報告番号	2 第 2965 号

離散時間適応制御系の設計法の改善とその応用に関する研究

水　野　直　樹

離散時間適応制御系の設計法の改善とその応用に関する研究

水 野 直 樹

目　　次

記　号

本論文で使用する記号は原則として小文字はベクトル（スカラを含む），大文字は行列を表すことが多いが，その他の場合は文中で定義を行う．以下に共通的に使用される記号を列記する．

A^T　：　行列Aの転置行列

A^{-1}　：　行列Aの逆行列

$\det A$　：　行列Aの行列式

$\mathrm{tr}A$　：　行列Aのトレース

$\|x\|$　：　ベクトルxのノルム

$\mathrm{diag}(a_1,\ldots\ldots,a_n)$　：　（i，i）要素が$a_i (i=1,\ldots.,n)$で，残りの要素は零の対角行列

I　：　単位行列

0　：　零，零ベクトル，零行列のいずれか

R　：　すべての実数の集合

$A \in R^{n \times m}$　：　Aはn行m列の実数を要素とする行列

$x \in R^n$　：　xは実数を要素とするn次元ベクトル

$\mathcal{L}$　：　ラプラス変換

$\mathcal{L}^{-1}$　：　逆ラプラス変換

$\mathcal{Z}$　：　z変換

$\mathcal{Z}^{-1}$　：　逆z変換

s　：　微分（ラプラス）演算子

z　：　時間進み演算子

z^{-1}　：　時間遅れ演算子

$A(z)\ [,\ A(z^{-1})]$　：　$A(z)\ [,\ A(z^{-1})]$は演算子z（，z^{-1}）からなる多項式（行列）

$\partial A(z)$　：　多項式$A(z)$のzについての次数

$\dot{x}$ ： 変数xの時間微分

x^{∞} ： 変数xの定常値

$\hat{x}$ ： 変数xの推定値

max x ： 変数xの最大値

sgn x ： 変数xの符号

Re x ： 複素数xの実数部

arg x ： 複素数xの偏角

$|x|$ ： 複素数（実数）xの絶対値

G（s）： 伝達関数（行列）

G（z），G（z^{-1}）： パルス伝達関数（行列）

（C，A，B）： システム行列

X（s）： x（t）のラプラス変換

X（z），X（z^{-1}）： x（t）のz変換

t ： 時間変数（連続時間）

k ： 時間変数（離散時間）

T ： サンプリング周期

n ： システムの次数を表すことが多い

ν ： システムの可観測指数

d ： 離散時間のむだ時間

x ： 状態ベクトルを表すことが多い

u ： 入力ベクトルを表すことが多い

y ： 出力ベクトルを表すことが多い

e ： 誤差ベクトルを表すことが多い

w ： 外乱を表す

y^* ： 目標値を表す

x_M ： 規範モデルの状態ベクトル

r ： 規範モデルの入力（ベクトル）あるいは制御系の外部入力（ベクトル）

y_M ： 規範モデルの出力（ベクトル）

Ｖ（ｋ）：　リアプノフ関数

θ　　：　パラメータベクトル（行列）

δ　　：　信号ベクトル（行列）

Γ　　：　ゲイン行列

添　字

ｐ　　：　プラントを表す

Ｍ　　：　規範モデルを表す

ｆ　　：　フィルタを通した信号を表すことが多い

ｉ（，ｊ）：　ｉ（，ｊ）番目の要素を表すことが多い

ａ　　：　拡張信号を表すことが多い

ｃ　　：　補助信号を表すことが多い

第一章　　　緒　論

1．1　緒　言

理論的な設計手法に基づいて自動制御系を設計する場合には，はじめに，与えられた制御対象と制御目的とを数学的に表現する必要がある．すなわち，まず，制御対象の数学モデルを作り，つぎに，制御目的を達成しうる制御装置を定め，これに従って種々の設計手法を用いて制御装置（コントローラ）を設計することになる．

このように，一般に制御系の設計は，制御対象や外乱（合わせてプラントとよぶ）の動特性を表す数学モデル（伝達関数，状態方程式など）をもとにして進められるので，制御目的を十分に達成させるためにはプラントの動特性は設計に先立って予め正確に把握されていなければならない．しかし，実在のプラントの中には，前もってこれを正確に知ることができないものが多くあり，しかも環境条件あるいは動作条件によってその動特性が変動するものがある．

例えば，後に述べるように，冷凍機性能試験装置の動特性および外乱を正確に知ることは困難であり，しかも装置の動特性は運転条件により大幅に変動する．また，船舶の動特性は船速，積荷状態，水深などによって変化し，波，風などの外乱の性質も経時的に変動する．あるいは，ロボットマニピュレータの場合には，その動特性がマニピュレータの姿勢，負荷などに依存して非線形的に変化することが知られている．

プラントの動特性の変動が比較的小さい場合には，代表的な動作点のまわりのプラント特性をもとに設計された通常のフィードバック制御系によって満足な性能を得ることができるが，動特性が大幅に変動する場合には，制御則を固定した従来の制御系が不安定となってしまうこともある．したがって，プラントに関する情報が不十分な場合や，その特性が環境条件，動作条件によって大きく変動する場合には，プラントの特性に応じてコントローラのパラメータをオンライン的に自動調整し，制御性能を常に最良の状態に保つような制御方式が望まれる．このような制御方式は，プラントの特性にコントローラを適応させることができるという意味で適応制御と呼ばれている．

適応制御の歴史は古く，これまで種々の方式が提案されてきたが，その中で，現在，設計理論としての体系も整い，多くの研究者，技術者の関心をよぶ実用的な設計法はモデル規範形適応制御系（ＭＲＡＣＳ：Model Reference Adaptive Control System ）とセルフ

チューニングレギュレータ（ＳＴＲ：Self-Tuning Regurator ）の二つの手法である[1)~4)]．これらは，いずれも１９５０年代にその基本的な考え方が提案されたものの，制御系の安定な動作を保証する設計理論の不備，あるいは制御装置実現のためのハードウェアの技術的，価格的問題により実用となるには至らなかった．最近になってそれらの事情が変わり，現代制御理論の成果の導入，マイクロプロセッサに代表されるハードウェア技術の進歩により，実用的な設計法へと進展するに至った．

現在では，ＭＲＡＣＳに対しては安定性理論に基づいた設計法が，ＳＴＲに対しては統計的制御理論や同定理論による設計法が確立されている．このうち，ＭＲＡＣＳはプラントの望ましい動特性を規範モデルという形で与え，このモデルの動特性に，プラントとコントローラとを結合した制御系の動特性が一致するように，すなわちプラント出力が規範モデルの出力に一致するようにコントローラのパラメータを適応的に調整しようとするものである．このため，ＭＲＡＣＳでは，コントローラのパラメータをどのように調整するかが重要であり，その調整則の設計は現在では，リアプノフの直接法やポポフの超安定論に基づいて行われている．一方，ＳＴＲは，従来の制御系の設計法をオンライン化したようなもので，この方式では，はじめに適当な制御方策が選定され，プラントのパラメータは既知としてコントローラの構造が決定される．実際にはプラントパラメータは未知なので，適当な同定法を用いて逐次推定され，その結果を真値とみなしてコントローラパラメータがオンラインで決定，調整される．この方式では，一般にプラントパラメータの同定とコントローラパラメータの決定にかなりの計算量が要求されるので，ディジタル計算機の使用を前提とした離散時間形式で設計がなされるのがＳＴＲ方式の一つの特徴となっている．ＳＴＲでは，制御方策とパラメータ同定法の選定が重要である．制御方策としては，プラントの出力誤差の分散を最小にするような方式，閉ループ系の極（あるいは零点も含めて）を望ましい値に指定する方式などがよく用いられている．また，パラメータ同定法としては，雑音の存在やパラメータ変動を考慮して，最小２乗法，確率近似法を基礎とする種々の繰り返し形のアルゴリズムが用いられている．

これよりわかるように，一般にＭＲＡＣＳはＳＴＲに比較して構成が簡潔であり，また，安定性理論に基づいて制御系の設計が可能である点など設計法としてより明快であると考えられる．また，ＭＲＡＣＳは当初，連続時間確定系のトラッキング問題に対し開発されたのに対して，ＳＴＲは離散時間確率系のレギュレータ問題に対して展開された．この理論的基盤の相違はＭＲＡＣＳがディジタル計算機の使用を前提とした離散時間形式の定式

化と最小２乗法を含む一般的な調整則を用いる設計法[5]へと，また，ＳＴＲがサーボ問題を対象とした極零指定形ＳＴＣ（Self-Tuning Controller）[6]へと拡張されるに至って縮小されつつある．

このような状況をふまえ，本研究ではその研究対象をＭＲＡＣＳを基礎とする適応制御系とする．また，一般に適応制御装置はかなり複雑な構成となることから，実際上の問題を考え，離散時間形式で定式化を行うこととする．この場合には種々の制御則をディジタル計算機のプログラムという形で容易に実現できる利点がある．

本研究の対象となるＭＲＡＣＳは，さきに述べたように安定性理論に立脚した設計法が一応確立されてはいるものの，実用化に当たってはなお解決されるべき多くの問題を持っている．

本論文ではこれらの諸問題の中から，工学的要求を満たすうえで重要と考えられる，プラントに対する制約的な仮定の緩和，プラントの入力の振幅制限の考慮，外乱への対応を可能とする適応制御系の設計法を提案し，その特性を解析するとともに数値計算例によって，その有効性を示す．また，実プラントとして冷凍機性能試験装置の制御問題を考え，提案した適応制御系により従来の制御では得ることのできなかった安定な制御が可能となることを実験結果によって明らかにする．

本論文の構成は以下の通りである．

まず，第二章で最も基本的な離散時間モデル規範形適応制御系の設計法を，むだ時間を持たない１入力１出力系とむだ時間を持つ多入力多出力系に対して示し，その大域的漸近安定性を保証するための条件と証明を与える．この設計法は制約も多く必ずしも実用的ではないが，本論文で提案するいくつかの拡張された設計法の基礎となるものである．第三章では適応制御の実用上で問題となる過渡応答の改善にもつながる，プラント入力の振幅制限を考慮した設計法を述べ，入力の振幅制限が存在する場合の出力誤差の収束性の検討を行う．また，数値計算例で本手法が過渡応答改善に有効であることを示す．第四，五，六章では離散時間ＭＲＡＣＳでプラントに課されるプラントの逆系の漸近安定性の仮定を緩和する設計法を提案する．プラントの逆系が漸近安定とならないような場合は連続時間系においてはまれにしか起こらないが，離散時間系ではしばしば起こりうる．連続時間系をディジタル計算機を用いて離散時間制御をする場合，その離散時間モデルはプラントに零次ホールド要素を前置して作成されるが，このとき，連続時間系がｓの右半平面に零点を持たない逆系が漸近安定な系であっても，その動特性，サンプリング周期によっては離

散時間系の零点はｚ平面の単位円外となり逆系が不安定となりうる．したがって，離散時間形式の場合には逆系が不安定な系の適応制御法の研究は重要である．この問題に対し，第四章では従来のＡＲＭＡ形式のプラントモデルにかえてプラントをむだ時間＋ＡＲモデル形式のモデルで表現してＭＲＡＣＳを構成する手法を，むだ時間を持つ１入力１出力系，多入力多出力系に対して提案する．また，その有効性を検討するために行った種々のプラントに対するシミュレーション結果を示す．第五章ではＡＲＭＡ形式でモデル化されたプラントに並列に補償要素を付加するとともに，規範モデルにも補償を行うことにより，逆系が不安定な系に対して安定性と速応性を考慮した設計が可能な手法を提案し，この手法がむだ時間があいまいな場合にも有効性を持ちうることも示す．第六章ではＭＲＡＣＳでプラントに要求される逆系の漸近安定性の仮定のみではなく，むだ時間が既知という仮定をも同時に緩和する設計法を１入力１出力，多入力多出力の漸近安定なプラントに対して提案する．また，提案した手法と従来のＭＲＡＣＳ，適応極配置制御系との関係を明らかにし，その有効性を数値計算例によって示す．第七，八章では適応制御系を実用化するうえで重要と考えられる外乱の存在する場合の制御系の設計法について述べる．第七章では未知の外乱のモデルを仮定しないサーボ構造を持つＭＲＡＣＳと，外乱を線形自由系の出力と時間の多項式で表される成分とに分けてモデル化し，これを完全に抑制可能なＭＲＡＣＳの設計法を提案し，外乱の存在する場合の制御系の構造と安定性を考察する．また，数値計算例で有効性を示す．第八章では前章と同様なモデルによってモデル化される外乱を考慮した適応極配置制御系の設計法を提案する．また，この手法が外乱を受ける逆系が不安定な系に対して有効に動作することを数値計算例で示す．第九章では実プラントに対する適応制御手法の応用として，冷凍機性能試験装置に対する適応制御系の設計と実験結果について述べる．制御系の構成法としては第四章で提案したプラントのむだ時間＋ＡＲモデルに基づくＭＲＡＣＳを用い，シミュレーションとオンライン実験によってその性能を確認する．

1．2　従来の研究概況

ここでは，離散時間モデル規範形適応制御系の設計法を中心に従来の研究を概観し，本研究の目的，意義など，その位置づけを明確にする．

信号合成適応による離散時間モデル規範形適応制御系の設計法は，連続時間モデル規範形適応制御系の設計法に続いてＩonescuら[7]によって提案された．この手法は，Monopoliの提案した拡張誤差を用いる連続時間系の設計法[8]を離散時間領域においてＬyapunovの安定論に基づいて拡張したものである．また，鈴木ら[9]もこれと同種の問題をＰopovの超安定論を用いて論じている．しかし，いずれの手法においても系の漸近安定性を保証するためにプラント入出力の有界性を仮定しており，大域的漸近安定性の保証は未解決であった．また，前者においては多くの高次フィルタを使用するため，制御装置の構成が複雑となる点，後者においては，さらにそのアルゴリズムにおいて３次代数方程式の求解が要求されるなどの問題を持っていた．一方，Ｐopovの超安定論に基づく設計法としてLandauは連続時間系，離散時間系に対して設計法を示した[10]．

これらの設計法はその後，種々の変形，改善が行われたが，永い間の懸案となっていた制御系の漸近安定性を与える設計法あるいは証明法が最近になって，Ｇoodwinら[11]，Narendraら[12]，Ｅgardt[13]，Landauら[14]などによって示された[15]．

また，従来，１入力１出力系を対象としていた設計法が多変数系へも拡張され[11),16),17]設計法としての体系が一応確立されるに至った．

しかし，設計法としての一応の体系が整ったものの，実用化に当たっては多くの問題点が存在していた．

たとえば，実際のシステムはその入力に飽和を持つため，それを考慮することなく設計された適応制御系の制御経過はよいとはいえず，その安定性もはっきりしない．この問題に対してMonopoliら[18]は入力の飽和を考慮した設計法を提案したが，その特性の解析は不十分であった．これに対し，大川ら[19]は入力の飽和が存在する場合の設計法と収束性の解析を行っている．また，入力の飽和を消極的に考慮するにとどまらず，より積極的に入力振幅制限を導入することで過渡応答を改善しうることの指摘，大川らとは異なる条件下での収束性の検討も行われている[20]．

以上の設計法では，プラントの逆系は漸近安定と仮定されているが，特に連続時間系を離散時間制御する場合に，この仮定が往々にして成立しないことがÅströmら[21]によって

示され，漸近安定でない逆系を持つ系に対する適応制御系設計法の重要性が指摘されている．

モデル規範形適応制御系の設計法の不安定な逆系を持つ系に対する拡張法としては，プラントに適当な補償要素を並列に付加し，零点を補償することで制御系の漸近安定性を満足させる設計法がＪｏｈｎｅｓｔｏｎｅ ら[22]，Ｋｕｍａｒら[23]によって提案されている．さらに，規範モデルの動的補償を併用する，安定性と速応性を考慮した設計法も提案されている[24]．これらの手法は，むだ時間のあいまいさに対してもロバスト性を持ちうるが，妥当な補償がなされるためにはプラントの動特性についてかなりの事前情報を必要とする．また，多変数系への拡張も困難と考えられる．

上記の方法では，プラントの離散時間モデルはＡＲＭＡ形式で表現されている．これに対し，零点が問題となるのはプラントをＡＲＭＡ形式で表現するためであるとして，この代わりに，むだ時間＋ＡＲ形式のモデルで近似表現し，このモデルに対して従来のモデル規範形適応制御の手法で適応制御系を構成することが試みられている[25)~27]．この方法は理論的な裏付けが必ずしも明確ではないが，多変数系への拡張も容易で，実用的な手法として実プラントへの適用にも成功している[26),27]．

これまでの設計法では，プラントのむだ時間および分母，分子の次数の上限は既知であると仮定しているが，特に，むだ時間をサンプリング周期と同程度に正確に知ることは困難である．これに対し，入力に着目したプラントモデルを用いて，上限は既知であるが，未知のむだ時間を持つプラントに対する設計法が新ら[28]によって提案されているが，連続時間系の離散時間表現の零点はプラントの連続時間のむだ時間にも依存することから，同時に逆系が不安定となる問題をも考慮する必要がある[29]．プラントの逆系が不安定となる問題とむだ時間が未知の問題を同時に解決する設計法がプラントの分解表現をもとに展開され，他の手法との対応も示されている[30]．これらの手法は多変数系にも拡張され[31),32]未知構造系への適用も可能としている．

以上の拡張は，主に適用が可能なプラントの範囲を拡大することがその目的であるが，実プラントへの応用，特にプロセス制御系等においては外乱を考慮した設計が要求される．

確定外乱に対しては，Ｅｇａｒｄｔ[33]が制御系が安定となるための条件を求めているが，必ずしも外乱の積極的抑制は考えられていない．

最近，未知の確定外乱を考慮した設計法がいくつか提案されているが，その場合，外乱をどのようにモデル化するかが問題となる．一つの手法は外乱のモデルを陽に仮定しない

もので，Peterson ら[34]によって連続時間系に対して提案された．これは，外乱が存在しない場合にも出力誤差が零となる保証がなかったが，サーボ構造を導入することで，出力誤差の収束性を改善した手法が離散時間系に対して提案されている[35]．

一方，外乱のモデルを仮定する設計法は主に２種類のモデルをもとに行われた．Goodwinら[36]は，外乱をプラント内の未知な不可制御部分空間の出力とみなせば，従来のモデル規範形適応制御系の構造を変更することなく外乱の抑制が達成できることを示したが，推定パラメータ数が外乱の型に応じて増加することから，高次の外乱への対応が困難と考えられる．もう一つのモデル化は，外乱の型を仮定して制御系を構成するものである．これは，Sebakhyら[37]によって連続時間系に対し提案されたもので，離散時間系に対して田村ら[38]，真野ら[39]によって拡張された．この方法は推定パラメータ数が増加することはないが，外乱のモデルは時間の多項式に限られるため，すべての外乱を十分な精度でモデル化するのは困難と考えられる．このため，２種類の外乱モデルを併用することで，より広い範囲の外乱への対応が可能で，しかも簡潔な手法も提案されている[40]．

これらの手法はモデル規範形適応制御系を拡張した設計法であるため，不安定な逆系を持つ系への適用が不可能であったが，外乱の型を仮定する手法が南出ら[41]，内門ら[42]によって適応極配置制御系の設計法に適用された．その後，２種類のモデル化を併用する方法も適応極配置制御系の設計法に取り入れられ[43]現在に至っている．

本研究は，上記のような種々の工学的な要求を満足する離散時間適応制御系の設計法を考察するとともに，その結果を用いて多入力多出力の実プラントに対する制御系の設計を行い，その有効性を実証することを目的とする．

適応制御の実プラントへの応用は，最近種々試みられているが[44]，多変数系で実用レベルの結果が得られているものは少ない．

第二章　Lüders－Narendraの正準形を用いた基本的設計法[15),17)]

2．1　緒　言

本章では，Lyapunovの安定論に基づいて，測定可能な信号のみを用い，離散時間モデル規範形制御系を信号合成適応によって構成する最も基本的な設計法について述べる．

この設計法は構造も簡潔で，しかも多入力多出力系に容易に拡張できるという利点を持つとともに，後の章で述べる種々の拡張された設計法の理論的基礎となるものである．

以下では，本章で取り扱う問題を述べ，まず，設計の基礎となるLüders-Narendra の正準形を説明する．[45),46)] つぎに，適応制御系の設計法として，むだ時間を含まない１入力１出力系に対する設計法を述べる．[15)] また，むだ時間を持つ多変数系に対して，Lüders－Narendra の正準系に相当する非最小実現系を求め，この系に対して適応制御系の設計を行う．[17)] さらに，ここで設計された信号合成適応による制御系とパラメータ適応による制御系との関係を明確にする．つぎに，適応制御系の設計において最も重要な問題となる制御系の漸近安定性を考察し，その理論的保証が得られるための条件を示し，証明を行う．

最後に，ここで設計した適応制御系の有効性を示すために，１入力１出力系，２入力２出力系に対して行った計算機シミュレーション結果について考察する．

２．２　問題の設定

実際のプラントを制御する場合，一般にはその全ての状態を観測することは困難であると考えられるので，全状態を必要とするような制御方法は実用上問題を生じることがある．

プラントのパラメータが既知であれば観測器（オブザーバ）を構成してその状態を推定することができるが，プラントのパラメータを未知とする適応制御においては同様の方法をとることは困難である．

ここでは，観測できない状態を用いず，測定可能なプラント入出力のみを用いて制御系を構成するため，Lüders, Narendra らによって導かれた正準形を導入する．この正準形は，連続時間系に適用すると，その状態が観測可能となるという特徴を持っている．

離散時間系においては後の章で述べるように，プラントの入出力関係を直接，差分方程式で記述できることから，必ずしもこのような正準形の導入を必要としないが，ここでは，連続時間系と同形式の表現で記述を行うこととする．

ここで扱うプラントは，以下で述べるように，連続時間集中定数線形系に零次ホールド要素をその入力側に前置し，出力側にサンプラを後置して得られる離散時間系とする．

まず，プラントとして次式で表される連続時間系を考える．

$$\dot{x}(t)=A_c x(t)+B_c u(t)$$
$$y(t)=C_c x(t) \qquad (2.1)$$

ここで，$u(t)\in R^r$，$y(t)\in R^m$ はそれぞれ入力ベクトルと出力ベクトルであり，

$A_c\in R^{n\times n}$，$B_c\in R^{n\times r}$，$C_c\in R^{m\times n}$ は定数行列とする．

また，系（C_c，A_c，B_c）は完全可観測であると仮定する．

一般に可観測指数がνである系は，その系が完全可観測であるとき$n\leqq m\nu$が成立する．

さらに，$n=m\nu$が成立すれば（2.1)式の系は正則変換$\tilde{x}=Sx$によりつぎの形となる[46]．

ただし，A_c，B_c，C_c はフルランクを持つものとする．

また，以下では$r=m$として定式化を行う．

$$\dot{x}(t)=\tilde{A}_c \tilde{x}(t)+\tilde{B}_c u(t)$$

$$y(t)=\tilde{C}_c \tilde{x}(t)$$

$$\tilde{A}_c = S A_c S^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{c1} & I & & \\ \cdot & & \cdot & 0 \\ \cdot & & \cdot & \\ \cdot & 0 & & \cdot \\ \tilde{A}_{c\nu-1} & & & I \\ \tilde{A}_{c\nu} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_c = S B_c = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{c1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{B}_{c\nu-1} \\ \tilde{B}_{c\nu} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_c = C_c S^{-1} = [\, I \quad 0 \cdots 0 \,] \tag{2.2}$$

ここで，$\tilde{A}_{ci}$，$\tilde{B}_{ci} \in R^{m \times m}$ （$i=1,\ldots,\nu$）である．

（2.2)式の系は（2.1)式の系から正則変換によって得られた系であるので，同一の伝達関数行列$G_c(s)$を持つ．

$$G_c(s) = C_c (sI - A_c)^{-1} B_c = \tilde{C}_c (sI - \tilde{A}_c)^{-1} \tilde{B}_c$$
$$= [\, s^{\nu} I - \sum_{i=1}^{\nu} \tilde{A}_{ci} s^{\nu-i} \,] [\, \sum_{i=1}^{\nu} \tilde{B}_{ci} s^{\nu-i} \,] \tag{2.3}$$

（2.3)式の零点は $\det[\sum_{i=1}^{\nu} \tilde{B}_{ci} s^{\nu-i}] = 0$ の根となる．これより（2.1)式,(2.2)式の系の零点は係数行列$\tilde{B}_{ci}$のみによって決まることがわかる．

ここで,(2.2)式の系をサンプリング周期Tで離散時間系に変換すると次式を得る．

$$x_d(k+1) = A_d x_d(k) + B_d u(k)$$
$$y(k) = C_d x_d(k) \tag{2.4}$$

ただし，

$A_d = e^{\tilde{A}_c T}$，$B_d = \tilde{A}_c^{-1}(A_d - I)\tilde{B}_c$ （$\tilde{A}_c$ が正則でないときには$B_d = \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s}(sI - \tilde{A}_c)^{-1}\tilde{B}_c]_{t=T}$ とする．）また，kは離散時間を示すパラメータで$t = kT$の関係がある．

（2.4)式の系を前述の正則変換$x = S x_d$ によって変換するとつぎになる．

$$x(k+1) = \tilde{A}_d x(k) + \tilde{B}_d u(k)$$
$$y(k) = \tilde{C}_d x(k) \tag{2.5}$$

(2.5)式の系のパルス伝達関数行列は (2.3)式と同一形式の次式となる．

$$G_d(z) = [z^{\nu} I - \sum_{i=1}^{\nu} \widetilde{A}_{di} z^{\nu-i}] [\sum_{i=1}^{\nu} \widetilde{B}_{di} z^{\nu-i}] \tag{2.6}$$

したがって，離散時間系 (2.5)式の零点は$\widetilde{B}_{di}$のみによって決まることがわかる．

いま，連続時間系 (2.2)式において$\widetilde{B}_c^T = [0 \cdot \cdot \cdot 0 \quad \widetilde{B}_{c\nu}^T]$ すなわち (2.3)式の伝達関数行列が零点を持たない場合を考える．このとき，対応する離散時間系 (2.5)式では $B_d = S\widetilde{A}_c^{-1}(A_d - I)\widetilde{B}_c$ となり，一般にそのすべての要素は零でない値となる．このため (2.5)式の系は零点を持つことになる．

このように，離散時間系の零点は連続時間系の零点との間に明確な対応関係を持たないため，連続時間系がsの右半平面に零点を持たない最小位相系（逆系が漸近安定な系）であっても，対応する離散時間系がz平面の単位円外に零点を持つ非最小位相系（逆系が不安定な系）となる場合が生じる．

これは離散時間モデル規範形適応制御系を構成するうえで障害となるが，このような場合の対応策は章を改めて述べることとする．

さて，上で述べた (2.5)式で表される離散時間系は，再び正則変換を施すことによってつぎのようなLüders-Narendra の正準形に変換することができる.[46)]

ここでも，系 $(\widetilde{C}_d, \widetilde{A}_d, \widetilde{B}_d)$ は完全可観測とし，さらに$n = m\nu$とする．

$$x(k+1) = A\ x(k) + B\ u(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

$$A = T_d \widetilde{A}_d T_d^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & I & \cdots & I \\ \cdot & \Lambda_2 & & 0 \\ \cdot & & \ddots & \\ \cdot & & & \\ A_\nu & 0 & & \Lambda_\nu \end{bmatrix}, \quad B = T_d \widetilde{B}_d = \begin{bmatrix} B_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B_\nu \end{bmatrix}$$

$$C = \widetilde{C}_d T_d^{-1} = [I \quad 0 \cdots 0] \tag{2.7}$$

また，$\Lambda_i \in R^{m\times m}$ $(i=2, \ldots, \nu)$ はつぎのような行列である．

$$\Lambda_i = \mathrm{diag}(\lambda_{i1}, \cdots, \lambda_{im}) \qquad (i=2, \ldots, \nu) \tag{2.8}$$

ここで，λ_{ij} $(i=2, \ldots, \nu;\ j=1, \ldots, m)$は $i \neq k$に対して$\lambda_{ij} \neq \lambda_{k\ell}$をみたす絶対値が1より小さな任意定数である．

ここまでに述べた正則変換には$n=m\nu$の仮定を用いているが，系が完全可観測であれば$n<m\nu$であっても，漸近安定で不可制御なサブシステムを導入することにより，同様の状態空間表現が可能となる．

以下の節では，ここで導入した正準形を用いてプラントを表現したときの適応制御系の設計法について述べる．

２．３　適応制御系の設計

２．３．１　むだ時間を含まない１入力１出力系に対する設計[15)]

ここでは，むだ時間を含まない１入力１出力の連続時間系を零次ホールド要素を前置して離散化し，前節で導入したLüders-Narendra の正準形で記述し，制御系の設計を行う．

このとき，プラントを次式で記述する．

$$x(k+1)=Ax(k)+bu(k)$$
$$y(k)=c^T x(k) \tag{2.9}$$

ここで，

$$x^T(k)=[x_1(k),\cdots,x_n(k)]$$

$$c^T=[1\quad 0\cdots 0]\in R^n$$

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & 1\cdots 1 \\ \vdots & -\lambda_2 \quad 0 \\ \cdot & 0 \quad \cdot \\ a_n & \qquad -\lambda_n \end{bmatrix}\in R^{n\times n},\quad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}\in R^n \tag{2.10}$$

また，$x(k)\in R^n$，$u(k)\in R^1$，$y(k)\in R^1$ はそれぞれk時点における状態ベクトル，プラント入力，出力を示す．Aの要素であるλ_i (i=2,...,n) はすべて相異なり，絶対値が１より小さい既知の任意定数である．

適応制御系を構成するにあたり，(2.9)式で記述されるプラントに対し，つぎの仮定を設ける．

１）プラントの次数（の上限）nはプラントの構造に関する知識より既知．

２）A，bの要素a_i，b_i (i=1,...,n) は未知，ただし$b_1\neq 0$．

３）プラントの零点はz平面の単位円内に存在する．

４）プラントに含まれる不可制御部分空間は安定．

これらの仮定のうち，仮定３）は後に述べるようにモデル規範形適応制御系の漸近安定性を理論的に保証するうえで最も本質的な仮定であり，プラント入力の有界性を保証する十分条件となっている．

また，(2.9)式よりプラントの伝達関数はつぎになる．

$$G(z)=Y(z)/U(z)=c^T(zI-A)^{-1}b$$

$$=\frac{b_1+\{b_2/(z+\lambda_2)\}+\cdots+\{b_n/(z+\lambda_n)\}}{z-a_1-\{a_2/(z+\lambda_2)\}+\cdots+\{a_n/(z+\lambda_n)\}} \tag{2.11}$$

(2.10)式より明らかなようにb_1は$u(k)$として単位ステップ入力を加えたときの$k=1$時点における出力$y(k)$の値を示す．したがって，零次ホールド要素と組合わされたむだ時間を含まない連続時間系の離散時間表現においては常に$b_1\neq 0$となる．それゆえ，$G(z)$の分母，分子のzの次数差は，実現可能な連続時間系の伝達関数の分母，分子のsの次数差によらず，常に１となる．この$b_1\neq 0$の条件もプラント入力を有界とするために必要となるものである．

これらの仮定を満たす（2.8)式のプラントに対して，同じ構造と次元を持つ，つぎの規範モデルを考える．

$$\begin{aligned} x_M(k+1)&=A_M x_M(k)+b_M r(k)\\ y_M(k)&=c_M{}^T x_M(k) \end{aligned} \tag{2.12}$$

ここで，

$$x_M{}^T(k)=[x_{M1}(k),\cdots,x_{Mn}(k)]$$

$$c_M{}^T=[1\quad 0\cdots 0]\in R^n$$

$$A_M=\begin{bmatrix} a_{M1} & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & -\lambda_2 & & 0\\ \cdot & 0 & \ddots & \\ a_{Mn} & & & -\lambda_n \end{bmatrix}\in R^{n\times n},\quad b_M=\begin{bmatrix} b_{M1}\\ \vdots\\ \cdot\\ b_{Mn}\end{bmatrix}\in R^n \tag{2.13}$$

$r(k)$は規範モデルへの有界入力であり，また規範モデルは漸近安定とする．

規範モデルのパラメータa_{Mi}，b_{Mi} ($i=1,...,n$)は通常既知であるが，規範モデルがパラメータ未知の装置などで与えられ，プラントがその応答を規範とする場合を考慮して，以下で述べる設計法では未知として取り扱う．もち論，既知の場合には，その結果を容易に変更し，簡単化が可能である．

ここで考える制御目的は，入力$u(k)$を測定可能な信号のみを用いて適応的に調整して，プラント出力$y(k)$を理想的な応答である規範モデルの出力$y_M(k)$に追従させることである．

このとき，状態誤差を$e_i(k)=x_{Mi}(k)-x_i(k)$ $(i=1,...,m)$ と定めると(2.9)，(2.10)，(2.12)式より次式を得る．

$$e_1(k+1)=a_{M1}e_1(k)+a_{d1}y(k)+b_{M1}r(k)-b_1 u(k)+\sum_{i=2}^{n} e_i(k) \qquad (2.14)$$

$$e_i(k+1)=-\lambda_i e_i(k)+a_{Mi}e_1(k)+a_{di}y(k)+b_{Mi}r(k)-b_i u(k) \quad (i=2,...,n) \qquad (2.15)$$

ただし，$a_{di}=a_{Mi}-a_i$ $(i=1,...,n)$ である．

(2.15)式中の$e_i(k)$ $(i=2,...,n)$ を消去するために次式の１次フィルタから発生される補助信号$e_{\lambda i}(k)$，$y_{\lambda i}(k)$，$r_{\lambda i}(k)$，$u_{\lambda i}(k)$ $(i=2,...,n)$ を導入する．

$$e_{\lambda i}(k+1)=-\lambda_i e_{\lambda i}(k)+K_{ei}e_1(k)$$
$$y_{\lambda i}(k+1)=-\lambda_i y_{\lambda i}(k)+K_{yi}y(k)$$
$$r_{\lambda i}(k+1)=-\lambda_i r_{\lambda i}(k)+K_{ri}r(k)$$
$$u_{\lambda i}(k+1)=-\lambda_i u_{\lambda i}(k)-K_{ui}u(k) \quad (i=2,...,n) \qquad (2.16)$$

ただし，K_{ji} $(i=2,...,n;\ j=e,y,r,u)$ は零でない任意定数である．

(2.14)〜(2.16)式より$e_i(k)$ を消去すると，つぎの誤差方程式を得る．

$$e_1(k+1)=a_{M1}e_1(k)+a_{d1}y(k)+b_{M1}r(k)-b_1 u(k)+\sum_{i=2}^{n}[\{a_{Mi}/K_{ei}\}e_{\lambda i}(k)+\{a_{di}/K_{yi}\}y_{\lambda i}(k)+\{b_{Mi}/K_{ri}\}r_{\lambda i}(k)+\{b_i/K_{ui}\}u_{\lambda i}(k)]+h(k) \qquad (2.17)$$

ただし，

$$h(k)=\sum_{i=2}^{n}(-\lambda_i)^k[e_i(0)-\{a_{Mi}/K_{ei}\}e_{\lambda i}(0)-\{a_{di}/K_{yi}\}y_{\lambda i}(0)-\{b_{Mi}/K_{ri}\}r_{\lambda i}(0)-\{b_i/K_{ui}\}u_{\lambda i}(0)] \qquad (2.18)$$

$h(k)$ は出力誤差$e_1(0)$を除く状態誤差と補助信号の初期値からなっており，$|\lambda_i|<1$ $(i=2,...,n)$ であることから$k\to\infty$で$h(k)\to 0$ となる．

つぎに，プラント入力$u(k)$ を測定可能な信号のみを用いて次式で発生させる．

$$u(k)=\frac{1}{\pi_1(k)}[\theta_1(k)\,e_1(k)+\phi_1(k)\,y(k)+\psi_1(k)\,r(k)$$
$$+\eta_1(k)\,e_1(k-1)+\sum_{i=2}^{n}\{\theta_i(k)\,e_{\lambda i}(k)+\phi_i(k)\,y_{\lambda i}(k)$$
$$+\psi_i(k)\,r_{\lambda i}(k)+\pi_i(k)\,u_{\lambda i}(k)\}] \qquad (2.19)$$

ここで，$\theta_i(k),\phi_i(k),\psi_i(k),\pi_i(k)$ $(i=1,\ldots,n)$ および$\eta_1(k)$ は$(4n+1)$ 個の可調整パラメータで，後に述べる調整アルゴリズムによって更新される．

(2.19)式を(2.17)式に代入して整理し，さらに両辺に$\alpha e_1(k)+\beta e_1(k-1)$（設計パラメータ$\alpha$，$\beta$は多項式$z^2+\alpha z+\beta$が漸近安定多項式となるように決定する）を加えると次式を得る．

$$e_f(k+1)=\{\theta-\hat{\theta}(k)\}^T\delta(k)+h(k) \qquad (2.20)$$

ただし，

$$e_f(k+1)=e_1(k+1)+\alpha e_1(k)+\beta e_1(k-1) \qquad (2.21)$$

$$\theta^T=[a_{M1}+\alpha,\ a_{d1},\ b_{M1},\ \beta,\ a_{M2}/K_{e2},\ \cdots,\ a_{Mn}/K_{en},$$
$$a_{d2}/K_{y2},\ \cdots,\ a_{dn}/K_{yn},\ b_{M2}/K_{r2},\ \cdots,\ b_{Mn}/K_{rn},$$
$$b_2/K_{u2},\ \cdots,\ b_n/K_{un},\ -b_1\ ] \qquad (2.22)$$

$$\hat{\theta}^T(k)=[\theta_1(k),\phi_1(k),\psi_1(k),\eta_1(k),\theta_2(k),\cdots,\theta_n(k),$$
$$\phi_2(k),\cdots,\phi_n(k),\psi_2(k),\cdots,\psi_n(k),\pi_2(k),\cdots,$$
$$\pi_n(k),-\pi_1(k)\ ] \qquad (2.23)$$

$$\delta^T(k)=[e_1(k),y(k),r(k),e_1(k-1),e_{\lambda 2}(k),\cdots,$$
$$e_{\lambda n}(k),\ y_{\lambda 2}(k),\cdots,\ y_{\lambda n}(k),\ r_{\lambda 2}(k),\cdots,$$
$$r_{\lambda n}(k),\ u_{\lambda 2}(k),\cdots,\ u_{\lambda n}(k),\ u(k)\ ] \qquad (2.24)$$

(2.20)式中の可調整パラメータベクトル$\hat{\theta}(k)$の調整則としては最も基本的なつぎの形のものを用いる.[47)]

$$\hat{\theta}(k)=\hat{\theta}(k-1)+\varepsilon(k)\,e_f(k)\,\delta(k-1) \qquad (2.25)$$

$$\varepsilon(k)=\rho/\{\delta^T(k-1)\,\delta(k-1)\},\ 0<\rho<2 \qquad (2.26)$$

上式のアルゴリズムを用いたとき，$k\to\infty$で$e_f(k)\to 0$，すなわち$e_1(k)\to 0$ とすることができる．その証明と条件については 2.3.3節で考察を行う．

図 2.1に上述したモデル規範形適応制御系の概略を示す．

規範モデルのパラメータが既知の場合には(2.25)式中の可調整パラメータθ_i，ψ_i (i=1,...,n) とη_1をつぎの値に固定して，2n個の可調整パラメータについての調整則を構成すればよい．

$$\theta_1 = a_{M1} + \alpha, \quad \psi_1 = b_{M1}, \quad \eta_1 = \beta$$

$$\theta_i = a_{Mi}/K_{ei}, \quad \psi_i = b_{Mi}/K_{ri} \qquad (i=2,\ldots,n) \qquad (2.27)$$

2．3．2　むだ時間を含む多変数系に対する設計[17)]

本節では，前節で示したLüders-Narendra の正準形を用いた，むだ時間を含まない1入力1出力系に対する設計法を，むだ時間を含む多変数系へ拡張する方法を述べる．

まず，むだ時間を含む多変数系に対してLüders-Narendra の正準形に相当する非最小実現系を求める．いま，むだ時間を含む多変数離散時間系を入出力差分方程式でつぎのように書き表す．

$$y(k+1)=\sum_{i=1}^{\nu} A_i\, y(k+1-i)+\sum_{i=1}^{\nu} B_i\, u(k+2-d-i) \tag{2.28}$$

ここで，$y^T(k)=[y_1(k),\cdots,y_m(k)]\in R^m$，$u^T(k)=[u_1(k),\cdots,u_m(k)]\in R^m$ はそれぞれプラントの出力ベクトルおよび入力ベクトルである．また，A_i，$B_i\in R^{m\times m}$ はその要素が未知の定数行列とする．dはプラントのむだ時間を表す1以上の整数で，νはプラントの可観測指数に相当する定数とする．

プラントに対する仮定は1入力1出力系の場合に対応してつぎのものとする．

1）プラントの可観測指数（の上限）νおよびむだ時間dは既知．

2）A_i，B_i は未知，ただし $\det B_1\neq 0$．

3）プラントの零点，すなわち $\det\{\sum_{i=1}^{\nu} B_i z^{\nu-i}\}=0$ の根はすべてz平面の単位円内に存在する．

4）プラントに含まれる不可制御部分空間は安定．

(2.28)式は代入を繰り返すことにより，つぎになる．

$$y(k+d)=\sum_{i=1}^{\nu} A'_i y(k+1-i)+\sum_{i=1}^{\nu+d-1} B'_i u(k+1-i) \tag{2.29}$$

ここで，A'_i，B'_iはA_i，B_i とdとによって定まる定数行列であり，$B'_1=B_1$ となっている．

(2.29)式をz変換すると

$$z^d\, Y(z)=\sum_{i=1}^{\nu} A'_i z^{1-i}\, Y(z)+\sum_{i=1}^{\nu+d-1} B'_i z^{1-i}\, U(z) \tag{2.30}$$

これより，$Y(z)=G(z)U(z)$ として

$$G(z)=[z^{d}I-\sum_{i=1}^{\nu}A'_{i}z^{1-i}]^{-1}[\sum_{i=1}^{\nu+d-1}B'_{i}z^{1-i}]$$

$$=[z^{\nu-2d-2}I-A'_{1}z^{\nu+d-2}-\cdots-A'_{\nu}z^{d-1}]^{-1}$$

$$\cdot[B'_{1}z^{\nu-2d-2}-\cdots-B'_{\nu+d-1}] \tag{2.31}$$

を得る．ここで，$G(z)$は(2.28)式をz変換して得られる伝達関数行列と比較して次元の高い非最小実現となっている．

さらに，漸近安定な多項式 $\prod_{i=2}^{\nu+d-1}(zI-\Lambda_i)$ を導入して(2.31)式を書き直す．ただし，Λ_i は (2.8)式で定義されるものと同一とする．

これより，(2.31)式はつぎになる．

$$G(z)=[z^{\nu-2d-2}I-A'_{1}z^{\nu+d-2}-\cdots-A'_{\nu}z^{d-1}]^{-1}$$

$$\cdot[\prod_{i=2}^{\nu+d-1}(zI-\Lambda_i)][\prod_{i=2}^{\nu+d-1}(zI-\Lambda_i)]^{-1}$$

$$\cdot[B'_{1}z^{\nu-2d-2}-\cdots-B'_{\nu+d-1}]$$

$$=[z^{d}I-F_1z^{d-1}-\cdots-F_{d-1}z-A''_{1}-\sum_{i=2}^{\nu+d-1}(zI-\Lambda_i)^{-1}A''_{i}]^{-1}$$

$$\cdot[B'_{1}+\sum_{i=2}^{\nu+d-1}(zI-\Lambda_i)^{-1}B''_{i}] \tag{2.32}$$

ここで，A''_i，B''_iはA'_i，B'_iとΛ_iとによって，またF_iはΛ_iのみによって定まる定数行列である．

(2.32)式を状態変数を用いた差分方程式で書き表すとつぎになる．

$$x_1(k+d)=\sum_{i=1}^{d-1}F_i\,x_1(k+d-i)+A''_1x_1(k)$$
$$+\sum_{i=2}^{\nu+d-1}x_i(k)+B'_1u(k)$$
$$x_i(k+1)=A''_ix_1(k)+\Lambda_i\,x_i(k)+B''_iu(k)\quad(i=2,\ldots,\nu+d-1)$$
$$y(k)=x_1(k) \tag{2.33}$$

ここで，$x_i(k)\in R^{m}$ は状態ベクトルを表す．

(2.33)式において

$$\bar{y}(k+d)=\bar{x}_1(k+d)=x_1(k+d)-\sum_{i=2}^{d-1}F_i\,x_1(k+d-i) \tag{2.34}$$

と定義すると

$$\bar{x}_1(k+d) = A''_1 x_1(k) + \sum_{i=2}^{\nu+d-1} x_i(k) + B'_1 u(k)$$

$$x_i(k+1) = A''_i x_1(k) + \Lambda_i x_i(k) + B''_i u(k) \quad (i=2,\ldots,\nu+d-1)$$

$$\bar{y}(k) = \bar{x}_1(k) \tag{2.35}$$

を得る．上式がむだ時間を含む多変数系に対するLüders-Narendra の正準形に相当する表現となっている．以下では(2.35)式をプラントの表現として議論を進める．(2.35)式の表現を用いることで，制御系の構成法はさきに述べた，むだ時間を含まない1入力1出力系の場合とほぼ同様に進めることができる．

このとき，規範モデルとしてはプラントと同じむだ時間を含むものを考え，(2.35)式と同一表現を用いて次式で記述する．

$$\bar{x}_{M1}(k+d) = A''_{M1} x_{M1}(k) + \sum_{i=2}^{\nu_M+d-1} x_{Mi}(k) + B'_{M1} u(k)$$

$$x_{Mi}(k+1) = A''_{Mi} x_{M1}(k) + \Lambda_i x_{Mi}(k) + B''_{Mi} u(k)$$

$$(i=2,\ldots,\nu_M+d-1)$$

$$\bar{y}_M(k) = \bar{x}_{M1}(k), \quad y_M(k) = x_{M1}(k) \tag{2.36}$$

$$\bar{y}_M(k+d) = \bar{x}_{M1}(k+d) = x_{M1}(k+d) - \sum_{i=1}^{d-1} F_i x_{Mi}(k+d-i) \tag{2.37}$$

ここで，$r(k) \in R^m$ は有界な規範入力ベクトル，$y_M(k) \in R^m$ は規範出力ベクトルである．

$x_{Mi}(k)$，$\bar{x}_{Mi}(k)$，$\bar{y}_M(k)$ もまたm次元ベクトルであり，A''_{Mi}，$B'_{M1}, B''_{Mi} \in R^{m \times m}$ は定数行列とする．また，ν_M は規範モデルの可観測指数に相当し，既知とする．

以下では (2.35),(2.36)式をもとに1入力1出力系と同様の定式化を進める．ただし，$\nu = \nu_M$ とする．

状態誤差およびパラメータ誤差

$$e_i(k) = x_{Mi}(k) - x_i(k)$$

$$A_{di} = A''_{Mi} - A''_i \quad (i=1,\ldots,\nu+d-1) \tag{2.38}$$

補助信号ベクトル

$$e_{\wedge i}(k+1)=\Lambda_i\ e_{\wedge i}(k)+K_{ei}e_1(k)$$

$$y_{\wedge i}(k+1)=\Lambda_i\ y_{\wedge i}(k)+K_{yi}e_1(k)$$

$$r_{\wedge i}(k+1)=\Lambda_i\ r_{\wedge i}(k)+K_{ri}e_1(k)$$

$$u_{\wedge i}(k+1)=\Lambda_i\ u_{\wedge i}(k)+K_{ui}e_1(k)\quad (i=2,\ldots,\ \nu+d-1)\tag{2.39}$$

ただし，K_{ji} $(i=2,\ldots,n;\ j=e,y,r,u)$ は正則な任意定数行列とする．

プラント入力

$$\begin{aligned}u(k)=\Pi_1(k)^{-1}[&\Theta_1(k)\ e_1(k)+\Phi_1(k)\ y(k)+\Psi_1(k)\ r(k)\\&+\sum_{i=2}^{\nu+d-1}\{\Theta_i(k)\ e_{\wedge i}(k)+\Phi_i(k)\ y_{\wedge i}(k)\\&+\Psi_i(k)\ r_{\wedge i}(k)+\Pi_i(k)\ u_{\wedge i}(k)\}]\end{aligned}\tag{2.40}$$

ここで，$\Theta_i(k),\Phi_i(k),\Psi_i(k),\Pi_i(k)\in R^{m\times m}$ $(i=1,\ldots,\ \nu+d-1)$ は$4(\nu+d-1)$個の可調整パラメータ行列である．

(2.40)式の制御入力を用いたとき，誤差方程式はつぎになる．

$$\bar{e}_1(k+d)=\{\Theta-\hat{\Theta}(k)\}\ \delta(k)+h(k)\tag{2.41}$$

ただし，

$$\begin{aligned}\Theta=[&A''_{M1},\ A_{d1},\ B'_{M1},\ -B'_1,\ A''_{M2}K_{e2}^{-1},\cdots,\ A''_{M_{\nu+d-1}}K_{e\ \nu+d-1}^{-1},\\&A_{d2}K_{y2}^{-1},\cdots,\ A_{d\ \nu+d-1}K_{y\ \nu+d-1}^{-1},\ B''_{M2}K_{r2}^{-1},\cdots,\ B''_{M_{\nu+d-1}}K_{r\ \nu+d-1}^{-1},\\&-B''_2K_{u2}^{-1},\cdots,\ -B''_{\nu+d-1}K_{u\ \nu+d-1}^{-1}]\end{aligned}\tag{2.42}$$

$$\begin{aligned}\hat{\Theta}(k)=[&\Theta_1(k),\Phi_1(k),\Psi_1(k),-\Pi_1(k),\Theta_2(k),\cdots,\Theta_{\nu+d-1}(k),\\&\Phi_2(k),\cdots,\Phi_{\nu+d-1}(k),\Psi_2(k),\cdots,\Psi_{\nu+d-1}(k),\\&\Pi_2(k),\cdots,\Pi_{\nu+d-1}(k)]\end{aligned}\tag{2.43}$$

$$\delta^{T}(k)=[\,e_1^{T}(k),\ y^{T}(k),\ r^{T}(k),\ u^{T}(k),\ e_{\wedge 2}^{T}(k),\cdots,$$

$$e_{\wedge \nu+d-1}^{T}(k),y_{\wedge 2}^{T}(k),\cdots,\ y_{\wedge \nu+d-1}^{T}(k),r_{\wedge 2}^{T}(k),\cdots,$$

$$r_{\wedge \nu+d-1}^{T}(k),u_{\wedge 2}^{T}(k),\cdots,\ u_{\wedge \nu+d-1}^{T}(k)\,] \qquad (2.44)$$

$$h(k)=\sum_{i=2}^{\nu+d-1}(\Lambda_i)^{k}[\,e_i(0)-A''_{Mi}\,K_{ei}^{-1}e_{\wedge i}(0)-A_{di}K_{yi}^{-1}y_{\wedge i}(0)$$

$$-B''_{Mi}\,K_{ri}^{-1}r_{\wedge i}(0)-B''_{i}K_{ui}^{-1}u_{\wedge i}(0)\,] \qquad (2.45)$$

1入力1出力系の場合と同様に$h(k)$は$k\to\infty$で零ベクトルとなる.

