, No.3, 1979, pp.149 -160 .
5. 前川幸次, 吉田 博: 伝達マトリックス法による曲線 I 形ばりの耐荷力解析, 土木学会論文報告集, 第312号, 1981年8月, pp.27 - 37 .
6. Yoshida, H. and Maegawa, K. : Ultimate Strength Analysis of Curved I-Beams, ASCE, Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol.109, No.EM1, February, 1983, pp.192 -214 .
7. 前川幸次, 吉田 博: 鋼 I 形ばりの横倒れ安定性の評価方法に関する研究, 土木学会論文報告集, 第331号, 1983年3月, pp.55 - 63 .
8. Yoshida, H. and Maegawa, K. : Lateral Instability of H-Beams with Imperfections, Third International Colloquium on Stability of Metal Structures, Paris, November, 1983, pp.93 - 99 .
9. Yoshida, H. and Maegawa, K. : Lateral Instability of I-Beams with Imperfections, ASCE, Journal of Structural Engineering, Vol.110, No.8, August, 1984, pp.1875 -1892 .
10. 福本嘯士, 前川幸次, 伊藤義人, 浅里芳行: モーメント勾配による溶接 I 形桁の横ねじれ座屈実験, 土木学会論文報告集, No.362/I-4, 1985年10月.

## 資料

1. 前川幸次， 出村禧典， 中村昭英： HITAC-8250 を用いた文献管理システムの開発について， 石川工業高等専門学校紀要， No.13， 1981年3月， pp.89 - 97 .

## 土木学会年次学術講演会講演概要集

1. 吉田 博， 前川幸次： H形鋼柱の最適断面形状， 土木学会中部支部研究発表会， 1978年2月， pp.49 - 50 .
2. 前川幸次， 吉田 博： はりの横倒れ安定性の評価方法について， 土木学会第33回年次学術講演会， 1978年9月， pp.587 - 588 .
3. 前川幸次， 吉田 博： 薄肉開断面曲線ばりの弾塑性解析について， 土木学会第34回年次学術講演会， 1979年10月， pp.209 - 210 .
4. 前川幸次， 吉田 博： 曲線 I 形ばりの耐荷力曲線について， 土木学会第35回年次学術講演会， 1980年9月， pp.249 - 250 .
5. 前川幸次， 吉田 博： 初期不整および荷重偏心を考慮した横倒れ耐荷力， 土木学会第36回年次学術講演会， 1981年10月， pp.319 - 320 .
6. 前川幸次， 吉田 博： 初期曲率を有するはりおよび偏心荷重を受けるはりの挙動について， 土木学会中部支部研究発表会， 1982年2月， pp.20 - 21 .
7. 前川幸次， 吉田 博： 初期不整を有する鋼 I 形ばりの横倒れ挙動に関する考察， 土木学会第37回年次学術講演会， 1982年10月， pp.369 - 370 .
8. 前川幸次， 吉田 博， 本多伸弘： 曲率を考慮した曲線桁の有限変位解析， 土木学会中部支部研究発表会， 1984年3月， pp.44 - 45 .
9. 福本昤士， 前川幸次， 伊藤義人， 浅里芳行： モーメント勾配を持つプレートガーダーの横倒れ耐荷力実験， 土木学会中部支部研究発表会， 1985年3月， pp.48 - 49 .
10. 福本昤士， 前川幸次， 伊藤義人， 浅里芳行： モーメント勾配による溶接 I 形桁の横ねじれ座屈実験， 土木学会第40回年次学術講演会， 1985年9月 .

マエガワ コウジ

前川 幸次 略歴

現住所 〒921 石川県金沢市泉野町3丁目17番13号 (Tel. 0762-47-2972)

勤務先 〒929-03 石川県河北郡津幡町字北中条  
石川工業高等専門学校土木工学科 (Tel. 0762-89-3111)

昭和27年 9月 福井県坂井郡春江町に生れる

昭和46年 3月 福井県立藤島高等学校 卒業

昭和50年 3月 金沢大学工学部土木工学科 卒業

昭和52年 3月 金沢大学大学院工学研究科修士課程(土木工学専攻)修了

昭和52年 4月 石川工業高等専門学校土木工学科助手

昭和55年 4月 " 講師