パラメータ調整アルゴリズムはむだ時間を考慮したつぎの形とする.

$$\hat{\Theta}(k)=\hat{\Theta}(k-d)+\varepsilon(k)\,\bar{e}_1(k)\,\delta^{T}(k-d) \qquad (2.46)$$

$$\varepsilon(k)=\rho/\{\delta^{T}(k-d)\,\delta(k-d)\},\ 0<\rho<2 \qquad (2.47)$$

上式のアルゴリズムはむだ時間dが1のとき, さきの (2.25),(2.26)式のアルゴリズムと同一形式に帰着し, $k\to\infty$で$e_1(k)\to 0$ を達成することができる.

これまでの定式化では, さきの1入力1出力系の場合と同様にプラントおよび規範モデルのパラメータはすべて未知としている. 規範モデルのパラメータが既知の場合には対応する可調整パラメータ行列を固定することにより, 制御系を簡略化可能であるが, さらに規範モデルの出力の未来値$y_M(k+d)$ すなわち, むだ時間先の目標値を予め決定することができれば, プラントの次数に比較して規範モデルの次数を低次とすることができ, より制御系の簡略化が達成できる.

このとき, パラメータ誤差方程式としてはつぎのものを考える.

$$A'_{d1}=\Theta'_1-A''_1 \qquad (2.48)$$

ただし, Θ'_1は任意の定数行列とする.

(2.48)式を用い, 誤差方程式を求めるとつぎになる.

$$\bar{e}(k+d)=\bar{y}_M(k+d)-(\Theta'_1-A'_{d1})\,y(k)-B'_1u(k)$$

$$-\sum_{i=2}^{\nu+d-1}\{A''_iK_{yi}^{-1}y_{\wedge i}(k)+B''_iK_{ui}^{-1}u_{\wedge i}(k)\}+\bar{h}(k) \qquad (2.49)$$

ただし，

$$\bar{h}(k) = -\sum_{i=2}^{\nu+d-1} (\Lambda_i)^k [x_i(0) - A''_i K_{yi}^{-1} y_{\wedge i}(0) - B''_i K_{ui}^{-1} u_{\wedge i}(0)] \tag{2.50}$$

(2.49)式に対して，プラント入力$u(k)$をつぎのように発生させる．

$$u(k) = \bar{\Pi}_1(k)^{-1} [y_M(k+d) - \{\Theta'_1 - \bar{\Phi}_1(k)\} y(k) + \sum_{i=2}^{\nu+d-1} \{\bar{\Phi}_i(k) y_{\wedge i}(k) + \bar{\Pi}_i(k) u_{\wedge i}(k)\} \tag{2.51}$$

ここで，$\bar{y}_M(k+d)$は規範モデルのパラメータが既知の場合には，その入力$r(k)$を決定すれば，時点kで計算が可能である．

(2.51)式を(2.49)式に代入し，まとめるとつぎになる．

$$\bar{e}_1(k+d) = \{\bar{\Theta} - \hat{\bar{\Theta}}(k)\} \bar{\delta}(k) + \bar{h}(k) \tag{2.52}$$

ただし，

$$\bar{\Theta} = [A'_{d1},\ -A''_2 K_{y2}^{-1},\ \cdots,\ -A''_{\nu+d-1} K_{y\,\nu+d-1}^{-1},\ -B'_1,\ -B''_2 K_{u2}^{-1},\ \cdots,\ -B''_{\nu+d-1} K_{u\,\nu+d-1}^{-1}] \tag{2.53}$$

$$\hat{\bar{\Theta}}(k) = [\bar{\Phi}_1(k), \cdots, \bar{\Phi}_{\nu+d-1}(k),\ -\bar{\Pi}_1(k), \bar{\Pi}_2(k), \cdots, \bar{\Pi}_{\nu+d-1}(k)] \tag{2.54}$$

$$\bar{\delta}^T(k) = [y^T(k),\ y_{\wedge 2}^T(k), \cdots, y_{\wedge \nu+d-1}^T(k),\ u^T(k),\ u_{\wedge 2}^T(k), \cdots, u_{\wedge \nu+d-1}^T(k)] \tag{2.55}$$

(2.52)式が，規範モデルの出力の未来値を予め決定可能な場合の基礎式となる．

この場合，可調整パラメータ行列の調整アルゴリズムとしては (2.46),(2.47)式において$\hat{\Theta}(k)$を$\hat{\bar{\Theta}}(k)$に，$\delta(k)$を$\bar{\delta}(k)$と置き換えたものを用いれば$k\to\infty$で$e_1(k)\to 0$ が保証される．

また，(2.51)式では(2.40)式と比較してわかるように，可調整パラメータ行列の数が$2(\nu+d-1)$個に減少しているとともに，規範モデルの信号に関係する補助信号の数も減少した簡単な構成となっている．

2．4　制御系の内部構造に関する考察[15)]

前節までの設計法において，補助信号を用いて記述を行ってきたが，(2.16),(2.39)式から明らかなように，補助信号をすべて測定可能な信号で記述することができる．実際の計算においては補助信号を用いたほうが便利であるが，補助信号を全く使用しなくても制御系の記述を行うことができる．

ここでは，補助信号を消去することにより，本設計法による信号合成適応形のモデル規範形適応制御系の内部構造を明らかにする．ここでは，簡単のため１入力１出力系で議論を進めるが，多変数系の場合にも同様の議論が成立する．

(2.19)式に(2.16)式を代入した結果を用いて，図 2.1の制御系は可調整パラメータのある一定値に対して図 2.2のように表すことができる．ただし，補助信号の初期値は零とおいた．

ここで，図中の各パルス伝達関数は以下のものを示す．

$$G_\theta(z)=\theta_1+\{\eta_1/z\}+\{\sum_{i=2}^{n} K_{ei}\theta_i/(z+\lambda_i)\}$$

$$G_\phi(z)=\phi_1+\{\sum_{i=2}^{n} K_{yi}\phi_i/(z+\lambda_i)\}$$

$$G_\psi(z)=\psi_1+\{\sum_{i=2}^{n} K_{ri}\psi_i/(z+\lambda_i)\}$$

$$G_\pi(z)=\sum_{i=2}^{n} K_{ui}\pi_i/(z+\lambda_i)$$

$$G_p(z)=\frac{b_1+\{b_2/(z+\lambda_2)\}+\cdots+\{b_n/(z+\lambda_n)\}}{z-a_1-\{a_2/(z+\lambda_2)\}+\cdots+\{a_n/(z+\lambda_n)\}}$$

$$G_M(z)=\frac{b_{M1}+\{b_{M2}/(z+\lambda_2)\}+\cdots+\{b_{Mn}/(z+\lambda_n)\}}{z-a_{M1}-\{a_{M2}/(z+\lambda_2)\}+\cdots+\{a_{Mn}/(z+\lambda_n)\}} \tag{2.56}$$

適応制御系は(2.56)式中の可調整パラメータに対応するパラメータを調整することにより，制御装置を含めたプラント側の伝達関数を規範モデルの伝達関数に一致させる構造を持っていることがわかる．ただし，規範モデルの伝達関数$G_M(z)$に含まれるパラメータの数に比較して，制御装置を含むプラント側全体の伝達関数に含まれる可調整パラメータの数が多いモデルマッチングの問題となっている．[48)]

すなわち，図 2.2より$R(z)$から$Y(z)$に至る伝達関数を求めると

$$G(z)=Y(z)/R(z)$$

$$=\frac{\{1/\pi_1\}\,G_p(z)\,\{G_\psi(z)+G_M(z)\,G_\theta(z)\}}{1+\{1/\pi_1\}\,[G_\pi(z)+G_p(z)\,\{G_\theta(z)-G_\phi(z)\}]} \tag{2.57}$$

となる．規範モデルの伝達関数$G_M(z)$の分母，分子の次数がそれぞれn，n－1であるのに対し，$G(z)$の分母，分子の次数はそれぞれ 3n，3n－1となる．

なお，規範モデルのパラメータを既知とした場合には，$G_\theta(z)$，$G_\psi(z)$のパラメータは固定され，時不変の伝達関数となる．

モデルマッチングの観点から考察を行うと，調整アルゴリズムにより適応が進み，$\hat{\theta}(k)\to\theta$となった場合に，規範モデルの伝達関数とプラント側の伝達関数が一致することがわかる．すなわち，$G(z)=G_M(z)$となる．また，このとき$\pi_1=b_1$となることより，(2.19)式において$u(k)$が計算可能であるための条件として$b_1\neq 0$という前述の仮定が必要であることがわかる．

さらに，規範モデルの入力$R(z)$からプラント入力$U(z)$に至る伝達関数を求めると

$$G_u(z)=\frac{z-a_1-\{a_2/(z+\lambda_2)\}+\cdots+\{a_n/(z+\lambda_n)\}}{b_1+\{b_2/(z+\lambda_2)\}+\cdots+\{b_n/(z+\lambda_n)\}}\cdot\frac{b_{M1}+\{b_{M2}/(z+\lambda_2)\}+\cdots+\{b_{Mn}/(z+\lambda_n)\}}{z-a_{M1}-\{a_{M2}/(z+\lambda_2)\}+\cdots+\{a_{Mn}/(z+\lambda_n)\}}$$

$$=G_p(z)^{-1}G_M(z) \tag{2.58}$$

となることから $\det[b_1+\{b_2/(z+\lambda_2)\}+\cdots+\{b_n/(z+\lambda_n)\}]=0$ の根，すなわち，プラントの零点がz平面の単位円外に存在すればプラント入力は非有界となる．したがって$\hat{\theta}(k)=\theta$となるような条件下では，前述の仮定３）は必要十分条件となることがわかる．

しかし，一般に適応制御において，必ずしも$\hat{\theta}(k)=\theta$となるとは限らないため，$G(z)$と$G_M(z)$の次数の一致は得られないことが多い．

2．5　安定性に関する考察[15)]

適応制御系がその制御目的を達成するためには，系全体の漸近安定性が保証されなければならない．この問題は永い間未解決の問題として残されていたが，最近になって，離散時間系に対していくつかの証明法が示された.[11)~15)]

ここでは，さきに文献15）で行った１入力１出力系に対する証明をむだ時間を含む多変数系に対して示すこととする．

まず，(2.41)式において $h(k)=0$ のとき，システムが漸近安定な原点を持てば $k\to\infty$ で零となる $h(k)$ を加えたシステム(2.41)式は終局的漸近安定な原点を持つことが示されている[49)]ので，以下では(2.41)式において $h(k)=0$ の場合のシステムが $k\to\infty$ で $e_1(k)\to 0$ となる証明と条件を与える．

このとき，Lyapunov 関数の候補としてつぎのような $V(k)$ を考える．

$$V(k)=\mathrm{tr}\,[\tilde{\Theta}^T(k)\,\tilde{\Theta}(k)] \tag{2.59}$$

ただし，

$$\tilde{\Theta}(k)=\Theta-\hat{\Theta}(k) \tag{2.60}$$

である．

$V(k)$ の d 時点おきの差分 $\Delta V(k)$ を考え，(2.41),(2.46),(2.47)式を用いると次式を得る．

$$\begin{aligned}
\Delta V(k) &= V(k)-V(k-d)\\
&=\mathrm{tr}\,[\tilde{\Theta}^T(k)\,\tilde{\Theta}(k)]-\mathrm{tr}\,[\tilde{\Theta}^T(k-d)\,\tilde{\Theta}(k-d)]\\
&=\mathrm{tr}\,[\{\tilde{\Theta}(k-d)-\varepsilon(k)\,\bar{e}_1(k)\,\delta^T(k-d)\}^T\{\tilde{\Theta}(k-d)\\
&\quad-\varepsilon(k)\,\bar{e}_1(k)\,\delta^T(k-d)\}]-\mathrm{tr}\,[\tilde{\Theta}^T(k-d)\,\Theta(k-d)]\\
&=-\varepsilon(k)[2-\varepsilon(k)\,\delta^T(k-d)\,\delta(k-d)]\,\bar{e}_1^T(k)\,\bar{e}_1(k)\\
&=-\rho(2-\rho)\,\bar{e}_1^T(k)\,\bar{e}_1(k)\,/\,\{\delta^T(k-d)\,\delta(k-d)\}
\end{aligned} \tag{2.61}$$

$\Delta V(k)$は(2.40)式において$\Pi_1(k)$が正則，すなわち，有限時間発散が起こらなければ準負定であり，$V(k)$が有界であることから次式が成立する．

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\bar{e}_1^T(k)\,\bar{e}_1(k)}{\delta^T(k-d)\,\delta(k-d)}=0 \tag{2.62}$$

上式が成立するのはつぎの３通りの場合が考えられる．

（１）$\|\delta\|$が有界で$\|\bar{e}_1\|=0$ の場合．

（２）$\|\delta\|$が無限大で$\|\bar{e}_1\|$が有界である場合．

（３）$\|\delta\|$，$\|\bar{e}_1\|$がともに無限大に発散し，$\|\delta\|$の無限大への移行が$\|\bar{e}_1\|$のそれよりも速い場合．

いずれの場合も$k\to\infty$で$\Delta V(k)\to 0$ より，$V(k)=V(k-d)=$const.，すなわち$\tilde{\Theta}(k)=\tilde{\Theta}(k-d)=$const.に収束する．また，$\tilde{\Theta}(k)$は有界である．

（１）の場合は，多項式行列$z^d I-\sum_{i=1}^{d-1}F_i z^{d-i}$が漸近安定となるように$\Lambda_i$を選定すれば$k\to\infty$で$e_1(k)\to 0$ となるので希望する結果である．

（２）の場合について考察する．$\bar{e}_1(k)$が有界であるとき，$\bar{e}_1(k)$の定義と(2.34)，(2.37)式で多項式行列$z^d I-\sum_{i=1}^{d-1}F_i z^{d-i}$が漸近安定となるように$\Lambda_i$が選定されていれば，$\bar{e}_1(k)$は有界となり，(2.38)式と$r(k)$の有界性，規範モデルが漸近安定であることより，$y(k)$も有界となる．

ここで，(2.28)式で表されるプラントの伝達関数行列を $G_p(z)$ とし，これを左既約分解して$G_p(z)=N^{-1}(z)M(z)$とすると$N(z)$，$M(z)$はそれぞれzに関する次数が$\nu+d-1$，$\nu-1$の多項式行列となっている．さらに，プラントに関する仮定３）から$(z^d I)^{-1}G_p^{-1}(z)=\{M(z)z^d I\}^{-1}N(z)$は漸近安定でプロパーな伝達関数行列である．[50] それゆえに$\mathcal{Z}^{-1}[(z^d I)^{-1}G_p^{-1}(z)Y(z)]=\mathcal{Z}^{-1}[z^{-d}IU(z)]$は有界となる．したがって，$u(k)$は有界となる．

この関係を不等式で示せばつぎになる.[11)]

$$\| u(k-d) \| \leqq c_1 + c_2 \max_{1\leq j\leq k} \| y(j) \| \tag{2.63}$$

ただし，$0 \leqq c_1 < \infty$，$0 < c_2 < \infty$ である.

つぎに，補助信号$e_{\Lambda i}(k)$，$y_{\Lambda i}(k)$，$r_{\Lambda i}(k)$，$u_{\Lambda i}(k)$は(2.39)式と$e_1(k)$，$y(k)$，$u(k)$，$r(k)$が有界であることから，有界となる.

以上より，$\delta(k)$は有界となり矛盾を生じることから，（２）の場合は起こり得ないことがわかる.

（３）の場合の考察方法としては１入力１出力系の場合[15)]に準じて証明を行うことができるが，ここでは文献11）の定式化に沿って説明する.

規範モデルの出力は，その入力$r(k)$が有界で，漸近安定系であることから有界である．これより，(2.38)式を用いれば次式を得る.

$$\begin{aligned} \| e_1(j) \| = \| y_M(j) - y(j) \| &\geqq \| y(j) \| - \| y_M(j) \| \\ &\geqq \| y(j) \| - c_3 \end{aligned} \tag{2.64}$$

ただし，$c_3 = \max_{0\leq j\leq k} \| y_M(j) \| < \infty$

また，多項式行列$z^d I - \sum_{i=1}^{d-1} F_i z^{d-i}$が漸近安定となるように$\Lambda_i$を選定すれば，$\bar{e}_1(k)$の定義と(2.34),(2.37)式より

$$\| e_1(k) \| \leqq c_4 + c_5 \max_{0\leq j\leq k} \| \bar{e}_1(j) \| \tag{2.65}$$

ただし，$0 \leqq c_4 < \infty$，$0 < c_5 < \infty$

が成立する.

したがって，(2.39),(2.45),(2.63)〜(2.65)式より次式を得る.

$$\| \delta(k-d) \| \leqq c_6 + c_7 \max_{0\leq j\leq k} \| \bar{e}_1(j) \| \tag{2.66}$$

ただし，$0 \leqq c_6 < \infty$，$0 < c_7 < \infty$である.

ここで，$\| \delta \|$，$\| e_1 \|$がともに無限大となる発散列とすると，つぎのような時系列$\{k_n\}$が存在する.

$$k_i \to \infty \text{で} \quad \| \bar{e}_1(k_n) \| \to \infty, \quad k \leqq k_n \text{に対して} \| \bar{e}_1(k) \| \leqq \| \bar{e}_1(k_n) \| \tag{2.67}$$

このような時系列｛k_n｝に沿って次式が成立する．

$$\frac{\|\bar{e}_1(k_n)\|}{\|\delta(k_n-d)\|} \geqq \frac{\|\bar{e}_1(k_n)\|}{c_6+c_7\|\bar{e}_1(k_n)\|} \rightarrow \frac{1}{c_7}, \quad k_n \rightarrow \infty \tag{2.68}$$

これは$k \rightarrow \infty$で$\Delta V(k) \rightarrow 0$ すなわち(2.62)式に矛盾する．これより，（３）の場合も起こり得ないことがわかる．

なお，上述の証明においては有限時間発散が起こらないことを仮定しているが，これはプラントに関する仮定 $\det B_1 \neq 0$ （１入力１出力系の場合には$b_1 \neq 0$ ）のもとでは(2.47)式中のρの再調整によって容易に避けることができる.[15]

以上より，規範モデルが漸近安定でその入力$r(k)$が有界，プラントの零点がすべてz平面の単位円内に存在し，さらに多項式行列$z^d I-\sum_{i=1}^{d-1} F_i z^{d-i}$ が漸近安定となるようにΛ_i を選定すれば$u(k)$が有界で$k \rightarrow \infty$で$e_1(k) \rightarrow 0$ が保証される．

上述の考察はプラントと規範モデルのパラメータをすべて未知とした場合の多変数系の定式化について行ったが，１入力１出力系の場合，規範モデルのパラメータを既知として制御系を簡単化した場合にも，同様に証明が可能である．

ここで行った漸近安定性の証明においては，パラメータ調整アルゴリズムとして (2.25), (2.26)式あるいは (2.46),(2.47)式の形式を用いたが，パラメータ調整アルゴリズムとしては必ずしもこの形式のものを用いる必要はない．他の形式のアルゴリズムを用いた場合の漸近安定性の証明もここで行った議論とほぼ同様となるが，詳細は付録１に示す．

また，ここで用いたパラメータ調整アルゴリズムはパラメータ調整用の誤差として出力誤差を用いている点が特徴で，以下ではこの形式のアルゴリズムを用いた制御系を直接法による設計とよぶことする．

2．6　数値計算例と考察[15),17)]

2.3.1,2.3.2節で設計した適応制御系の特性を検討するため１入力１出力と２入力２出力のプラントについて計算機シミュレーションを実施した．

はじめに，１入力１出力の漸近安定および不安定なプラントについて計算を行った．ともにつぎの連続時間の３次の伝達関数で記述されるプラントおよび規範モデルを用い，それらすべてのパラメータを未知とする制御則を用いた．

$$G(s) = \frac{K\sigma\omega_n^2 (T_1 s+1)}{(s+\sigma)(s^2 + 2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)} \tag{2.69}$$

［　例　2．1　］

漸近安定なプラントと規範モデルに対して(2.69)式の各パラメータをつぎのように選定した．

プラント　：$\zeta=1.2$，　$\omega_n=1.0$，　$\sigma=1.0$，　$T_1=0.333$，　$K=1.3$

規範モデル：$\zeta=0.7$，　$\omega_n=1.0$，　$\sigma=1.5$，　$T_1=2.0$　，　$K=1.0$

上記の伝達関数に零次ホールド要素を前置してサンプリング周期T＝0.2 で離散化して，Lüders-Narendra の正準形に書き直したときプラントと規範モデルのパラメータはそれぞれつぎになる．

$$A = \begin{bmatrix} 2.21 & 1 & 1 \\ 4.69 & 0.13 & 0 \\ -6.17 & 0 & 0.067 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0.00838 \\ -0.0613 \\ 0.0665 \end{bmatrix}$$

$$A_M = \begin{bmatrix} 2.26 & 1 & 1 \\ 5.32 & 0.13 & 0 \\ 6.90 & 0 & 0.067 \end{bmatrix}, \quad b_M = \begin{bmatrix} 0.0511 \\ 0.618 \\ 0.625 \end{bmatrix}$$

ただし，$\lambda_2=-0.13$，　$\lambda_3=-0.067$と選んだ．

さらに，規範入力としては$r(k)=1$の単位ステップ信号を用いた．

図　2.3 にシミュレーション結果を示す．この例では設計パラメータとしてつぎの値を用いている．

$\rho=1.0$，　$\alpha'=40$（$\alpha=-1.58$），$\beta'=60$（$\beta=0.594$），$\pi_1(0)=0.025$．

$K_{ei}=K_{yi}=K_{ri}=10.0$，$K_{ui}=0.1$，$(i=2,3)$

ただし，α'，β' はe_1 に関してＰＩＤ形式のフィルタを考えつぎのように決定した．

$$e_1(k+1)+\alpha e_1(k)+\beta e_1(k-1)$$
$$=[e_1(k+1)+\alpha'\{e_1(k+1)-e_1(k)\}+\beta'\{e_1(k+1)-2e_1(k)+e_1(k-1)\}]/(1+\alpha'+\beta') \quad (2.70)$$
$$\alpha=-(\alpha'+2\beta')/(1+\alpha'+\beta')$$
$$\beta=\beta'/(1+\alpha'+\beta') \quad (2.71)$$

α、βは多項式$z^2+\alpha z+\beta$が漸近安定となるように選定する必要がある.

この条件は

$$\beta<1,\quad 1+\alpha+\beta>0,\ 1-\alpha+\beta>0 \quad (2.72)$$

である. これをα', β'の範囲で示せばつぎになる.

$$\alpha'>-1,\ 1+\alpha'+\beta'>0,\ 2\alpha'+4\beta'+1>0 \quad (2.73)$$

上記のα, β (α', β') は条件を満たしている.

ここで導入したフィルタは適応制御の過度経過を改善する効果があり, 特に (2.25)(2.26) 式あるいは (2.46),(2.47)式のような簡単なアルゴリズムとともに用いたときに有効性を示す.

なお, 可調整パラメータ, 補助信号, プラントおよび規範モデルの状態変数の初期値はすべて零としている.

図 2.3にシミュレーション結果を示す. 図中, ○は規範モデルの出力, ●はプラントの出力, 実線はプラントのインディシャル応答を示す. この例では, プラント出力は規範モデルの出力に良く追従しており, 適応制御系として有効に動作していることがわかる.

[例 2.2]

プラントが不安定である場合の例題を行った. (2.69)式におけるプラントの各パラメータは以下のとおりである.

$\zeta=-1.2,\quad \omega_n=0.3,\quad \sigma=5.0,\quad T_1=0.3,\quad K=1.3$

また, 規範モデルのパラメータは例 2.1と同一とした.

離散時間形式の正準形のパラメータはつぎになる.

$$A=\begin{bmatrix}1.42 & 1 & 1\\ -0.183 & 0.2 & 0\\ -0.022 & 0 & 0.9\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}0.00518\\ 0.00370\\ 0.00300\end{bmatrix}$$

$$A_M=\begin{bmatrix}1.36 & 1 & 1\\ -0.349 & 0.2 & 0\\ -0.00384 & 0 & 0.9\end{bmatrix},\quad b_M=\begin{bmatrix}0.0511\\ 0.0542\\ -0.000619\end{bmatrix}$$

ただし，$\lambda_2=-0.2$，$\lambda_3=-0.9$と選び，規範入力は例 2.1と同一とした．

図 2.4 にシミュレーション結果を示す．設計パラメータはつぎの値を用いた．

$\rho=1.0$，$\alpha'=3.0$ ($\alpha=-9/7$)，$\beta'=3.0$ ($\beta=3/4$)，$\pi_1(0)=0.003$，

$K_{ei}=K_{yi}=K_{ri}=10.0$，$K_{ui}=0.5$，$(i=2,3)$

また，各信号の初期値は例 2.1と同様すべて零とおいて計算を行った．この例でも，プラントが不安定にもかかわらず，その出力は安定化され，規範モデルの出力に追従していることがわかる．

なお，例 2.1,2.2のプラントに対して，規範モデルの入力r（k）に多段のステップ入力を加えた場合，規範モデルのパラメータを既知として簡単化された制御則を用いた場合のシミュレーションも行ったが，同様に良好な結果を得ることができた．

つぎに，2.3.2節で設計した多変数制御系の特性を検討するため，$\nu=4$とした干渉のある２入力２出力のプラントについて，例 2.3ではd＝１で規範モデルのパラメータを未知とした場合，例 2.4ではd＝２のむだ時間を含む系で，規範モデルのパラメータを既知とした場合の計算機シミュレーションを行った．

［ 例 2．3 ］

むだ時間のない漸近安定なプラント，規範モデルの伝達関数行列をつぎのものとした．

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{0.25\,(0.16s+1)}{s^2+1.9s+0.25} & \dfrac{0.125\,(0.32s+1)}{s^2+2.0s+0.25} \\ \dfrac{0.1\,(0.60s+1)}{s^2+3.0s+1} & \dfrac{0.06s+1}{s^2+3.2s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} \tag{2.74}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{M1}(s) \\ Y_{M2}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s^2+1.4s+1} & \dfrac{0.05}{s^2+1.2s+1} \\ \dfrac{0.04}{s^2+1.6s+4} & \dfrac{4}{s^2+2.2s+4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(s) \\ R_2(s) \end{bmatrix} \tag{2.75}$$

上記の系に零次ホールド要素を前置し，サンプリング周期T＝0.2 で離散化し，(2.33)，(2.36)式において$\Lambda_2=0.98I$，$\Lambda_3=0.96I$，$\Lambda_3=0.94I$と選んだ．さらに規範モデルの入力としては$r^T(k)=[\sin(0.628kT),\ 2\sin(0.628kT)]$の正弦波信号を用いた．

図 2.5にシミュレーション結果を示す．この例で用いた設計パラメータは以下の値である．

$\rho=1.0$, $\Pi_1(0)=\mathrm{diag}(0.02,\ 0.07)$, $K_{ei}=K_{yi}=K_{ri}=K_{ui}=I$ $(i=2,3,4)$

また，$\Pi_1(0)$を除く可調整パラメータ行列，補助信号，プラントおよび規範モデルの状態変数の初期値はすべて零とした．この例でもプラント出力は規範モデルの出力に良く追従しており，本設計法が多変数系に対しても有効であることが確認できる．

［ 例 2．4 ］

プラントは例 2.3のものに$e^{-0.2S}I$のむだ時間要素を直列に付加したものとし，規範モデルは$\nu_M=2$の対角構造を持ったつぎの非干渉系に選んだ．

$$\begin{bmatrix} Y_{M1}(s) \\ Y_{M2}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{e^{-0.2S}}{s^2+1.4s+1} & 0 \\ 0 & \dfrac{4e^{-0.2S}}{s^2+2.2s+4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(s) \\ R_2(s) \end{bmatrix} . \tag{2.75}$$

例 2.3と同様に$T=0.2$で離散化した．Λ_iは$\Lambda_2=0.6\ I$，$\Lambda_3=0.7\ I$，$\Lambda_4=-0.6\ I$，$\Lambda_5=-0.7\ I$と選定した．これにより (2.34),(2.37)式において$F_1=0$となり多項式行列$z^d\ I-\sum_{i=1}^{d-1} F_i\ z^{d-i}=z^2\ I-F_1\ z=z^2\ I$を漸近安定とすることができる．また，このとき$\bar{y}(k+d)=y(k+d)$，$\bar{y}_M(k+d)=y_M(k+d)$となる．

規範モデルの入力を例 2.3と同様とした場合のシミュレーション結果を図 2.6に示す．

設計パラメータは以下の値とした．

$\rho=0.1$, $\bar{\Pi}_1(0)=B'_{M1}$, $K_{yi}=K_{ui}=I$ $(i=2,3,4,5)$, $\Theta'_1=\mathrm{diag}(1.02,\ 0.84)$

（(2.28)式に相当する規範モデルの係数行列A_{M1}にとる，また$B'_{M1}=B_{M1}$である．）

他の条件は例 2.3と同一で計算を行った．

プラントがむだ時間を含むためにプラント出力の規範モデル出力への収束が若干遅れているが，規範モデルの利用可能な情報を十分に用いることで良好な結果となっている．

なお，規範モデルの入力として例 2.1,2.2と同様なステップ信号を用いたシミュレーションも行い，ほぼ満足のゆく結果が得られている．

以上の４例では，いずれの場合にも$k\to\infty$で$e_1(k)\to 0$ を達成し，2.5 節で行った安定解析の結果を裏付けている．しかし，安定性の解析からも明らかであるように，ここで設計した制御系においては$k\to\infty$で$e_1(k)\to 0$，$\|\delta(k)\|<\infty$が保証されるものの，これは必ずしも$\hat{\theta}(k)\to\theta$を意味するものではない．

$\hat{\theta}(k)\to\theta$が達成されるか否かは，用いるパラメータ調整アルゴリズムと信号ベクトル$\delta(k)$の各成分の独立性に依存し，ここで示した例題のように規範モデルの入力が単一のステップあるいは単一周波数の正弦波の場合には$e_1(k)\to 0$ が達成されても，一般に$\hat{\theta}(k)\to\theta$とはならない．

プラント出力を規範モデルの出力に追従させるという制御的観点からは必ずしも$\hat{\theta}(k)\to\theta$が達成される必要はないが，適応制御を行うことによって制御目的が達成されると同時に未知なプラントの特性をも十分に知るためには後に述べるような，より一般的で収束速度を向上させうるようなパラメータ調整アルゴリズムを用いる必要がある．

２．７　結　言

本章ではむだ時間を含まない１入力１出力系とむだ時間を含む多入力多出力系に対する最も基本的な離散時間モデル規範形適応制御系の設計法をＬüders-Ｎarendra の正準形を用いてプラントが記述される場合に対して示した．

特にＬyapunov の安定論に基づき，適応制御系の設計において重要な制御系の大域的漸近安定性の考察を行い，その条件を明確にした．また，制御系の内部構造の考察も行った．

ここで示した設計法によれば，プラントと規範モデルのパラメータを全く必要としないで，現時点までの測定可能な信号のみを用いて制御系を構成することができるが，基本的設計法であるがゆえに，実際のプラントへの応用を考えた場合には，種々の点で改善を加えることが望ましい．

以下の章では，ここで示した設計法を基礎に，実際のプラントへの応用に際し問題となる点を考慮して設計法を拡張する手法について述べることとする．

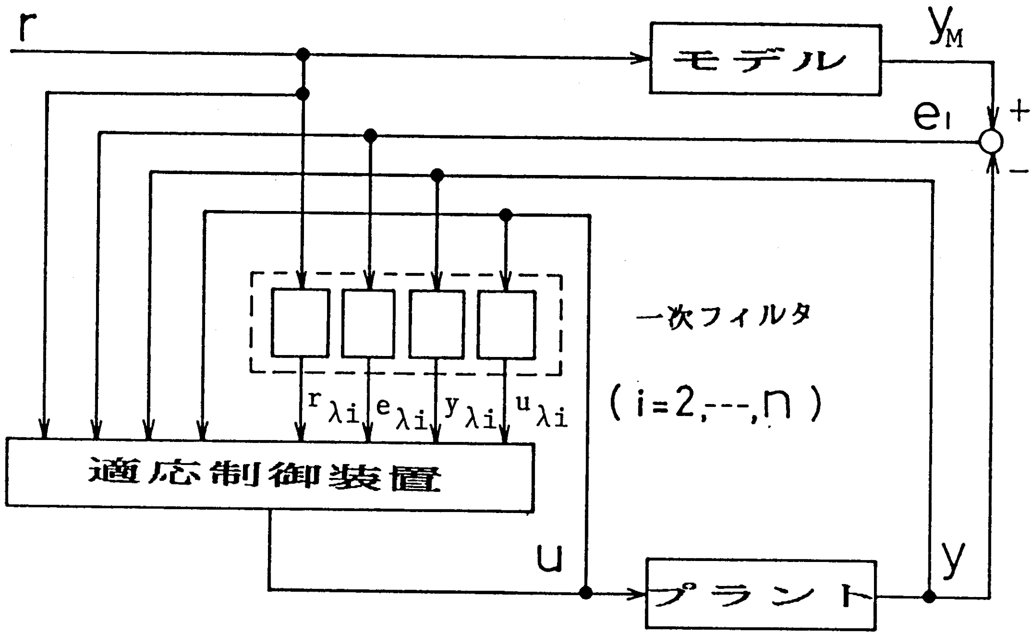


図　2．1　モデル規範形適応制御系の構成

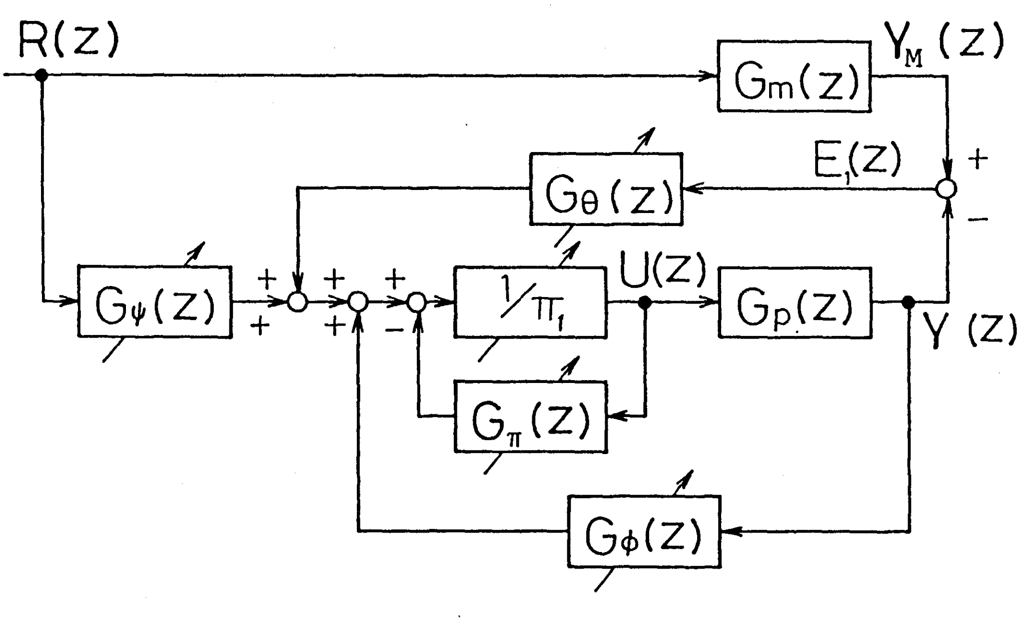


図　2．2　信号合成適応制御系のパラメータ適応系による等価表現

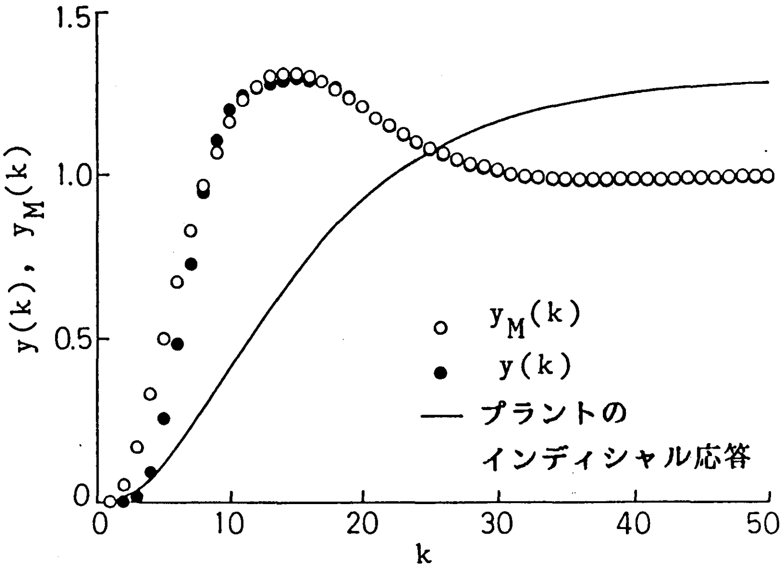


図　2．3　安定な3次プラントに対するシミュレーション結果

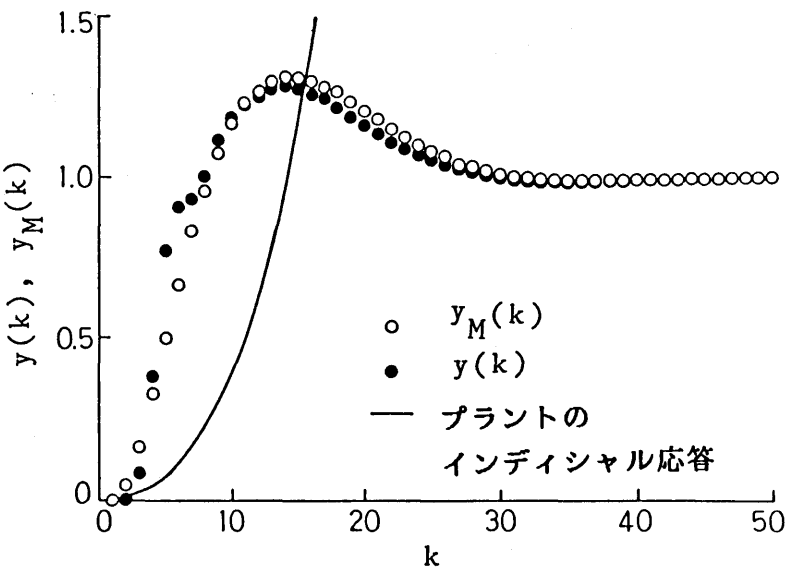


図　2．4　不安定な3次プラントに対するシミュレーション結果

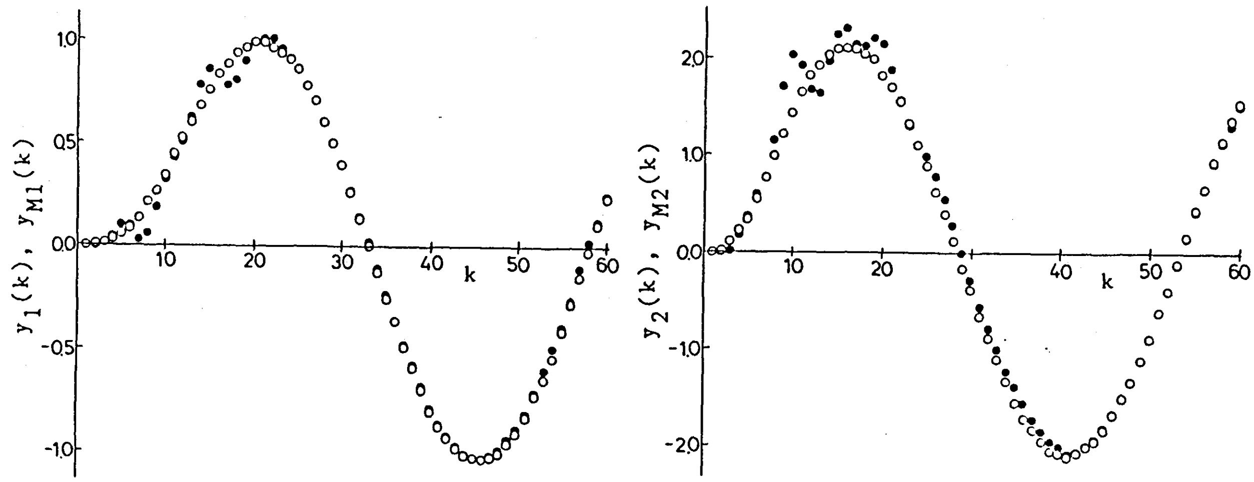


図　2．5　むだ時間のない２入力２出力のプラントに対するシミュレーション結果（規範モデル未知）

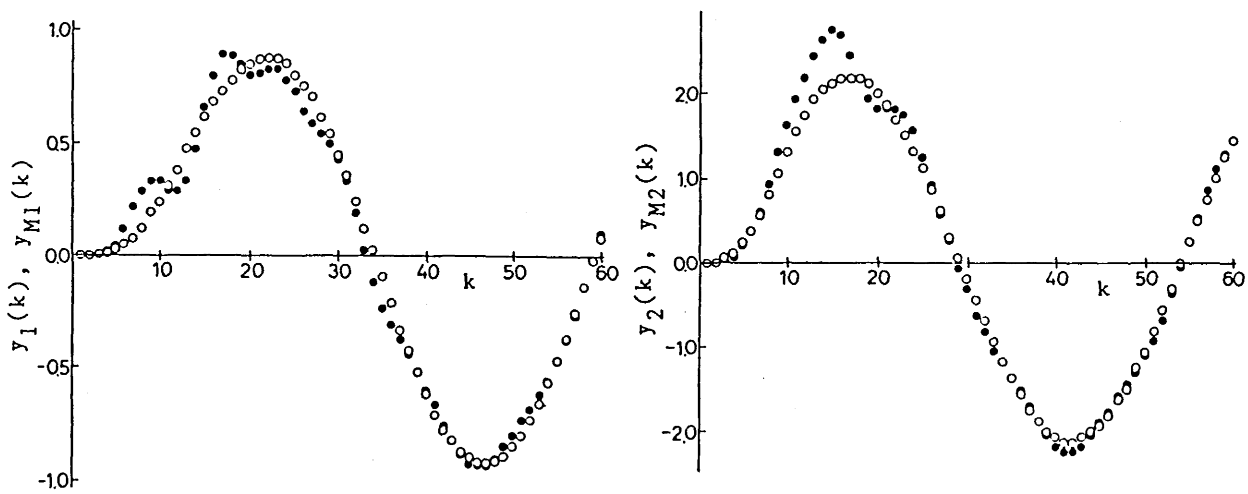


図　2．6　むだ時間を持つ２入力２出力のプラントに対するシミュレーション結果（規範モデル既知）

第三章　　プラント入力に振幅制限がある場合の設計法[20]

3．1　緒　言

離散時間モデル規範形適応制御系の設計法については，前章で述べたようにプラントの逆系が漸近安定（零点がｚ平面の単位円内に存在する）という十分条件のもとでプラントの入出力信号の有界性，出力誤差の零への収束が保証されている．しかし，この理論的結論は制御系の漸近的な性質を規定しているにすぎず，実際には可調整パラメータの初期値などによってはプラントの入力が一時的に大きくなり，制御系の過渡的な応答が乱れるなど実用上好ましくない場合が生じる．また，実際のシステムでは必ず入力に飽和を持つため，それを考慮することなく設計された適応制御系の制御経過は良いとは言えず，さらにその安定性もはっきりしない．一方，入力の飽和を積極的に導入してプラント入力を制限することは制御経過の安定化，ひいてはプラント運転上の危険防止に役立ちうる．

本章では，漸近安定な離散時間系においてプラント入力に振幅制限が存在する場合にも対応が可能な適応制御系が簡潔に構成できることを示し，シミュレーションによってその有効性を明らかにする．

3．2　問題の設定

ここでは，1入力1出力のプラントを離散時間でモデル規範形適応制御を行う場合を考える．プラントの定式化としては前章で用いた状態空間表現を用いることもできるが，ここでは最も簡単な入出力の差分方程式表現で，つぎのように記述して議論を進める．

$$y(k+1) = \sum_{i=1}^{n} a_i' y(k+1-i) + \sum_{i=0}^{m} b_i' u(k+1-d-i) \tag{3.1}$$

ここで，$y(k)$，$u(k)$ はそれぞれk時点におけるプラントの出力および入力である．プラントに対する仮定としてはつぎのものをおく．

1）プラントの次数（の上限）n，mおよびむだ時間dは既知．

2）a_i'，b_i'は未知．ただし$b_0' \neq 0$ かつ $\mathrm{sgn}(b_0')$ は既知（ここで，$\mathrm{sgn}(\cdot)$ は・の符号を示す）．

3）プラントの零点はすべてz平面の単位円内に存在する．

4）プラント（の極）は漸近安定．

上記の仮定のうち1），3）は入力に振幅制限が存在しない場合と同一であり，仮定2）の $\mathrm{sgn}(b_0')$ が既知である点と仮定4）が新たに加わったものである．

さらに，プラントの入力$u(k)$には次式に示すような振幅制限が存在するものとする．

$$|u(k)| \leqq u_{max}, \quad u_{max} > 0 \text{ で既知} \tag{3.2}$$

制御系の構成に先立ち，(3.1)式で書き表されるプラントをつぎのような予測モデルに書き改める．

$$y(k+d) = \sum_{i=1}^{n} a_i y(k+1-i) + \sum_{i=0}^{m+d-1} b_i u(k-i) \tag{3.3}$$

ここで，a_i, b_i はそれぞれa_j'とd，a_j'，b_j'とdとによって定まる定数で，両者の間にはつぎの関係がある．

$$A'(z^{-1}) = 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i' z^{-i} \tag{3.4}$$

$$B'(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{m} b_i' z^{-i} \tag{3.5}$$

$$A(z^{-1}) = 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i z^{-i} \tag{3.6}$$

$$B(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{m+d-1} b_i z^{-i} \tag{3.7}$$

とおくと，

$$1 - A(z^{-1}) = z^{d}\{1 - A'(z^{-1})F(z^{-1})\} \tag{3.8}$$

$$B(z^{-1}) = F(z^{-1})B'(z^{-1}) \tag{3.9}$$

ただし，

$$F(z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{d-1} f_i z^{-i} \tag{3.10}$$

また，このとき$b_0 = b_0'$となっている．

ここで考える制御の目的は与えられた有界な目標値$y^*(k)$にプラント出力$y(k)$を追従させる入力を$|u(k)| \leqq u_{max}$の条件を考慮して発生させることである．

3．3　適応制御系の設計

適応制御系の構成に際し，まず，プラント出力と目標値との誤差を次式で定義する．

$$e(k)=y^*(k)-y(k) \tag{3.11}$$

(3.11)式中，目標値 $y^*(k)$ の数列は既知で，k時点でむだ時間先の目標値 $y^*(k+d)$ が決定可能であればよく，例えば次式で表される規範モデルの出力とすればよい．

$$y^*(k)=y_M(k) \tag{3.12}$$

$$y_M(k+1)=\sum_{i=1}^{n_M} a_{Mi}\,y_M(k+1-i)+\sum_{i=0}^{m_M} b_{Mi}\,r(k+1-d_M-i) \tag{3.13}$$

ただし，$d_M \geqq d$ で a_{Mi}，b_{Mi} は規範モデルが漸近安定で，有界な規範モデルの入力 $r(k)$ に対して望ましい応答となるよう，予め設計者が決定する．(3.13)式を用いるとき，時点kの入力 $r(k)$ を決定すれば $y^*(k+d)$ が計算可能である．

(3.11),(3.12)式より誤差方程式はつぎになる．

$$e(k+d)=y^*(k+d)-\sum_{i=1}^{n} a_i\,y(k+1-i)-\sum_{i=0}^{m+d-1} b_i\,u(k-i) \tag{3.14}$$

つぎに，プラント入力 $u(k)$ をその振幅制限を考慮して次式を用いて発生させる．

$$u(k)=\begin{cases} u_C(k) & : |u_C(k)| \leqq u'_{max} \\ u'_{max}\,\mathrm{sgn}[u_C(k)] & : |u_C(k)| > u'_{max} \end{cases} \tag{3.15}$$

ここで，$0 < u'_{max} \leqq u_{max}$，また，sgn(・)は・の符号を示す．

ただし，信号 $u_C(k)$ はプラントの推定パラメータを用いて

$$u_C(k)=\frac{1}{\hat{b}_0(k)}\Big[y^*(k+d)-\sum_{i=1}^{n}\hat{a}_i(k)\,y(k+1-i)-\sum_{i=1}^{m+d-1}\hat{b}_i(k)\,u(k-i)\Big] \tag{3.16}$$

により計算される．ここで，(3.16)式の右辺に含まれる入力情報として u_C ではなく，u が入る点が重要となる．

(3.16)式を(3.14)式に代入して整理するとつぎになる．

$$e(k+d)=\{\hat{\theta}(k)-\theta\}^T\delta(k)-\hat{b}_0(k)\{u(k)-u_C(k)\} \tag{3.17}$$

ここで，

$$\hat{\theta}^T(k) = [\hat{a}_1(k), \cdot\cdot\cdot, \hat{a}_n(k), \hat{b}_0(k), \cdot\cdot\cdot, \hat{b}_{m+d-1}(k)] \tag{3.18}$$

$$\theta^T = [a_1, \cdot\cdot\cdot, a_n, b_0, \cdot\cdot\cdot, b_{m+d-1}] \tag{3.19}$$

$$\delta^T(k) = [y(k), \cdot\cdot\cdot, y(k+1-n), u(k), \cdot\cdot\cdot, u(k+1-m-d)] \tag{3.20}$$

である．(3.17)式中の右辺第２項はプラント入力に振幅制限が存在することにより生ずる項で，$|u_c(k)| \leqq u'_{max}$のとき零となる．(3.17)式中の推定パラメータベクトル$\hat{\theta}(k)$の更新アルゴリズムとしては前章で用いた (2.25),(2.26)式のアルゴリズムを含むより一般的なアルゴリズムを用いることとする[1]．

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \Gamma(k-1)\delta(k-d)e^*(k) \tag{3.21}$$

$$\Gamma(k) = \frac{1}{\lambda_1(k)}\left[\Gamma(k-1) - \frac{\Gamma(k-1)\delta(k-d)\delta^T(k-d)\Gamma(k-1)}{\dfrac{\lambda_1(k)}{\lambda_2(k)} + \delta^T(k-d)\Gamma(k-1)\delta(k-d)}\right] \tag{3.22}$$

$$e^*(k) = \frac{y(k) - \hat{\theta}^T(k-1)\delta(k-d)}{1 + \delta^T(k-d)\Gamma(k-1)\delta(k-d)} \tag{3.23}$$

ここで，$0 < \lambda_1(k) \leqq 1$，$0 < \lambda_2(k) \leqq 2$，$\Gamma(0) > 0$ である．

この適応アルゴリズムを用いたとき，プラント入力に振幅制限が存在しなければ$k \to \infty$で$e(k) \to 0$ が保証されることは前章 2.5節の議論と同様に証明が可能である．（付録1参照）

また，ここで用いているパラメータ調整アルゴリズムは前章で用いた (2.25),(2.26)式あるいは (2.46),(2.47)式のアルゴリズムとは異なり，パラメータ調整用の誤差として出力誤差を用いていない点に特徴がある．以下では，この形式のアルゴリズムを用いる制御系を間接法による設計とよぶこととする．

3．4　収束性の検討

ここでは，プラント入力に振幅制限が存在する場合を考えているので，それを考慮して出力誤差の零への収束性を検討する．

(3.21)～(3.23)式のパラメータ調整アルゴリズムを用いたとき，$\lim_{k\to\infty}|u_c(k)|\leqq u'_{max}$となれば$e(k)\to 0$となるのことは制御系の漸近安定性より明らかであるので，以下では$k\to\infty$で$|u_c(k)|\leqq u'_{max}$が成立するか否かを検討する．

シミュレーションによると推定パラメータ$\hat{b}_0(k)$の収束値によって$k\to\infty$で$|u_c(k)|>u'_{max}$となり，プラント入力が制限値に固定される現象が生じ，実用上問題となる．そこで，以下では，そのような現象が生じる条件を考察し，プラントが漸近安定で，そのパラメータb_0'の符号が既知であれば，常にこの現象を避けることができることを示す．

いま，目標値$y^*(k)$の定常値は$|u_c(k)|\leqq u'_{max}$のプラント入力で実現できるとする．例えば，プラントが漸近安定のとき，ステップ的な目標値変化では次式が成立する．

$$\lim_{k\to\infty}|y^*(k)|\leqq\left|\left(\sum_{i=0}^{m+d-1}b_i\right)\Big/\left(1-\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\right|u'_{max} \qquad (3.24)$$

この仮定のもとで$k\to\infty$で推定誤差$e^*(k)$が零に収束し，かつプラント入力が制限に固定される場合を考える．（プラントが漸近安定で入力に振幅制限が存在する場合には，信号ベクトル$\delta(k)$は有界となり，(3.21)～(3.23)式のアルゴリズムにおいて$e^*(k)=0$は$y(k)=\hat{\theta}^T(k-1)\delta(k-d)$を意味する．）

すなわち，$e^*(k)=0$，$u(k)=u'_{max}$（$|u_c(k)|>u'_{max}$）で，これは(3.17)～(3.23)式より$e(k)\neq 0$の場合を示している．このとき矛盾が生じることを示す．

プラントが漸近安定で，その入力が制限値に固定されているとき，次式が成立する．

$$\lim_{k\to\infty}y(k)=y^{\infty}$$

$$y^{\infty}=\left\{\left(\sum_{i=0}^{m+d-1}b_i\right)\Big/\left(1-\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\right\}u'_{max} \qquad (3.25)$$

また，以下ではプラントのDCゲイン$\left\{\left(\sum_{i=0}^{m+d-1}b_i\right)/\left(1-\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\right\}$は正，$b_0$も正として議論を進める．最小位相の漸近安定な離散時間系ではb_0の符号とDCゲインの符号は一致することから，このように仮定しても一般性を失うことはない．

推定パラメータ$\hat{a}_i(k)$，$\hat{b}_i(k)$に関して$e^*(k)=0$より，つぎの性質が得られる．

$$\lim_{k\to\infty}\hat{a}_i(k)=\hat{a}_i^{\infty}\ ,\ \lim_{k\to\infty}\hat{b}_i(k)=\hat{b}_i^{\infty} \tag{3.26}$$

したがって，(3.18),(3.19),(3.23)式より，信号y^{∞}は

$$y^{\infty}=\{(\sum_{i=0}^{m+d-1}\hat{b}_i^{\infty})/(1-\sum_{i=1}^{n}\hat{a}_i^{\infty})\}u'_{max} \tag{3.27}$$

と表される．一方,(3.16),(3.25)〜(3.27)式より$u_c(k)$はつぎになる．

$$\begin{aligned}u_c(k)&=\frac{1}{\hat{b}_0^{\infty}}[y^*(k+d)-\sum_{i=1}^{n}\hat{a}_i^{\infty}y^{\infty}-\sum_{i=0}^{m+d-1}\hat{b}_i^{\infty}u'_{max}]\\&=\frac{1}{\hat{b}_0^{\infty}}[y^*(k+d)-\{(\sum_{i=0}^{m+d-1}b_i)/(1-\sum_{i=1}^{n}a_i)\}u'_{max}]\\&\quad+u'_{max}\end{aligned} \tag{3.28}$$

(3.28)式中，右辺第１項の大カッコ内は(3.24)式の仮定より負となる．このとき，(3.21)〜(3.23)式のアルゴリズムにおいて$\lambda_1(k)$,$\lambda_2(k)$を制約内で変化させることにより，常に$\hat{b}_0(k)$の符号を正（b_0の符号と同符号）とできることから$|u_c(k)|\leqq u'_{max}$となって最初の設定に矛盾する．$k\to\infty$で$e^*(k)=0$，$u(k)=-u'_{max}$（$|u_c(k)|\leqq u'_{max}$）かつ$e(k)\neq0$でも同様に矛盾を生じる．

したがって，$u(k)$が制限値に固定され，かつ$e(k)\neq0$となる状況は起こらないことになる．

ここで解析した，入力が制限値に固定される以外の不都合な現象はシミュレーション等において現れておらず$k\to\infty$で$e(k)\to0$が達成されているが，より厳密な理論的解析が望まれる．

3．5　数値計算例と考察[20)]

ここで構成した制御法の妥当性を検討するため，前章 2.6節で示した１入力１出力系の例題と同一の３次系を例としてシミュレーションを行った．

目標値は(3.13)式の規範モデルにより算出し，その入力をステップとした．

このとき,(3.3)式におけるプラントパラメータは以下の値である．

［　例　3．1　］

$a_1=2.41$, $a_2=-1.92$, $a_3=0.507$

$b_0=0.00838$, $b_1=0.00355$, $b_2=0.00447$, $d=1$

また，規範モデルのパラメータは

$a_{M1}=2.46$, $a_{M2}=-2.03$, $a_{M3}=0.560$

$b_{M0}=0.0511$, $b_{M1}=-0.00269$, $b_{M2}=-0.0394$, $d_M=1$

と選んだ．設計パラメータはつぎの値とした．

$\hat{b}_0(0)=b_{M0}$, $\lambda_1(k)=\lambda_2(k)=1$（最小２乗法に相当）

また，信号の初期値，$\hat{b}_0(0)$を除く推定パラメータの初期値はすべて零として計算を行った．

この例ではプラントが数式モデルであることから，入力の制限値$u_{max}=\infty$であるが，(3.15)式における制限値u'_{max}を∞，10.0，2 の３通りとして，その効果，影響を調べた．

図 3.1にシミュレーション結果を示す．この例では，目標値を定常的に実現するプラント入力は$1/1.3\fallingdotseq0.77$であるが，入力に振幅制限を加えない場合にはプラント入力は過渡的に非常に大きな値となり（図中の縦軸の10→100 の目盛りに注意），プラント出力も一時的に大きくなることがある．さらにこの例では，プラントが−0.97という零点を持ち，適応制御装置はこの零点を相殺するような極をつくるためその減衰性が悪く，入力が定常値に近づくのに長い時間を要するなど，実用上好ましくない．

これに対して，入力の制限値u'_{max}を10とした場合，出力は過渡的に目標値からはずれることなく制御性能は改善される．さらにu'_{max}を2 と非常に厳しくした場合には，過度的に目標値に対する遅れが生じ，追従が不可能となるのは当然ながら，目標値付近に達してからの制御経過は特に支障なく良好となっている．

また，設計パラメータを変えた場合，目標値を正弦波状とした場合などのシミュレーションを行い，問題の生じないことを確認している．

ただし，この場合にもプラント出力が目標値に追従するためには，目標値が $|u(k)| \leqq u'_{max}$ の入力で実現できる必要があるのはもち論であり，例えば $y^*(k)$ が角周波数 ω の正弦波のとき

$$|y^*(k)| \leqq |G(j\omega)|\, u'_{max} \tag{3.29}$$

ただし，$G(s)$ はプラントの伝達関数

を満たす必要がある．

ここで示した数値計算例では漸近安定でかつその逆系も漸近安定なプラントを対象としているが，プラントが漸近安定であってもその逆系が不安定な場合には制御入力が定常的な振動を起こし，十分な制御はできない．これは，ここで基本としているモデル規範形適応制御系がプラントの零点を相殺することに起因し，より実用的な制御系を構成するためには入力の制限のみではなく，不安定な逆系を持つ系に対する制御方式を検討する必要がある．

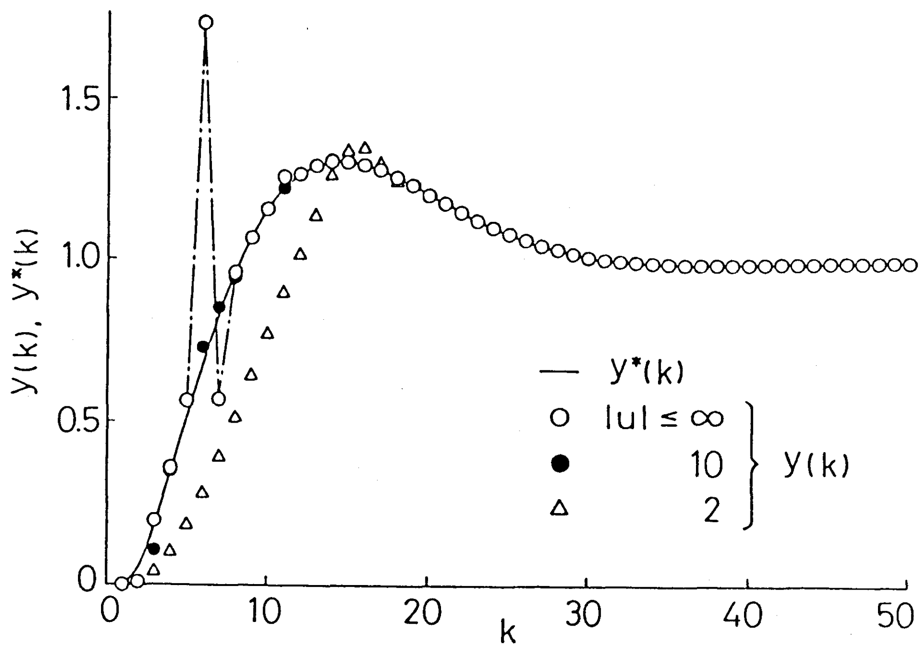
3．6 結 言

本章では，漸近安定な離散時間系に対し，プラント入力に振幅制限が存在する場合に対応が可能で，振幅制限をより積極的に利用しうるモデル規範形適応制御系の一構成法を示し，シミュレーションによってその有効性を明らかにした．

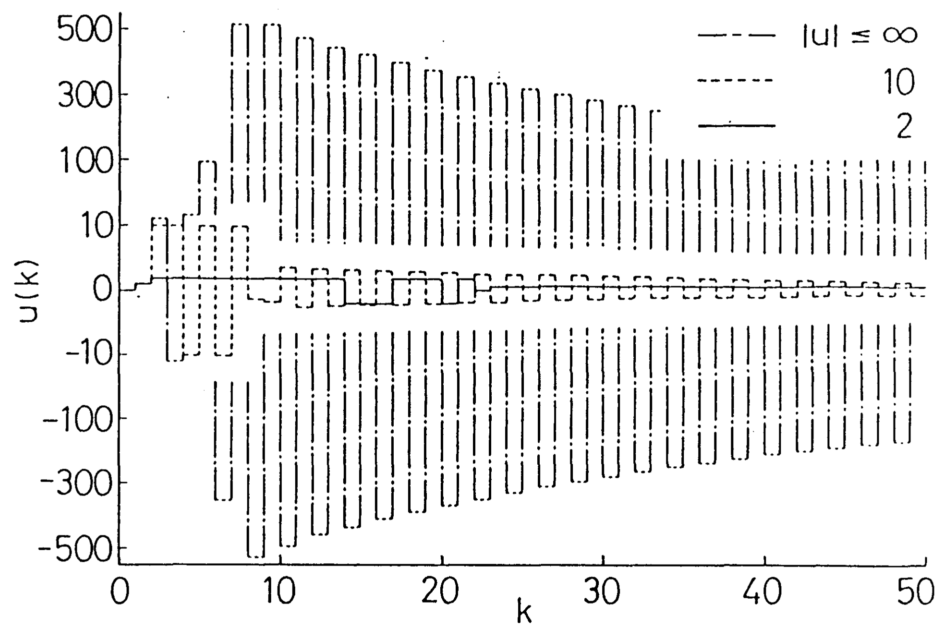
ここで用いた考え方をさらに入力の変化量に制限が存在する場合に同様に応用することは可能であるが，プラント出力が目標値へ追従することを保証するための条件はより厳しくなると考えられる[51)].

なお，プラントが不安定な場合に入力の振幅制限が存在すると，どのような制御によっても安定化が達成できない場合があるが，不安定系にも対応が可能な制御系の開発も実用上重要と考えられる[52),53)].

さらに，ここで考察した以外の不都合な現象が生じないことの理論的解明は今後の課題となっている．



（a）　出力の挙動



（b）　入力の挙動

図　3．1　入力の振幅制限を変えたときのシミュレーション結果

第四章　　　プラントのむだ時間＋ARモデルによる設計法[25)~27)]

4．1　緒　言

本論文で制御系設計の基礎としている離散時間モデル規範形適応制御系はその構成が簡潔で，第二章で示したように制御系の大域的漸近安定性も明快に証明することができるなどの種々の利点を持っている．

しかしながら，これらの特性は制御系の設計に際してプラントに対し　1）プラントの分母，分子の次数（の上限）およびむだ時間が既知，2）プラントの零点はｚ平面の単位円内に存在する系（逆系が漸近安定な系）という二つの条件を課すことによってはじめて得られるものである．

実際問題として　1）の分母，分子の次数，むだ時間を正確に知ることは困難であり，2）に関しては連続時間系を離散化して離散時間で適応制御を行う場合に大きな制約となる．連続時間系において，プラントがｓの右半平面に零点を持つか，あるいは持たない場合にも，その系を零次ホールド要素を前置して離散化した場合に，サンプリング周期，プラントの動特性に依存して，離散時間系がｚ平面の単位円外に零点を持つ逆系が不安定な系になることは容易に起こりうる．

前章までに設計したモデル規範形適応制御系では，プラントはｚ平面の単位円外に零点を持たない逆系が漸近安定な系と仮定していることから，コントローラはプラントの零点を相殺する構造を持っている．したがって，プラントがｚ平面の単位円外に零点を持つような場合にはコントローラが不安定となってしまい制御目的を達成することができない．

プラントが漸近安定は場合には，プラント入力に振幅制限を導入する第三章の設計法を適用することで制御系内の信号の有界性を保つことができるが，制御装置としての満足な動作は期待できない．

特に，多入力多出力系の場合には１入力１出力系の場合と比較して上記の事情はより複雑となる．この場合，系の内部に干渉が存在することにより，系に含まれる伝達要素がすべてｚ平面の単位円外に零点を持たない場合でも，系全体の零点（不変零点）がｚ平面の単位円外となる場合もあり，多入力多出力の実プラントへの応用に際しての大きな障害となっている．

これまでの方法では，プラントはARMA形式のモデルでモデル化され，このモデルに

対してモデル規範形適応制御装置が設計されてきた．このため，プラントがｚ平面の単位円外の零点を持つモデルでモデル化されれば適応制御装置はその零点を相殺するように働き，制御系は不安定となる．これはＡＲＭＡ形式のモデルを用いる限り避けられない問題となる．

そこで，ここではプラントはＡＲＭＡ形式のモデルで記述されるという固定観念を変え，プラントをむだ時間＋ＡＲ形式のモデルでモデル化して，離散時間モデル規範形適応制御系を構成する手法を述べる．

一般にモデルとはプラントの目的に沿った近似表現であることから，適応制御の目的に応じて有用なモデルの形は異なってくる．

さきに述べたように，モデル規範形適応制御ではコントローラはプラントの零点を相殺するように動作する．したがって，むだ時間を持つＡＲ形式のモデルをプラントのモデルとするならば，適応制御装置はそのモデルが零点を持たないので，構造上零点を相殺するための極を作らず，逆系が不安定な系に対しても安定な制御を期待できる．

以下では，まず，本章で取り扱う問題の設定を述べ，つぎに１入力１出力系に対するむだ時間＋ＡＲモデルを用いた離散時間モデル規範形適応制御系の設計を行う．さらに次節で１入力１出力系に対する設計法を多入力多出力系に拡張した設計法を示す．

最後に，この手法の有効性を確認するために行った１入力１出力の種々のプラントに対する数値計算例と２入力２出力系を対象としたシミュレーション結果について考察する．

４．２　問題の設定

ここでは，連続時間系で表されるプラントをディジタル計算機を用いて離散時間で適応制御を行う場合を考える．その連続時間系に零次ホールド要素を前置してサンプリング周期Tで離散化した系を，つぎのむだ時間＋ARモデルでモデル化する．

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_1(z^{-1}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{A}_m(z^{-1}) \end{bmatrix} y(k) = \begin{bmatrix} z^{-d_1}\bar{b}_{11} & \cdots & z^{-d_1}\bar{b}_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ z^{-d_m}\bar{b}_{m1} & \cdots & z^{-d_m}\bar{b}_{mm} \end{bmatrix} u(k) + u_0' \tag{4.1}$$

ここで，

$$y^T(k) = [y_1(k), \cdots, y_m(k)] \in R^m$$

$$u^T(k) = [u_1(k), \cdots, u_m(k)] \in R^m$$

$$u_0'^T = [u_{01}', \cdots, u_{0m}'] \in R^m$$

$y(k)$および$u(k)$はそれぞれプラントの出力および入力ベクトルを示す．また，u_0'はモデリング誤差，パラメータ誤差，外乱などに起因する定数残差ベクトルを表す．d_i は$u(k)$のi番目の出力に対する等価むだ時間を表す１以上の整数で，その決定方法については後に補足を加える．$\bar{A}_i(z^{-1})$ は時間遅れ演算子z^{-1}についてのつぎのような多項式である．

$$\bar{A}_i(z^{-1}) = 1 - \bar{a}_i^1 z^{-1} - \cdots - \bar{a}_i^{n_i} z^{-n_i} \qquad (i=1,\ldots,m) \tag{4.2}$$

また，$\bar{b}_{ij}$はスカラである．

(4.1)式のプラントモデルに対してつぎのような仮定をおくものとする．

１）プラントモデルの次数n_i および等価むだ時間d_i はプラントに関する事前情報より決定可能．

２）(4.1)式のプラントモデルはつぎの条件を満たす．

$$\det\begin{bmatrix} \bar{b}_{11} & \cdots & \bar{b}_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{b}_{m1} & \cdots & \bar{b}_{mm} \end{bmatrix} \neq 0 \tag{4.3}$$

仮定２）は系が状態フィードバックによって非干渉化可能である必要十分条件と等価であり[54]，入力u（k）が決定可能である十分条件でもある．

また，(4.1)式の不変零点は次式の根となる．

$$z^{\{\sum_{i=1}^{m} n_i - \sum_{i=1}^{m} d_i\}} \cdot \det\begin{bmatrix} \bar{b}_{11} & \cdots & \bar{b}_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{b}_{m1} & \cdots & \bar{b}_{mm} \end{bmatrix} = 0 \tag{4.4}$$

したがって，すべての零点はz平面の原点に存在する．

(4.1)式は異なるむだ時間を含む多入力１出力系をm個組合わせたシステムとみなすことができ，その多入力１出力系をそれぞれのむだ時間について書き直すことによって，つぎのように表すことができる．

$$y_i(k+d_i) = \sum_{j=1}^{n_i} a_i^j\, y_i(k+1-j) + \sum_{j=0}^{d_i-1} b_i^j\, u(k-j) + u_{0i}$$
$$= \theta_i^T\, \delta_i(k) \qquad (i=1,\ldots,m) \tag{4.5}$$

ここで，

$$b_i^{jT} = [\, b_{i1}^j, \cdots, b_{im}^j \,]$$

$$\theta_i^T = [\, b_i^0, \cdots, b_i^{d_i-1}, a_i^1, \cdots, a_i^{n_i}, u_{0i} \,]$$

$$\delta_i^T(k) = [\, u^T(k), \delta_{i0}^T(k) \,] \qquad (i=1,\ldots,m) \tag{4.6}$$

$$\delta_{i0}^T(k) = [\, u^T(k-1), \cdots, u^T(k+1-d_i),$$
$$y_i(k), \cdots, y_i(k+1-n_i), 1 \,]$$

あるいは (4.5)式をまとめれば次式で表現することもできる．

$$y(k+d) = \sum_{i=1}^{n} A_i\, y(k+1-i) + \sum_{i=0}^{d-1} B_i\, u(k-i) + u_0 \tag{4.7}$$

ここで，$y^T(k+d) = [\, y_1(k+d_1), \cdots, y_m(k+d_m) \,]$，$n = \max_i n_i$，$d = \max_i d_i$ であり $A_i \in R^{m\times m}$，$B_i \in R^{m\times m}$ は (4.6)式で示されるパラメータ $\bar{b}_{ik}$，a_i^j をその要素の一部として含む未知の定数行列である．(4.7)式の表現は (4.5)式の表現と比較して冗長ではあるが，信号ベクトルの係数が行列になっている点を除けば１入力１出力系と同一形式の表現となっていることから，後に述べる１入力１出力系に対する適応制御系の設計法をそのまま適用できるという利点を持っている．

これまでの定式化では，外乱は一定とみなして定式化を行っているが，もしこれを一定とみなすことができない場合にも，定式化をつぎのように変更することで対応が可能となる． このとき，外乱は次式で記述されるものとする．

$$C_i(z^{-1})\, u_{0i}(k) = 0 \qquad (i=1,\ldots,m) \qquad (4.8)$$

ここで，$C_i(z^{-1})$ はn_{ci}次のつぎの多項式である．

$$C_i(z^{-1}) = 1 - c_i^1 z \quad - \cdots - c_i^{n_{ci}} z^{-n_{ci}} \qquad (i=1,\ldots,m) \qquad (4.9)$$

ただし，多項式$C_i(z^{-1})$ は安定であるとする．

これは，外乱$u_{0i}(k)$ が安定な線形自由系の出力で書き表されることを示しているが，この外乱の存在する場合の制御系構成の詳細は章を改めて説明することとする．

このとき，プラントモデル (4.5)式および (4.7)式は (4.8)式を用いることで，それぞれ以下のように修正される．

$$y_i(k+d_i) = \theta_i^T \delta_i(k) \qquad (i=1,\ldots,m) \qquad (4.5')$$

ここで，

$$\theta_i^T = [\, b_i^0, \cdots, b_i^{d_i+n_{ci}-1}, a_i^1, \cdots, a_i^{n_i+n_{ci}}]$$

$$\delta_{i0}^T(k) = [\, u^T(k-1), \cdots, u^T(k+1-d_i-n_{ci}),$$

$$y_i(k), \cdots, y_i(k+1-n_i-n_{ci}), 1 \,] \qquad (4.6')$$

$$y(k+d) = \sum_{i=1}^{n+n_c} A_i\, y(k+1-i) + \sum_{i=0}^{d+n_c-1} B_i\, u(k-i) \qquad (4.7')$$

ここで，$n_c = \max_i n_{ci}$ である．

次節以後では，ここで導入したプラントのむだ時間＋ARモデルに基づいて，モデル規範形適応制御系の構成法をプラントが１入力１出力系の場合と多入力多出力系の場合のそれぞれについて示すが，制御系の構成法はモデルが (4.5),(4.7)式あるいは (4.5'),(4.7')式の場合にも基本的には同一の手続きとなる．

４．３　適応制御系の設計

４．３．１　１入力１出力系に対する設計[25)]

プラントが１入力１出力系の場合，(4.5)，(4.7)式の表現は同一の次式となる．

$$y(k+d)=\sum_{i=1}^{n}a_i\,y(k+1-i)+\sum_{i=0}^{d-1}b_i\,u(k-i)+u_0 \tag{4.10}$$

以下では，プラントが(4.10)式でモデル化された場合の制御系の直接法による構成法を示す．

まず，出力誤差とパラメータ誤差を次式で定義する．

$$e(k)=y^*(k)-y(k)$$

$$a_{di}=\theta_i-a_i \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{4.11}$$

ここで，$y^*(k)$は有界な目標値であり，θ_iは任意定数とする．

(4.10)，(4.11)式より出力誤差方程式はつぎになる．

$$\begin{aligned}e(k+d)=y^*(k+d)&-\sum_{i=1}^{n}\theta_i\,y(k+1-i)\\&+\sum_{i=1}^{n}a_{di}\,y(k+1-i)-\sum_{i=0}^{d-1}b_i\,u(k-i)-u_0\end{aligned} \tag{4.12}$$

ここで，適応制御の過渡特性を改善するためのつぎのようなフィルタを導入する．

$$\begin{aligned}e_f(k)&=e(k)+\alpha e(k-1)+\beta e(k-2)\\y_f^*(k)&=y^*(k)+\alpha y^*(k-1)+\beta y^*(k-2)\\y_f(k)&=y(k)+\alpha y(k-1)+\beta y(k-2)\\u_f(k)&=u(k)+\alpha u(k-1)+\beta u(k-2)\end{aligned} \tag{4.13}$$

ただし，α，βは多項式$z^2+\alpha z+\beta$が漸近安定となるように決定する．（α，βの許容範囲は第二章 2.6節を参照．）

つぎに，(4.12)式の両辺に$\alpha e(k+d-1)+\beta e(k+d-2)$を加え，(4.13)式を用いて書き改めると，次式を得る．

$$\begin{aligned}e_f(k+d)=y_f^*(k+d)&-\sum_{i=1}^{n}\theta_i\,y_f(k+1-i)\\&+\sum_{i=1}^{n}a_{di}\,y_f(k+1-i)-\sum_{i=0}^{d-1}b_i\,u_f(k-i)\\&-(1+\alpha+\beta)\,u_0\end{aligned} \tag{4.14}$$

上式より$e_f(k+d)=0$を達成するための信号$u_f(k)$を次式で発生させる．

$$u_f(k)=\frac{1}{\hat{b}_0(k)}\Big[y_f^*(k+d)-\sum_{i=1}^{n}\{\theta_i-\hat{a}_{di}(k)\}y(k+1-i)$$
$$-\sum_{i=1}^{d-1}\hat{b}_i(k)u_f(k-i)-\hat{u}_0(k)\Big] \tag{4.15}$$

実際にプラントに加える入力$u(k)$は(4.13),(4.15)式よりつぎになる．

$$u(k)=u_f(k)-\alpha u(k-1)-\beta u(k-2) \tag{4.16}$$

(4.15)式中の$\hat{b}_i(k)$, $\hat{a}_{di}(k)$は(4.14)式中の未知パラメータに対応する推定値であり，後に述べるパラメータ調整アルゴリズムにより更新される．

(4.15)式を(4.14)式に代入して整理するとつぎになる．

$$e_f(k+d)=\{\hat{\theta}(k)-\theta\}^T\delta(k)+\{\hat{u}_0(k)-(1+\alpha+\beta)u_0\} \tag{4.17}$$

ここで，

$$\hat{\theta}^T(k)=[-\hat{a}_{d1}(k),\cdots,-\hat{a}_{dn}(k),\hat{b}_0(k),\cdots,\hat{b}_{d-1}(k)] \tag{4.18}$$

$$\theta^T=[-a_{d1},\cdots,-a_{dn},b_0,\cdots,b_{d-1}] \tag{4.19}$$

$$\delta^T(k)=[y_f(k),\cdots,y_f(k+1-n),u_f(k),\cdots,u_f(k+1-d)] \tag{4.20}$$

である．このとき，(4.17)式中の推定値$\hat{\theta}(k)$，$\hat{u}_0(k)$の調整アルゴリズムとして(2.25),(2.26)式と同一形式の以下のアルゴリズムを用いることによりプラントが(4.10)式のむだ時間＋ARモデルで厳密に記述される場合の適応制御系の漸近安定性が保証される．

$$\hat{\theta}(k)=\hat{\theta}(k-d)-\varepsilon(k)e_f(k)\delta(k-d) \tag{4.21}$$

$$\hat{u}_0(k)=\hat{u}_0(k-d)-\varepsilon(k)e_f(k) \tag{4.22}$$

ただし，

$$\varepsilon(k)=\rho/\{\delta^T(k-d)\delta(k-d)+\eta(k)\}$$
$$0<\rho<2,\ \eta(k)\geq 1\ (u_0\equiv 0\text{ のとき }\hat{u}_0(k)\equiv 0\text{ として }\eta(k)\geq 0) \tag{4.23}$$

である．

ここでは，パラメータ調整アルゴリズムとして(4.21)〜(4.23)式の形式のものを用いたが，パラメータ調整用の誤差として出力誤差を用いるより一般的なアルゴリズムを用いること[55]，あるいは前章 3.2節で行ったように入力の振幅制限を考慮した間接法による制御系の構成を行うことも容易である．その場合の制御系の構造は第三章で設計した適応制御系においてｍ＝０とおいたものと等価となる．

4．3．2　多変数系に対する設計[26),27)]

プラントが多入力多出力の多変数系の場合でも，プラントの表現として 4.2節で示した(4.7)式あるいは(4.7')式を用いれば，前節に述べた１入力１出力系に対する構成法を全く同様に適用することが可能である[26)]．しかし，多変数系においては適応制御に要する推定パラメータ数が増加することから，より冗長性の小さいモデルを用いて制御系を構成するほうが，その過渡特性を改善するうえで望ましいと考えられる．

そこで本節では，プラントを (4.5)式のm組の多入力１出力系で表現した場合の制御系を間接法によって構成する方法について述べる[27)]．

このとき，出力誤差を次式で定義する．

$$e_i(k)=y_i^*(k)-y_i(k) \qquad (i=1,\ldots,m) \qquad (4.24)$$

ここで，$y^{*T}(k)=[y_1(k),\cdots,y_m(k)]$は有界な目標値である．

(4.5)，(4.24)式より誤差方程式はつぎになる．

$$e_i(k+d_i)=y_i^*(k+d_i)-\theta_i^T\ \delta_i(k) \qquad (i=1,\ldots,m) \qquad (4.25)$$

出力誤差$e_i(k+d_i)$を零とする入力を決定するため上式中の未知パラメータベクトルθ_iをつぎのようなパラメータ推定アルゴリズムによって推定することとする．

$$\hat{\theta}_i(k)=\hat{\theta}_i(k-1)+\Gamma_i(k-1)\ \delta_i(k-d_i)e_i^*(k) \quad (i=1,\ldots,m)(4.26)$$

$$\Gamma_i(k)=\frac{1}{\lambda_{1i}(k)}\left[\Gamma_i(k-1)-\frac{\Gamma_i(k-1)\delta_i(k-d_i)\ \delta_i^T(k-d_i)\ \Gamma_i(k-1)}{\dfrac{\lambda_{1i}(k)}{\lambda_{2i}(k)}+\delta_i^T(k-d_i)\ \Gamma_i(k-1)\delta_i(k-d_i)}\right] \qquad (i=1,\ldots,m) \qquad (4.27)$$

$$e_i^*(k)=\frac{y_i(k)-\hat{\theta}_i^T(k-1)\ \delta_i(k-d_i)}{1+\delta_i^T(k-d_i)\ \Gamma_i(k-1)\delta_i(k-d_i)} \qquad (i=1,\ldots,m)(4.28)$$

ここで，$0<\lambda_{1i}(k)\leqq 1$，$0<\lambda_{2i}(k)\leqq 2$，$\Gamma_i(0)>0$

$$\hat{\theta}_i^T(k)=[\hat{b}_i^0(k),\hat{\theta}_{io}^T(k)] \qquad (i=1,\ldots,m) \qquad (4.29)$$

$$\hat{\theta}_{io}^T(k)=[\hat{b}_i^1(k),\cdots,\hat{b}_i^{d_i-1}(k),\hat{a}_i^1(k),\cdots,\hat{a}_i^{n_i}(k),\hat{u}_{oi}(k)] \qquad (i=1,\ldots,m) \qquad (4.30)$$

(4.26)〜(4.30)式のアルゴリズムによって得られた推定パラメータを用い，プラント入力をその振幅制限を考慮してつぎのように発生させる．

$$u_i(k)=\begin{cases} u_{ci}(k) & : |u_{ci}(k)| \leqq u'_{max\ i} \\ u'_{max\ i}\,\mathrm{sgn}[u_{ci}(k)] & : |u_{ci}(k)| > u'_{max\ i} \end{cases}$$

$$(i=1,\ldots,m) \qquad (4.31)$$

ここで，$u'_{max\ i}$は許容できる入力の絶対値の最大値を表している．(4.31)式中の信号$u_c^T(k)=[u_{c1}(k),\ldots,u_{cm}(k)]$は$\hat{\theta}_i^T(k)\ \delta_i(k)=y_i^*(k+d_i)$となるよう，次式で計算される．

$$u_c(k)=\hat{B}_0(k)^{-1}\bar{u}(k) \qquad (4.32)$$

$$\bar{u}^T(k)=[\bar{u}_1(k),\cdots,\bar{u}_m(k)] \qquad (4.33)$$

$$\hat{B}_0(k)=[\hat{b}_1^{0T}(k),\cdots,\hat{b}_m^{0T}(k)]\in R^{m\times m} \qquad (4.34)$$

$$\bar{u}_i(k)=y_i^*(k+d_i)-\hat{\theta}_{i0}^T(k)\ \delta_{i0}(k) \qquad (i=1,\ldots,m) \qquad (4.35)$$

ここで，$\hat{B}_0(k)$はすべてのkの値に対して正則であると仮定する．もし，$\hat{B}_0(k)$が非正則な行列に収束すると信号ベクトル$u_c(k)$は非有界となるが，$\hat{B}_0(k)$の初期値$\hat{B}_0(0)$を正則行列とし，等価むだ時間d_iが，モデル化が十分な精度で行われるように決定されている場合には数値計算上の問題は生じないことが，多くのシミュレーション結果から確認されている．さらに，仮定2）が成立していれば$\hat{B}_0(k)$の真値は正則となることより，$\hat{B}_0(k)$が非正則となることを(4.27)式中の$\lambda_{ij}(k)$の再調整によって常に避けることができる．

以上のように制御系を構成したときの誤差方程式は(4.31)〜(4.35)式を(4.25)式に代入することで

$$e_i(k+d_i)=\{\hat{\theta}_i(k)-\theta\}^T\delta_i(k)-\hat{b}_i^{0T}(k)\{u(k)-u_c(k)\}$$

$$(i=1,\ldots,m) \qquad (4.36)$$

となることが確かめられる．

この誤差方程式は前章 3.3節(3.17)式と同一形式であることから，(4.26)〜(4.28)式のパラメータ調整アルゴリズムと(4.31)〜(4.28)式の入力発生則を用いたとき，目標値が許

容範囲内のプラント入力で実現可能なとき，$k\to\infty$で$e_i(k)\to 0$となる．

しかし，プラントがむだ時間＋ARモデルで厳密には記述されない場合（モデリング誤差が存在する場合）の制御系の大域的漸近安定性の解析はロバスト性の観点から議論されるべきである．

4．4　数値計算例による検討[25),26)]

前節までで設計した適応制御系は，モデル規範形適応制御系に不都合なプラントモデルを避けるという発想のもとに，プラントをむだ時間を含むＡＲ形式のモデルでモデル化して設計を行ってきた．

しかし，この場合にはここで採用したプラントのむだ時間＋ＡＲモデルが実際のプラントをどの程度十分に近似しうるか，すなわちモデルの妥当性が問題となる．

一般にモデルの妥当性は，そのモデルに基づいて設計された制御系の性能によって評価すべきである．そこで，本節では特に，１入力１出力系に対して種々のプラントを用いた計算機シミュレーションを行い，制御系の有効性を検討する．

はじめに，１入力１出力の直接法による制御系の評価を行う．このとき，プラントが厳密にむだ時間＋ＡＲモデルで記述される場合には理論的に$e(k)\rightarrow 0$ が保証されるとともに，シミュレーションにおいても良好な特性を容易に得ることができることから，ここではその結果を省略する．

つぎに，表 4.1に示すような連続時間の伝達関数で表される８種類のプラントに対して，ここで設計した適応制御系が有効に動作するか否かを調べた．表 4.1中にはプラントの伝達関数のみではなく，目標値を発生させる規範モデルの伝達関数，サンプリング周期，設計パラメータのうちのρ，α，β，$\hat{b}_0(0)$，プラントの等価むだ時間d，次数nを示す．他の設計パラメータはここには示されてはいないが，最良の応答を得るために選定したものではない．$\hat{b}_0(k)$ の初期値を除く他の推定パラメータの初期値，制御系内のすべての信号の初期値は零として計算を行った．また，(4.21)〜(4.23)式のパラメータ推定アルゴリズムにおいて$\eta(k)\equiv 0$ ，すなわち$\hat{u}_0(k)\equiv 0$ とした．

ここで用いたプラントの概略の特性は以下の通りである[56)]．

［　例　4．1　］

（１）漸近安定でむだ時間のないプラントで，その離散時間系はｚ平面の単位円内に零点を持つ．

（２）（１）と同様で，その離散時間系がｚ平面の単位円外に零点を持つ．

（３）（１）のプラントにむだ時間を加えたもの．

（４）（２）のプラントにむだ時間を加えたもの．

（５）連続時間の伝達関数がｓの右半平面に零点を持つ非最小位相系．

（６）積分特性を持つプラント．

（７）不安定でかつ振動特性を持つプラント（ヘリコプターのモデル）．

（８）不安定で非振動性のプラントで，その離散時間系はｚ平面の単位円外に零点を持つ．

上記のプラントに対する制御結果を図 4.1(1) ～(8) に示す．図中の記号は，○が目標値を，●はプラントの出力を，また実線はプラントのインディシャル応答を示している．

図 4.1より (1)～(4),(6),(8) のプラントに対しては最初の目標値変化を除き良好な追従特性が得られていることがわかる．特に，むだ時間を持たない (1),(2),(6),(7)のプラントでは制御初期の過度特性も十分に満足のゆくものでる．ｓの右半平面に零点を持つプラント (5)に対する制御経過は必ずしも良好とは言えないが，これは，ここで用いているむだ時間＋ＡＲ形式のプラントモデルではｓの右半平面に零点を持つプラント（例えば逆応答を持つプラント）を十分な精度で近似できないことに起因しており，本手法の一つの限界を示すものである．むだ時間＋ＡＲ形式のモデルで近似しうるプラントの特性についての解析は付録２に示すこととする．不安定かつ振動特性を持つプラント (7)に対する制御経過もあまり良好ではないが，これは近似を含まない制御装置を用いる場合でも制御困難な例題となっている[56)]．

以上の結果から，ここで設計したプラントのむだ時間＋ＡＲモデルにもとづく適応制御系は十分広い範囲のプラントに対して有効であることが確かめられた．

良好な制御特性を得るためにはプラントの等価むだ時間ｄ，次数ｎを注意深く指定する必要がある．特に，等価むだ時間ｄの指定が次数ｎの指定より重要である．

ｄは純粋なむだ時間ではなく，例えば，漸近安定なプラントに対して，プラントのステップ応答の変曲点での接線が時間軸と交わる時間をT_dとすると（ｄ－１）$T \geqq T_d$（Ｔはサンプリング周期）であることが一つの目安となる．

これに対してプラントモデルの次数ｎの値は計算例では応答にそれほど大きな影響を与えない．表 4.1に示した例ではｎ＝2 ～10に対する応答の差はわずかであった．

θ_i (i=1,....,n) の値は，例えばプラントのステップ応答を近似して得られるむだ時間＋１次遅れ系などを用いてその概略値を与えれば制御過程の初期応答を改善することが可能である．

さらに設計パラメータα，βの値の選択により入力ｕ（ｋ）の振動的挙動を抑制し，制御経過を改善することが可能で，これは特に(4.21)～(4.23)式のような簡単なアルゴリズム

を用いるときに有効となる．

以上は直接法により構成された制御系による例題であるが，間接法による例題として，つぎのようなｚ平面の単位円外に零点を持つプラントに正弦波状の外乱が作用する場合の計算機シミュレーションを行った．

［　例　４．２　］

プラントは (3.1)式の表現において

$a_1=2.11$，$a_2=-1.43$，$a_3=0.302$，　$b_0=0.002$，$b_1=0.005$，$b_2=0.001$，$d=1$

である．このプラントはｚ平面の単位円外に-1.303 の零点を持つ．

また，目標値は(3.13)式の表現において

$a_{M1}=1.72$，$a_{M2}=-0.756$，$b_{M0}=0.017$，$b_{M1}=0.0169$，$d_M=1$

とした規範モデルで発生させた．

図 4.2にシミュレーション結果を示す．図中の記号は□が目標値を，＋がプラント出力を，また，実線はプラントの入力を示す．

制御系の設計パラメータはプラントモデルの次数$n=3$，等価むだ時間$d=3$，外乱が正弦波であることから$n_C=2$とした．パラメータ推定アルゴリズムは(3.21)～(3.23)式の形式のものを用い$\lambda_1(k)=0.95$，$\lambda_2(k)=1.0$ とした．また，入力の振幅制限値$u^*_{max}=10.0$とおいている．推定パラメータの初期値は$\hat{b}_0(0)=b_{M0}$としている以外はすべて零として制御を行っているが，結果は最初のステップと外乱が加わりはじめた$k=101$ 付近を除いて良好である．外乱としては$k=101$～200 で $5\sin(0.4k)$ の正弦波信号を$u(k)$に加えた．

つぎに多変数系に対する本手法の有効性を検討するため，２入力２出力のプラントに対する制御を行った．最初の例題はプラントを最小位相系（逆系が漸近安定な系）として，その伝達関数行列をつぎに示す．

［　例　４．３　］

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{0.25}{s^2+1.9s+0.25} & \dfrac{-0.05}{s^2+2.0s+0.25} \\ \dfrac{-0.5}{s^2+3.0s+1.0} & \dfrac{1}{s^2+3.2s+1.0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

また，目標値はつぎのような非干渉の規範モデルの出力とした．

$$Y_1^*(s) = e^{-0.4S} / (s^2 + 1.4s + 1) \cdot R_1(s) \qquad (4.38)$$

$$Y_2^*(s) = 4e^{-0.4S} / (s^2 + 2s + 4) \cdot R_2(s) \qquad (4.39)$$

上記の系をサンプリング周期T＝0.2 で離散化し，プラントを (4.7)式において $n=10$，$d_1 = d_2 = d = 2$でモデル化し，4.3節の１入力１出力の制御系と同一形式の直接法による適応制御系により制御を行った．

規範モデルの入力は $r_1(k) = 1.0$ ，$r_2(k) = 2.0$ のステップ信号を用いた．

設計パラメータは $\rho = 1.0$ ，$\alpha' = \beta' = 0$ ，$\eta = 0$ ，$\hat{B}_0(0) = \mathrm{diag}(b_{M1}^0,\ b_{M2}^0)$，$\Theta_i = \mathrm{diag}(a_{M1}^i,\ a_{M2}^i)$ (i=1,2)，$\Theta_i = 0$ (i=2,...,9) ，$\hat{u}_0(k) \equiv 0$ （$u_0 \equiv 0$ ）とした．ただし，b_{Mi}^j，a_{Mi}^jは規範モデルを離散化し

$$y_i^*(k+1) = \sum_{j=1}^{2} a_{Mi}^j y_i^*(k+1-j) + \sum_{j=0}^{1} b_{Mi}^j r_i(k-d_i-j) \qquad (i=1,2) \qquad (4.40)$$

と表現したときのパラメータである．

また，$\alpha = -(\alpha' + 2\beta')/(1+\alpha'+\beta')$，$\beta = \beta'/(1+\alpha'+\beta')$ の関係がある．$\hat{B}_0(0)$を除く各信号の初期値は零とした．

図 4.3にシミュレーション結果を示す．図中の実線は $u^T(k) = [1.0\ ,\ 2.0\ ]$ のステップ入力を加えたときのプラントの応答を示す．２入力２出力系の場合にもプラント出力は目標値に良く追従しており，ここで提案したむだ時間＋ARモデルによる適応制御系が有効に動作していることがわかる．なお，$\hat{u}_0(k)$ を推定パラメータに加えた場合にも同様に良好な結果が得られ，より安定な制御が可能であった．

つぎの例題はsの右半平面に不変零点を持つ非最小位相系（逆系が不安定な系）で，その伝達関数行列をつぎに示す．

[例 4.4]

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{0.25}{s^2+1.9s+0.25} & \dfrac{-0.05(0.3s+1)}{s^2+2.0s+0.25} \\ \dfrac{-0.7}{s^2+3.0s+1.0} & \dfrac{1}{s^2+3.2s+1.0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ \\ U_2(s) \end{bmatrix} \tag{4.41}$$

例 4.3と同様に$T=0.2$で離散化されたプラントは単位円外の零点-2.475を持つ.
この場合 (4.7)式において$n=10$, $d_1=2$, $d_2=3$でモデル化する.
規範モデルはさきの例題と同じものを$d_1=2$, $d_2=3$と変更して用いた.

図 4.4にシミュレーション結果を示す. 図中の記号は図 4.3と同一である. また, 設計パラメータは$\alpha'=\beta'=0$, $\eta=2$とした他はさきの例と同一とした. この結果から, プラントの逆系が不安定であるにもかかわらず, その出力は目標値に良く追従しており, 本手法のモデル化が不安定な逆系を持つ系に対して有効であることが確認できた.

なお,4.4節で述べた (4.5)式にもとづく間接法による制御系を用いた場合も種々のプラントに対して良好な制御結果を得ることができたが, ここではその結果を省略する. (実プラントへの応用に先立つシミュレーションを後に示す.)

また, 各設計パラメータおよびパラメータ推定アルゴリズムをどのように選定すべきかは, さらに検討を加えるべき問題である.

4．5 結 言

本章では，プラントをそのむだ時間＋ＡＲモデルにより設計された適応制御装置によりモデル規範形適応制御を行わせる方法について述べた．

この方法は，その漸近安定性の理論的解析は現在のところ完了していないが，不安定な逆系を持つ系を含む広い範囲のプラントに対して有効であることを数値計算例で示した．

したがって，この手法によれば，基本的なモデル規範形適応制御系でプラントに要求される逆系の漸近安定性の仮定を考慮せず，プラントのおおよそのステップ応答を知ることにより制御装置を設計できる点で，より実プラントへの適用が容易となると考えられる．

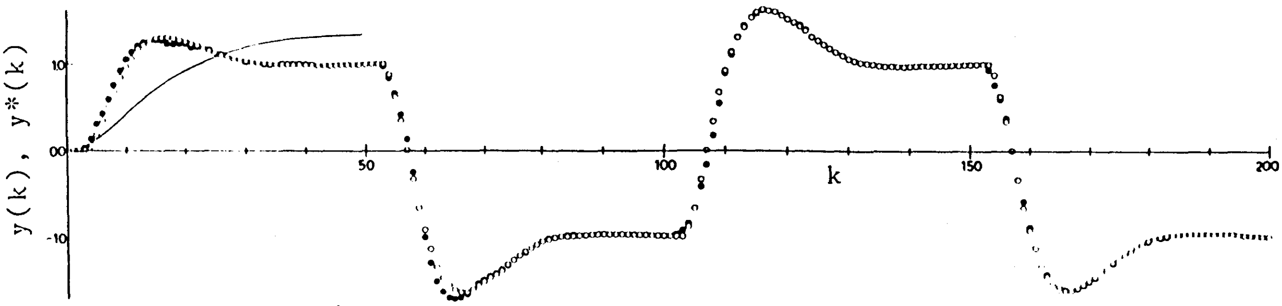
もち論，本手法にも限界があり，例えば逆応答を持つ系，あるいはむだ時間が変動するような系に対しては十分な制御性能を期待することは困難である．

このような問題に対しては，制御装置の構造，あるいは制御系に要求する制御仕様そのものを変更する必要があると考えられる．次章以後で，その対応策のいくつかを述べる．

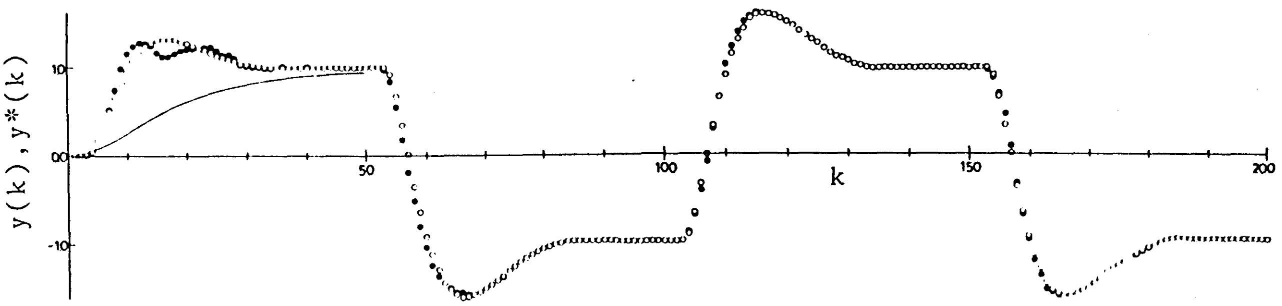
なお，本手法の実プラントへの応用は興味ある問題であり，別に述べることとする．

表 4．1 シミュレーションに用いたプラント，規範モデル，サンプリング周期，設計パラメータとプラントパラメータ

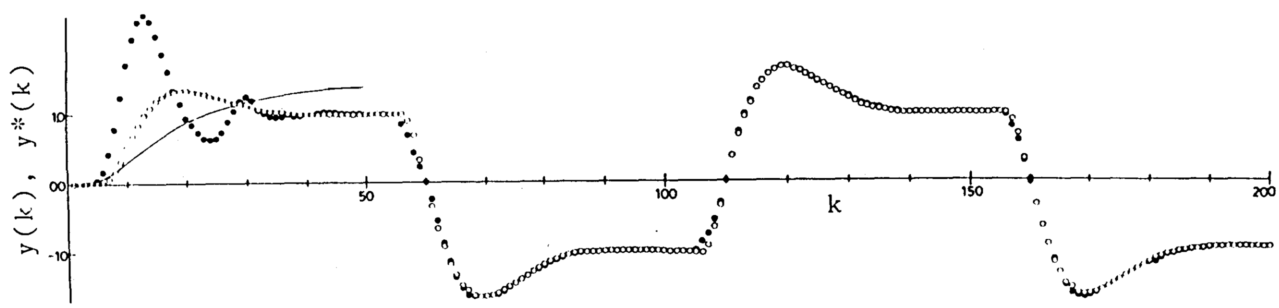
No.	プラント	規範モデル	サンプリング周期 T	設計パラメータ				プラントパラメータ	
				ρ	α	β	$\hat{b}_0(0)$	d	n
1	$G_{P1}(s)=\dfrac{1.35(0.333s+1)}{(s+1)(s^2+2.4s+1)}$	$G_{M1}(s)=e^{-0.4s}\dfrac{1.5(2s+1)}{(s+1.5)(s^2+1.4s+1)}$	0.2	1.0	0.0	0.0	b_{M0}	3	10
2	$G_{P2}(s)=\dfrac{1.00}{(s+4.21)(s^2+1.79s+0.473)}$	$G_{M2}(s)=G_{M1}(s)$	0.2	1.0	0.0	0.0	b_{M0}	3	10
3	$G_{P3}(s)=e^{-0.4s}\cdot G_{P1}(s)$	$G_{M3}(s)=e^{-0.6s}\cdot G_{M1}(s)$	0.2	1.0	0.0	0.0	b_{M0}	6	10
4	$G_{P4}(s)=e^{-0.2s}\cdot G_{P2}(s)$	$G_{M4}(s)=e^{-0.8s}\cdot\dfrac{1}{s^2+1.4s+1}$	0.2	1.0	0.0	0.0	b_{M0}	5	10
5	$G_{P5}(s)=\dfrac{1-4s}{(1+4s)(1+10s)}$	$G_{M5}(s)=e^{-8s}\cdot\dfrac{0.09}{s^2+0.42s+0.09}$	2.0	0.5	0.0	0.0	0.5	5	10
6	$G_{P6}(s)=\dfrac{1}{s(1+5s)}$	$G_{M6}(s)=e^{0.1s}\cdot G_{M1}(s)$	0.3	1.0	0.0	0.0	0.015	2	10
7	$G_{P7}(s)=\dfrac{s+0.03}{(1+2s)(s^2-0.35s+0.15)}$	$G_{M7}(s)=e^{-0.5s}\cdot\dfrac{1}{s^2+2s+1}$	0.5	1.0	0.0	0.0	0.5	2	10
8	$G_{P8}(s)=\dfrac{1}{(1+5s)(2s-1)}$	$G_{M8}(s)=e^{-0.1s}\cdot G_{M1}(s)$	0.5	1.0	0.0	0.0	0.03	2	10



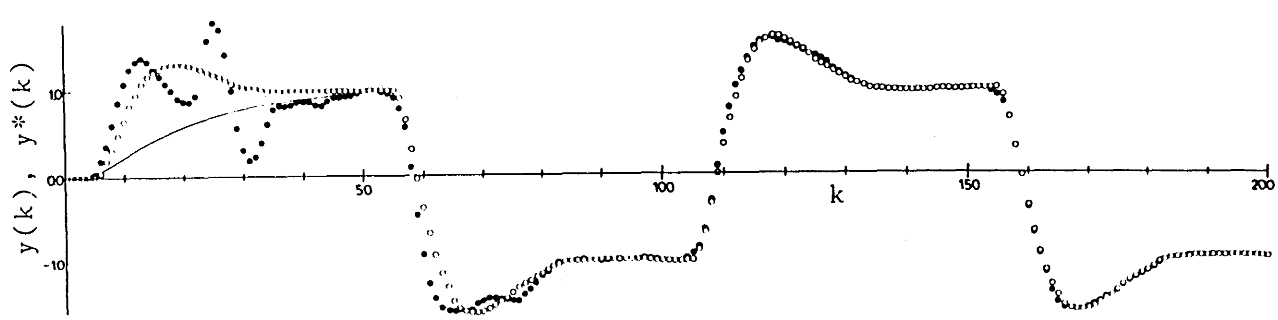
(1)



(2)

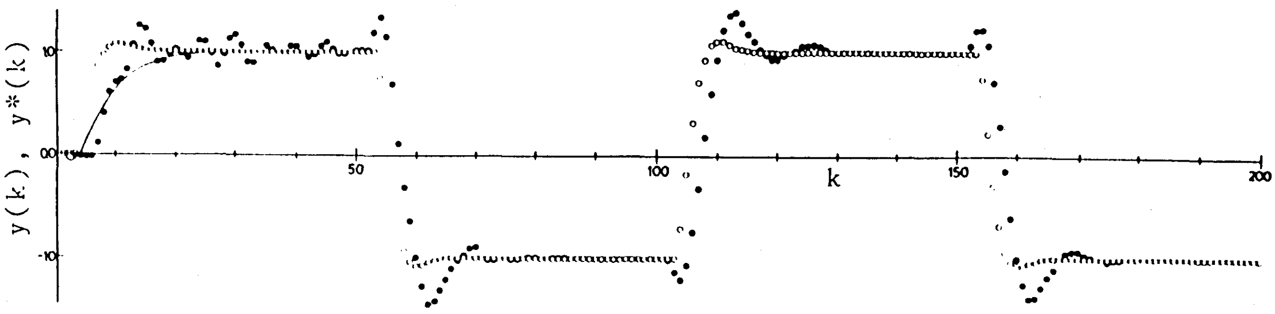


(3)

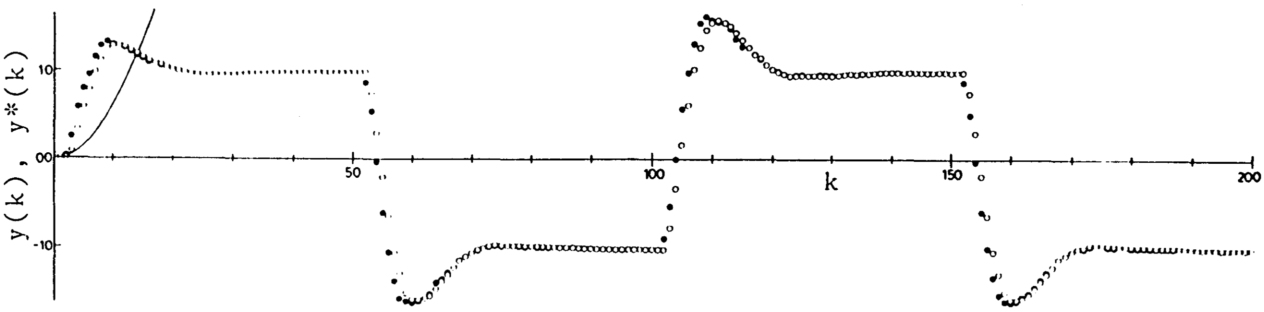


(4)

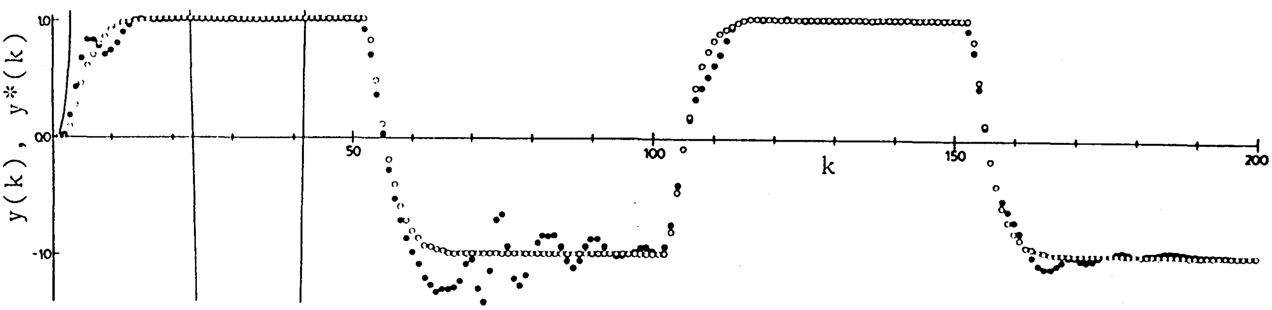
図　4．1　表4．1のプラントに対するシミュレーション結果（直接法）その一



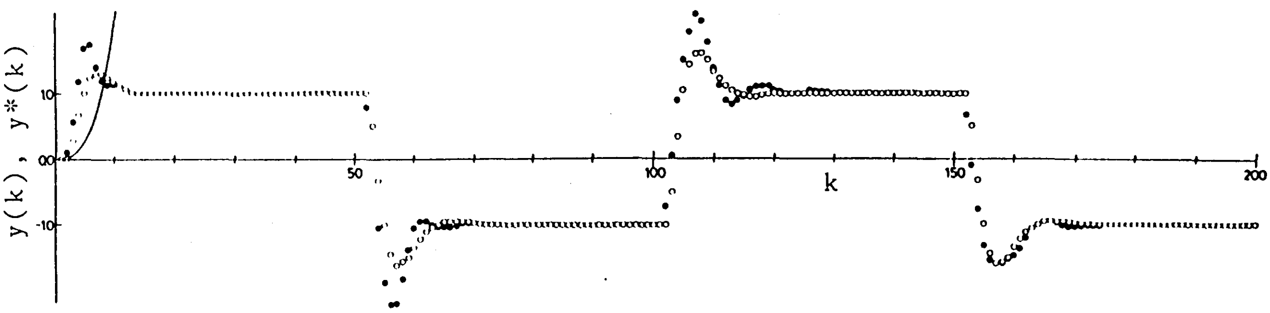
(5)



(6)



(7)



(8)

図　4．1　表4．1のプラントに対するシミュレーション結果（直接法）その二

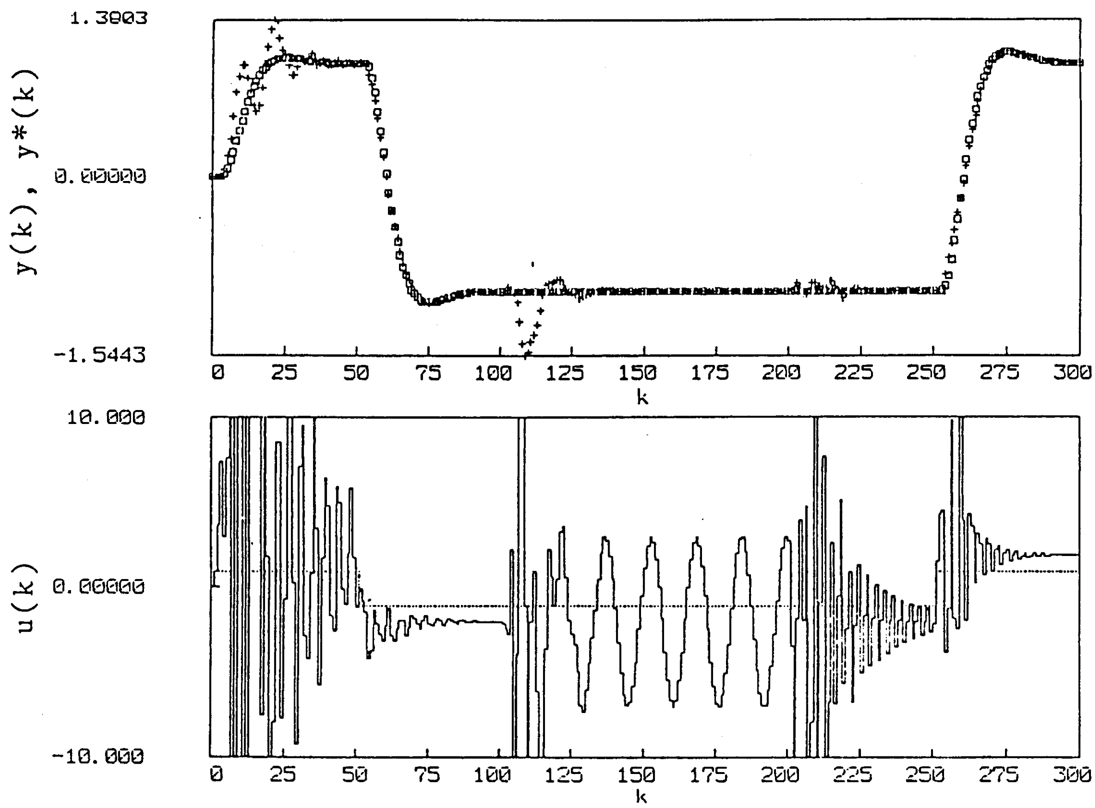


図　4．2　単位円外に零点を持つプラントに対する目標値変化と外乱がある場合のシミュレーション結果（間接法）

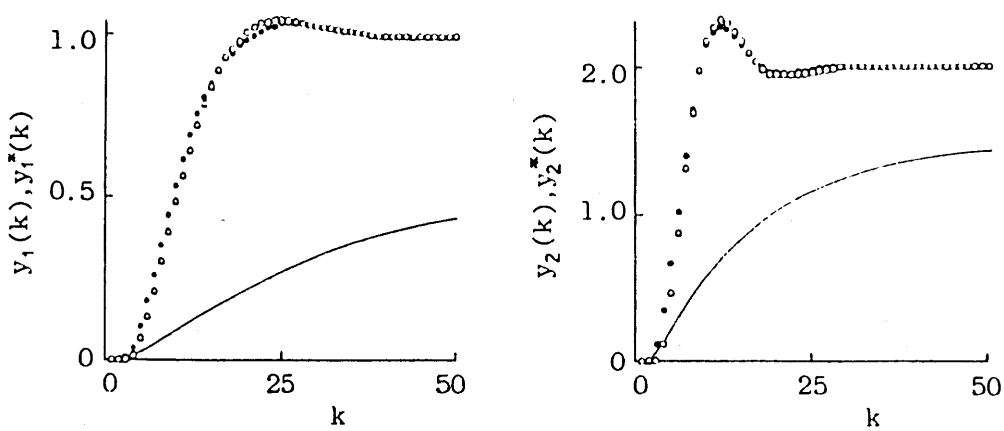


図　４．３　２入力２出力の最小位相プラントに対するシミュレーション結果（直接法）

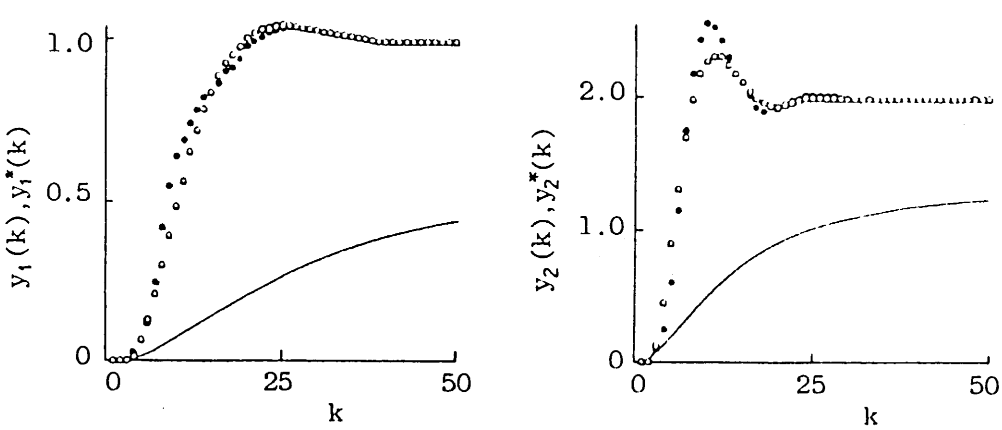


図　４．４　２入力２出力の非最小位相プラントに対するシミュレーション結果（直接法）

第五章　　不安定な逆系を持つ系に対するモデル規範形適応制御系の設計法[24)]

5．1　緒　言

前章では，離散時間モデル規範形適応制御系を応用する際に問題となるプラントに対する逆系の漸近安定性の仮定をプラントのモデル化を変更することによって避ける手法を述べた．その手法により設計された適応制御系は構造が簡潔で種々のプラントに対して有効であることが数値計算例により示されているが，すべての特性のプラントに対して十分な制御性能を保証することは困難である．プラントが逆応答を持つ非最小位相系の場合には，むだ時間＋ＡＲモデルは十分な近似を与えることができないなどの問題が生じる．

本章では，このようなプラントを零点補償と規範モデルの動的補償を行うことにより，安定性と速応性を考慮した離散時間モデル規範形適応制御系を構成する方法について述べる．

この設計法によれば，逆系が不安定な系の制御が可能となるとともに，プラントのむだ時間が不確定性を持つ場合にも，本手法が有効性を持つことを示すことができる．

以下では，本手法で取り扱う問題を述べ，零点補償，規範モデルの動的補償を用いた制御系の構成法を述べる．最後に数値計算例によってその有効性を示す．

5．2　問題の設定

ここでは簡単のため１入力１出力系のみを取り扱うが，以下の議論は多変数系にも適用が可能である．

プラントの記述は前章までに用いたLüders-Narendra の正準形を用いる記述，あるいは差分方程式の記述のどちらでも用いることができる．

また，プラントのむだ時間ｄは本手法では必ずしも既知である必要がないので，ここではｄ＝１としてプラントをつぎのように記述する．

差分方程式による記述：

$$y(k+1)=\sum_{i=1}^{n} a_i\, y(k+1-i)+\sum_{i=0}^{m} b_i\, u(k-i) \tag{5.1}$$

Luders-Narendra の正準形による記述：

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= a_1\, x_1(k)+\sum_{i=2}^{n} x_i(k)+b_0\, u(k) \\ x_i(k+1) &= a_i\, x_1(k)-\lambda_i\, x_i(k)+b_{i-1}\, u(k) \\ y(k) &= x_1(k) \qquad (i=2,\ldots,n) \end{aligned} \tag{5.2}$$

上記のようにプラントが記述されたとき，プラントに対する仮定としてはつぎの条件だけを考える．

１）プラントの次数（の上限）ｎ，ｍは既知．

ここで，プラントに対する仮定として基本的な，零点がｚ平面の単位円内に存在するという条件を要求されないことから，プラントは不安定な逆系を持つ系を含むことになる．

また，$b_0\neq 0$ も要求されないことから，むだ時間にあいまいさを含む場合にも適用が可能となる特徴を持っている．

以下では，１）の仮定のみで安定な適応制御系を構成するための条件と制御系の構造を述べる．

5．3　補償システムの導入

これまでに述べたように，モデル規範形適応制御系では（5.1)式あるいは（5.2)式で記述されるプラントがｚ平面の単位円外に零点を持たないこと，また，$b_0 \neq 0$ が必要である．したがって前述の仮定１）のみのもとでモデル規範形適応制御系を構成することはできない．そこで，図 5.1に示すようにプラントに並列に定常ゲインが零の漸近安定な補償システムⅠを付加し，補償されたプラントがｚ平面の単位円外に零点を持たないするようにする．　補償システムの特性としては種々のものが考えられるが，例えばつぎのような形式のものを用いる．

補償システムⅠ：

$$y_c(k+1) = a_c\, y_c(k+1-i) + \sum_{i=0}^{m_c-1} b_{ci}\, u(k-i) \tag{5.3}$$

上式で $y_c(k)$ は補償システムの出力である．

補償システムを（5.3)式で与えると，補償システムのステップ応答列からその係数を次式で決定でき，補償システムを直感的に決定することが容易となる．

y_{ci}を単位ステップ入力に対する補償システムⅠのｉ時点における出力とすると

$$b_{ci-1} = (y_{ci} - y_{ci-1}) - (y_{ci-1} - y_{ci-2})\, a_c \quad (i=1,\ldots,m_c)$$

$$\sum_{i=0}^{m_c-1} b_{ci} = 0 \tag{5.4}$$

となる．また，a_c はm_c 時点以後の出力差の公比を示し，ＤＣゲインが零となるときつぎになる．

$$a_c = y_{cm_c} / y_{cm_c-1} \tag{5.5}$$

プラントに並列に補償システムⅠを付加することにより，プラント入力 $u(k)$ から拡張出力 $y_a(k) = y(k) + y_c(k)$ に至る特性はつぎになる．

$$y_a(k) = z^{-1}\left[\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i z^{-i}}{1-\sum_{i=1}^{n} a_i z^{-i}} + \frac{\sum_{i=0}^{m_c-1} b_{ci} z^{-i}}{1-a_c z^{-1}}\right] u(k)$$

$$= z^{-1}\frac{(1-a_c z^{-1})(\sum_{i=0}^{m} b_i z^{-i}) + (\sum_{i=0}^{m_c-1} b_{ci} z^{-i})(1-\sum_{i=1}^{n} a_i z^{-i})}{(1-\sum_{i=1}^{n} a_i z^{-i})(1-a_c z^{-1})} u(k) \tag{5.6}$$

上式より補償システムⅠを含むプラントの零点は次式の根となる．

$$(1-a_c\ z^{-1})(\sum_{i=0}^{m} b_i\ z^{-i}) + (\sum_{i=0}^{m_c-1} b_{ci} z^{-i})\ (1-\sum_{i=1}^{n} a_i\ z^{-i})$$

$$= \sum_{i=0}^{n'} b_i' z \quad = 0 \qquad (5.7)$$

ただし，$n' = \max(n + m_c - 1,\ m+1)$ である．

したがって，(5.3)式の各パラメータは (5.7)式の根がｚ平面の単位円内となるように決定される必要がある．実際には，プラントの特性が未知であるので厳密な設計は無理であるが，プラントが漸近安定系の場合には補償システムⅠの逆系の安定化に対する許容度は大きいので，設計にそれほどの困難はない．また，(5.7)式より

$$b_0' = b_0 + b_{c0} \qquad (5.8)$$

となる．b_0'は補償前のプラントのb_0 に対応するものであることから，$b_{c0} \neq 0$ と選定すれば$b_0 = 0$ すなわち，プラントのむだ時間ｄが１から２へ変化した場合にも入力の発生が可能となる．ただし，この場合にも制御系の安定性が保たれるためには (5.7)式の根がｚ平面の単位円内に存在しなければならないことはもち論である．

この補償システムⅠを付加することにより，制御系の漸近安定性を補償することが可能となるが，プラントの出力が規範モデルの出力に完全に追従することは不可能となる．

そこで，この応答の悪化を防ぐために，補償システムⅠと同じ構造の定常ゲインが零の漸近安定な補償システムⅡの出力を規範モデルの出力に加えることを考える．

補償システムⅡ：

$$y_{MC}(k+1) = a_{MC} y_{MC}(k+1-i) + \sum_{i=0}^{m_{MC}-1} b_{MCi}\ u(k-i) \qquad (5.9)$$

ここで，b_{MCi}，a_{MC}は補償システムⅠと同様に定義する．また，$\sum_{i=0}^{m_{MC}-1} b_{MCi} = 0$ とする．

次節では，補償システムⅠを付加したプラントを新たなプラントと考えるとともに，規範モデルの特性を補償システムⅡによって修正したモデル規範形適応制御系の構成法を示す．

5．4　適応制御系の設計

ここでは，プラントが (5.1)式で記述される場合の間接法による構成法と，(5.2)式で記述される場合の直接法による構成法を示す．

はじめに，直接法による構成を行う．まず，出力誤差，拡張出力誤差，パラメータ誤差として，つぎのものを定義する．

$$
\begin{aligned}
&e(k) = y_M(k) - y(k) \\
&e_a(k) = e(k) + y_{MC}(k) - y_C(k) \qquad (5.10) \\
&a_{d1} = \theta_1 - a_1
\end{aligned}
$$

ただし，θ_1 は任意定数とする．

(5.2),(5.3),(5.10)式より誤差方程式は

$$
\begin{aligned}
e_a(k+1) = {} & y_M(k+1) - \theta_1 + a_{d1} y(k) \\
& - \sum_{i=2}^{n} x_i(k) + y_{MC}(k+1) - a_C\, y_C(k) \\
& - \sum_{i=1}^{m_C-1} b_{Ci} u(k-i) - (b_0 + b_{C0})\, u(k) \qquad (5.11)
\end{aligned}
$$

となる．ここで補助信号を

$$
\begin{aligned}
&y_{\lambda i}(k+1) = -\lambda_i\, y_{\lambda i}(k) + K_{yi} y(k) \\
&u_{\lambda i}(k+1) = -\lambda_i\, u_{\lambda i}(k) + K_{ui} u(k) \quad (i=2,\ldots,n) \qquad (5.12)
\end{aligned}
$$

K_{yi}，K_{ui}は零でない任意定数とすると，(5.11),(5.12)式より次式を得る．

$$
\begin{aligned}
e_a(k+1) = {} & y_M(k+1) - \theta_1 + a_{d1} y(k) \\
& - \sum_{i=2}^{n} [\{a_i/K_{yi}\}\, y_{\lambda i}(k) + \{b_{i-1}/K_{ui}\}\, u_{\lambda i}(k)] \\
& + y_{MC}(k+1) - a_C\, y_C(k) - \sum_{i=1}^{m_C-1} b_{Ci} u(k-i) \\
& - (b_0 + b_{C0})\, u(k) + h(k) \qquad (5.13)
\end{aligned}
$$

$$
h(k) = -\sum_{i=2}^{n} (-\lambda_i)^k [x_i(0) - \{a_i/K_{yi}\}\, y_{\lambda i}(0) - \{b_{i-1}/K_{ui}\}\, u_{\lambda i}(0)] \qquad (5.14)
$$

ここで，入力u(k)をつぎのように発生させる．

$$
\begin{aligned}
u(k) = \frac{1}{\pi_0(k)} & [y_M(k+1) - \{\theta_1 - \phi_1(k)\}\, y(k) \\
& + \sum_{i=2}^{n} \{\phi_i(k)\, y_{\lambda i}(k) + \pi_{i-1}(k)\, u_{\lambda i}(k)\} \\
& + y_{MC}(k+1) - a_C\, y_C(k) - \sum_{i=1}^{m_C-1} b_{Ci} u(k-i)] \qquad (5.15)
\end{aligned}
$$

ここで，$\phi_i(k), \pi_i(k)$ は可調整パラメータである．(5.15)式を(5.13)式に代入して整理すれば次式を得る．

$$e_a(k+1) = \{\theta - \hat{\theta}(k)\}^T \delta(k) + h(k) \tag{5.16}$$

ただし，

$$\theta^T = [a_{d1}, -a_2/K_{y2}, \cdots, -a_n/K_{yn}, -b_0 - b_{c0}, -b_1/K_{u2}, \cdots, -b_{n-1}/K_{un}] \tag{5.17}$$

$$\hat{\theta}^T(k) = [\phi_1(k), \cdots \phi_n(k), -\pi_0(k), \pi_1(k), \cdots, \pi_{n-1}(k)] \tag{5.18}$$

$$\delta^T(k) = [y(k), y_{\lambda 2}(k), \cdots, y_{\lambda n}(k), u(k), u_{\lambda 2}(k), \cdots, u_{\lambda n}(k)] \tag{5.19}$$

したがって，つぎの調整アルゴリズムにより $\hat{\theta}(k)$ を調整すれば補償システムⅠを付加されたプラントが z 平面の単位円外に零点を持たなければ $k \to \infty$ で $e_a(k) \to 0$ となる．

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \varepsilon(k) e_a(k) \delta(k-1) \tag{5.20}$$

$$\varepsilon(k) = \rho / \{\delta^T(k-1)\delta(k-1)\},\ 0 < \rho < 2 \tag{5.21}$$

このとき，規範モデルの入力 $r(k)$ が一定，すなわちその出力 $y_M(k)$ が一定となれば $e_a(k) \to 0$ より $y(k) + y_C(k)$ は一定となる．このとき，入力 $u(k)$ も一定となることから，$k \to \infty$ で $y_C(k) \to 0$ より $e(k) \to 0$ となる．さらに，補償システムⅡを適切に選定することにより，過渡状態でも $e(k)$ を十分小さく保つことができる．

間接法による設計はつぎのように行えばよい．

(5.1)，(5.10)式より誤差方程式は

$$e_a(k+1) = y_M(k+1) + y_{MC}(k+1) - \sum_{i=1}^{n} a_i y(k+1-i) - \sum_{i=0}^{m} b_i u(k-i) - a_C y_C(k) - \sum_{i=0}^{m_C-1} b_{Ci} u(k-i) \tag{5.22}$$

となる．上式において $e_a(k+1) = 0$ を実現する入力をプラントの推定パラメータを用いて次式で発生させる．

$$u(k) = \frac{1}{\{\hat{b}_0(k) + b_{C0}\}} [y_M(k+1) + y_{MC}(k+1) - \sum_{i=1}^{n} \hat{a}_i(k) y(k+1-i) - \sum_{i=1}^{m} \hat{b}_i(k) u(k-i) - a_C y_C(k) - \sum_{i=1}^{m_C-1} b_{Ci} u(k-i)] \tag{5.23}$$

推定パラメータの更新アルゴリズムとしては例えば(3.21)～(3.23)式と同じものを用いれ

ばよい．このように間接法によって制御系を構成した場合にも直接法と同様の条件下で $e_a(k)\to 0$ が保証されることは容易に確かめられる．

以上の２種類の設計手順の方針をまとめればつぎのようになる．

1）プラント＋補償システムⅠの零点がｚ平面の単位円内となるように補償システムⅠを定める．

その一つの方法として，プラントのインディシャル応答と，零点がｚ平面の単位円内に存在し，定常ゲインが既知のシステムの応答との差から補償システムⅠを定めることができる．

2）1）で定めた補償システムⅠを付加したプラントの拡張出力 $y_a(k)=y(k)+y_c(k)$ が規範モデルの応答に良く追従するように適応制御系の設計パラメータを選定する．

3）補償システムⅡの特性を調整してプラント出力の過渡応答が規範モデルのそれに近づくように試行をおこなう．

ここでの設計は主に規範モデルの出力が一定となるような場合を考えているが，規範モデルの出力がランプ状，あるいは単一の周波数を持つような場合にも，補償システムⅠの特性をそれぞれランプ入力，正弦波入力に対するゲインが零となるように選定し，かつ，(5.7)式の根をｚ平面の単位円内とすることができれば出力誤差 $e(k)\to 0$ を達成することが可能となる．

5．5　数値計算例と考察[24)]

ここで設計した制御系の特性を検討するため，つぎの連続時間の３次の伝達関数で記述される漸近安定なプラントを用い計算機シミュレーションを行った．

ここでは前節で述べた直接法による結果のみを示す．

［　例　5．1　］

プラントおよび規範モデルに対して(2.68)式のパラメータをつぎのように選んだ．

プラント：$\zeta=1.3$,　$\omega_n=0.69$, $\sigma=4.2$,　$T_1=0$,　$K=1.0$

規範モデル：$\zeta=0.7$,　$\omega_n=1.0$,　$\sigma=1.5$,　$T_1=2.0$,　$K=1.0$

上記の伝達関数をＴ＝0.2 で離散化後の離散時間系の零点は-2.8, -0.196となる．

したがって，補償システムⅠを付加しない場合の制御応答は発散する．そこで，出力列 $y_{ci}(i=0,1,\ldots,7)$ が0.0, 0.016, 0.027, 0.032, 0.035, 0.036, 0.034, 0.032, $a_c=0.94$の補償システムⅠを付加した場合の制御経過を図 5.2に示す．この例では，補償システムⅡを付加しないでも図に示すような良好な結果が得られた．

このときの設計パラメータは$\rho=1.0$，$K_{yi}=K_{ui}=1.0$ $(i=2,3)$，$\pi_0(0)=b_{M0}$, $\theta_1=a_{M1}$, $\lambda_2=-0.76$，$\lambda_3=-0.75$ とし，信号の初期値はすべて零とした．

ただし，b_{M0}, a_{M1}は規範モデルを離散化後,(5.2)式の形式に表現したときのパラメータである．

［　例　5．2　］

連続時間の伝達関数がｓの右半平面に零点を持ち，逆応答特性を有するプラント（逆系が不安定な系）の場合である．プラントのパラメータはつぎのように与えた．

$\zeta=1.2$,　$\omega_n=1.0$,　$\sigma=1.0$,　$T_1=-1.0$, $K=1.3$

規範モデルは例 5.1と同一とした

サンプリング周期Ｔ＝0.2 で離散化後の零点は9.28, -0.476である．

補償システムⅠ，Ⅱの単位ステップ入力に対する出力列，公比をさきに述べた設計手順を用いて，それぞれつぎのように選定した．

補償システムⅠ：0.0, 0.14, 0.18, 0.20, 0.22, 0.25, 0.27, 0.26, 0.25, 0.24 ;

$a_c=0.96$

補償システムⅡ：0.0, 1.0, 0.8, 0.6, 0.5, 0.4, 0.3 ; $a_{MC}=0.75$

このときの制御経過を図 5.3に示す．

この例では，プラントがｓの右半平面に零点を持つにもかかわらず，安定で良好な制御結果が得られ，本設計法の有効性が確認できる．なお，設計パラメータは例 5.1と同一とした．

5．6　結　言

本章では，補償システムを導入することで不安定な逆系を持つ系に適用が可能なモデル規範形適応制御系の設計法を述べ，プラントのステップ応答にもとづく補償システムの設計手順を与えた．

本手法は前章で述べたむだ時間＋ＡＲモデルによるプラントのモデル化が十分な精度で行えない場合にも適用可能であり，さらに例題では示さなかったが，プラントのむだ時間があいまいさを持つ場合，あるいは変化する場合にも適用が可能となる場合があることが理論的に示唆される．

しかし，この手法で厳密な設計を行うことは，従来の設計法における設計パラメータの最適調整と同様，理論的取り扱いが困難な点となっている．

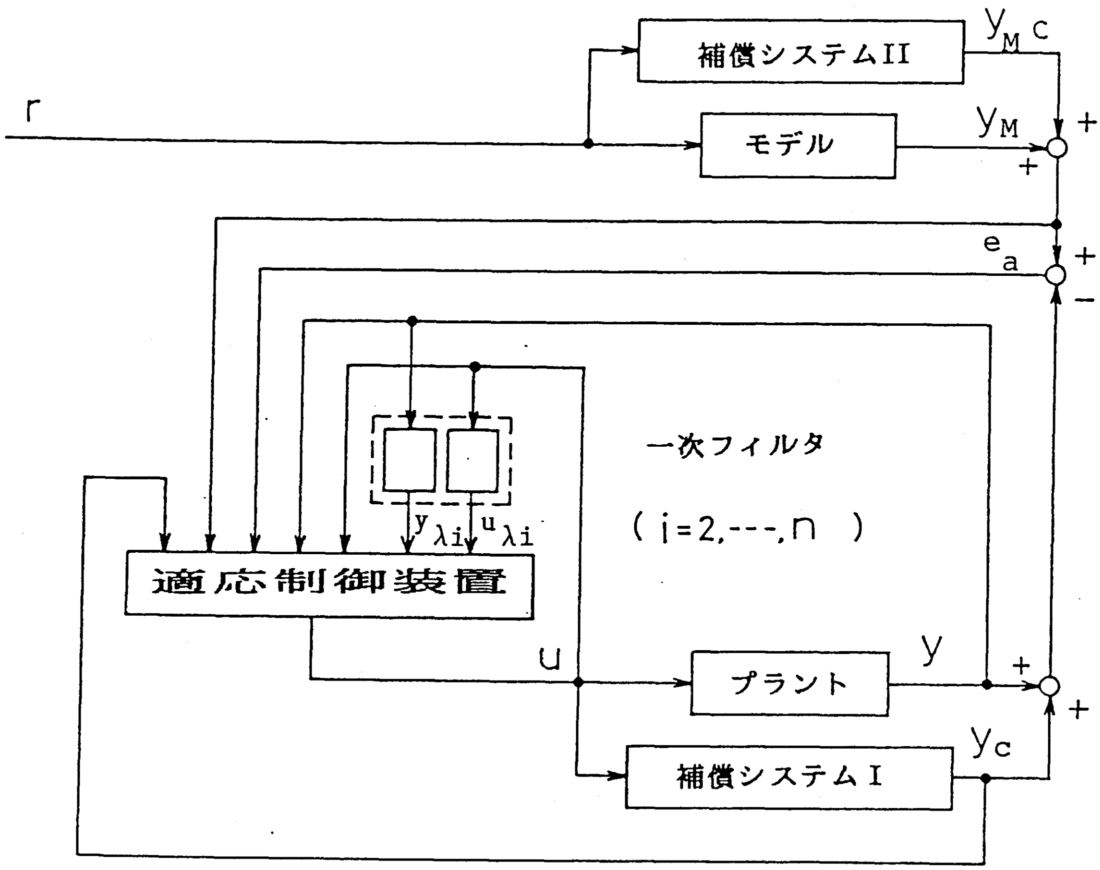


図　5．1　補償システムを含むモデル規範形適応制御系のブロック線図

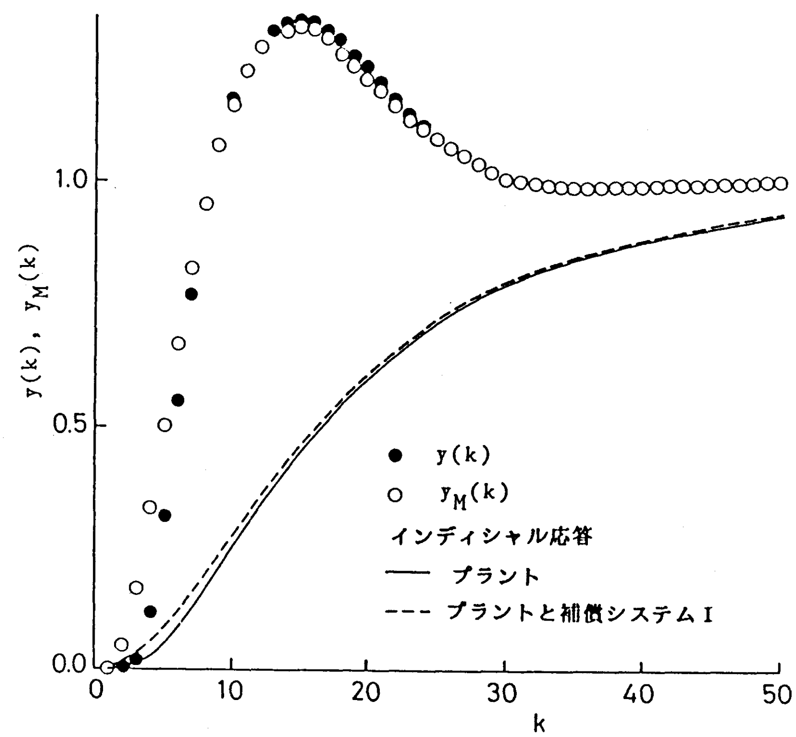


図 5．2 離散化によって非最小位相系となるプラントに対するシミュレーション結果

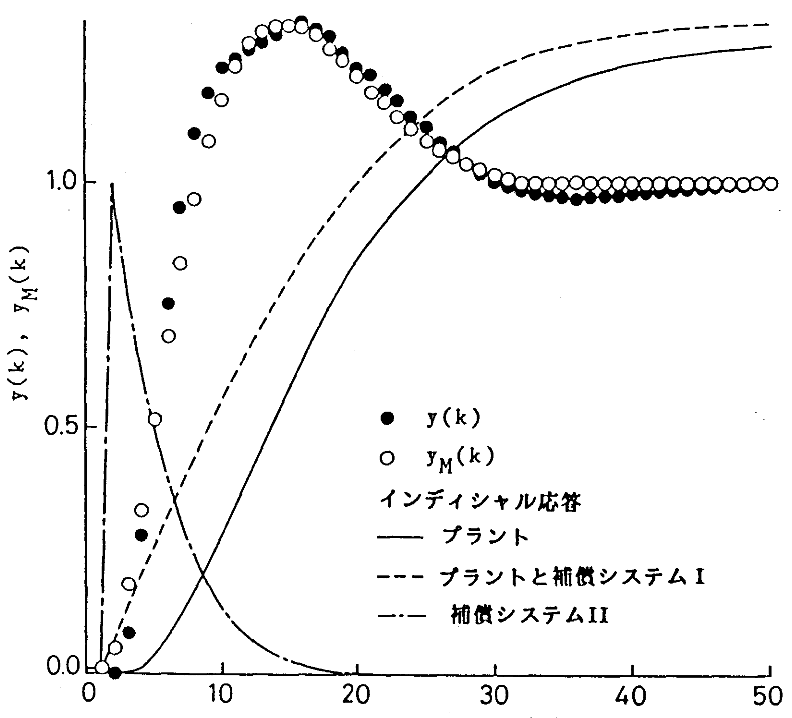


図 5．3 sの右半平面に零点を持つプラントに対するシミュレーション結果

第六章　　むだ時間未知の不安定逆系を持つ系に対する設計法[30),32)]

6．1　緒　言

第四章，第五章において，離散時間モデル規範形適応制御を応用する際に問題となるプラントに対する逆系の漸近安定性の仮定を回避しうる設計法として，プラントのむだ時間＋ＡＲモデルを用いる手法，補償システムを用いプラントの零点補償を行う手法について述べてきた．

このうち，零点補償を行う手法では，補償されたプラントの逆系を漸近安定とし，しかも制御目的を満たすように設計を行うためには，プラントの動特性についてかなりの事前情報を必要としたり，試行錯誤が要求されたりする．

一方，モデル規範形適応制御系では，プラントの逆系の漸近安定性の仮定だけではなく，伝達関数の分母，分子の次数（の上限）およびむだ時間が既知であるという制約条件も存在している．

実際問題としてはプラントの次数，むだ時間などを前もって正確に知ることは困難である．実用的には逆系の漸近安定性（零点）の問題，次数，むだ時間未知の問題を同時に解決する手法の開発が望まれる

プラントのむだ時間＋ＡＲモデルを用いる設計法は，それらの問題を解決する一つの実用的な手法であるが，次数，むだ時間のおおよその値を必要とする．

本章では，これらの問題を同時に解決する制御系の構成法について述べる．この手法は未知のプラントのある分解表現を用いた設計法であり，この方法によれば，漸近安定なプラントが未知のむだ時間を持つ系，また，その逆系が不安定である場合にも安定に制御を行うことが可能となる．

以下，本章では，はじめに設計の基礎となるプラントの分解表現を導入し，１入力１出力系に対してプラントのむだ時間に関する情報をまったく使用しない場合と，その概略値を使用する場合の設計法を述べ，つぎに，その設計法を多変数系に拡張する．また，制御系の内部構造を考察して，従来のモデル規範形適応制御系，適応極配置制御系との関連を明らかにする．

最後に，ここに述べる手法の有効性を示すために行った１入力１出力と２入力２出力のプラントを対象としたシミュレーションンの結果について述べる．

6．2 問題の設定

連続時間系で表されるプラントを零次ホールド要素を前置してサンプリング周期Tで離散化すると，一般につぎのようなＡＲＭＡ形式のプラントモデルで記述することができる．

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_1(z^{-1}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{A}_m(z^{-1}) \end{bmatrix} y(k) = \begin{bmatrix} z^{-d_{11}}\bar{B}_{11}(z^{-1}) & \cdots & z^{-d_{1m}}\bar{B}_{1m}(z^{-1}) \\ \vdots & & \vdots \\ z^{-d_{m1}}\bar{B}_{m1}(z^{-1}) & \cdots & z^{-d_{mm}}\bar{B}_{mm}(z^{-1}) \end{bmatrix} u(k) \tag{6.1}$$

ここで，

$$y^T(k) = [y_1(k), \cdots, y_m(k)] \in R^m$$

$$u^T(k) = [u_1(k), \cdots, u_m(k)] \in R^m$$

$y(k)$および$u(k)$はそれぞれプラントの出力および入力ベクトルを示す．また，d_{ij}はむだ時間を表す１以上の整数であり，$\bar{A}_i(z^{-1})$ $(i=1,\ldots,m)$，$\bar{B}_{ij}(z^{-1})$ $(i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,m)$は時間遅れ演算子$z^{-1}$についてのつぎのような多項式である．

$$\bar{A}_i(z^{-1}) = 1 - a_i^1 z^{-1} - \cdots - a_i^{n_i} z^{-n_i} \quad (i=1,\ldots,m) \tag{6.2}$$

$$\bar{B}_{ij}(z^{-1}) = b_{ij}^0 + b_{ij}^1 z^{-1} + \cdots + b_{ij}^{m_{ij}} z^{-m_{ij}} (i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,m) \tag{6.3}$$

ここで，(6.1)式で記述されるプラントに対してつぎのような仮定をおくものとする．

1）プラントの次数の上限$n = \max_{i,j}(n_i, m_{ij}+d_{ij})$は既知．

2）$\bar{A}_i(z^{-1})$は漸近安定な多項式，すなわちプラントの極は漸近安定，ただし，$\bar{A}_i(z^{-1})$，$\bar{B}_{ij}(z^{-1})$の係数はすべて未知．プラントはむだ時間が未知の不安定な逆系を持つ系を含むものとする．

3）プラントはつぎの条件を満たす．

$$\det \begin{bmatrix} \bar{B}_{11}(1) & \cdots & \bar{B}_{1m}(1) \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{B}_{m1}(1) & \cdots & \bar{B}_{mm}(1) \end{bmatrix} \neq 0 \tag{6.4}$$

仮定３）はプラントが静的に非干渉化可能であること，あるいは１入力１出力系においてはＤＣゲインが零ではないことを表している．また，この仮定は従来のモデル規範形適応制御系においてプラントに要求されるプラントの逆系が漸近安定であるという仮定に比較して，はるかに広い範囲のプラントで満たされるものである．

(6.1)式は同じ入力ベクトルを持つ多入力１出力系を組合わせたものとみなすことができるが，これをまとめて，つぎのような差分方程式で表す．

$$y(k+1) = \sum_{i=1}^{n} A_i\, y(k+1-i) + \sum_{i=0}^{n-1} B_i\, u(k-i) \tag{6.5}$$

ここで，$A_i \in R^{m \times m}$, $B_i \in R^{m \times m}$ はつぎのような要素を持つ定数行列である．

$$A_i = \mathrm{diag}(a^i_1, \cdots, a^i_m) \tag{6.6}$$

ただし，$i > n_j$ のとき，$a^i_j = 0$　　$(i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,m)$

$$B_i = [b^i_{ij}] \tag{6.7}$$

ただし，　$i < d_{jk}$　あるいは　$i > m_{jk} + d_{jk} - 1$ のとき

$b^i_{jk} = 0$　　$(i=0,1,\ldots,n-1;\ j=1,\ldots,m;\ k=1,\ldots,m)$

(6.5)式の表現をもとに，むだ時間が未知で逆系が不安定な場合にも対応が可能な適応制御系をモデル規範形適応制御手法をもとに設計することは困難であると考えられるので，ここでは以下に述べるようなプラントの分解表現を導入してこの問題を解決する．

(6.5)式は次のように書き改めることができる．

$$\begin{aligned} y(k+1) = {} & \sum_{i=1}^{n} A_i\, y(k+1-i) + B_g \sum_{i=0}^{n-1} B_i' u(k-i) \\ & + \sum_{i=0}^{n-2} B_{ci} \{ u(k-i) - u(k-1-i) \} \end{aligned} \tag{6.8}$$

ここで，$B_g \in R^{m \times m}$, $B_{ci} \in R^{m \times m}$ は (6.5)式中の B_i とつぎの関係を持つ．

$$
\left.
\begin{array}{llllll}
B_g B_0' & + & B_{c0} & & = & B_0 \\
B_g B_1' & + & B_{c1} & - \; B_{c0} & = & B_1 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
B_g B_i' & + & B_{ci} & - \; B_{ci-1} & = & B_i \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots \\
B_g B_{n-1}' & & & - \; B_{cn-2} & = & B_{n-1}
\end{array}
\right\}
\tag{6.9}
$$

$$
B_g = [\, b_{gjk} \,] = [\, b_{g1}^T, \cdot\cdot\cdot, b_{gm}^T \,], \quad b_{gi} \in R^m, \quad b_{gjk} \in R^1
$$
$$
(i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,m;\ k=1,\ldots,m)
$$

$$
B_{ci} = [\, b_{cjk}^i \,] = [\, b_{c1}^{iT}, \cdot\cdot\cdot, b_{cm}^{iT} \,], \quad b_{cj}^i \in R^m, \quad b_{cjk}^i \in R^1
$$
$$
(i=0,1,\ldots,n-2;\ j=1,\ldots,m;\ k=1,\ldots,m)
$$

$$
B_i' = [\, b'^i_{jk} \,] = [\, b'^{iT}_1, \cdot\cdot\cdot, b'^{iT}_m \,], \quad b'^i \in R^m, \quad b'^i_{jk} \in R^1
$$
$$
(i=0,1,\ldots,n-1;\ j=1,\ldots,m;\ k=1,\ldots,m)
$$

また，$B_i' \in R^{m \times m}$ は $\det[\sum_{i=0}^{n-1} B_i' z^{n-1-i}]=0$ の根が z 平面の単位円内に存在する限り任意の定数行列である．

これより，B_g，B_{ci}はB_i，B_i'によって一意に定まることがわかる．また，(6.9)式より

$$
B_g = (\sum_{i=0}^{n-1} B_i) \cdot (\sum_{i=0}^{n-1} B_i')^{-1} \tag{6.10}
$$

となり，仮定３）からB_g は常に正則となることがわかる．

次節以後では，(6.8)式の表現をもとに，むだ時間が未知の不安定な逆系を持つ系に対応が可能な適応制御系の設計法を示し，その構造についても考察する．

設計に際し，１入力１出力系に対しては（4.6)式における係数b_i'の選定に関して，つぎの２通りを考える．

１）プラントのむだ時間に関しての情報をまったく必要としない簡単な定式化．

２）プラントのむだ時間の概略値のわかっている場合，それを考慮可能な定式化．

さらに，制御系の設計法として１）については直接法および間接法による定式化を，２）については間接法の定式化を示す．また，多変数系に対しては，制御系の構造が複雑となることから１）の間接法による構成法のみを示す．

以下で考える制御の目的は，プラントのむだ時間が未知，またその逆系が不安定である場合にも，与えられた有界な目標値$y^*(k)$にプラント出力$y(k)$を有界なプラント入力により追従させることとする．

6．3　制御系の設計

6．3．1　1入力1出力系に対する設計[30)]

まず，プラント出力と目標値との誤差を定義する．

$$e(k)=y^*(k)-y(k) \tag{6.11}$$

ここで，目標値$y^*(k)$の数列は既知で，k時点で$y^*(k+d^*)$（$d^*\geq 1$でd^*はプラントのむだ時間の概略値をもとに設計者が定める）が決定可能であればよく，例えば（3.12),(3.13)式において$d_M=d^*$とした規範モデルの出力として計算される．

最初に，前述の設計条件1）の場合の直接法の設計法を示す．このとき，(6.8),(6.11)式より1入力1出力系の場合の誤差方程式はつぎになる．

$$\begin{aligned}e(k+1)=y^*(k+1)-&\sum_{i=1}^{n}a_i\,y(k+1-i)\\&-b_g\sum_{i=0}^{n-1}b_i'u(k-i)\\&-\sum_{i=0}^{n-2}b_{ci}\{u(k-i)-u(k-1-i)\}\end{aligned} \tag{6.12}$$

つぎに，拡張誤差信号$\hat{e}_a(k)$および，補助信号$\hat{y}_c(k)$を

$$\hat{e}_a(k)=e(k)+\hat{y}_c(k) \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}_c(k)=&\sum_{i=1}^{n}\hat{a}_i(k-1)\,\hat{y}_c(k-i)\\&-\sum_{i=0}^{n-2}\hat{b}_{ci}(k-1)\{u(k-1-i)-u(k-2-i)\}\end{aligned} \tag{6.14}$$

と置く．ただし，$\hat{a}_i(k-1)$，$\hat{b}_{ci}(k-1)$は後に述べるパラメータ調整アルゴリズムにより調整される可調整パラメータである．(6.12)～(6.14)式より，拡張誤差$\hat{e}_a(k)$に関する方程式はつぎになる．

$$\begin{aligned}\hat{e}_a(k+1)=y^*(k+1)-&\sum_{i=1}^{n}a_i\,y(k+1-i)\\&-b_g\sum_{i=0}^{n-1}b_i'u(k-i)\\&-\sum_{i=0}^{n-2}b_{ci}\{u(k-i)-u(k-1-i)\}\\&+\sum_{i=1}^{n}\hat{a}_i(k)\,y_c(k+1-i)\\&+\sum_{i=0}^{n-2}\hat{b}_{ci}(k)\{u(k-i)-u(k-1-i)\}\end{aligned} \tag{6.15}$$

プラントがむだ時間未知の不安定な逆系を持つ系である場合$e(k+1)=0$を達成する入力を発生させることは一般にできないため，ここでは(6.15)式における拡張誤差$\hat{e}_a(k+1)=0$となるようにプラント入力$u(k)$次式で発生させることとする．

$$u(k)=\frac{1}{b_0'\hat{b}_g(k)}[y^*(k+1)-\sum_{i=1}^{n}\hat{a}_i(k)\{y(k+1-i)$$

$$-\hat{y}_c(k+1-i)\}]-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{b_i'}{b_0'}u(k-i) \qquad (6.16)$$

ただし，この場合$b_0'\neq0$と選定し，$\hat{b}_g(k)$は可調整パラメータで，先に述べた$\hat{a}_i(k)$，$\hat{b}_{ci}(k)$とともに調整される．このとき，目標値の計算において，規範モデルのむだ時間$d^*=1$として$y^*(k+1)$を計算すればよい．この(6.16)式を(6.15)式に代入して整理すると，

$$e_a(k+1)=\{\hat{\theta}(k)-\theta\}^T\delta(k) \qquad (6.17)$$

となる．ここで，

$$\hat{\theta}^T(k)=[\hat{a}_1(k),\cdots,\hat{a}_n(k),\hat{b}_g(k),\hat{b}_{c0}(k),\cdots,\hat{b}_{cn-2}(k)] \qquad (6.18)$$

$$\theta^T=[a_1,\cdots,a_n,b_g,b_{c0},\cdots,b_{cn-2}] \qquad (6.19)$$

$$\delta^T(k)=[y(k),\cdots,y(k+1-n),\{\sum_{i=0}^{n-1}b_i'u(k-i)\},$$
$$u(k)-u(k-1),\cdots,u(k+2-n)-u(k+1-n)] \qquad (6.20)$$

(6.17)式中の可調整パラメータベクトルの更新アルゴリズムは(5.2),(5.21)式のアルゴリズムと同一形式のアルゴリズムを用いればよい．このとき，$k\to\infty$で信号ベクトル$\delta(k)$が有界であれば$\hat{e}_a(k)\to0$が保証される．さらに，$u(k)=\mathrm{const.}$となれば$e(k)\to0$が達成される．

ここで行った直接法による設計法は容易に間接法による設計に変更することができる．その場合には，(6.8)式に対するプラントの同定モデルとして，つぎのものを考える．

$$\begin{aligned}\hat{y}(k+1)=&\sum_{i=1}^{n}\hat{a}_i(k)y(k+1-i)\\&+\hat{b}_g(k)\sum_{i=0}^{n-1}b_i'u(k-i)\\&+\sum_{i=0}^{n-2}\hat{b}_{ci}(k)\{u(k-i)-u(k-1-i)\}\end{aligned} \qquad (6.21)$$

このとき，同定誤差を

$$\hat{e}(k)=\hat{y}(k)-y(k) \qquad (6.22)$$

とすると，(6.8),(6.21)式より

$$\hat{e}(k+1)=\{\hat{\theta}(k)-\theta\}^T\delta(k) \qquad (6.23)$$

を得る．ここで，$\hat{\theta}(k)$，θ，$\delta(k)$は(6.18)～(6.20)式で定義されているものと同一である．

間接法の場合の推定パラメータの調整アルゴリズムとしては(3.21)～(3.23)式において $d=1$ としたアルゴリズムを用いればよい．この調整アルゴリズムによって調整された(6.21)式中の推定パラメータを用い，(6.14)式の補助信号および(6.16)式のプラント入力を発生させれば間接法の制御系を構成することができる．このとき，拡張誤差 $\hat{e}_a(k)$ に関する方程式は直接法の場合と同一の(6.17)式となることから，(6.23)式より

$$\hat{e}_a(k)=\hat{e}(k) \tag{6.24}$$

を得る．したがって，直接法と同じ条件のもとで $k\to\infty$ で $\hat{e}_a(k)\to0$ が保証され，$e(k)\to0$ を達成することができる．

ここまでの設計法では，プラントのむだ時間をまったく考慮することなく定式化を行ってきたが，以下ではプラントのむだ時間の概略値 $\hat{d}$ が得られたとして，これを考慮可能な2）の場合の設計法を間接法の定式化によって示す．

この場合，プラントの（6.8)式による表現をつぎのように書き改める．

$$\begin{aligned} y(k+1) &= \sum_{i=1}^{n} a_i\, y(k+1-i) \\ &+ b_g \sum_{i=0}^{n-\hat{d}} b_i'' u(k+1-\hat{d}-i) \\ &+ \sum_{i=0}^{n-2} b_{ci}\{u(k-i)-u(k-1-i)\} \end{aligned} \tag{6.25}$$

上式は（6.8)式において $b_i'=0$ $(i=0,1,...,\hat{d}-2)$ とした場合に相当する表現になっている．(6.25)式中，$\hat{d}$ はプラントのむだ時間の概略値であり，これは必ずしもプラントの真のむだ時間と一致している必要はない．また，b_i'' は $b_0''\neq0$ で $\sum_{i=0}^{n-\hat{d}} b_i'' z^{n-\hat{d}-i}$ が漸近安定多項式となるように設計者が決定する．つぎに，この設計法を，まず，プラントパラメータが既知としたときについて示す．

このとき，補助信号 $y_c(k)$ は次式で計算される．

$$\begin{aligned} y_c(k) &= \sum_{i=1}^{n} a_i\, y_c(k-i) \\ &-\sum_{i=0}^{n-2} b_{ci}\{u(k-1-i)-u(k-2-i)\} \end{aligned} \tag{6.26}$$

さらに，

$$y_a(k)=y(k)-y_c(k) \tag{6.27}$$

とすると，(6.25)～(6.27)式より次式を得る．

$$\begin{aligned} y_a(k+1) &= \sum_{i=1}^{n} a_i\, y_a(k+1-i) \\ &+ b_g \sum_{i=0}^{n-\hat{d}} b_i'' u(k+1-\hat{d}-i) \end{aligned} \tag{6.28}$$

ここでは，(6.25)式で表されるプラントの逆系が不安定である場合を考え，(6.28)式で示される漸近安定な逆系を持つシステムの出力$y_a(k)$を目標値$y^*(k)$に一致させることとする．このとき，$y_a(k)$と$y^*(k)$との誤差を

$$e_a(k)=y^*(k)-y_a(k) \tag{6.29}$$

とすると$e_a(k)$に関する方程式は(6.28),(6.29)式よりつぎになる．

$$\begin{aligned} e_a(k+1)=&y^*(k+1)-\sum_{i=1}^{n} a_i\, y_a(k+1-i) \\ &-b_g\sum_{i=0}^{n-\hat{d}} b_i'' u(k+1-\hat{d}-i) \end{aligned} \tag{6.30}$$

上式より，$e_a(k+1)=0$となるよう，プラント入力$u(k)$を次式で発生させる．

$$\begin{aligned} u(k)=&\frac{1}{b_0''b_g}\left[y^*(k+\hat{d})-\sum_{i=1}^{n} a_i\, y^*(k+\hat{d}-i)-u_a(k)\right] \\ &-\sum_{i=1}^{n-\hat{d}} \frac{b_i''}{b_0''} u(k-i) \end{aligned} \tag{6.31}$$

ただし，$u_a(k)$は$e_a(k+\hat{d})=0$となるように，後に定めるものとする．(6.31)式を(6.30)式に代入すると

$$e_a(k+1)=\sum_{i=1}^{n} a_i\, e_a(k+1-i)+u_a(k+1-\hat{d}) \tag{6.32}$$

を得る．(6.32)式より$e_a(k+1)=0$を達成する$u_a(k)$を求めると$e_a(k)$の未来値が必要となり不都合を生じる．このため，(6.32)式を，代入を繰り返すことによってつぎのように書き改める．

$$e_a(k+\hat{d})=\sum_{i=1}^{n} a_i'\, e_a(k+1-i)+\sum_{i=0}^{\hat{d}-1} c_i\, u_a(k-i) \tag{6.33}$$

ただし，a_i'，c_iはa_jと$\hat{d}$とによって定まる定数であり，$c_0=1$となる．(6.33)式より$e_a(k+\hat{d})=0$すなわち$y^*(k+\hat{d})=y_a(k+\hat{d})$となる$u_a(k)$を求めるとつぎになる．

$$u_a(k)=-\sum_{i=1}^{n} a_i'\, e_a(k+1-i)-\sum_{i=1}^{\hat{d}-1} c_i\, u_a(k-i) \tag{6.34}$$

以上がプラントパラメータが既知の場合の設計であるが，実際には各式中のパラメータa_i，b_g，b_{ci}は未知であるので，それらを推定する必要がある．

このとき，プラントの同定モデルとしては(6.21)式において$b_i'=0$ $(i=0,1,\ldots,\hat{d}-2)$，$b_i'=b_{i-\hat{d}+1}''$ $(i=\hat{d}-1,\ldots,n-1)$としたものを用い，(3.21)～(3.23)式のパラメータ調整アルゴリズムで$d=1$として各推定値$\hat{a}_i(k)$,$\hat{b}_g(k)$,$\hat{b}_{ci}(k)$を調整する．

補助信号およびプラント入力はそれぞれ推定パラメータを用いて次式で計算する．

$$\hat{y}_c(k) = \sum_{i=1}^{n} \hat{a}_i(k-\hat{d})\,\hat{y}_c(k-i) - \sum_{i=0}^{n-2} \hat{b}_{ci}(k-1)\,\{u(k-1-i) - u(k-2-i)\} \tag{6.35}$$

$$u(k) = \frac{1}{b_0''\hat{b}_g(k)}\left[y^*(k+\hat{d}) - \sum_{i=1}^{n} \hat{a}_i(k)\,y^*(k+\hat{d}-i) - \hat{u}_a(k)\right] - \sum_{i=1}^{n-\hat{d}} \frac{b_i''}{b_0''}\,u(k-i) \tag{6.36}$$

ただし，$\hat{u}_a(k)$ は後に決定する．

ここで，$\hat{y}_a(k) = y(k) - \hat{y}_c(k)$ とおき(6.30)式に対応する $\hat{e}_a(k+1)$ に関する方程式を求めると

$$\begin{aligned}
\hat{e}_a(k+1) &= y^*(k+1) - \hat{y}_a(k+1) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \hat{a}_i(k+1-\hat{d})\,\hat{e}_a(k+1-i) + \hat{u}_a(k+1-\hat{d}) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \{\hat{a}_i(k+1-\hat{d}) - \hat{a}_i(k)\}\,y(k+1-i) \\
&\quad + \{\hat{b}_g(k+1-\hat{d}) - \hat{b}_g(k)\}\,\{\sum_{i=0}^{n-\hat{d}} b_i''u(k+1-\hat{d}-i)\} \\
&\quad + \{\hat{\theta}(k) - \theta\}^T \delta(k)
\end{aligned} \tag{6.37}$$

となる．ただし，$\hat{\theta}(k)$，θ，$\delta(k)$ はさきの定義と同一である．(6.23)式より信号が有界であれば(3.21)～(3.23)式のアルゴリズムより $k \to \infty$ で $\{\hat{\theta}(k) - \theta\}^T \delta(k) \to 0$ かつ $\hat{\theta}(k) \to \mathrm{const.}$ が保証されることを考慮すると(6.37)式より次式を得る．

$$\hat{e}_a(k+1) - \sum_{i=1}^{n} \hat{a}_i(k+1-\hat{d})\,\hat{e}_a(k+1-i) - \hat{u}_a(k+1-\hat{d}) = 0 \tag{6.38}$$

上式より $\hat{e}_a(k+\hat{d}) = 0$ となる $\hat{u}_a(k)$ を求めるために(6.33)式と同様に書き改めることにより

$$\hat{u}_a(k) = -\sum_{i=1}^{n} \hat{a}_i'(k)\,\hat{e}_a(k+1-i) - \sum_{i=1}^{\hat{d}-1} \hat{c}_i(k)\,\hat{u}_a(k-i) \tag{6.39}$$

と決定できる．ただし，$\hat{a}_i'(k)$，$\hat{c}_i(k)$ は $\hat{a}_i(k+1-\hat{d})$ ，....，$\hat{a}_i(k)$ と $\hat{d}$ とによって k 時点で計算可能な値となっている．

以上のようにして，プラントパラメータが未知の場合の設計を行えばよい．

6．3．1　多変数系に対する設計[32)]

プラントが多変数系の場合にも前節で述べた設計法と同様な３種類の設計を行うことができるが，ここでは実用性を考慮し，制御系が簡潔となる設計条件１）の間接法による制御系構成の結果のみを示す．

この場合，(6.8)式のプラントの表現がm組のm入力１出力系とみなしうることから，プラントの同定モデルとして次式を用いることとする．

$$\hat{y}_i(k+1)=\hat{\theta}_i^T(k)\,\delta(k)\qquad (i=1,\ldots,m)\tag{6.40}$$

ここで，

$$\hat{y}^T(k)=[\hat{y}_1(k),\cdots,\hat{y}_m(k)]\tag{6.41}$$

$$\hat{\theta}_i^T(k)=[\hat{a}_i^1(k),\cdots,\hat{a}_i^n(k),\hat{b}_{gi}(k),\hat{b}_{ci}^0(k),\cdots,\hat{b}_{ci}^{n-2}(k)]$$

$$\hat{B}_g(k)=[\hat{b}_{g1}^T(k),\cdots,\hat{b}_{gm}^T(k)],\ \hat{b}_{gi}(k)\in R^m$$

$$\hat{B}_{cj}(k)=[\hat{b}_{c1}^{jT}(k),\cdots,\hat{b}_{cm}^{jT}(k)],\ \hat{b}_{ci}^j(k)\in R^m$$

$$(i=1,\ldots,m;j=0,1,\ldots,n-2)\tag{6.42}$$

$$\delta_i^T(k)=[y_i(k),\cdots,y_i(k+1-n),\{\sum_{j=0}^{n-1}B_j'u(k-j)\}^T,$$
$$u^T(k)-u^T(k-1),\cdots,u^T(k+2-n)-u^T(k+1-n)]$$
$$(i=1,2,\ldots,m)\tag{6.43}$$

上式中の推定パラメータベクトル$\hat{\theta}_i(k)$の調整アルゴリズムとしては１入力１出力系の場合と同形式の(4.26)〜(4.28)式のアルゴリズムにおいて$d_i=1\ (i=1,\ldots,m)$として計算を行えばよい．入力発生に必要な補助信号　$\hat{y}_c^T(k)=[\hat{y}_{c1}(k),\ldots,\hat{y}_{cm}(k)]$は次式により算出する．

$$\hat{y}_{ci}(k)=\sum_{j=1}^{n}\hat{a}_i^j(k-1)\,\hat{y}_{ci}(k-j)$$
$$+\sum_{j=0}^{n-2}\hat{b}_{ci}^j(k-1)\{u(k-1-j)-u(k-2-j)\}$$
$$(i=1,\ldots,m)\tag{6.44}$$

間接法による構成では容易にプラント入力の振幅制限を考慮できることから，プラント入力　$u^T(k)=[u_1(k),\ldots,u_m(k)]$をつぎのように発生させる．

$$u_i(k) = \begin{cases} u_{ci}(k) & : |u_{ci}(k)| \leqq u'_{\max i} \\ u'_{\max i}\,\mathrm{sgn}[u_{ci}(k)] & : |u_{ci}(k)| > u'_{\max i} \end{cases}$$

$$(i=1,\ldots,m) \qquad (6.45)$$

ここで，$u'_{\max i}$ は許容できる入力の絶対値の最大値であり，信号 $u_c^T(k)=[u_{c1}(k),\ldots,u_{cm}(k)]$ は推定パラメータを用いて次式で計算される．

$$u_c(k) = B_0'^{-1}\,\hat{B}_g(k)^{-1}\,\bar{u}(k) - \sum_{i=1}^{n-1} B_0'^{-1} B_i' u(k-i) \qquad (6.46)$$

$$\bar{u}^T(k) = [\bar{u}_1(k),\cdots,\bar{u}_m(k)] \qquad (6.47)$$

$$\bar{u}_i(k) = y_i^*(k+1) - \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_i^j(k)\,[y_i(k+1-j) - \hat{y}_{ci}(k+1-j)]$$

$$(i=1,\ldots,m) \qquad (6.48)$$

ここで，$\hat{B}_g(k)$ はすべての k に対して正則であると仮定した．また，$y^{*T}(k) = [y^*_1(k),\cdots,y^*_m(k)]$ は有界な目標値である．このように制御系を構成したとき(6.45)〜(6.48)式を (6.8)式に代入して整理すると，拡張誤差 $\hat{e}_{ai}(k) = y_i^*(k) - y_i(k) + \hat{y}_{ci}(k)$ に関する方程式は１入力１出力系の場合と同一形式の

$$\hat{e}_{ai}(k+1) = [\hat{\theta}_i(k) - \theta_i]^T\,\delta_i(k) + \hat{b}_{gi}^T(k)\,[u(k) - u_c(k)]$$

$$(i=1,\ldots,m) \qquad (6.49)$$

となることが確かめられ，さきと同様の議論で目標値 $y^*(k)$ が許容される入力で実現可能なとき，$k\to\infty$ で $\hat{e}_a(k)\to 0$ が保証され，$e(k)\to 0$ が達成されることとなる．

ここでは (6.8)式のプラント表現において，行列 A_i は対角行列と考えたが，任意の j, k に対して $a_j^i = a_k^i = a_i$ すなわち $A_i = a_i I$ とみなしうる場合には，つぎのようなプラントの同定モデルとパラメータ推定アルゴリズムを用いることができる.[57)]

同定モデル：

$$\hat{y}(k+1) = \delta(k)\,\hat{\theta}(k) \qquad (6.50)$$

ここで，

$$\hat{\theta}^T(k) = [\hat{a}_1(k),\cdots,\ \hat{a}_n(k), \hat{b}_{g11}(k), \hat{b}^0_{c11}(k),\cdots,\ \hat{b}^{n-2}_{c11}(k), \hat{b}^0_{g12}(k), \hat{b}^0_{c12}(k),\cdots,\ \hat{b}^{n-2}_{c12}(k),\cdots,\ \hat{b}_{gm1}(k), \hat{b}^0_{cm1}(k),\cdots,\ \hat{b}^{n-2}_{cm1}(k),\cdots,\ \hat{b}_{gmm}(k), \hat{b}^0_{cmm}(k),\cdots,\ \hat{b}^{n-2}_{cmm}(k)\ ] \in R^{n(m^2+1)} \tag{6.51}$$

$$\delta(k) = \begin{bmatrix} \delta_1{}^T(k) \\ \vdots \\ \delta_m{}^T(k) \end{bmatrix} \in R^{m \times n(m^2+1)} \tag{6.52}$$

$$\begin{aligned}\delta_i^T(k) = [\, & y_i(k),\cdots,\ y_i(k+1-n), 0,\ \cdots, 0,\ \{\sum_{j=0}^{n-1} b_{i1}^{j}(k) u_1(k-j)\},\\ & u_1(k)-u_1(k-1),\ \cdots,\ u_1(k+2-n)-u_1(k+1-n),\ \{\sum_{j=0}^{n-1} b_{i2}^{j}(k) u_2(k-j)\},\\ & u_2(k)-u_2(k-1),\ \cdots,\ u_2(k+2-n)-u_2(k+1-n),\ldots,\ \{\sum_{j=0}^{n-1} b_{i\ell}^{j}(k) u_\ell(k-j)\},\\ & u_\ell(k)-u_\ell(k-1),\ \cdots,\ u_\ell(k+2-n)-u_\ell(k+1-n),\ldots,\ \{\sum_{j=0}^{n-1} b_{im}^{j}(k) u_m(k-j)\},\\ & u_m(k)-u_m(k-1),\ \cdots,\ u_m(k+2-n)-u_m(k+1-n), 0,\ \cdots, 0] \in R^{n(m^2+1)}\end{aligned} \tag{6.53}$$

パラメータ推定アルゴリズム：

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \Gamma(k-1)\delta^T(k-1)e^*(k) \tag{6.54}$$

$$\Gamma(k) = \frac{1}{\lambda(k)}[\Gamma(k-1) - \frac{\Gamma(k-1)\delta^T(k-1)\delta(k-1)\Gamma(k-1)}{1+\mathrm{tr}\{\delta(k-1)\Gamma(k-1)\delta^T(k-1)\}}] \tag{6.55}$$

$$e^*(k) = \frac{y(k) - \delta(k-1)\hat{\theta}(k-1)}{1+\mathrm{tr}\{\delta(k-1)\Gamma(k-1)\delta(k-1)\}} \tag{6.56}$$

ここで，$\Gamma(k) = \Gamma > 0$ または $0 < \lambda(k) \leqq 1, \Gamma(0) > 0$ とする．

(6.50)式の同定モデルと(6.54)～(6.56)式のパラメータ調整アルゴリズムを用いた場合も(6.44)式の補助信号と(6.45)～(6.48)式の入力発生則を用いれば，適応制御系が構成できることとなる．

なお，ここで述べた構成法は制御装置内で設計計算を実行することなく制御を行っているが，プラントの分解表現と従来の表現との関係を用い，設計計算をオンラインで実行する形式の構成も可能である．その際，プラントの同定モデルとしては，(6.5)式に対応する表現を用いてその未知パラメータA_iおよびB_iを推定し，(6.9)式の関係を用いてB_g，B_{ci}の推定値を算出して制御系を構成すればよい．

6．4　安定性の考察

これまで述べた制御系では，$k \to \infty$で信号ベクトルδ（k）が有界であれば$e_a(k) \to 0$ が保証され，さらに$k \to \infty$でu（k）＝const.となるような目標値，すなわちy^*（k）＝const.に対して e（k）→0 となることが示される．

以下では信号ベクトルδ（k）の有界性を考察する．簡単のため，１入力１出力系で設計条件１）の設計法について考察するが，設計条件２）の場合，多変数系の場合にも同様の結果となる．

ここで述べた設計法では，プラントがむだ時間未知の不安定な逆系を持つ系である場合を考慮し，目標値y^*（k）に対して拡張プラント出力$\hat{y}_a$（k）を一致させるように設計を行っている．したがって，$k \to \infty$でプラント入力u（k）から拡張プラント出力$\hat{y}_a$（k）に至る伝達関数がz平面の単位円内にその零点を持てばプラント入力u（k）の有界性が保証され，信号ベクトルδ（k）も有界となる．

(6.6),(6.8)式より，u（k）からy（k）に至る伝達関数を$G_P(z)$とすると

$$
\begin{aligned}
G_P(z) &= \frac{b_0 z^{n-1} + \cdots + b_{n-1}}{z^n - a_1 z^{n-1} - \cdots - a_n} \\
&= \frac{b_g(b_0' z^{n-1} + \cdots + b_{n-1}')}{z^n - a_1 z^{n-1} - \cdots - a_n} \\
&\quad + \frac{(z-1)(b_{c0} z^{n-2} + \cdots + b_{cn-2})}{z^n - a_1 z^{n-1} - \cdots - a_n} = \frac{n(z)}{d(z)}
\end{aligned}
\tag{6.57}
$$

となる．また，(6.14)式よりu（k）から$\hat{y}_c$（k）に至る伝達関数を$G_c(z)$として求めると

$$
G_c(z) = \frac{(z-1)(\hat{b}_{c0}^{\infty} z^{n-2} + \cdots + \hat{b}_{cn-2}^{\infty})}{z \quad - \hat{a}_1^{\infty} z^{n-1} - \cdots - \hat{a}_n^{\infty}}
\tag{6.58}
$$

となる．ただし，$\hat{a}_i^{\infty}$，$\hat{b}_{ci}^{\infty}$は推定パラメータの収束値とする．

いま，$\hat{a}_i^{\infty}=a_i$，$\hat{b}_{ci}^{\infty}=b_{ci}$，すなわち各パラメータが真値に収束したとすると，プラント入力u（k）から拡張プラント出力$\hat{y}_a$（k）に至る伝達関数をG（z）として

$$G(z)=G_P(z)-G_C(z)$$

$$=\frac{b_g(b_0' z^{n-1}+\cdots+b_{n-1}')}{z^n-a_1 z^{n-1}-\cdots-a_n} \qquad (6.59)$$

を得る．(6.59)式において$b_g\neq 0$，$\sum_{i=0}^{n-1} b_i' z^{n-1-i}$が漸近安定多項式であることからG（z）は漸近安定な逆系を持ち，信号ベクトルδ（k）の有界性が保証される.[11] このとき，G（z）は可観測性，可制御性が失われるが，プラントの極が漸近安定であれば問題は生じない．実際には関数の連続性から，プラントパラメータの真値の近傍の$\hat{a}_i^{\infty}$，$\hat{b}_{ci}^{\infty}$に対してG（z）の逆系が漸近安定となる領域が必ず存在することから，推定パラメータは真値に収束しなくとも，その領域内に収束すれば十分である.[24]

さらに，制御問題と考えた場合には各推定パラメータはG（z）の逆系を漸近安定とするどのような値に収束しても信号ベクトルδ（k）の有界性は保証される．

6．5　制御系の内部構造

ここでは，前節までに述べた適応制御系の内部構造を，設計条件１）の定式化で各パラメータが既知の場合について考察し，従来のモデル規範形適応制御系，適応極配置制御系との関連を明らかにする．

はじめに，１入力１出力系の場合を考える．このとき制御系は図 6.1のように表すことができる．図中

$$G_C(z) = \frac{(z-1)(b_{C0}z^{n-2} + \cdots + b_{Cn-2})}{z^n - a_1 z^{n-1} - \cdots - a_n}$$

$$= \frac{b_{C0}z^{n-1} + (b_{C1} - b_{C0})z^{n-2} + \cdots + (b_{Cn-2} - b_{Cn-1})z - b_{Cn-2}}{z^n - a_1 z^{n-1} - \cdots - a_n}$$

$$= \frac{n_C(z)}{d_C(z)} \tag{6.60}$$

$$G_\Pi(z) = \frac{b_1' z^{n-1} + \cdots + b_{n-1}'}{b_0' z^{n-1}} \tag{6.61}$$

$$G_\phi(z) = \frac{a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}{z^{n-1}} \tag{6.62}$$

$$G^*(z) = \frac{b_0^* z^{n-1} + \cdots + b_{n-1}^*}{z^n - a_1^* z^{n-1} - \cdots - a_n^*} = \frac{n^*(z)}{d^*(z)} \tag{6.63}$$

また，プラントの伝達関数$G_P(z)$は(6.57)式によって表されている．

いま，簡単のため，まず，$b_0'=1, b_i'=0$ $(i \geqq 1)$として$u(k)$から$y_a(k)$に至る伝達関数$G_a(z)$を(6.57),(6.60)式より求めればつぎになる．

$$G_a(z) = G_P(z) - G_C(z) = \frac{b_g z^{n-1}}{z^n - a_1 z^{n-1} - \cdots - a_n} \tag{6.64}$$

したがって，図 6.1よりr（k）から$y_a(k)$に至る特性は

$$Y_a(z) = \frac{\dfrac{b_g z^{n-1}}{z^n - a_1 z^{n-1} - \cdots - a_n} \cdot \dfrac{1}{b_g} \cdot zG^*(z)R(z)}{1 + \dfrac{b_g z^{n-1}}{z^n - a_1 z^{n-1} - \cdots - a_n} \cdot \dfrac{1}{b_g} \cdot \dfrac{a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}{z^{n-1}}}$$

$$= G^*(z)R(z) \tag{6.65}$$

となることが，確かめられる．すなわち，ここで述べた手法はu（k）から$y_a(k)$に至る特性をプラントとみなすことにより，従来のモデル規範形制御系と同一の構造をその内部に含むことがわかる．

一方，r（k）からy（k）に至る特性を求めるとつぎになる．

$$Y(z) = zG^*(z) \cdot \frac{b_0 z^{n-1} + \cdots + b_{n-1}}{b_g z^n} \cdot R(z)$$

$$= \frac{n^*(z)\, n_p(z)}{b_g z^{n-1} d^*(z)} \cdot R(z) \tag{6.66}$$

ここで，(6.63)式で表される伝達関数$G^*(z)$において，$n^*(z) = b_g z^{n-1}$，$\partial\{d^*(z)\} = \partial\{d_p(z)\}$ととれば（$\partial(\cdot)$な多項式の次数を示す．）

$$Y(z) = \frac{b_g^* n_p(z)}{b_g d^*(z)} R(z) \tag{6.67}$$

が得られる．これはプラントの極配置を行う制御系と等価であり，この意味で本手法は適応極配置制御系と関連付けられる．このとき，希望する伝達関数の極は$d^*(z) = 0$の根により与えられる．

この場合の極配置は，プラントを分解表現することによって得られるAR形式のサブシ

ステムの出力$y_a(k)$をAR形式の伝達関数$G^*(z)$の出力$y^*(k)$に一致させることによって実現されている．これにより，従来提案されている適応極配置制御手法と比較して設計が容易で制御に必要な計算量も大幅に減少している．

つぎに，より一般的にb_i'を選定した場合の制御系の内部構造を考える．さきの考察から，この制御系は$r(k)$から$y_a(k)$に至る特性を$G^*(z)$に一致させる構造を持っている．したがってb_i'のいかんによらず(6.65)式が成立する．これより，$r(k)$から$y(k)$に至る伝達関数はつぎになる．

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}\cdot\frac{U(z)}{R(z)}=\frac{n_p(z)}{d_p(z)}\cdot\frac{d_p(z)}{n_a(z)}\cdot\frac{n^*(z)}{d^*(z)}$$

$$=\frac{n_p(z)}{n_a(z)}\cdot\frac{n^*(z)}{d^*(z)} \tag{6.68}$$

ただし，$n_a(z)=n_p(z)-n_C(z)=b_g\ \{\sum_{i=0}^{n-1} b_i' z^{n-1-i}\}$である．

(6.68)式がプラントの分解表現を用いて設計された制御系によって実現が可能な$r(k)$から$y(k)$に至る伝達関数の一般形である．(6.67)式中において，$n_a(z)=0$の根と$n_p(z)=0$の根が一致するようにb_i'が選定されれば$G(z)=G^*(z)$となり，モデル規範形制御系と同一構造となる．なお，このときには$b_{Ci}\equiv 0$となることから$y_C(k)\equiv 0$より$y_a(k)\equiv y(k)$である．

多変数系の場合にも同様の解析が可能であり，例えば$B_0'=I$，$B_i'=0\ (i\geqq 1)$の場合の$y^*(k)$から$y(k)$に至る特性を求めると次式が得られる．

$$Y(z)=(Iz^n-\sum_{i=1}^{n}A_i z^{n-i})^{-1}(\sum_{i=0}^{n-1}B_i z^{n-1-i})(B_g z)^{-1}$$
$$(Iz^n-\sum_{i=1}^{n}A_i z^{n-i})\cdot zI\cdot Y^*(z) \tag{6.69}$$

上式において多項式行列が可換，すなわち

$$(Iz^n-\sum_{i=1}^{n}A_i z^{n-i})^{-1}(\sum_{i=0}^{n-1}B_i z^{n-1-i})$$
$$=(\sum_{i=0}^{n-1}B_i z^{n-1-i})(Iz^n-\sum_{i=1}^{n}A_i z^{n-i})^{-1}$$

$$(B_g z^n)^{-1}(I z^n - \sum_{i=1}^{n} A_i z^{n-i})$$

$$= (I z^n - \sum_{i=1}^{n} A_i z^{n-i})(B_g z^n)^{-1} \tag{6.70}$$

が成立すれば，(6.69)式は次式となる．

$$Y(z) = (\sum_{i=0}^{n-1} B_i z^{n-1-i})(B_g z)^{-1} \cdot Y^*(z) \tag{6.71}$$

これは，すべてのプラント零点が不変で，すべての極が原点となっていることから，極配置制御系と等価である．

ただし，(6.70)式の条件は多変数系では一般に成立しない点に注意が必要であり，この条件が成立するのは，例えば（6.8)式のプラント表現において$A_i = a_i I$となるような場合となる．

6．6　数値計算例と考察[30),32)]

前節までに述べた手法の有効性を示すため，漸近安定な１入力１出力と２入力２出力のプラントを用いて計算機シミュレーションを行った．

直接法による制御系ではプラントが次数の低い１入力１出力系の場合を除き，良好な収束を得ることは困難である．以下では，間接法による結果のみを示す

はじめに，１入力１出力のプラントとしてつぎの２種類を考え，制御を行った．

［　例　6．1　］

連続時間の３次系のプラントで，離散化することによって，その逆系が不安定となる場合である．　（前章 5.6節，例 5.1と同一プラント）

このとき，(6.5)式におけるプラントパラメータは

$a_1=2.11$，$a_2=-1.43$，$a_3=0.302$，$b_0=0.002$，$b_1=0.00599$，$b_3=0.0011$

であり，その零点は-2.8，-0.196である．

また，目標値$y^*(k)$は (3.12),(3.13)式で表される規範モデルの出力とし，そのパラメータをつぎに示す．

$a_{M1}=2.46$，$a_{M2}=-2.03$，$a_{M3}=0.560$，$b_{M0}=0.0511$，$b_{M1}=-0.00296$，$b_{M2}=-0.0394$

$d^*=1$（第三章 3.5節の規範モデルと同一）

推定パラメータの初期値は$\hat{b}_g(0)=b_{M0}$を除いて他はすべて零，パラメータ推定アルゴリズムは(3.21)〜(3.23)式のアルゴリズムにおいて$\lambda_1(k)=\lambda_2(k)=1$（最小２乗法に相当），$\Gamma(0)=10^8 I$とした．

制御系は設計条件１）の定式化で$n=3$，$b_0'=1, b_i'=0$ $(i=1,2)$で構成した．また，制御系内の信号の初期値はすべて零として計算を行った．

図 6.2にシミュレーション結果を示す．図 6.2（a）において実線は目標値$y^*(k)$を○はプラント出力$y(k)$を示す．（b）は対応するプラント入力$u(k)$である．第１ステップの目標値では入力もやや振動的で出力のオーバシュートも見られるが，第２ステップでは入力の動きも安定化している．しかも，プラントの分解表現を用いることによる追従性の悪化もほとんどなく，良好な結果となっている．

また，各推定パラメータの収束の指標となるパラメータ誤差のノルムは$\|\hat{\theta}(0)-\theta\|=6.59$，$\|\hat{\theta}(50)-\theta\|\fallingdotseq 0$ となっており，50ステップの後には，ほぼ各推定パラメータ

は真値に収束している．

［ 例 6．2 ］

連続時間の３次系のプラントがｓの右半平面に零点を持ち，さらに，むだ時間を持つ逆系が不安定な系の場合である．プラントパラメータは（6.5)式で

$a_1=1.43,\ a_2=-0.497,\ a_3\fallingdotseq 0\ ,\ a_4=0,$

$b_0=0\ ,\ b_1=-0.102,\ b_2=0.173\ ,\ b_3=0.0001$

であり，この系は単位円外の零点1.7 を持つ．

目標値は例 6.1と同一の規範モデルで発生し，d^*のみ４とした．制御系は設計条件２）の定式化で$n=5$，$d=4$，$b_0''=1, b_1''=0$ で構成し，他の条件は例 6.1と同一とした．

図 6.3 に結果を示す．この例ではプラントのむだ時間$d=2$を４とみなし，しかもプラントが（6.5)式において$n=4$であるものを５として制御系を構成したため，推定パラメータの収束は遅く，パラメータ誤差のノルムは$\|\hat{\theta}(0)-\theta\|=2.30$，$\|\hat{\theta}(100)-\theta\|=1.79$となっている．応答は第１ステップでは入力が過度的に大きくなり，対応する出力も大きくオーバシュートしている．しかし，第２ステップでは目標値変更時にプラントが逆応答を示すことは当然であるが，それ以後は過度的にも目標値に良く追従している．

つぎに，２入力２出力系の例題として，はじめに，むだ時間のない漸近安定な逆系を持つプラントを用いてシミュレーションを行った．

［ 例 6．3 ］

(6.5)式におけるプラントパラメータをつぎの値とした．

$A_1=\mathrm{diag}(1.68,\ 1.59),\ A_2=\mathrm{diag}(0.648,\ 0.527)$

$$B_0=\begin{bmatrix}0.011 & -0.000221\\ -0.00814 & 0.0163\end{bmatrix},\quad B_1=\begin{bmatrix}0.000973 & -0.000195\\ -0.000658 & 0.0132\end{bmatrix}$$

$d_{11}=d_{12}=d_{21}=d_{22}=1$

目標値は$y_i^*(k)=y_{Mi}(k)$として$y_{Mi}(k)$を(4.40)式において

$a_{M1}^1=1.72,\ a_{M1}^2=-0.756,\ b_{M1}^0=0.0182,\ b_{M1}^1=0.0166$

$a_{M2}^1=1.54,\ a_{M2}^2=-0.670,\ b_{M2}^0=0.0694,\ b_{M2}^1=0.0607$

$d_1=d_2=1$

として発生させた．(4.40)式の入力$r_1(k)$，$r_2(k)$はそれぞれ振幅１および２，周期

100 サンプルの矩形波とした．パラメータ推定アルゴリズムとしては(4.26)～(4.28)式のアルゴリズムにおいて$\lambda_{1i}(k)=0.95$，$\lambda_{2i}(k)=1.0$，$\Gamma_i(0)=10^8 I$ $(i=1,2)$ と選んだ．また，プラントの表現において$B_0'=I$，$B_1'=0$．さらに入力の振幅制限も(6.45)式において$u^i_{max\ i}=100$ $(i=1,2)$ とした．推定パラメータの初期値，信号の初期値は$\hat{B}_g(0)=\mathrm{diag}(0.0182,\ 0.0694)$とした以外すべて零として計算を行った．

図 6.4にシミュレーション結果を示す．図中，□は目標値を，＋はプラントの出力を表す．この例では，プラントがむだ時間を持たず，逆系も漸近安定であることから，２入力２出力の干渉のあるプラントでありながら１入力１出力系の場合と同様に良好な結果となっている．

つぎに，むだ時間を持ちその逆系が不安定な系をプラントとして計算を行った．

［ 例 6.4 ］

ｓの右半平面に不変零点を持つ連続時間系の離散時間表現で (6.5)式におけるパラメータは以下の値である．

$$A_1=\mathrm{diag}(1.66,\ 1.52),\quad A_2=\mathrm{diag}(-0.67,-0.549)$$

$$B_0=\begin{bmatrix}0.0011 & -0.00335\\ -0.00115 & 0.00165\end{bmatrix},\quad B_1=\begin{bmatrix}0.000961 & 0.0017\\ -0.00945 & 0.0135\end{bmatrix}$$

$$d_{11}=d_{12}=2,\quad d_{21}=d_{22}=1$$

制御の条件は制御装置の次数$n=3$とした他は例 6.3と同一として計算を行った．

図 6.5にシミュレーション結果を示す．この例ではプラントがむだ時間を持つ逆系が不安定な多変数系であることから，制御初期にプラント出力は目標値から一時的に大きくずれるが，２度目の目標値変化以後は補償のできない逆応答の部分を除けば，ほぼ満足のゆく特性が得られている．なお，この例でプラントのむだ時間に関する情報を全く使用していないことから，一般にプラント出力と目標値の過度的な一致は得られない．

以上の結果より，本手法の有効性を確認することができた．

6．7 結 言

本章では，むだ時間が未知で不安定な逆系を持つ系に対して適用が可能な適応制御系をモデル規範形制御系を基礎にして設計する手法を述べた．

この手法はプラントが漸近安定であれば，むだ時間の大きさ，その逆系の安定，不安定を知ることなく設計が可能で，多くのプラントに対して実用上有効であると考えられる．また，その構造が簡潔であることから容易に多変数系に拡張可能であることを示した．

この制御系はプラントの構造が未知であっても適用が可能である．また，制御系の内部構造を考察することにより，従来のモデル規範形適応制御系，適応極配置制御系との関係を明らかにした．

しかし，制御系全体の大域的漸近安定性の保証および不安定系にも適用可能な制御系の開発は今後に残された課題となっている．

なお，本手法はある意味で，第五章で述べた並列補償による逆系の安定化をプラントの特性が未知でも常に可能とする手法とみなすことができる点，あるいは，第四章で述べたプラントのむだ時間＋ＡＲモデルによる設計法の理論的な裏付けを検討するうえで一つの解析手段を与えるものである点など興味深い特性を持っている．

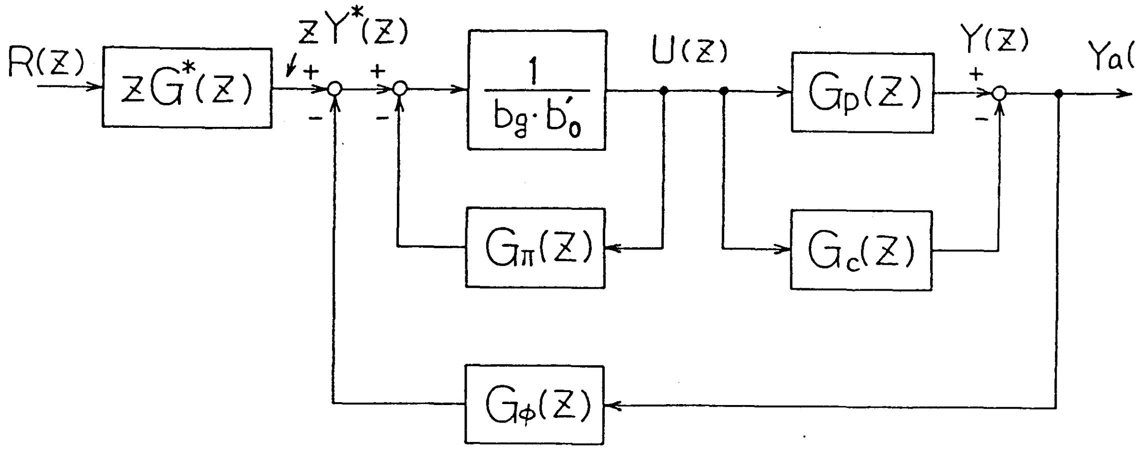


図　６．１　提案した制御系のブロック線図による表現

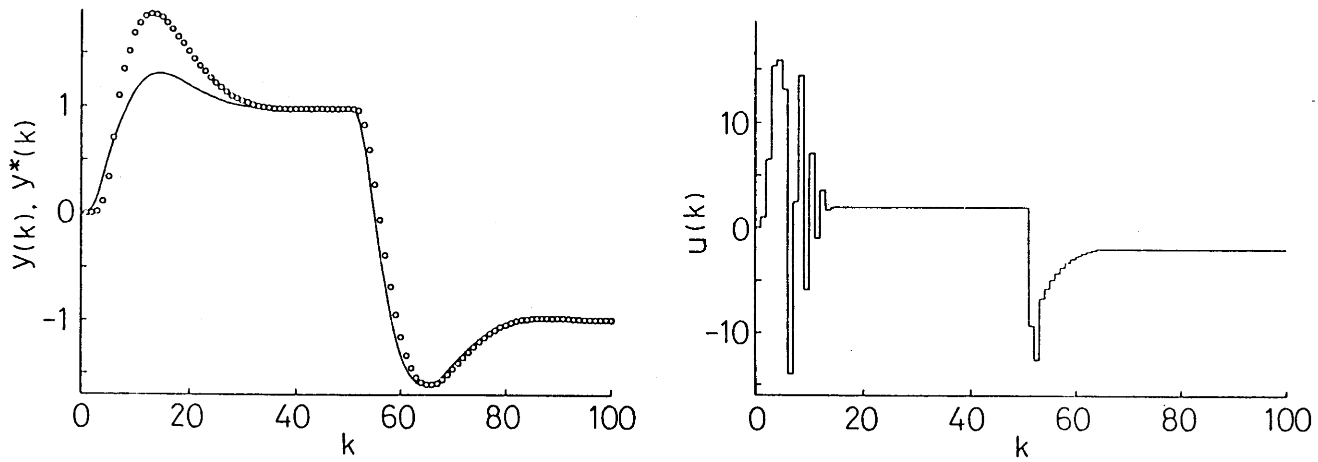


図　6．2　離散化によって非最小位相系となるプラントに対するシミュレーション結果（むだ時間なし）

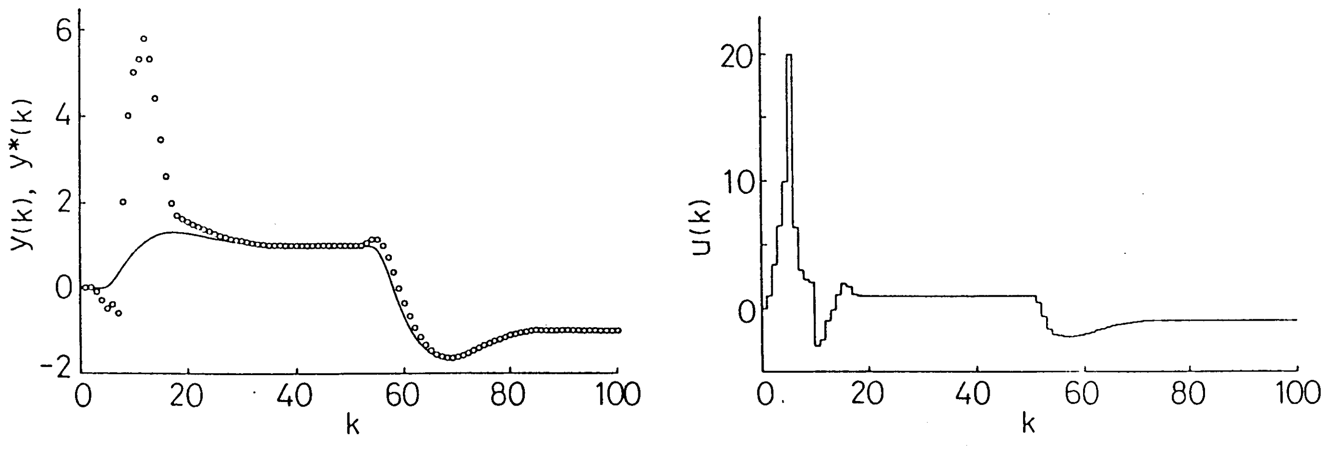


図　6．3　むだ時間を持ちｓの右半平面に零点を持つプラントに対するシミュレーション結果

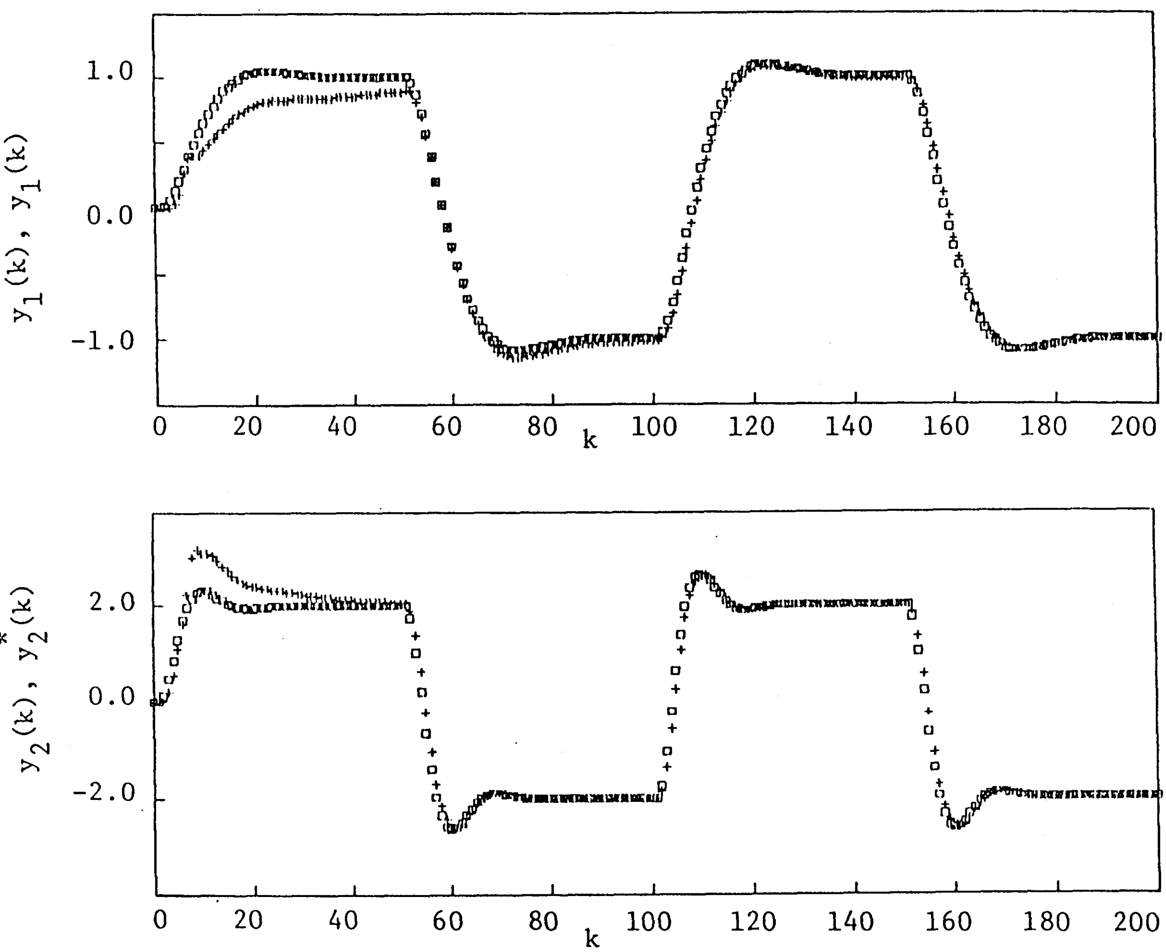


図　6．4　2入力2出力の最小位相プラントに対するシミュレーション結果（むだ時間なし）

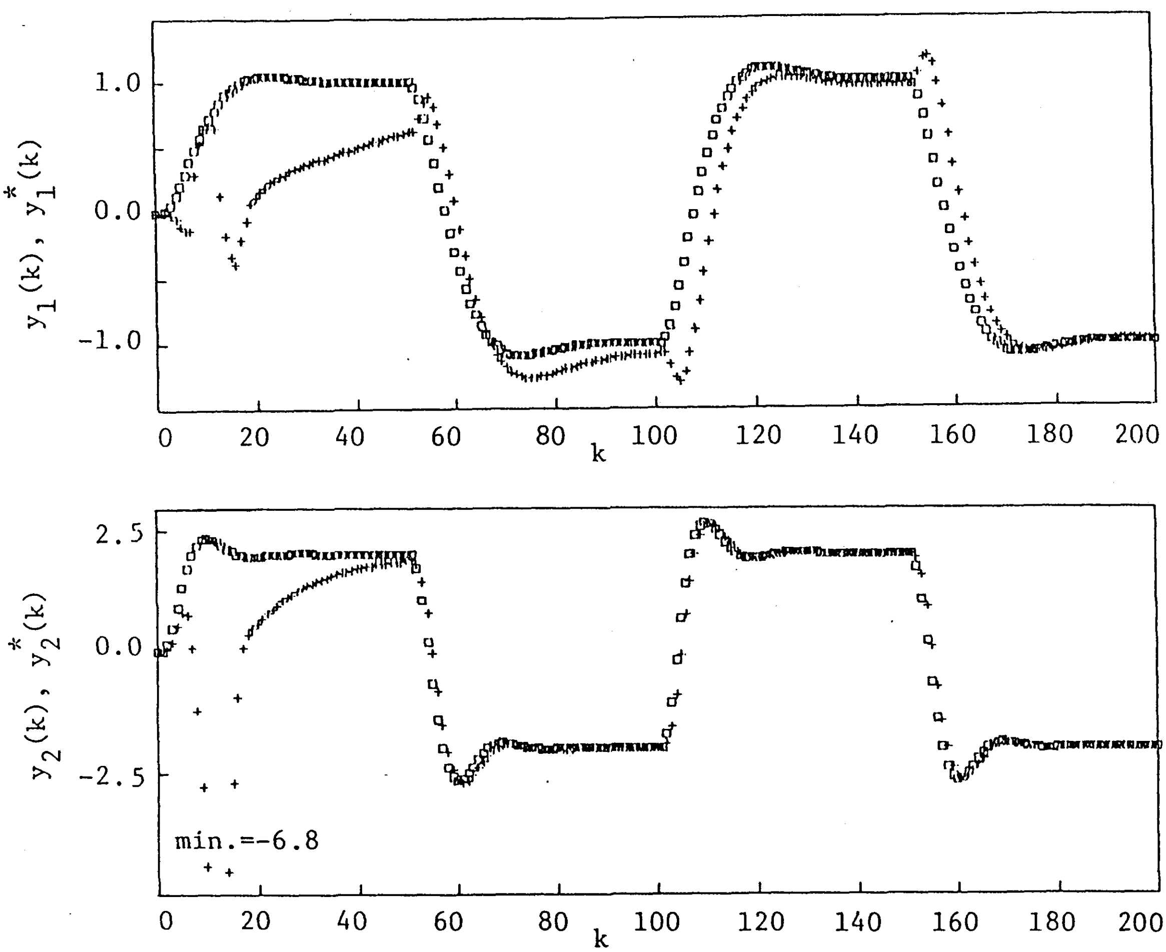


図　6．5　むだ時間を持つ２入力２出力の非最小位相プラントに対するシミュレーション結果

第七章　未知外乱を考慮したモデル規範形適応制御系[35),40)]

7．1　緒　言

前章までに述べた設計法は，モデル規範形適応制御系をその基礎とし，制御対象であるプラントに対する種々の制約的仮定を実用上の観点から取り除くためにいくつかの拡張を行ったものである．これらの設計法によれば，広い範囲の特性を持つプラントに対して適応制御系を構成することができるが，実用上からはプラントの特性のみではなく，より広い範囲の種々の状況を考慮することが望ましい．

実際，制御を行う場合には程度の差こそあれ，外乱が存在するのが常である．外乱の変化が遅い場合には適応制御装置はそれをプラントの特性変化とみなし，制御装置内の可調整パラメータを調整することにより，ある程度までは外乱の抑制を行うことができる．これは，適応制御を用いる場合の利点であるが，このような場合の制御系の安定性は必ずしも保証されず，外乱の変化が大きな場合，あるいは，外乱の特性によっては十分な制御性能が得られなかったり，制御系が不安定となる場合がある．

そこで，本章では外乱を考慮して適応制御系を設計する方法について述べる．外乱を考慮して適応制御系を設計する場合には，本来未知の外乱をどのようにモデル化するかが問題となる．

以下では，この外乱のモデル化として，そのモデルをまったく仮定することなく，その振幅の上限のみが既知と考える場合と，外乱を確定的な外乱に限定し，それを係数が未知の線形自由系の出力とみなしうる成分と，パラメータを必要としない時間の多項式で記述できる成分とに分けた外乱のモデル化を行う場合の二つを考え，それぞれの場合についてモデル規範形適応制御系の設計法を述べる．

外乱のモデルを仮定しない手法はパラメータ推定アルゴリズムに不感帯を導入することによって制御系の安定性を確保するとともに，制御ループ内に積分特性を含ませることにより，目標値への追従を達成する簡潔な構造となっている．

一方，確定外乱を線形自由系の出力と時間の多項式の和と考えモデル化する手法では，このモデルでモデル化が可能な広い範囲の外乱に対して制御系の安定性と出力誤差の零への収束が理論的に保証されるという特徴を持っている．

以下では，はじめに，ここで取り扱う問題の設定を外乱の記述を含めて行う．つぎに，

外乱のモデルを仮定しない設計法を述べ，さらに確定外乱のモデルを用いる設計法を述べる．また，外乱が存在する場合の制御系の安定性を構造を含めて考察する．

最後に，それぞれの手法の有効性を示す数値計算例について述べる．

7．2　問題の設定

ここでは，次式で記述される，外乱を受ける１入力１出力離散時間系の制御問題を考えることとする．

$$A(z^{-1})\,y(k)=z^{-d}B(z^{-1})\,u(k)+w_1(k)+w_2(k) \tag{7.1}$$

ここで，

$$A(z^{-1})=1-\sum_{i=1}^{n}a_i z^{-i}$$

$$B(z^{-1})=\sum_{i=0}^{m}b_i z^{-i} \tag{7.2}$$

$y(k)$，$u(k)$はそれぞれk時点におけるプラントの出力および入力である．

プラントに対する仮定としては，以下で述べる手法がモデル規範形適応制御系をその基礎とすることから，これまでのものと同一の仮定を必要とする．

(7.1)式において$w_1(k)$，$w_2(k)$はプラントに加わる外乱を二つの成分に分けて表したもので，それぞれ以下の特性を持つものとする．

$$C_1(z^{-1})\,w_1(k)=0 \tag{7.3}$$

ここで，

$$C_1(z^{-1})=1+\sum_{i=1}^{n_{c1}}c_1^i z^{-i} \tag{7.4}$$

ただし，多項式$C_1(z^{-1})$は安定とする．また，

$$C_2(z^{-1})\,w_2(k)=0 \tag{7.5}$$

ここで，

$$C_2(z^{-1})=(1-z^{-1})^{n_{c2}} \tag{7.6}$$

(7.3)，(7.5)式より，$w_1(k)$が外乱のうちで線形自由系の出力とみなしうる成分を，$w_2(k)$が時間の多項式で記述できる成分を表している．

なお，(7.1)式中の外乱は必ずしもこの形で作用する必要はなく，例えば，プラント入力に加算的に加わる場合にも以下の議論は同様に展開可能である．

以下で考察する問題はプラントが(7.3)，(7.5)式で表される未知の外乱を受ける場合にも，与えられた有界な目標値にその出力を追従させる制御系を構成することである．

次節では，まず，(7.3)，(7.5)式の外乱のモデルを用いることなく制御系を構成する手法について述べる．

7．3　外乱のモデルを用いない設計法[35)]

本節では (7.3),(7.5)式の外乱のモデルを必要としない簡潔な設計法を述べる．このとき，外乱を

$$w(k)=w_1(k)+w_2(k) \tag{7.7}$$

とまとめて表示するとともに，外乱に対する仮定としては以下の条件のみを考える．

$$|w(k)| \leqq w_0 < \infty,\ w_0 \geqq 0 \text{ は既知} \tag{7.8}$$

したがって，外乱は必ずしも (7.3),(7.5)式で記述される必要はない．

このような条件のもとでの制御系を構造としては図 7.1に示すようにフィードバックループ内に離散時間の積分特性$1/(1-z^{-1})^{\ell}$を含み，出力誤差$e(k)=y^*(k)-y(k)=0$（ただし，$y^*(k)$は有界な目標値）を達成するものを考える．

ただし，図中，$G_{ff}(z^{-1})$ および　$G_{fb}(z^{-1})$ はそれぞれ後に決定するフィードフォーワード，フィードバックの伝達関数を示す．なお，以下では簡単のため$d=1$として考察を行い，はじめに，プラントパラメータが既知の場合の制御系を導出する．

図 7.1より外乱$w(k)$を無視すると，図中の信号$v(k)$からプラント出力$y(k)$に至る特性はつぎのように表すことができる．

$$y(k)=(1-z^{-1})^{\ell}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i z^{-i}\right)y(k)+\{1-(1-z^{-1})^{\ell}\}y(k) + \sum_{i=0}^{m} b_i z^{-i} v(k-1) \tag{7.9}$$

(7.9)式をもとに誤差方程式をつくり，$e(k+1)=0$ とする入力$u(k)$を求めるとつぎになる．

$$u(k)=\{1-(1-z^{-1})^{\ell}\}u(k)+v(k) \tag{7.10}$$

ここで，

$$v(k)=\frac{1}{b_0}\left[y^*(k+1)-(1-z^{-1})^{\ell}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i z^{-i}\right)y(k) - \{z-z(1-z^{-1})^{\ell}\}y(k)-\sum_{i=1}^{m} b_i z^{-i} v(k)\right] \tag{7.11}$$

以上のように制御系を構成したとき，図 7.1において$G_{ff}(z^{-1})$，$G_{fb}(z^{-1})$はそれぞれつぎになる．

$$G_{ff}(z^{-1})=1/\left(\sum_{i=0}^{m} b_i z^{-i}\right) \tag{7.12}$$

$$G_{fb}(z^{-1}) = (1-z^{-1})^{\ell}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i z^{-i}\right) + z - z(1-z^{-1})^{\ell} \tag{7.13}$$

これより，外乱w（k）からプラント出力y（k）に至る伝達関数$G_{wy}(z^{-1})$は

$$G_{wy}(z^{-1}) = (1-z^{-1})^{\ell} \tag{7.14}$$

となり，外乱w（k）が$\ell-1$型すなわち外乱w（k）が

$$(1-z^{-1})^{\ell} w(k) = 0 \tag{7.15}$$

を満たすとき，プラント出力への外乱の影響は抑制されることがわかる．

プラントパラメータが未知な適応制御においては，不感帯を持つパラメータ推定アルゴリズムによってプラントパラメータを推定して制御系を構成する．

アルゴリズムは(3.32)～(3.23)式において(3.23)式のみをつぎのように修正する．

$$e^*(k) = \frac{\hat{e}'(k)}{1+\delta^T(k-1)\Gamma(k-1)\delta(k-1)}$$

$$\hat{e}'(k) = \begin{cases} \hat{e}(k) & ; \ |\hat{e}(k)| > \Delta \\ 0 & ; \ |\hat{e}(k)| \leqq \Delta \end{cases} \tag{7.16}$$

$$\begin{aligned} \hat{e}(k) &= y(k) - \hat{\theta}^T(k-1)\delta(k-1) \\ &= \theta^T\delta(k-1) + w(k) - \hat{\theta}^T(k-1)\delta(k-1) \end{aligned} \tag{7.17}$$

ここで，

$$\theta^T = [a_1, \cdots, a_n, b_0, \cdots, b_m] \tag{7.18}$$

$$\hat{\theta}^T(k) = [\hat{a}_1(k), \cdots, \hat{a}_n(k), \hat{b}_0(k), \cdots, \hat{b}_m(k)] \tag{7.19}$$

$$\begin{aligned} \delta^T(k) = [&y(k), \cdots, y(k+1-n), u(k), \cdots, \\ &u(k-m)] \end{aligned} \tag{7.20}$$

また，$\Delta \geqq 0$ は適応アルゴリズムにおける不感帯で制御系の安定性が保証されるように決定するものとする．決定方法については後に述べる．

このとき，信号v（k）を次式で発生させればよい．

$$\begin{aligned} v(k) = \frac{1}{\hat{b}_0(k)}\Big[&y^*(k+1) - (1-z^{-1})^{\ell}\Big\{\sum_{i=1}^{n}\hat{a}_i(k)\,y(k+1-i)\Big\} \\ &- \{z - z(1-z^{-1})^{\ell}\}\,y(k) \\ &- (1-z^{-1})^{\ell}\Big\{\sum_{i=1}^{m}\hat{b}_i(k)\,u(k-i)\Big\}\Big] \end{aligned} \tag{7.21}$$

また，上式の入力発生則を用いたとき$k\to\infty$で$\hat{a}_i(k)$，$\hat{b}_i(k)$が一定値に収束すれば誤

差方程式はつぎになる．

$$e(k) = -(1-z^{-1})^{\ell}\hat{e}(k) \tag{7.22}$$

したがって，(3.21),(3.22),(7.16),(7.17) 式のパラメータ推定アルゴリズムによって $k\to\infty$ で $\hat{a}_i(k),\hat{b}_i(k)\to$ const. かつ $\hat{e}'(k)\to 0$ が保証されれば，出力誤差 $e(k)$ の有界性が保証されることとなる．

ここで用いたパラメータ推定アルゴリズムは不感帯を持つことから，推定パラメータは必ずしもその真値に収束しない．そこで，制御装置内のパラメータがプラントパラメータとは異なる場合の特性を検討する．このとき，制御装置内の推定パラメータの収束値を $\hat{a}_i,\hat{b}_i$ と表すと，(7.12),(7.13)式と図 7.1より外乱 $w(k)$ からプラント出力 $y(k)$ に至る特性はつぎになる．

$$G_{wy}^{*}(z^{-1}) = (1-z^{-1})^{\ell}\left(\sum_{i=0}^{m}\hat{b}_i^{\infty}z^{-i}\right)/f(z^{-1}) \tag{7.23}$$

ここで，

$$\begin{aligned} f(z^{-1}) = &\left(\sum_{i=0}^{m}\hat{b}_i^{\infty}z^{-i}\right)\left(1-\sum_{i=1}^{n}a_i z^{-i}\right)(1-z^{-1})^{\ell} \\ &+\left(\sum_{i=0}^{m}b_i z^{-i}\right)\left[(1-z^{-1})^{\ell}\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{a}_i^{\infty}z^{-i}\right)\right. \\ &\left.+\{z-z(1-z^{-1})^{\ell}\}\right] \end{aligned} \tag{7.24}$$

これより，(7.23)式の分母多項式である $f(z^{-1})$ が漸近安定となれば，さきと同様(7.15)式を満たす外乱の抑制が達成されることになる．

また，目標値への追従性について考えるため，$y^*(k)$ より $e(k)$ に至る伝達関数 $G_{y^*e}(z^{-1})$ を求めるとつぎになる．

$$\begin{aligned} G_{y^*e}(z^{-1}) = (1-z^{-1})^{\ell}&\left[\left(\sum_{i=0}^{m}\hat{b}_i^{\infty}z^{-i}\right)\left(1-\sum_{i=1}^{n}a_i z^{-i}\right)\right. \\ &\left.-\left(\sum_{i=0}^{m}b_i z^{-i}\right)\left(1-\sum_{i=1}^{n}\hat{a}_i^{\infty}z^{-i}\right)\right]/f(z^{-1}) \end{aligned} \tag{7.25}$$

(7.25)式も(7.23)式と同一の分母多項式を持ち，分子多項式に $(1-z^{-1})^{\ell}$ が含まれることから，目標値 $y^*(k)$ が $\ell-1$ 型のとき，推定パラメータが(7.25)式の分母多項式 $f(z^{-1})$ を漸近安定とするどのような値に収束しても，プラント出力は目標値にオフセットなく追従することとなる．

この設計法では外乱が(7.15)式を満たさない場合には $e(k)\to 0$ を達成することはできないが，アルゴリズムの不感帯によって制御系の安定性は保証される．

次節では，外乱が（7.3），(7.5)式の性質を持つ限り$e(k)\to 0$が達成可能な制御系の構成法を述べる．

7．4　外乱のモデルを用いる設計法[40)]

前節では，外乱のモデルを仮定することなく，安定性の保証される簡潔な制御系の構成法を述べたが，ここでは（7.3),(7.5)式によって外乱がモデル化できる場合に，外乱の存在にもかかわらず出力誤差を例としうる制御系の設計法について述べる．

このとき,(7.3),(7.5)式の外乱のモデルに対してつぎのような仮定をおく．

1）外乱の特性多項式$C_1(z^{-1})$,$C_2(z^{-1})$の次数（の上限）n_{c1}およびn_{c2}は既知で

　　$C_1(z^{-1})$のパラメータc_1^iは未知．

この仮定のもとで，制御系の構成に先立ち，外乱$w_1(k)$を発生する線形自由系をプラント内の未知な不可制御部分空間とするプラントの表現を導出する．

(7.1)式の両辺に多項式$C_1(z^{-1})$を乗じ,(7.3)式を考慮すると次式を得る．

$$C_1(z^{-1})A(z^{-1})y(k)=z^{-d}C_1(z^{-1})B(z^{-1})u(k)+C_1(z^{-1})w_2(k) \tag{7.26}$$

(7.26)式は差分方程式で表現すればつぎになる．

$$y(k+1)=\sum_{i=1}^{n'}a_i'y(k+1-i)+\sum_{i=0}^{m'}b_i'u(k+1-d-i)+w_2'(k) \tag{7.27}$$

ここで，

$$\begin{aligned} C_1(z^{-1})A(z^{-1})&=1-\sum_{i=1}^{n'}a_i'z^{-i} \\ C_1(z^{-1})B(z^{-1})&=\sum_{i=0}^{m'}b_i'z^{-i} \\ C_1(z^{-1})w_2(z^{-1})&=w_2'(k) \end{aligned} \tag{7.28}$$

ただし，$n'=n+n_{c1}$，$m'=m+n_{c1}$　である．

(7.26)式，あるいは(7.27)式は（7.1)式と比較して，その次数がn_{c1}だけ高い拡大系となっている．以下では，(7.27)式をプラントとみなして制御系を構成することを考える．

このとき，(7.5),(7.28)式より，

$$C_2(z^{-1})w_2'(k)=0 \tag{7.29}$$

であることから，(7.27)式を時間多項式状の外乱を受けるプラントと考え，制御系の構成を行う．

制御系の構成に際し，(7.29)式を満たす外乱は$n_{c2}-1$型の外乱とみなすことができる

ことから，制御系の構造は図 7.1において $\ell=n_{c2}$ とした n_{c2} 次の離散時間積分特性を含むものとする．このとき，信号 $v(k)$ からプラント出力 $y(k)$ に至る特性は（7.9)式と同形式の次式となる．

$$y(k)=(1-z^{-1})^{n_{c2}}\left(\sum_{i=1}^{n'} a_i' z^{-i}\right) y(k) + \{1-(1-z^{-1})^{n_{c2}}\} y(k) + \sum_{i=0}^{m'} b_i' z^{-d-i} v(k) \tag{7.30}$$

なお，(7.30)式は(7.28)式から明らかなように，その入力多項式の一部に $C_1(z^{-1})$ を含むことから，以下に述べるモデル規範形適応制御系が安定となるためには $C_1(z^{-1})$ が安定である必要がある．

(7.30)式をもとに誤差方程式をつくると

$$e(k)=y^*(k)-(1-z^{-1})^{n_{c2}}\left(\sum_{i=1}^{n'} a_i' z^{-i}\right) y(k) - \{1-(1-z^{-1})^{n_{c2}}\} y(k) - \sum_{i=0}^{m'} b_i' z^{-d-i} v(k) \tag{7.31}$$

を得る．

上式より，$e(k)=0$ とする $v(k-d)$ をプラントパラメータ，外乱のパラメータが既知として求めるとつぎになる．

$$\begin{aligned} v(k-d)=\frac{1}{b_0'}\Big[& y^*(k)-(1-z^{-1})^{n_{c2}}\left(\sum_{i=1}^{n'} a_i' z^{-i}\right) y^*(k) \\ & - \{1-(1-z^{-1})^{n_{c2}}\} y^*(k) - \sum_{i=1}^{m'} b_i' z^{-i} v(k-d) \\ & - v_a(k-d) \end{aligned} \tag{7.32}$$

ただし，$v_a(k)$ は(7.32)式を(7.31)式に代入した次式により決定する．

$$e(k)=(1-z^{-1})^{n_{c2}}\left(\sum_{i=1}^{n'} a_i' z^{-i}\right) e(k) + \{1-(1-z^{-1})^{n_{c2}}\} e(k) + v_a(k-d) \tag{7.33}$$

上式を繰り返し代入することにより，つぎのように書き改める．

$$e(k+d)=\sum_{i=1}^{n''} a_i'' e(k+1-i) + \sum_{i=0}^{d-1} g_i\, v_a(k+1-i) \tag{7.34}$$

ただし，$n''=n+n_{c1}+n_{c2}$ であり，a_i''，g_i は a_i' と d とによって定まる定数で $g_0=0$ となる．

(7.34)式において $e(k+d)=0$ とおくことで $v_a(k)$ はつぎになる．

$$v_a(k) = -\sum_{i=1}^{n''} a_i'' e(k+1-i) - \sum_{i=1}^{d-1} g_i v_a(k-i) \tag{7.35}$$

また，実際にプラントに加える入力u（k）は

$$u(k) = \{1-(1-z^{-1})^{n_{c2}}\} u(k) + v(k) \tag{7.36}$$

により計算される．

実際には(7.27)式で記述されるプラントのパラメータは未知であることから，それらを推定値で置き換えて入力を発生させることになる．プラントのパラメータ推定に際し，さきの手法では不感帯により外乱の影響を避けたが，ここでは(7.27)式中の外乱 $w_2'(k)$ が時間の多項式で表されることを利用し，以下のようにフィルタを用いて外乱の除去を行ってその影響を避ける．

まず，(7.27)式の両辺に多項式 $C_2(z^{-1})$ を乗じ，(7.29)式を考慮すると次式が得られる．

$$C_2(z^{-1})y(k+1) = \sum_{i=1}^{n'} a_i' C_2(z^{-1}) y(k+1-i) + \sum_{i=0}^{m'} b_i' C_2(z^{-1}) u(k+1-d-i) \tag{7.37}$$

ここで，n_{c2} 次の漸近安定多項式 $F(z^{-1})$ を導入し，信号 $y_f(k)$, $u_f(k)$ を次式で定義する．このとき，観測雑音等が十分に小さいと考えられるばあいには $F(z^{-1})=1$ とすればよいが，雑音が無視できない場合には適切なローパス特性を持つように $F(z^{-1})$ を決定することが望ましい．

$$\left.\begin{aligned} F(z^{-1}) &= 1 + \sum_{i=1}^{n_{c2}} f_i z^{-i} \\ F(z^{-1}) y_f(k) &= C_2(z^{-1}) y(k) \\ F(z^{-1}) u_f(k) &= C_2(z^{-1}) u(k) \end{aligned}\right\} \tag{7.38}$$

上式で定義された信号 $y_f(k)$, $u_f(k)$ を用いて(7.37)式を書き直すとつぎになる．

$$\begin{aligned} y_f(k+1) &= \sum_{i=1}^{n'} a_i' y_f(k+1-i) + \sum_{i=0}^{m'} b_i' u_f(k+1-d-i) \\ &= \theta^T \delta(k) \end{aligned} \tag{7.39}$$

ここで，

$$\theta^T = [a_1', \cdots, a_{n'}', b_0', \cdots, b_{m'}'] \tag{7.40}$$

$$\delta^T(k) = [y_f(k), \cdots, y_f(k+1-n'), u_f(k), \cdots u_f(k-m')] \tag{7.41}$$

この(7.39)式のプラント表現をもとに(7.21)〜(7.23)式のアルゴリズムにおいて $d=1$

$$\hat{\theta}^T(k) = [\hat{a}_1'(k), \cdots, \hat{a}_{n'}'(k), \hat{b}_0'(k), \cdots, \hat{b}_{m'}'(k)] \tag{7.42}$$

$$e^*(k) = \frac{y_f(k) - \hat{\theta}^T(k-1)\,\delta(k-1)}{1 + \delta^T(k-1)\,\Gamma(k-1)\,\delta(k-1)} \qquad (7.43)$$

としてパラメータ推定を行う

得られた推定パラメータを用い，信号 $v(k)$ を次式で発生させる．

$$v(k) = \frac{1}{\hat{b}_0'(k)}\Big[\, y^*(k+d) - \sum_{i=1}^{n'} \hat{a}_i'(k)(1-z^{-1})^{nc2}\, y^*(k+d-i)$$

$$- \{1 - (1-z^{-1})^{nc2}\}\, y^*(k+d) - \sum_{i=1}^{m'} \hat{b}_i'(k)\, v(k-i)$$

$$- \hat{v}_a(k)\,\Big] \qquad (7.44)$$

ただし，$\hat{b}_0'(k) \neq 0$ と仮定するが，これは $\lambda_1(k)$，$\lambda_2(k)$ の修正により，任意の k に対して容易に成立させることができる．

上式を(7.31)式に代入し，(7.33)式に対応する誤差方程式を求めればつぎになる．

$$e(k) = \{\sum_{i=1}^{n'} \hat{a}_i'(k-d)\,(1-z^{-1})^{nc2}\}\, e(k-i)$$

$$+ \{1 - (1-z^{-1})^{nc2}\}\, e(k) + \tilde{e}(k-1) + \hat{e}(k) + \hat{v}_a(k-d)$$

$$(7.45)$$

ここで，

$$\tilde{e}(k-1) = \sum_{i=1}^{n'} \{\hat{a}_i'(k-d) - \hat{a}_i'(k-1)\}\,(1-z^{-1})^{nc2}\, y(k-i)$$

$$+ \sum_{i=0}^{m'} \{\hat{b}_i'(k-d) - \hat{b}_i'(k-1)\}\,(1-z^{-1})^{nc2}\, u(k-d-i)$$

$$(7.46)$$

$$\hat{e}(k) = \sum_{i=1}^{n'} \{\hat{a}_i'(k-1) - a_i'\}\,(1-z^{-1})^{nc2}\, y(k-i)$$

$$+ \sum_{i=0}^{m'} \{\hat{b}_i'(k-1) - b_i'\}\,(1-z^{-1})^{nc2}\, u(k-d-i) \qquad (7.47)$$

(7.45)式は代入を繰り返すと次式に変形できる．

$$e(k+d) = \sum_{i=1}^{n''} \hat{a}_i''(k)\, e(k+1-i)$$

$$+ \sum_{i=0}^{d-1} \hat{g}_i(k)\, \{\tilde{e}(k+d-1-i) + \hat{e}(k+d-i) + \hat{v}_a(k-i)\}$$

$$(7.48)$$

ただし，$\hat{g}_0(k) \equiv 1$ である．

ここで，$\hat{v}_a(k)$ を以下のように決定する．

$$\hat{v}_a(k)=-\sum_{i=1}^{n''}\hat{a}_i''(k)\,e(k+1-i)-\sum_{i=1}^{d-1}\hat{g}_i(k)\,\hat{v}_a(k-i) \tag{7.49}$$

ただし，$\hat{a}_i''(k)$，$\hat{g}_i(k)$ は，$\hat{a}_i'(k+1-d),\cdots,\hat{a}_i'(k)$ と d とによって k 時点で計算可能な値となっている．以上のようにして，プラントパラメータ，外乱のパラメータが未知の場合の制御系を構成すると，誤差方程式はつぎになる．

$$e(k+d)=\sum_{i=0}^{d-1}\hat{g}_i(k)\{\tilde{e}(k+d-1-i)+\hat{e}(k+d-i)\} \tag{7.50}$$

上式において $k\to\infty$ で右辺の信号が零となれば $e(k+d)=0$ となり，制御目的が達成される．(3.21),(3.22),(7.43)式のパラメータ調整アルゴリズムと (7.44),(7.49)式の制御則を用いたとき，多項式 $B(z^{-1})$，$C_1(z^{-1})$ が安定であれば(7.50)式の右辺が零になることを次節で示す．

なお，ここで構成した制御系の構造は積分特性を含むという点で前節で述べた制御系と同一構造となっている．したがって，外乱からプラント出力へ至る特性，目標値から出力誤差に至る特性はプラントモデル，積分器の次数の違い，むだ時間の違いを除けばそれぞれ (7.23),(7.25)式と同一となる．これより，各推定パラメータがその真値に収束しない場合にも $f(z^{-1})$ が漸近安定多項式となれば (7.5)式を満たす外乱が抑制されることはさきの制御系と同様である．

一方，ここで述べた制御系では次節で述べる安定性の解析より $e(k)\to 0$ が保証されることを考慮すれば(7.25)式より $k\to\infty$ で $f(z^{-1})$ が漸近安定多項式となっていることがわかる．結局，この制御系では推定パラメータがその真値に収束しない場合でも，常に外乱 $w_2(k)$ の抑制特性は変化しないこととなる．

ここでは，外乱の成分を，線形自由系の出力とみなしうるものが n_{c1} 次以下，時間の多項式で記述できるものが n_{c2} 次以下として制御系の構成を行ったが，外乱が多項式成分のみに変化した場合にはその次数が $n_{c1}+n_{c2}$ を越えない限り制御が可能となり $e(k)\to 0$ となる．また，線形自由系な出力とみなしうる成分が n_{c1} 次を越えた場合にはパラメータ推定に際して誤差を生じることになるが，n_{c2} 次の積分器とフィルタにより近似的な外乱の抑制が行われることになる．なお，線形自由系の出力とみなしうる外乱の成分が n_{c1} 次よりも低次となった場合には，推定パラメータ値は一意的な値に収束しないが問題は生じない．

7．5　安定性の考察[35),40)]

本節では 7.3節,7.4節で構成した制御系の安定性を考察する．

はじめに,7.3節の手法を考察するが，この手法ではパラメータ調整アルゴリズム中の不感帯をどのように選定するかが，制御系の安定性を保証するうえのポイントとなる．

ここでは２種類のアルゴリズムに対し，不感帯の大きさΔの下限値を評価する．[35)]

[　固定ゲインアルゴリズム　]

(3.21),(3.22),(7.16),(7.17)式のアルゴリズムにおいて $\Gamma(k)=\Gamma=\gamma I$，$\gamma\to\infty$ の以下のアルゴリズムを考える．

$$\hat{\theta}(k)=\hat{\theta}(k-1)+\frac{\delta(k-1)\hat{e}'(k)}{\delta^{T}(k-1)\delta(k-1)} \qquad (7.51)$$

このとき，次式で定義される関数 $V(k)$ を考える．

$$V(k)=\tilde{\theta}^{T}(k)\tilde{\theta}(k) \qquad (7.52)$$

ただし，$\tilde{\theta}(k)=\theta-\hat{\theta}(k)$ である．(7.51)式を考慮して $V(k)$ の差分 $\Delta V(k)=V(k)-V(k-1)$ を求めると $\Delta V(k)\leqq 0$ となる条件は次式となる．

$$2\hat{e}'(k)\tilde{\theta}^{T}(k-1)\delta(k-1)-\hat{e}'^{2}(k)\geqq 0 \qquad (7.53)$$

上式に (7.16),(7.17)式を用いると次式が得られる．

$$\begin{aligned}&2\hat{e}(k)\{\hat{e}(k)-w(k)\}-\hat{e}^{2}(k)\\&=\hat{e}(k)\{\hat{e}(k)-2w(k)\}\geqq 0\end{aligned} \qquad (7.54)$$

すなわち $|w(k)|\leqq w_0<\infty$ であることから

$$\Delta=2w_0+\varepsilon,\quad \varepsilon>0 \qquad (7.55)$$

と不感帯を決定することにより，$\hat{a}_i(k),\hat{b}_i(k)\to$ const.かつ $\hat{e}'(k)\to 0$ を実現できることになる．

[　最小２乗形アルゴリズム　]

(3.22)式において $\lambda_1(k)=\lambda_2(k)=\lambda$，$0<\lambda\leqq 1$ としたアルゴリズムを考える．このとき，$V(k)$ を

$$V(k)=\tilde{\theta}^{T}(k)\Gamma^{-1}(k)\tilde{\theta}(k)/\lambda^{k} \qquad (7.56)$$

とすると (3.21),(3.22),(7.16),(7.17)式より $\Delta V(k)\leqq 0$ となる条件は次式となる．

$$\{\tilde{\theta}^T(k-1)\delta(k-1)\}^2-\tilde{\theta}^T(k-1)\delta(k-1)w(k)$$
$$-\tilde{\theta}^T(k)\Gamma^{-1}(k)\Gamma(k-1)\delta(k-1)w(k)/\lambda$$
$$=\hat{e}^2(k)+\hat{e}(k)w(k)-\tilde{\theta}^T(k)\{\Gamma(k)\lambda^k\}^{-1}\{\Gamma(k-1)\lambda^{k-1}\}$$
$$\delta(k-1)w(k)\geqq 0 \tag{7.57}$$

このとき，(3.22)式において$\lambda_1(k)=\lambda_2(k)=\lambda$のとき$k\to\infty$で$\Gamma(k)\lambda^k\to$ const.となる[58]ことから(7.57)式中で$\{\Gamma(k)\lambda^k\}^{-1}\{\Gamma(k-1)\lambda^{k-1}\}=I$として，また(7.17)式を考慮して評価を行うと(7.57)式は

$$\hat{e}^2(k)-w^2(k)\geqq 0 \tag{7.58}$$

となる．すなわち，不感帯の大きさΔはつぎになる．

$$\Delta=w_0+\varepsilon,\ \varepsilon>0 \tag{7.59}$$

ただし，この場合のΔの値は厳密なものではなく，その下限を与えるものと考えることができる．このように不感帯の大きさΔを選定することで外乱の特性が全く未知であっても制御系を安定に保つことができる．

つぎに，外乱のモデルを用いる 7.4節の手法の安定性を考察する．このときの解析のポイントは誤差方程式(7.59)式の右辺の信号が零に収束するか否かであるが，以下では$k\to\infty$で (7.59)式中の信号$\tilde{e}(k)$，$\hat{e}(k)$が 零に収束し，かつ信号ベクトル$\delta(k)$が有界となることを示す．ただし，簡単のため(7.38)式中の漸近安定多項式$F(z^{-1})=1$として解析を行う．[40]

(7.50)式より

$$\sum_{i=0}^{d-1}\hat{g}_i(k)\hat{e}(k+d-i)=e(k+d)-\sum_{i=0}^{d-1}\hat{g}_i(k)\tilde{e}(k+d-1-i) \tag{7.60}$$

上式の絶対値をCauchy-Schwarzの不等式を用いて評価すると次式が得られる．

$$\sum_{i=0}^{d-1}\{|\hat{g}_i(k)||\hat{e}(k+d-i)|\}\geqq|e(k+d)|-|\sum_{i=0}^{d-1}\hat{g}_i(k)\tilde{e}(k+d-1-i)|$$
$$\geqq|e(k+d)|-\{|\sum_{i=0}^{d-1}\hat{g}_i(k)|\}\{\sum_{i=0}^{d-1}\|\hat{\theta}(k-i)-\hat{\theta}(k-d-1-i)\|\}$$
$$\times\{\sum_{i=0}^{d-1}\|\delta(k+d-1-i)\|\} \tag{7.61}$$

一方，(3.21)，(3.22)，(3.42)，(3.43)式のアルゴリズムにより，信号ベクトル$\delta(k)$の有界，非有界にかかわらず次式が成立する．[59]

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\hat{e}^2(k)}{1+\delta^T(k-1)\Gamma(k-1)\delta(k-1)} \tag{7.62}$$

さらに，(3.22)式において，すべてのk≧0 に対して

$$\Gamma^{-1}(k) > \varepsilon\Gamma^{-1}(0),\ \Gamma^{-1}(0) > 0,\ \varepsilon > 0 \tag{7.63}$$

が満足されれば次式が成立する．（詳細な導出は付録1参照）

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|\hat{e}(k)|}{\|\delta(k-1)\|} = 0 \tag{7.64}$$

また，(7.63)式が成立するとき，次式も成立する．

$$\lim_{k\to\infty} \{\hat{\theta}(k)-\hat{\theta}(k-\ell)\} = 0,\ \ell=1,2,\cdots,M<\infty \tag{7.65}$$

このとき，$k\to\infty$で$\hat{\theta}(k)\to$const.となれば

$$\lim_{k\to\infty} \hat{g}_i(k) = \text{const.} \quad (i=1,2,\cdots,d-1) \tag{7.66}$$

が成立する．(7.64)～(7.66)式を考慮すると(7.61)式より次式が得られる．

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e(k)|}{\sum_{i=0}^{d-1}\|\delta(k-1-i)\|} = 0 \tag{7.67}$$

一方，$B(z^{-1})$，$C_1(z^{-1})$ が安定多項式（プラントの逆系が安定）であることから，

第二章 2.5節と同様の議論により次式を得る．

$$\sum_{i=0}^{d-1} \|\delta(k-1-i)\| \leqq c_1 + c_2 \max_{0\leq i\leq k} |e(i)| \tag{7.68}$$

ここで，$0\leqq c_1<\infty$，$0<c_2<\infty$

(7.67),(7.68)式より(7.64)式は$e(k)\to 0$ かつ$\delta(k)$が有界となることを示している．[11] さらに，外乱が有界であればプラント入出力も有界となることは明らかである．

以上の議論より外乱のモデルを用いる設計法では外乱が (7.3),(7.5)式の特性を持つ限り$e(k)\to 0$ が保証されることが確認できる．

7．6　数値計算例と考察[35),40)]

ここでは，外乱を考慮して設計した制御系の有効性を検討するために行った数値計算の一例を２種類の手法について示す．

はじめに，外乱のモデルを用いない手法のシミュレーション例について述べる．

［　例　7．1　］

プラントは２次系とし，(7.1)式におけるパラメータはつぎの値とした．

$a_1=1.637$，$a_2=-0.6703$，$b_0=0.1458$，$b_1=-0.11566$，$n=2$，$d=1$

推定アルゴリズムは(3.22)式において$\lambda_1(k)=\lambda_2(k)=1.0$ の最小２乗形アルゴリズムとし，$\Gamma(0)=10^8\ I$とした．また，(7.16)式の不感帯は$\Delta=0.5$ とした．

制御装置は$\ell=2$ の２重積分特性を含むものとし，制御系の初期値は$\hat{b}_0(0)$以外はすべて零として計算を行った．

図 7.2にシミュレーション結果を示す．この例では81ステップ以後に図に示すような外乱が加わっているにもかかわらず，プラント出力は目標値に良く追従している．また，アルゴリズムに不感帯が存在することから，推定パラメータはその真値に収束しないが，このような場合にも制御系の外乱抑制特性，目標値への追従性が保たれていることが確認できる．

外乱，不感帯などの条件を変更したシミュレーションを行い，同様に良好な結果を得ている．

つぎに，外乱のモデルを用いる手法のシミュレーション例を示す．この場合には外乱w_1とw_2の組み合わせとして種々の組み合わせが考えられるが，ここでは，w_1として正弦波をw_2としてランプを用いた．

［　例　7．2　］

プラントは例 7.1と同一のものを用い，外乱を以下のように加えた．

$$w_i(k)=(b_0 z^{-1}+b_1 z^{-2})\,w_i(k)\quad (i=1,2) \tag{7.69}$$

ここで，

$$w_1(k)=\begin{cases} \sin(0.8k) & (81\leq k\leq 160) \\ 0 & (1\leq k\leq 80,\ 161\leq k\leq 200) \end{cases}$$

$$
w_2(k) = \begin{cases} -0.1(k-80) & (81 \leqq k \leqq 120) \\ -4.0+0.1(k-120) & (121 \leqq k \leqq 120) \\ 0 & (1 \leqq k \leqq 80, 161 \leqq k \leqq 200) \end{cases}
$$

このとき，

$$
C_1(z^{-1}) = 1 - 2\cos(\omega k)\, z^{-1} + z^{-2}, \quad \omega = 0.8
$$

$$
= 1 - 1.393\, z^{-1} + z^{-2}
$$

また，$n_{c1}=2$ となることから(7.27)式のパラメータ a_i'，b_i'はつぎになる．

$a_1'=3.031$ ，$a_2'=-3.952$，$a_3'=2.571$ ，$a_4'=-0.6703$

$b_0'=0.1485$，$b_1'=-0.3226$ ，$b_2'=0.3097$，$b_4'=-0.1157$

さらに，$n_{c2}=2$ であることから，制御装置は２重積分特性を含む形となる．

パラメータ推定の際に用いるフィルタは

$$
F(z^{-1}) = (1-0.5\, z^{-1})^2 \tag{7.70}
$$

と選定し，推定アルゴリズムは例 7.1と同様の条件の最小２乗形アルゴリズムを用いた．ただし，この場合には，不感帯は存在しない．他の条件もすべて例 7.1と同一として計算を行った．

図 7.3に制御経過のシミュレーション結果を，図 7.4に制御時における推定パラメータの挙動を示す．この例では，外乱の加わり始めた$k=81$および外乱が零となった$k=160$付近で応答に乱れを生じているが，$k=121$ では外乱$w_2(k)$と目標値$y^*(k)$が同時に変化しているにもかかわらず，プラント出力は目標値に良く追従している．しかし，推定パラメータは図 7.4から明らかなように必ずしも，その真値に収束していない．外乱の作用しない$k=1\sim80$，$k=161\sim200$ においてはプラントの次数2 に比較して推定モデルの次数が4 と高次となっているため，推定パラメータが同一の値に収束しないことはもち論であるが，パラメータの真値が一意に定まる$k=81\sim160$ においても十分な収束は得られていない．これはパラメータ推定に際して用いたフィルタにより信号ベクトル$\delta(k)$の成分の独立性が低下していることが原因と考えられる．このような場合にも，制御系の特性が十分に保たれていることが確かめられた．

なお，他の種類の外乱（ステップ外乱，ステップ外乱＋正弦波状外乱，ランプ外乱）が

作用する場合，パラメータ推定アルゴリズムを変更した場合，プラントがむだ時間を持つ場合などのシミュレーションを行い，良好な結果を得ている．

７．７　結　言

ここでは，未知の外乱を受けるプラントに対して，外乱のモデルを仮定せず，制御系内に積分特性を導入するとともにパラメータ推定アルゴリズムに不感帯を設ける手法と，外乱を線形自由系の出力と時間の多項式の２成分に分けてモデル化し，モデル化された外乱を定常的には完全に抑制しうる手法の２種類の設計法について述べ，その有効性をシミュレーション結果によって示した．

前者の手法は構造が簡潔であり，また，アルゴリズム内に不感帯を設けることは外乱のみならず，プラント出力の測定値に量子化誤差などが存在する場合に適応制御系の安定性を保つ手段ともなるという特徴を持っている．

また，後者の手法では，外乱を２種類の成分に分けてモデル化することで広い範囲の外乱に対応が可能となっている．

もち論，両者の手法を併用することも可能である．

なお，ここでは，基礎となる制御系としてモデル規範形適応制御系を用いたため，その適用範囲はむだ時間が既知の漸近安定な逆系を持つ系に限られるが，ここで用いた外乱のモデル化は適応極配置制御系と組合わせることも可能である．その具体的な設計法は次章で述べることとする．

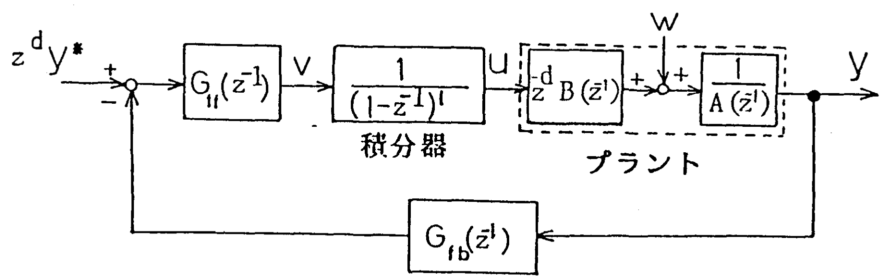


図　７．１　積分器を含む制御系のブロック線図

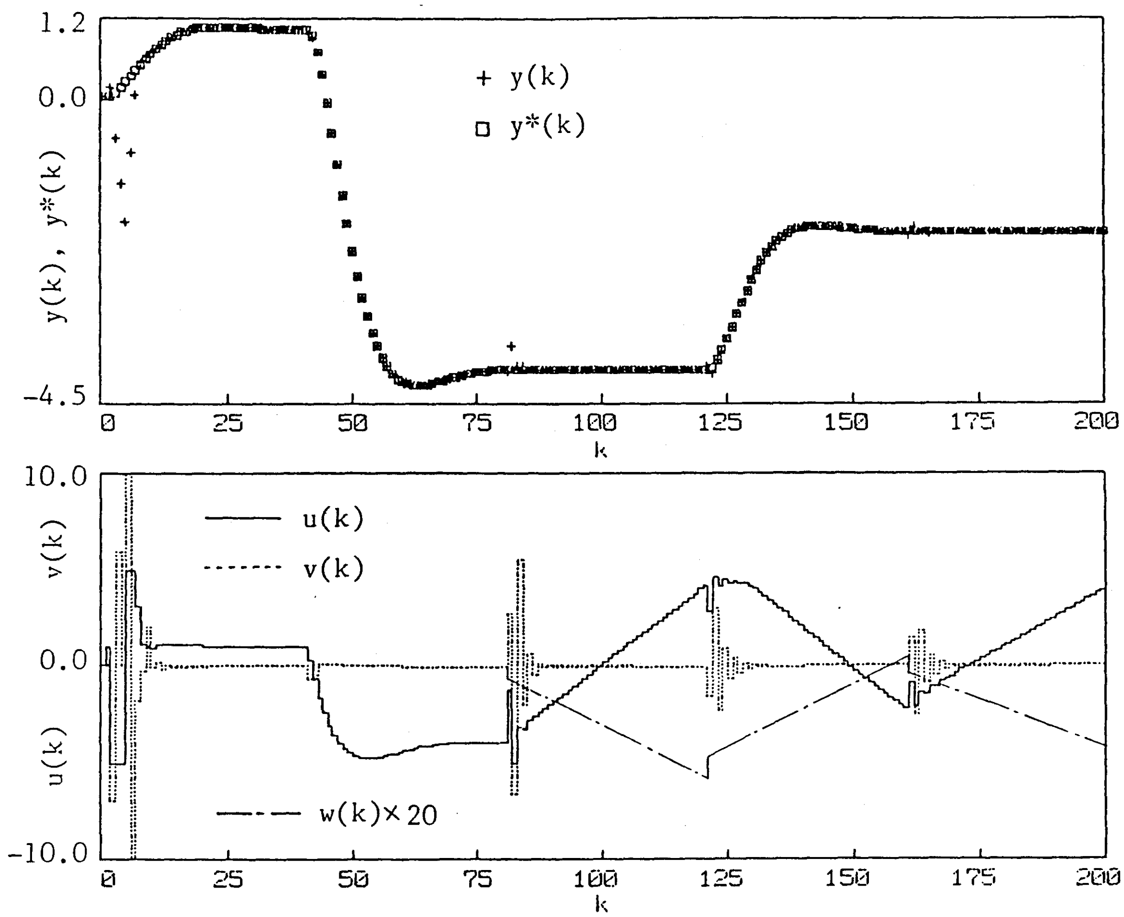


図　7．2　外乱のモデルを用いない手法によるシミュレーション結果（ランプ状外乱）

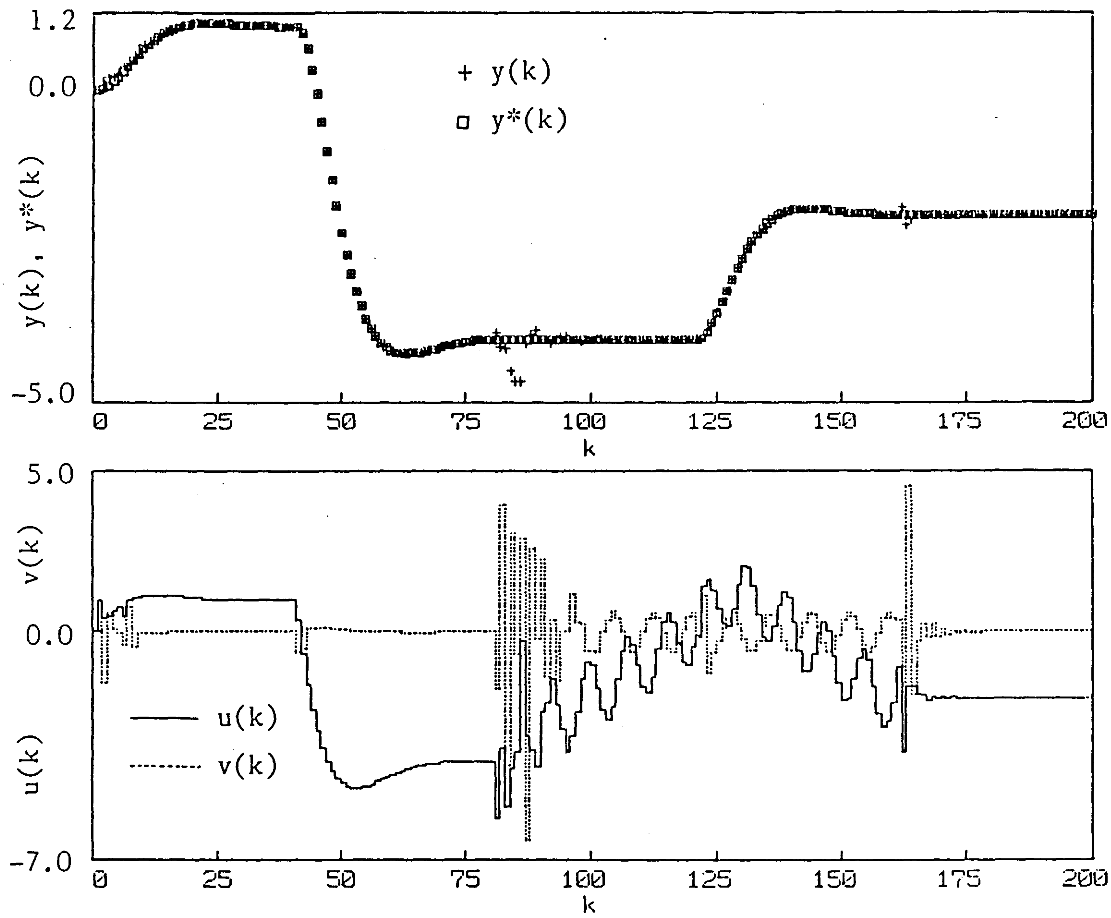


図　7．3　外乱のモデルを用いる手法によるシミュレーション結果（正弦波状外乱＋ランプ状外乱）

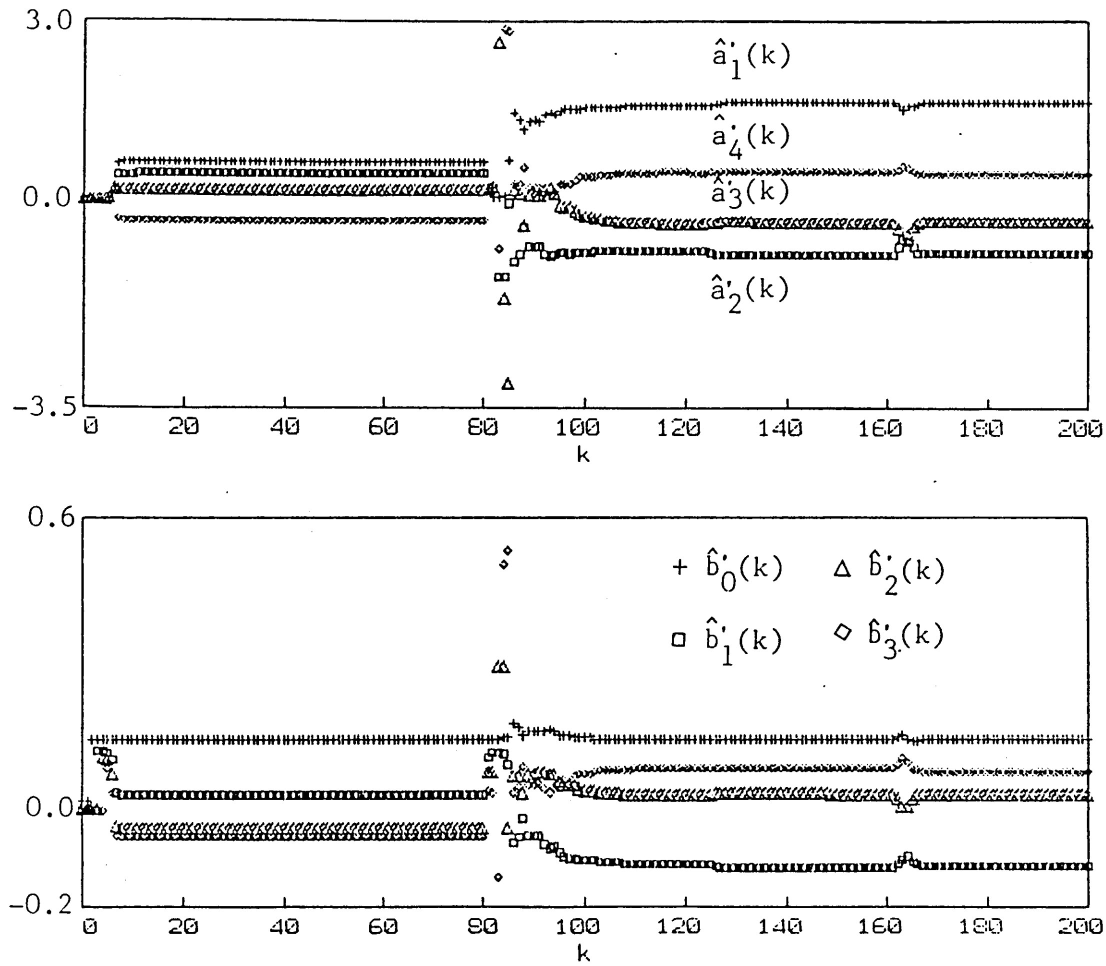


図　7．4　推定パラメータの挙動

第八章　未知外乱を考慮した適応極配置制御[43)]

8.1 緒言

前章では，制御系を設計するうえの工学的要求の一つと考えられる未知の外乱を考慮して制御系を構成する一つの方法として，外乱の型を仮定せず，制御系の安定性を適応アルゴリズムの不感帯により保証する手法と，外乱を線形自由系の出力と時間の多項式で表される成分とに分けてモデル化して制御系を構成する手法を，モデル規範形適応制御系を基礎として設計した．これまでの章で述べてきたように，モデル規範形適応制御系は制御系の構成は容易であるが，プラントに対してその逆系の漸近安定性の仮定，むだ時間既知の仮定を課し，その適用範囲が限られる欠点がある．これらの制約を回避する手法としては第四章から第六章に述べたような設計法があるが，これらの手法はモデル規範形適応制御系を直接拡張することによって設計されていることから，外乱への対処も前章の手法に準じて行うことが可能である．ここでは，モデル規範形適応制御系の制約を回避する手法の一つとして，適応極配置制御系を外乱を考慮した形で設計する方法について述べる．

適応極配置制御系はモデル規範形適応制御系に比較して，その構成が複雑で制御入力の発生に必要な計算量も多いなどの問題もあるが，マイクロプロセッサなどの制御装置実現用ハードウェアの進歩により，この欠点が補われ，プラントに対する制約が少ない点が利点となりうるものと考えられる．

以下では，外乱のモデル化として前章と同一のモデル化を行ったときの極配置制御系の構造として，いくつかの構造を比較検討しながら制御系の設計を行い，その特性について比較した結果について述べる．

８．２　問題の設定

ここで考えるプラントは前章で取り扱った外乱を受ける１入力１出力の離散時間系とするが，極配置制御系を構成するうえで扱い易いよう，つぎのように記述を変更する．

$$A(z^{-1})\,y(k)=B(z^{-1})\,u(k)+w_1(k)+w_2(k) \tag{8.1}$$

ここで，

$$A(z^{-1})=1-\sum_{i=1}^{n}a_i z^{-i}$$

$$B(z^{-1})=\sum_{i=d}^{n}b_i z^{-i} \tag{8.2}$$

このとき，極配置制御系を構成するための，プラントに対する仮定としてつぎのものを考える．

１）多項式$A(z^{-1})$，$B(z^{-1})$は互いに素．

２）プラントのむだ時間dは未知とするが，次数$n_m=\max(n,m)$は既知．

３）パラメータa_i，b_iは未知，ただし$B(1)\neq 0$．

また，(8.1)式の外乱$w_1(k)$，$w_2(k)$は前章（7.1)式の外乱と同様，その特性はそれぞれ（7.3),(7.5)式によって記述されるものとする．さらに，外乱に対する仮定は前章7.4節と同様にその次数の上限が既知でパラメータは未知とする．

以下で考察する問題は，プラントが（7.3),(7.5)式で表されるような場合にもその影響を抑制しうるような適応極配置制御系を構成することである．

次章では，まず，外乱を考慮した極配置制御系の構造について述べる．

8．3　制御系の構造

はじめに，プラントの多項式$A(z^{-1})$，$B(z^{-1})$および外乱の多項式$C_1(z^{-1})$，$C_2(z^{-1})$がその次数，係数ともに既知として外乱$w_1(k)$，$w_2(k)$を抑制する制御系の構造を考える．

このとき，つぎにように制御入力を発生させることにより，制御目的を達成することができる．

いま，多項式$B(z^{-1})$が$C_1(z^{-1})$，$C_2(z^{-1})$と互いに素であれば，次式を満たす多項式$S(z^{-1})$，$R(z^{-1})$が存在する．

$$C_d(z^{-1}) = A(z^{-1})C_1(z^{-1})C_2(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1}) \tag{8.3}$$

ここで，

$$C_d(z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{n_{cd}} c_{di} z^{-i}$$
$$S(z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{n_S} s_i z^{-i} \tag{8.4}$$
$$R(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{n_R} r_i z^{-i}$$

ただし，このとき各多項式の次数を例えばつぎのように決定すると，解の唯一性が保証される．[59)]

$$n_{cd} \leqq n + n_{c1} + n_{c2} + m + 1,\quad n_S = m - 1,\quad n_R = n + n_{c1} + n_{c2} - 1$$

また，$C_d(z^{-1})$は閉ループ系の極を与える漸近安定多項式とする．

(8.3)式の解である多項式$S(z^{-1})$，$R(z^{-1})$を用いて，制御入力を次式で発生させる．

$$C_1(z^{-1})C_2(z^{-1})u(k) = v(k) \tag{8.5}$$

$$S(z^{-1})v(k) = r(k) - R(z^{-1})y(k) \tag{8.6}$$

ここで，$r(k)$は外部入力を表すもので，その決定法については後に述べる．図 8.1に(8.5),(8.6)式で表される入力を用いる制御系のブロック線図を示す．同図より，外部入力$r(k)$からプラント出力$y(k)$に至る特性を$G_{ry}(z^{-1})$とすると次式が得られる．

$$G_{ry}(z^{-1}) = B(z^{-1}) / C_d(z^{-1}) \tag{8.7}$$

上式は閉ループ極を多項式$C_d(z^{-1})$によって任意に指定可能であることを示している．

一方，外乱$w(k)=w_1(k)+w_2(k)$からプラントの出力$y(k)$に至る特性を$G_{wy}(z^{-1})$とすると

$$G_{wy}(z^{-1})=S(z^{-1})C_1(z^{-1})C_2(z^{-1})/C_d(z^{-1}) \tag{8.8}$$

となることから，(7.3),(7.5)式を満足する外乱$w_1(k)$，$w_2(k)$はともに抑制されプラント出力に定常的には現れないことがわかる．

つぎに，目標値へのプラント出力の追従を達成する補償器の決定を考える．

いま，目標値y^*がつぎの特性を持つものとする．

$$C^*(z^{-1})y^*(k)=0 \tag{8.9}$$

ここで，

$$C^*(z^{-1})=1+\sum_{i=1}^{n^*}c^*_i z^{-i} \tag{8.10}$$

である．このような条件を満たす目標値としては，ステップ，ランプ，正弦波あるいはサンプリング周期の整数倍をその周期とする任意の周期関数が含まれる．このとき，多項式$C^*(z^{-1})$，$B(z^{-1})$が互いに素であれば，次式を満足する多項式$K(z^{-1})$，$L(z^{-1})$が存在する．

$$C_d(z^{-1})=C^*(z^{-1})L(z^{-1})+B(z^{-1})K(z^{-1}) \tag{8.11}$$

ここで，

$$L(z^{-1})=1+\sum_{i=1}^{n_L}\ell_i z^{-i}$$

$$K(z^{-1})=\sum_{i=0}^{n_K}k_i z^{-i} \tag{8.12}$$

ただし，各多項式の次数は$n_{cd}\leqq n^*+m-1$，$n_L=m-1$，$n_K=n^*-1$とする．

上式の解$K(z^{-1})$を用いて，次式により外部入力$r(k)$を生成すれば$k\to\infty$で$y(k)\to y^*(k)$が実現できる.[60]

$$r(k)=K(z^{-1})y^*(k) \tag{8.13}$$

特に，$y^*(k)=\mathrm{const.}$のときのみオフセットを零とする定数設定値のサーボ問題では，上式はつぎのように簡略化される．

$$r(k)=K(1)y^*(k)=[C_d(1)/B(1)]y^*(k) \tag{8.14}$$

以上のようにパラメータが既知の場合の設計を行えば，外乱の抑制が達成でき，また，(8.13)式の補償器を用いると目標値への追従の保証される極配置サーボ系を構成することができる．

次節では，この制御系を適応制御系として実現する方法について述べる．

8．4　適応制御系の設計

実際の制御では，プラントの多項式$A(z^{-1})$，$B(z^{-1})$および外乱の多項式$C_1(z^{-1})$は未知であるので，これらの多項式の係数を推定して制御装置を構成する．

パラメータ推定に用いるプラントの表現としては前章で導入した(7.39)式と同一のつぎの表現を用いることとする．

$$y_f(k+1)=\theta^T\delta(k) \tag{8.15}$$

ここで，

$$\theta^T=[a'_1,\cdots,a'_{n'},b'_1,\cdots,b'_{n'}] \tag{8.16}$$

$$\delta^T=[y_f(k),\cdots,y_f(k+1-n'),u_f(k),\cdots,u_f(k+1-n')] \tag{8.17}$$

ただし，$n'=n_m+n_{c1}=\max(n,m)+n_{c1}$

$$C_1(z^{-1})A(z^{-1})=1-\sum_{i=1}^{n'}a'_iz^{-i},\quad a'_i=0\quad(i>n+n_{c1})$$

$$C_1(z^{-1})A(z^{-1})=\sum_{i=1}^{n'}b'_iz^{-i},\quad b'_i=0\quad(i<d,\ i>m+n_{c1}) \tag{8.18}$$

また，$y_f(k)$，$u_f(k)$は(7.38)式で定義される信号である．(8.15)式中のθの推定アルゴリズムとしては(3.21)，(3.22)，(7.43)式のアルゴリズムにおいて$d=1$

$$\hat{\theta}^T(k)=[\hat{a}'_1(k),\cdots,\hat{a}'_{n'}(k),\hat{b}'_1(k),\cdots,\hat{b}'_{n'}(k)] \tag{8.19}$$

としてパラメータ推定を行う．ただし，(8.15)式の定式化をもとにパラメータ推定を行う場合，外乱$w_1(k)$が存在しないときには，信号ベクトルは一次独立とはならず，推定パラメータの真値への収束は保証されない．また，この場合には，重み係数$\lambda_1(k)$の選定によってはゲイン行列$\Gamma(k)$の発散等の問題を生ずることがあるが，これらの問題はアルゴリズムの修正（例えば，固定トレースアルゴリズムの使用）によって避けることができる．

このとき，プラントパラメータの推定値$\hat{\theta}(k)$により，つぎの推定多項式が構成できる．

$$\hat{A}'(k,\ z^{-1})=1\ -\ \sum_{i=1}^{n'}\ \hat{a}'_i(k)\ z^{-i}$$

$$\hat{B}'(k,\ z^{-1})=\ \sum_{i=1}^{n'}\ \hat{b}'_i(k)\ z^{-i} \tag{8.20}$$

制御装置の多項式$S(z^{-1})$，$R(z^{-1})$を決定するためには，$A(z^{-1})C_1(z^{-1})$，$C_2(z^{-1})$および$B(z^{-1})$を必要とする．(8.20)式の推定多項式において(8.18)式より$\hat{A}'(k,\ z^{-1})$，$\hat{B}'(k,\ z^{-1})$の真値がそれぞれ$C_1(z^{-1})A(z^{-1})$，$C_1(z^{-1})$であること，および，$A(z^{-1})$，$B(z^{-1})$が互いに素であることから，ユークリッドの互除法などを用いて$\hat{A}'(k,\ z^{-1})$，$\hat{B}'(k,\ z^{-1})$の共通項として$\hat{C}_1(k,\ z^{-1})$を求めることができるが，ここでは，つぎのような方法により多項式$\hat{C}_1(k,\ z^{-1})$を分離して制御系を構成する[61]．

このとき，まず，(8.3)式にかえて次式を考える．

$$C'(z^{-1})=A(z^{-1})C_2(z^{-1})S'(z^{-1})+B(z^{-1})R'(z^{-1}) \tag{8.21}$$

ここで，

$$C'(z^{-1})=1\ +\ \sum_{i=1}^{n'_C}\ c'_i\ z^{-i}$$

$$S'(z^{-1})=1\ +\ \sum_{i=1}^{n'_S}\ s'_i\ z^{-i} \tag{8.22}$$

$$R'(z^{-1})=\ \sum_{i=0}^{n'_R}\ r'_i\ z^{-i}$$

ただし，$C'(z^{-1})$は任意の漸近安定多項式とし，各多項式の次数は解の唯一性を満たすように決定するものとする．さらに，(8.15)式に基づいてパラメータ推定を行った場合には，推定値として$A(z^{-1})C_1(z^{-1})$および$B(z^{-1})C_1(z^{-1})$に対応した推定多項式が得られることを考慮して，(8.21)式の両辺に多項式$C_1(z^{-1})$を乗ずると

$$\begin{aligned}C'(z^{-1})C_1(z^{-1})=&A(z^{-1})C_1(z^{-1})C_2(z^{-1})S'(z^{-1})\\&+B(z^{-1})C_1(z^{-1})R'(z^{-1})\end{aligned} \tag{8.23}$$

を得る．(8.23)式の解$S'(z^{-1})$，$R'(z^{-1})$を求めるため，式中の多項式のうちで推定値の得られているものを置き換えるとともに，多項式$C_1(z^{-1})$，$S'(z^{-1})$，$R'(z^{-1})$に対応する推定多項式$\hat{C}_1(k,\ z^{-1})$，$\hat{S}'(k,\ z^{-1})$，$\hat{R}'(k,\ z^{-1})$を用いて上式を書き直すとつぎになる．

$$\begin{aligned}C'(z^{-1})\hat{C}_1(k,\ z^{-1})=&\hat{A}'(k,\ z^{-1})C_2(z^{-1})\hat{S}'(k,\ z^{-1})\\&+\hat{B}'(k,\ z^{-1})\hat{R}'(k,\ z^{-1})\end{aligned} \tag{8.24}$$

ここで,

$$\hat{C}_1(k,\ z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{n_{c1}} \hat{c}_1^i(k)\ z^{-i}$$

$$\hat{S}'(k,\ z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{n'_S} \hat{s}'_i(k)\ z^{-i} \tag{8.25}$$

$$\hat{R}'(k,\ z^{-1}) = \sum_{i=0}^{n'_R} \hat{r}'_i(k)\ z^{-i}$$

ただし, この場合, 各推定パラメータが真値に収束した場合に解の唯一性を保証する各多項式の次数は $n_c' \leqq 2n_m + n_{c2} - 1$, $n_S' = n_m - 1$, $n_R' = n_m + n_{c2} - 1$となる.

(8.24)式は

$$\hat{A}'(k,\ z^{-1})\ C_2(z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{n''} \hat{a}''_i(k)\ z^{-i}\ (n'' = n' + n_{c2}) \tag{8.26}$$

とおき, 両辺の同べきの項を等置すればつぎのような連立方程式を表している.

$$\Phi(k)\ \hat{\theta}_c(k) = \eta(k) \tag{8.27}$$

ここで,

$$\Phi(k) = \begin{bmatrix} 1 & & \hat{b}''_1(k) & & -1 & \\ \hat{a}''_1(k) & 0 & \vdots & 0 & -c'_1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ \vdots & 1 & \vdots & & \vdots & -1 \\ \vdots & \hat{a}''_1(k) & \hat{b}''_{n''}(k) & \hat{b}''_1(k) & \vdots & -c'_1 \\ \hat{a}''_{n''}(k) & \vdots & \ddots & \vdots & -c'_{nc'} & \vdots \\ \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots \\ & \hat{a}''_{n''}(k) & & \hat{b}''_{n''}(k) & & -c'_{nc'} \end{bmatrix} \in R^{(n'_S + n'_R + n_{c1} + 1) \times (n'_S + n'_R + n_{c1} + 1)} \tag{8.28}$$

$$\hat{\theta}_c^T(k) = [\hat{s}'_1(k), \cdots, \hat{s}'_{n'_S}(k), \hat{r}'_0(k), \cdots, \hat{r}'_{n'_R}(k),$$

$$\hat{c}_1^1(k), \cdots, \hat{c}_1^{n_{c1}}(k)] \in R^{(n'_S + n'_R + n_{c1} + 1)} \tag{8.29}$$

$$\eta^T(k) = [c'_1 - \hat{a}''_1(k), \cdots, c'_n - \hat{a}''_{n''}(k), \cdots, c'_{nc'}, 0, \cdots, 0]$$

$$\in R^{(n'_S + n'_R + n_{c1} + 1)} \tag{8.30}$$

(8.27)式中の行列Φ(k)は(8.24)式中の多項式の次数が前述のように決定されているとき, 多項式$\hat{A}'(k,\ z^{-1})$, $\hat{B}'(k,\ z^{-1})$がそれぞれ$A(z^{-1})\ C'_1(z^{-1})$, $B(z^{-1})\ C'_1(z^{-1})$ ($C'_1(z^{-1})$はn_{c1}次の任意多項式) に収束すれば正則となる. (8.27)式の解を求める手法としては, 解を逐次アルゴリズムによって推定する手法もあるが, ここでは最も基本的な定式化を行う. すなわち, すべての時点でΦ(k)が正則とすれば(8.27)式の解$\hat{\theta}_c(k)$は次式により決定できる.

$$\hat{\theta}_c(k) = \Phi^{-1}(k)\,\eta(k) \tag{8.31}$$

これより，$\hat{C}_1(k, z^{-1})$，$\hat{S}'(k, z^{-1})$，$\hat{R}'(k, z^{-1})$ が求められるが，$\hat{S}'(k, z^{-1})$，$\hat{R}'(k, z^{-1})$ は前節で述べた制御装置の多項式 $S(z^{-1})$，$R(z^{-1})$ には対応していない．しかし，$\hat{S}'(k, z^{-1})$，$\hat{R}'(k, z^{-1})$ を図 8.1に示される制御系の $S(z^{-1})$，$R(z^{-1})$ にかえて用い，$C_1(z^{-1})=1$ （$\hat{C}_1(k, z^{-1})$ は制御には用いない）とすると，つぎの性質を持つ適応制御系が得られる．

1）外乱 $w_1(k)$, $w_2(k)$ の存在によらず，閉ループ系の極は $C'(z^{-1})=0$ の根で与えられる．

2）外乱 $w_2(k)$ は抑制され，定常的には出力に現れない．

ただし，目標値 $y^*(k)$ へのプラント出力の追従を保証するためには(8.11)式中の多項式 $C_d(z^{-1})$ を $C'(z^{-1})$ に置き換え，さらに両辺に $C_1(z^{-1})$ を乗じた次式をもとに多項式 $K(z^{-1})$ を求める必要がある．

$$C'(z^{-1})\,C_1(z^{-1}) = B(z^{-1})\,C_1(z^{-1})\,K(z^{-1}) + C^*(z^{-1})\,C_1(z^{-1})\,L(z^{-1}) \tag{8.32}$$

(8.32)式の解 $K(z^{-1})$，$L(z^{-1})$ は(8.23)式の求解と同様に求めることができるが，つぎのような，方法も可能である．

(8.23)式の両辺に $y^*(k)$ を乗じ，(8.9)式を考慮すると次式を得る．

$$C'(z^{-1})\,C_1(z^{-1})\,y^*(k) = B(z^{-1})\,C_1(z^{-1})\,K(z^{-1})\,y^*(k) \tag{8.33}$$

さらに，上式中の多項式を推定値で置き換えるとつぎになる．ただし n^* は既知とする．

$$C'(z^{-1})\,\hat{C}_1(k, z^{-1})\,y^*(k) = K(z^{-1})\,\hat{B}'(k, z^{-1})\,y^*(k) = \theta_f^{\,T}\delta_f(k) \tag{8.34}$$

ここで，

$$\theta_f^T = [k_0, \cdots, k_{nK}] \tag{8.35}$$

$$\delta_f^T(k) = [\hat{B}'(k, z^{-1})\,y^*(k), \cdots, \hat{B}'(k, z^{-1})\,y^*(k-n_K)] \tag{8.36}$$

(8.36)式は(8.15)式と同形式であることから，(3.22)，(3.23)式のアルゴリズムにおいて

$d=1$，$\delta(k)=\delta_f(k)$，$\hat{\theta}(k)=\hat{\theta}_f(k)$

$$\hat{\theta}_f^{\,T}(k) = [\hat{k}_0(k), \cdots, \hat{k}_{nK}(k)] \tag{8.37}$$

$$e^*(k)=\frac{C'(z^{-1})\,\hat{C}_1(k,\ z^{-1})\ y^*(k)-\hat{\theta}_r^T(k-1)\ \delta_r(k-1)}{1\ +\ \delta^T{}_r(k-1)\ \Gamma(k-1)\ \delta_r(k-1)}$$

(8.38)

として，多項式K（z^{-1}）のパラメータを推定することができる．このとき

$$\hat{K}(k,\ z^{-1})=\sum_{i=0}^{n_K}\hat{k}_i(k)\ z^{-i} \tag{8.39}$$

を用いてr（k）を発生させれば制御目的が達成できる．したがって，適応制御においては必ずしも目標値y＊（k）を生成する特性多項式C＊（z^{-1}）が既知である必要はない．また，目標値が一定のときのみオフセットを零にするにはK（k，z^{-1}）を次式で決定すればよい．

$$\hat{K}(k,\ z^{-1})=\hat{K}(k)=[C'(1)\hat{C}_1(k,\ 1)]\,/\,\hat{B}'(k,\ 1) \tag{8.40}$$

このように構成した適応制御系は外乱$w_2(k)$を完全に抑制できるが，$w_1(k)$に対しては$C_2(z^{-1})\ w_1(k)$のオーダの制御誤差が残る．$C_2(z^{-1})\ w_1(k)$は外乱$w_1(k)$のn_{c2}階差分であるので，$w_1(k)$が正弦波状の外乱等の場合には一般にその値は小さいと考えられるが，零ではない．外乱$w_1(k)$をも完全に抑制できる前節の制御系を構成するには（8.3)式の解S（z^{-1}），R（z^{-1}）が必要となるが，（8.3)式を解くためにはB（z^{-1}）が必要となる．そこで，これまでに得られている推定多項式からB（z^{-1}）を推定することを考える．

このとき，(8.18)，(8.20)式より，つぎの関係が得られる．

$$\Phi_B(k)\ \hat{\theta}_B(k)=\eta_B(k) \tag{8.41}$$

ここで，

$$\Phi_B(k)=\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ \hat{c}_1^1(k) & \ddots & \\ \vdots & \ddots & 1 \\ \vdots & & \hat{c}_1^1(k) \\ \hat{c}_1^{n_{c1}}(k) & & \vdots \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \hat{c}_1^{n_{c1}}(k) \end{bmatrix}\in R^{n_m\times n'} \tag{8.42}$$

$$\hat{\theta}_B(k)=[\hat{b}_1(k),\cdots,\hat{b}_{n_m}(k)]\ \in R^{n_m} \tag{8.43}$$

$$\eta_B(k)=[\hat{b}'_1(k),\cdots,\hat{b}'_{n'}(k)]\ \in R^{n'} \tag{8.44}$$

(8.41)式中の$\Phi_B(k)$は(8.27)式の解$\hat{\theta}_c(k)$によって，また，$\eta_B(k)$は(8.19)式のパラメータ推定値$\hat{\theta}(k)$によって決定できる．(8.41)式は推定値$\hat{\theta}(k)$，$\hat{\theta}_c(k)$がその真値に一致すれば唯一解を持つが，$\Phi_B(k)$が正方行列でないため，一般には唯一解を求めることができない．そこで，$\hat{\theta}_B(k)$を(8.41)式の最小ノルム解として次式で求めることとする．

$$\hat{\theta}_B(k) = [\Phi_B^T(k)\ \Phi_B(k)]^{-1}\Phi_B^T(k)\ \eta_B(k) \tag{8.45}$$

(8.45)式より，多項式$B(z^{-1})$の推定値はつぎになる．

$$\hat{B}(k,\ z^{-1}) = \sum_{i=1}^{n_m} \hat{b}_i(k)\ z^{-i} \tag{8.46}$$

これより，(8.20)式の$\hat{A}'(k,\ z^{-1})$，(8.25)式の$\hat{C}_1(k,\ z^{-1})$そして(8.46)式の$\hat{B}(k,\ z^{-1})$を用いれば(8.3)式をもとに$\hat{S}(k,\ z^{-1})$，$\hat{R}(k,\ z^{-1})$を求めることができる．この多項式$\hat{S}(k,\ z^{-1})$，$\hat{R}(k,\ z^{-1})$を用いて図 8.1の制御系を構成すれば外乱$w_1(k)$,$w_2(k)$はともに完全に抑制されることになる．

また，同様の特性を持つ制御系は図 8.1とは異なる，図 8.2に示す２重の制御ループを用いることによっても構成できる．

図 8.2において内側の制御ループはさきに述べた(8.21)式によって決定するものとすると，$r(k)$から$y(k)$に至る特性はつぎになる．

$$G_{ry}(z^{-1}) = B(z^{-1})/C'(z^{-1}) \tag{8.47}$$

これより，$r(k)$から$y(k)$に至る特性が，多項式$C_d(z^{-1})$によってその閉ループ極が指定でき，かつ，外乱$w_1(k)$,$w_2(k)$がともに完全に抑制されるためには，多項式$S''(z^{-1})$，$R''(z^{-1})$を次式を満たすように決定すればよい．

$$C_d(z^{-1}) = C'(z^{-1})\ C_1(z^{-1})\ S''(z^{-1}) + B(z^{-1})\ R''(z^{-1}) \tag{8.48}$$

ここで，

$$S''(z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{n''_S} s''_i z^{-i}$$

$$R''(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{n''_R} r''_i z^{-i} \tag{8.49}$$

(8.48)式の解$S''(z^{-1})$,$R''(z^{-1})$を求めるため，両辺に多項式$C_1(z^{-1})$を乗じ，式中の多項式のうちで推定値の得られているものを置き換え，$C_1(z^{-1})$,$S''(z^{-1})$,
$R''(z^{-1})$に対応する多項式$\hat{C}'_1(k,\ z^{-1})$,$\hat{S}''(k,\ z^{-1})$,$\hat{R}''(k,\ z^{-1})$を用いて(8.48)式を書き直すとつぎになる．

$$C_d(z^{-1})\,\hat{C}'_1(k,\ z^{-1})=C_2(z^{-1})\,\hat{C}_1(k,\ z^{-1})\,\hat{C}_1(k,\ z^{-1})\,\hat{S}''(k,\ z^{-1})$$
$$+\hat{B}'(k,\ z^{-1})\,\hat{R}''(k,\ z^{-1}) \qquad (8.50)$$

ここで，

$$\hat{C}_1(k,\ z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{nc1} \hat{c}'^{i}_{1}(k)\, z^{-i}$$
$$\hat{S}''(k,\ z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{n''_S} \hat{s}''_i(k)\, z^{-i} \qquad (8.51)$$
$$\hat{R}''(k,\ z^{-1}) = \sum_{i=0}^{n''_R} \hat{r}''_i(k)\, z^{-i}$$

ただし，各多項式の次数を $n_{cd} \leq n'_c + n' - 1,\ n''_S = n_m - 1,\ n''_R = n'_c + n_{c1} - 1$ とする．

(8.50)式は(8.24)式と同一形式となっていることから，さきと同様に $\hat{C}_1'(k,\ z^{-1})$, $\hat{S}''(k,\ z^{-1})$, $\hat{R}''(k,\ z^{-1})$ の係数を求めることができる．

図 8.2のように制御系を構成したとき，外乱 $w(k)$ からプラント出力 $y(k)$ に至る伝達関数を $G_{wy}(z^{-1})$ とすると

$$G_{wy}(z^{-1}) = S'(z^{-1})\,S''(z^{-1})\,C_1(z^{-1})\,C_2(z^{-1})\,/\,C_d(z^{-1}) \qquad (8.52)$$

となり，図 8.1の制御系と同様に，外乱を完全に抑制できることが確かめられる．

以上に述べたように適応制御系を構成したとき，$k\to\infty$ で推定パラメータベクトル $\hat{\theta}(k)$ がその真値 θ に収束すれば，外乱の抑制特性，目標値への追従性ともに所期の目的を達成できる．なお，推定パラメータがその真値に収束しない場合の制御系の漸近安定性の理論的保証は現在のところ得られていないが，閉ループ系が漸近安定となれば，外乱 $w_2(k)$ の抑制特性が失われないことは，前章と同様の解析によって容易に示すことができる．

ここで述べた３種類の適応制御系の構成法はそれぞれ異なる特性を持つことから，制御系に要求される仕様に応じて最も望ましい構成法を採用すべきである．

例えば，外乱が正弦波状の場合でも，その周期がサンプリング周期と比較して十分に長い場合には，制御系の構成として外乱 $w_2(k)$ のみを抑制できる第１の構成法で十分な特性が得られることがシミュレーションから確認できる．同時に，適応系の構成が容易である点からも，この手法は短いサンプリング周期の要求される制御問題に適すると考えられる．しかし，外乱の周期がサンプリング周期に比較して短い場合には，この外乱 $w_1(k)$ を厳密に考慮した第２，第３の手法が有利となる．第２の構成法と第３の構成法とを比較した場合，その構造としては第２の手法が簡潔である．これに対して，第３の手法は制御

ループの内側ループに第1の手法と同一の制御ループを含んでいる点で，制御系の自由度が大きくなるなどの利点があるが，入力発生までに要する計算は複雑となる．

8．5　数値計算例と考察[43)]

前節までに述べた手法において，外乱$w_2(k)$に関してはその特性多項式$C_2(z^{-1})$を既知としていることから，適応制御を行う上であまり問題を生じない．したがって，ここでは未知の特性多項式$C_1(z^{-1})$を持つ外乱$w_1(k)$のみが作用する場合を例として本手法の有効性を検討するために行ったシミュレーションの一例を示す．

プラントはモデル規範形適応制御系では制御の不可能な連続時間系がsの右半平面に零点を持つ逆系が不安定な系を離散化したもので，(8.1)式におけるパラメータは以下の通りである．

［　例　8．1　］

$a_1=1.2131$，$a_2=-0.3679$，　$b_1=-0.06143$，$b_2=0.2162$

外乱としては$k=81\sim160$において以下の信号を加えた．

$$w_1(k)=\begin{cases}0.1\sin(0.5k) & (81\leq k\leq160)\\ 0 & (1\leq k\leq80, 161\leq k\leq200)\end{cases}$$

$$w_2(k)=0 \qquad (1\leq k\leq200)$$

このとき，$n_{c2}=2$であり，制御装置は$n_m=\max(n, m)=2$, $n'=4$として設計した．また，$w_2(k)\equiv0$であることから$C_2(z^{-1})=F(z^{-1})=1$ととる．制御ループの構造として，図 8.1，図 8.2のそれぞれに対応するものがあるが，ここでは図 8.1の構造を持つ第2の手法を用いた場合の結果のみを示す．

閉ループ極を与える多項式$C_d(z^{-1})$は，$G^*(s)=\omega_n^2/(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)$（$\zeta=0.7, \omega_n=1.5$）の伝達関数をサンプリング周期$T=0.5$で離散化したパルス伝達関数$G^*(z^{-1})$の　分母多項式$C_d(z^{-1})=1-1.017z^{-1}+0.35z^{-2}$を用いた．

パラメータ推定アルゴリズムは$\lambda_1(k)=\lambda_2(k)=0.95$，$\Gamma(0)=10^6 I$の最小2乗形アルゴリズムを用いた．目標値$y^*(k)$としてはステップを考え，(8.39)式の前置補償器を用いた．推定パラメータの初期値は，$\hat{\theta}^T(0)=[1,0,0,0,1,1,0,0]$，信号の初期値はすべて零として計算を行った．

図 8.3に制御経過のシミュレーション結果を，図 8.4に推定パラメータの一部の挙動を示す．図 8.4中の破線は外乱$w_1(k)$が存在する場合のパラメータの真値を示す．推定パ

ラメータは外乱の存在するｋ＝81～160 において，ほとんどその真値に収束している．この例では，パラメータ推定の不十分な制御初期および，外乱の加わった直後に応答の乱れを生じているが，その点を除けば外乱の抑制，目標値への追従とも目的が達成できている．なお，図 8.3中で$\bar{y}^*(k)$は$G^*(z^{-1})$に入力として$y^*(k)$を加えた場合の出力を表す．また，図 8.3に見られる応答の乱れは(8.27)式の行列$\Phi(k)$の行列式の値が過渡的に非常に小さな値となることに起因していることが確かめられ，これは(8.27)式を逐次アルゴリズム等を用いて解くことによって改善が可能である．なお，２重の制御ループ構造を用いた場合にもほぼ同様な結果が得られている．

8．6 結 言

本章では，周期外乱を含む線形自由系の出力とみなしうる外乱と，時間の多項式で記述できる外乱とを同時に受けるプラントに対して，これらの外乱を考慮して適応極配置制御系を設計する方法を述べた．

この方法は，モデル規範形適応制御の不可能な，外乱を受ける不安定な逆系を持つ系を制御可能な一つの制御手法であり，シミュレーションによってその有効性を確認できる．しかし，制御系の構成が複雑となる点，あるいは過渡特性が不十分である点など，実プラントへの応用を考えた場合には，なお検討すべき問題が残されている．これらの点に関してはさらに考察を行い，設計法を改善する必要があると考えられる．

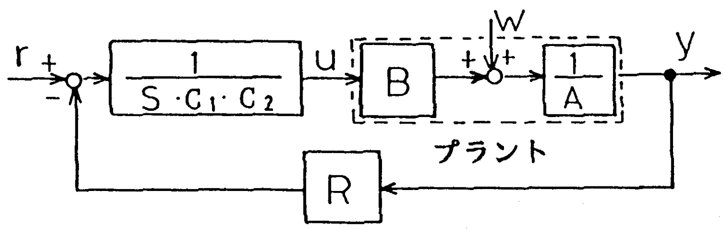


図　8．1　外乱を考慮した極配置制御系のブロック線図

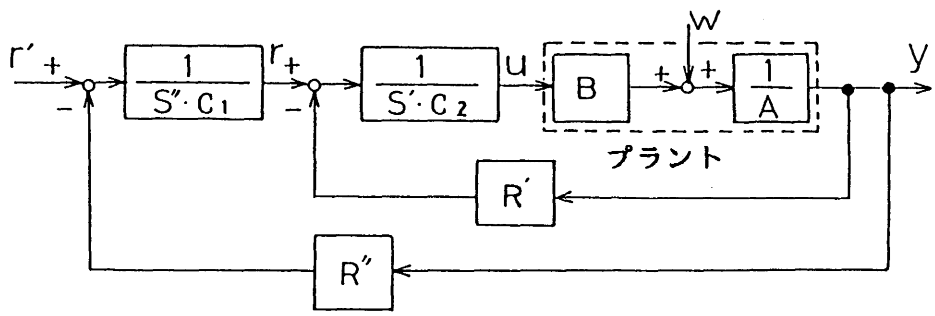


図　8．2　2重のフィードバックループを持つ極配置制御系のブロック線図

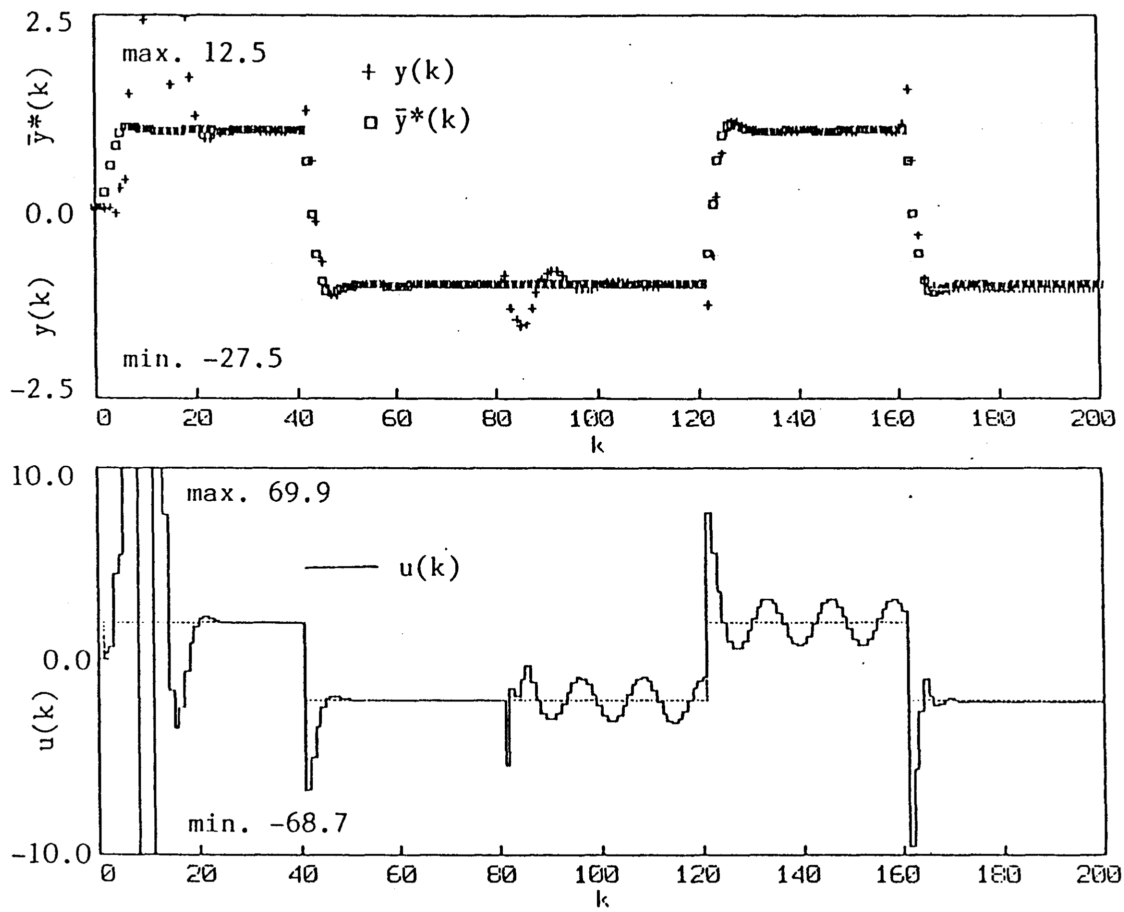


図　8．3　外乱を受ける非最小位相プラントに対するシミュレーション結果（正弦波状外乱）

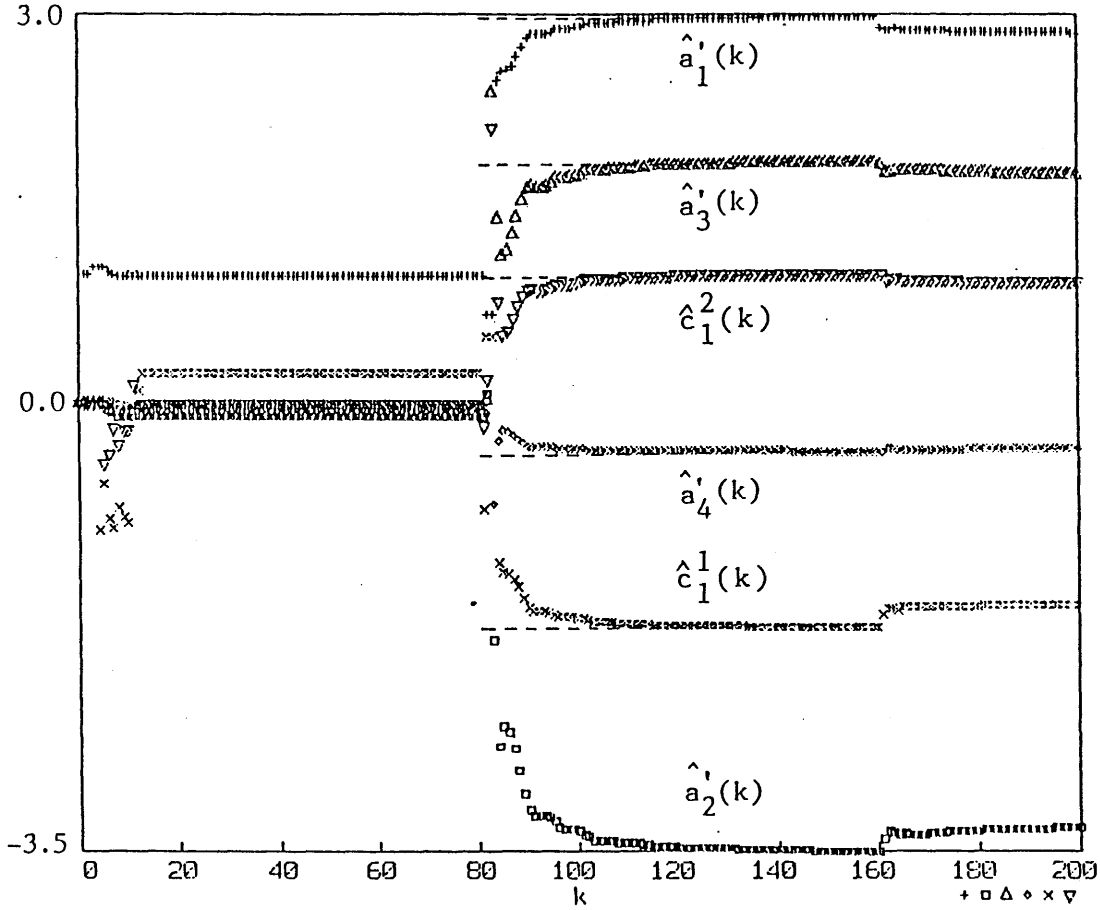


図 8．4 推定パラメータの挙動（一部）

第九章　　実プラントへの応用[26),27)]

9．1　緒　言

前章までにおいて離散時間モデル規範形適応制御系をその基礎として，いくつかの工学的要求を満たすための設計法の拡張について述べた．

本章では，これまでに述べた結果の有効性を実証するために，３入力３出力の実プラントに対する適応制御系の設計を行い，オンライン実験によってその特性の検討をした結果について考察する．

適応制御の実プラントへの応用は理論面での研究に比較すると，まだ，それほど多くはなく，特に多入力多出力系を対象としたものはわずかである．[62),63)]

ここで対象とする実プラントは冷凍機性能試験装置である．それは制御工学的には，未知特性の圧縮機を含む３入力３出力の冷凍プラントを目標値に追従させる制御系であり，その目標値は試験点に応じてステップ状に広い範囲にわたって変わる．このため，プラントは広い範囲の操業条件で運転され，従来のＰＩＤ制御では，常には安定な制御を行うことができない．さらに，プラントが熱プロセスであることから，試験に非常に長い時間を要する．したがって，圧縮機の性能試験の安定化と高速化を図るために，適応制御が望まれる．このプラントに対して，これまでに述べたむだ時間＋ＡＲモデルによる手法を適用した．

以下，本章では，はじめに冷凍機性能試験装置の概要と従来の制御の問題点を述べ，つぎに，ここで用いた適応制御手法とシミュレーション結果について説明する．

最後に，構成した適応制御装置の有効性を確かめるために行ったオンライン実験結果を述べる．

9．2　冷凍機性能試験装置の概要[64]と従来の制御の問題点

冷凍機性能試験装置は圧縮機の性能（圧縮機所要動力，冷凍能力など）を指定されたいくつかの試験点で求める装置であり，その構成の概略は図 9.1のようになっている．

装置は主として四つの要素，すなわち，圧縮機，凝縮機，膨張弁，そしてヒータ・クーラ（蒸発器）からなり，冷凍サイクルを形成している．

制御量は蒸発圧力y_1，凝縮圧力y_2，圧縮機入口温度y_3であり，それらに対応する操作量は膨張弁開度u_1，冷却水量u_2，ヒータ電力u_3である．試験点に対応して，これら制御量の目標値が定まり，これらをステップ状に変化させて追値制御が行われ，その制御結果であるプラントの状態平衡値から圧縮機の性能を計算することができる．

本装置は３入力３出力の干渉のある連続時間系で，運転条件に依存してその特性が変化することから，従来のＰＩＤ制御では安定な制御が困難なプラントである．

図 9.2に本装置に対し，従来のＰＩＤ制御を３入力３出力のそれぞれ独立に行ったときの制御量の代表として，圧縮機入口温度の制御経過を示す．図中，一点鎖線は目標値を，●は圧縮器入口温度を，実線はヒータ電力（コントローラへの入力）を示す．目標値の最初のステップ変化に対してほぼ最適に調整されたＰＩＤ動作のパラメータ値では，目標値が変化するに従い，あるいは目標値の組み合わせによっては制御経過の悪化，不安定化が生ずることがわかる．このように従来の制御では広い範囲の運転条件に対して良好な制御経過が得られないこと，良好な制御を得るための制御装置のパラメータ設定に技巧を要することなどの改善を目的とし，適応制御手法を本装置に応用する．次節において，その具体的手法，また，冷凍機性能試験装置の数値モデルを対象に行ったシミュレーション結果について述べる．

9．3　適応制御系の設計とシミュレーションによる検討

実プラントに対して適応制御手法を適用する場合には，プラントに関して得られる事前情報を利用し，最も適した手法を採用することが望ましい．本装置の場合には，プラントが３入力３出力の干渉を含む系であること，干渉のある多入力多出力系では，その逆系が漸近安定とならない場合が往々にして生ずること，制御装置の構成が簡潔であることなどの諸要素を考慮して，第四章で述べた，プラントのむだ時間＋ＡＲモデルによる手法を用いることとした．

このとき，制御系の構成法は，１入力１出力系と同形式の (4.7)式で表されるモデルを用いる手法と，ｍ入力１出力系の組み合わせ (4.5)式によるものが考えられるが，(4.7)式のモデルには(4.21)～(4.23)式のアルゴリズムを用いた直接法の構成を，(4.5)式のモデルには(4.26)～(4.30)式のアルゴリズムを用いた間接法の構成を行う．

構成した適応制御装置を実プラントに適用するに先立ち，制御性能の事前確認を目的として，冷凍機性能試験装置の数学モデルを用いた計算機シミュレーションを行った．冷凍機性能試験装置の数学モデルとしては，一つの平衡状態まわりで作成した多次元自己回帰モデル[64)]を用いた．

表 9.1に (6.5)式の表現における数学モデルの係数行列を示す．ただし，このモデルはサンプリング周期Ｔ＝20秒であり，その次数はｎ＝10となっている．また，図 9.3に実プラントと数学モデルのステップ応答を示す．図 9.3より圧縮機入口温度y_3に対する特性が積分特性を持っていることがわかる．また，このモデルは単位円外に零点を持つ逆系が不安定な系となっている．（サンプリング周期Ｔ＝40秒，60秒の場合にも同様に，単位円外に零点を持つ）．

このプラントを，むだ時間＋ＡＲモデルにより設計された適応制御装置により制御を行う．

制御において目標値$y_i^*(k)$はつぎの伝達関数の出力とし，その入力$r_i(k)$をステップ的に変化させた．

$$Y_i^*(s) = K_i \frac{e^{-sT(d_i-1)}\,\omega_n}{(s+\omega_n)^2}\cdot R_i(s) \qquad (i=1,2,3) \qquad (9.1)$$

ここで，Tはサンプリング周期を示し，ω_n はプラントのステップ応答を考慮して 0.005 とした．また，$K_1=K_2=1$，$K_3=-1$である．サンプリング周期Tは，プラントが熱プロセスを含むことよりT＝40秒，T＝60秒の２種類とした．以下に，設計した適応制御系の諸元とシミュレーション結果を示す．

［ 設計 1 ］

(4.7)式で表されるモデルによる直接法の設計[26)]

サンプリング周期はT＝60秒とし，プラントモデルは (4.7)式において$\nu=2$，$d_1=d_2=1$，$d_3=2$ とした．

目標値を計算するために (9.1)式を差分方程式(4.40)式で表したとき$d_1=d_2=1$，$d_3=2$ である．

設計パラメータはアルゴリズム(4.21)〜(4.23)式において$\rho=1.0$，$\alpha'=5.0$，$\beta'=15.0$，$\eta=3.0$ （$u_0\equiv 0$）

また，$\hat{B}_0(0)=\mathrm{diag}(0.28,\ -0.07,\ 0.3)$，$A_{d1}=\mathrm{diag}(0.005,\ 0.75,\ 2.0)$，$A_{d2}=\mathrm{diag}(0.0,\ -0.14,\ 1.0)$ とし，他の推定パラメータの初期値はすべて零とした．

図 9.4にシミュレーション結果を示す．図中，○は目標値を，●はプラントの出力を，実線はプラントの入力を示す．図から，かなり高い次元のプラントに対して低次元のモデル化を行っているにもかかわらず，本手法が十分有効であることがわかる．ただし，この設計に用いた(4.21)〜(4.23)式のアルゴリズムはパラメータの収束速度が遅いため，制御初期から良好な特性を得るためには設計パラメータの選定においてある程度の試行錯誤は避けられない．

つぎの，設計では上記の点を改善することを目的に (4.5)式のモデル化と(4.26)〜(4.30)式のアルゴリズムを採用した．このアルゴリズムは(4.21)〜(4.23)式のアルゴリズムに比較してより速い収束速度を得ることができ，より実用的である．また，プラントには入力の振幅に機構上の制約から 0〜10Vの範囲の制限があること，さらに，運転の安全を考慮して各入力をつぎの範囲に制限し，これを考慮した設計を行った．

$5.0\leqq u_1\leqq 9.9$ V　（弁開度　50%〜99%）

$1.5\leqq u_2\leqq 9.9$ V　（水量　0.75ℓ/min〜4.95ℓ/min）

$0.0\leqq u_3\leqq 4.0$ V　（電力　0.0kW 〜4.0kW）

なお，設計１ではこれを考慮していないが，シミュレーション結果から，この条件は十分に満たされている．

[設計 2]

(4.5)式で表されるモデルによる間接法の設計[27)]

サンプリング周期はT＝40秒とした．プラントモデルは (4.5)式において，$n_i=2$ (i=1, 2,3)，$d_1=d_2=1$，$d_3=3$ とした．目標値の計算式(4.40)式において$d_1=d_2=1$，$d_3=3$ となる．設計パラメータはつぎの値である．

パラメータ調整アルゴリズム(4.26)～(4.30)式において

$\lambda_{11}=0.95$，$\lambda_{12}=0.97$，$\lambda_{13}=0.99$，$\lambda_{2i}=1.0$ (i=1,2,3)，$\Gamma_i(0)=1000\,I$ (i=1,2,3)，

$\hat{B}_0(0)=\mathrm{diag}(0.02,\ -0.02,\ 0.02)$

これは(9.1) 式を(4.40)式に表現したときのb_{M0}の概略値であり，他の推定パラメータの初期値はすべて零とした．

図 9.3にシミュレーション結果を示す．図中の記号は□は目標値，＋はプラント出力，実線はプラント入力，破線は(9.1) 式の伝達関数への入力を表す．この例では推定パラメータの収束を促進するために，まず，(9.1) 式の入力$r_i(k)$ (i=1,2,3)に互いに独立な正規性の乱数信号を入れ，その後，試験点に対応したステップ信号を加えた．

この例から，わずかな設計パラメータの選定のみによって十分に良好な結果を得られることがわかる．

[設計 3]

設計2と同様の構成で，サンプリング周期のみT＝60秒に変更.[27)]

このときプラントのモデルは (4.5)式において，むだ時間のみ$d_1=d_2=1$，$d_3=2$ とした．

設計2と同様に良好な結果が得られ，サンプリング周期の違いによる応答の差はシミュレーション結果から見る限り，わずかである．

以上のように，シミュレーションにより，設計した制御系の有効性が確認されたことから，これらの手法を実プラントのオンライン実験に適用して，有効性を実証した．結果は次節に述べる．

９．４　実験結果と考察

前節で設計した制御装置を実プラントに応用するにあたり，各制御アルゴリズムはすべてＦＯＲＴＲＡＮプログラムを用い，ソフトウェアで実現した．

オンライン制御用計算機には三菱電機製ミニコンピュータＭｅｌｃｏｍ　７０／３０（語長１６ビット）を用いた

制御量の測定には，圧力y_1，y_2は半導体圧力変換器，温度y_3には熱電対をそれぞれ使用し，その出力電圧をＡ／Ｄ変換器（１２ビット）を介してコンピュータに入力した．また，操作量は弁開度u_1，冷却水量u_2，ヒータ電力u_3を直接制御するコントローラへの指令電圧とし，Ｄ／Ａ変換器（１２ビット）を介してコンピュータより出力した．なお、内部データはすべてＦＯＲＴＲＡＮの倍精度実数として演算を行った．

以下に，結果を示す．

［　実験　１　］　前節、設計１による制御経過

図 9.4に結果を示す．図中の記号はシミュレーションと同一である．シミュレーション結果と比較したとき，特に入力u_3（ヒータ電力）が振動的となっていることがわかる．これは，出力y_3（圧縮機入口温度）の測定における熱電対の出力電圧が他の出力に比較して小さくＳ／Ｎ比が低いためと考えられる．他の入出力もプラントが非線形性を持ち，目標値によってその特性も変化することから，シミュレーション結果とは同じにはならないが，安定な制御経過が得られている．

［　実験　２　］　前節，設計２による制御経過

図 9.5に結果を示す．この例でも実験１と同様に，シミュレーションと比較すると，入力が振動的となる傾向が見られる．特に，サンプリング周期が40秒であることから１サンプルあたりの出力の変化は小さく，よりＳ／Ｎ比が悪化することから，u_3は大きく振動している．しかし，出力の目標値への追従は良好である．

［　実験　３　］　前節，設計３による制御経過

図 9.6に結果を示す．実験２と同一構造の制御装置を用いた制御であるが，サンプリング周期が60秒であることから，信号のＳ／Ｎ比が向上し，入力の振動も少ない良好な結果を得ている．

なお，制御系設計に用いるモデルの次数を変更した場合，パラメータ推定アルゴリズムを変更した場合などの実験を行い，同様に適応制御手法の有効性を確認することができた．

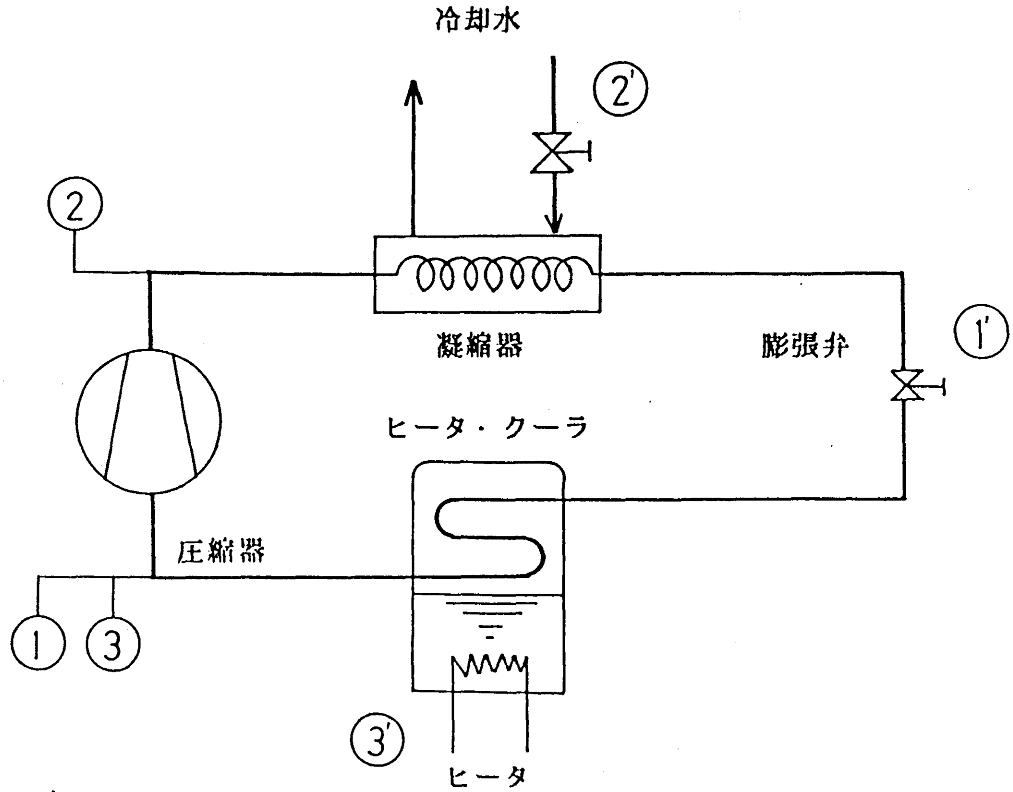
9．5 結　言

本章では，多入力多出力に対する適応制御系として提案したむだ時間＋ARモデルによる設計法を冷凍機性能試験装置に対して適用し，オンライン実験を行った結果を述べた．

このプラントは多入力多出力，非線形でARMA形式のモデル化を行ったとき，逆系が不安定となる，従来からのモデル規範形適応制御手法が適用できない制御対象であるにもかかわらず，ここで設計した手法により良好な制御が可能である．

なお，実用的には，設計パラメータ，パラメータ推定アルゴリズムの選定，および雑音の影響の解析，考慮などが検討すべき問題として残されている．

また，ここで用いたむだ時間＋ARモデルによる手法は他の実プラントとしてメカニカルアームの関節駆動モータ[65]，船舶のオートパイロット[66]にこれを適用し，良好な実験結果を得ている．



1：蒸発圧力　y_1　　　1'：膨張弁開度　u_1

2：凝縮圧力　y_2　　　2'：冷却水流量　u_2

3：圧縮器入口冷媒温度　y_3　　　3'：ヒータ電力　u_3

図　9．1　冷凍機性能試験装置の概略

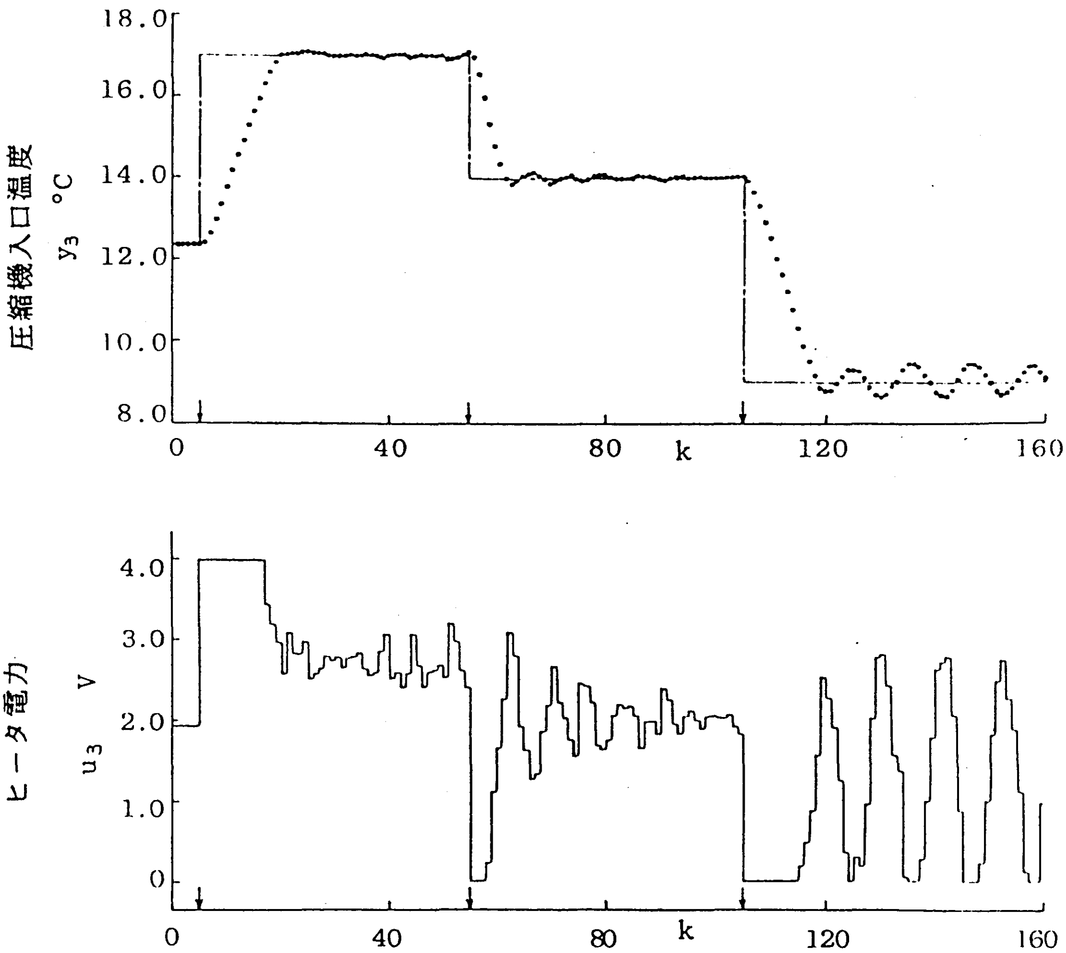
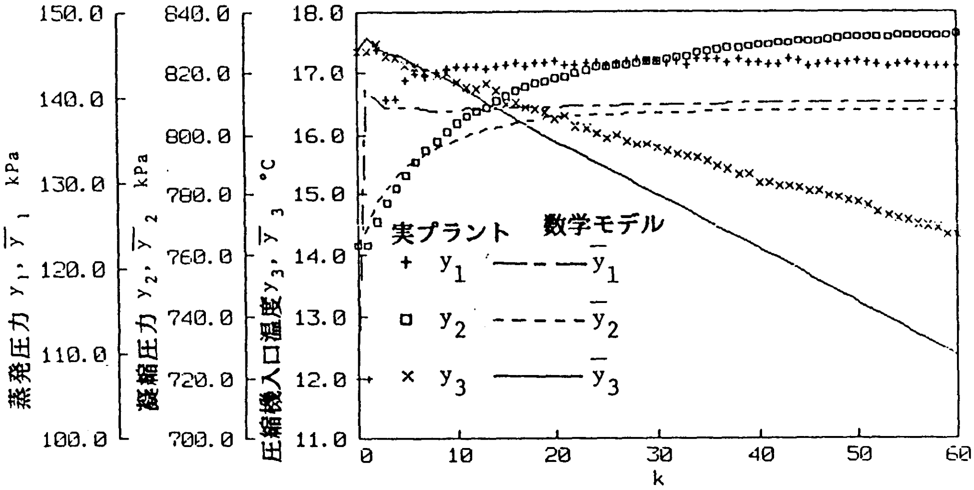


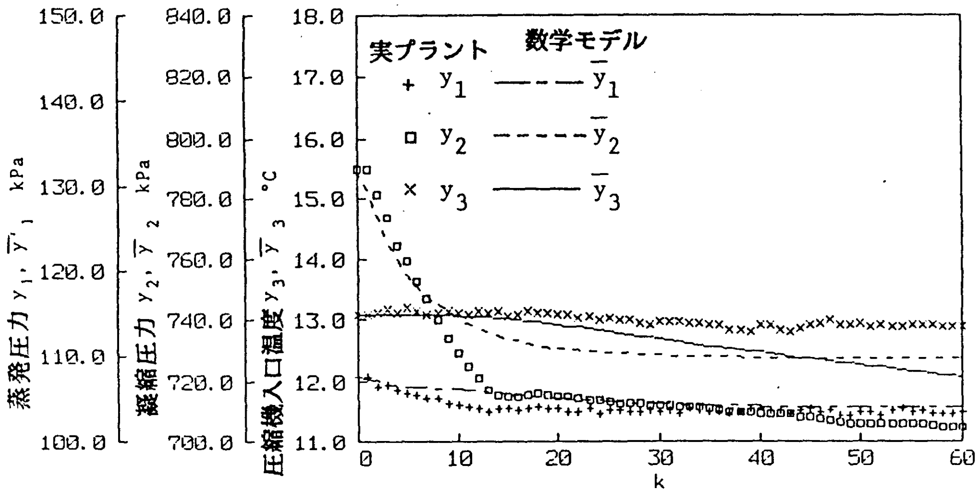
図 9．2 ＰＩＤ制御を行った場合の圧縮器入口温度とヒータ電力の制御経過

表 9．1 冷凍機性能試験装置の多次元自己回帰モデルの係数行列

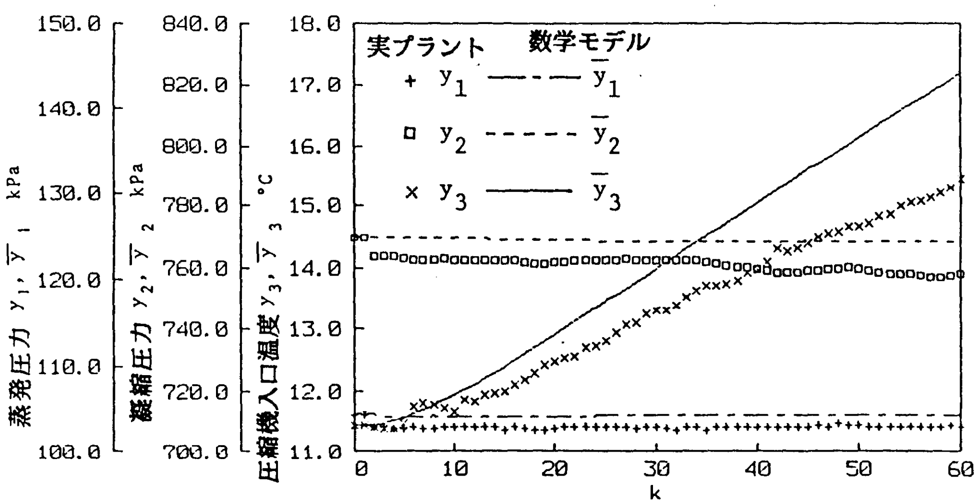
A_i $i=1,2,...,10$			B_j $j=0,1,...,9$		
0.81690	-0.61392	-0.99958D-01	0.81164D-02	0.25824	0.12088D-02
0.90166D-01	-0.63668D-01	0.34752D-01	0.37929D-02	0.34859	-0.11064D-02
0.38523D-01	-0.89045D-01	0.54679	-0.70799D-03	0.65893D-01	-0.34310D-01
0.36435	-0.19478	0.41373D-01	0.66809D-02	-0.16217	-0.67027D-02
-0.44672D-01	-0.13154D-01	0.66399D-01	-0.21437D-02	-0.18966D-01	0.33926D-03
-0.20947D-01	0.38060D-01	-0.53885D-01	0.46595D-03	0.56529D-01	-0.26953D-01
-0.22102D-01	0.12399	0.99846D-01	0.14224D-01	0.35311D-01	-0.44031D-02
-0.20383D-01	0.22249D-01	0.35425D-01	-0.21728D-02	0.15190D-01	0.20459D-02
-0.42639D-01	-0.45341D-01	0.13081	-0.28840D-03	0.12587D-01	-0.16291D-01
-0.80450D-01	0.95592D-01	0.58149D-01	0.11036D-01	0.16318D-01	0.99420D-03
-0.42215D-01	0.12641	0.34138D-01	-0.33089D-02	-0.14236D-01	0.41927D-02
0.30430D-02	-0.14706	0.13837D-01	-0.29698D-03	0.29795D-01	-0.90542D-02
0.51140D-01	-0.60461D-01	-0.14250	0.81424D-02	-0.12861D-01	0.60385D-02
0.22535D-02	0.10921	-0.52481D-01	-0.30615D-02	-0.43490D-01	0.57431D-02
-0.11838D-01	0.87626D-02	0.37592D-01	0.15102D-03	0.51551D-01	-0.31896D-02
-0.53249D-01	-0.14850	0.16207	0.52374D-02	-0.72067D-02	0.54689D-03
0.29582D-01	0.10454	-0.59215D-02	-0.28135D-02	-0.47603D-01	0.38307D-02
0.61025D-01	-0.45905D-01	0.32908D-01	-0.12812D-02	-0.61479D-02	-0.15018D-02
-0.31172D-01	0.56740D-01	0.26571D-01	0.49662D-02	0.67871D-01	0.22810D-02
-0.18448D-01	0.11392	-0.29127D-01	-0.63594D-03	-0.44623D-01	0.22468D-02
-0.17526D-01	0.65424D-01	0.25952D-01	0.64086D-03	-0.36245D-02	0.43954D-03
-0.67063D-01	-0.29130D-01	-0.17160	0.14908D-02	-0.36072D-01	0.52966D-02
-0.37724D-04	0.10623	-0.16201D-01	0.20096D-04	-0.30116D-01	0.53581D-03
-0.10886D-01	0.23753	0.93797D-02	-0.92523D-03	-0.13925D-01	0.16057D-02
-0.30366D-03	-0.31902D-01	0.10028	0.11560D-03	0.22461D-01	-0.17338D-02
-0.42167D-02	0.20645D-01	0.13210D-01	-0.25782D-02	-0.33553D-01	0.14686D-03
-0.99519D-02	0.11195D-01	-0.12558D-01	-0.80005D-03	-0.81306D-01	0.42818D-02
0.21949D-01	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.79706D-02	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.11197D-01	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0



（a） 膨張弁開度のみを変化させたときの応答 $(u_1 = 1.0\,\mathrm{V},\ u_2 = u_3 = 0.0\,\mathrm{V})$



（b） 冷却水流量のみを変化させたときの応答 $(u_1 = 0.0\,\mathrm{V},\ u_2 = 2.0\,\mathrm{V},\ u_3 = 0.0\,\mathrm{V})$



（c） ヒータ電力のみを変化させたときの応答 $(u_1 = u_2 = 0.0\,\mathrm{V},\ u_3 = 1.0\,\mathrm{V})$

図 9．3 実プラントと数学モデルのステップ応答

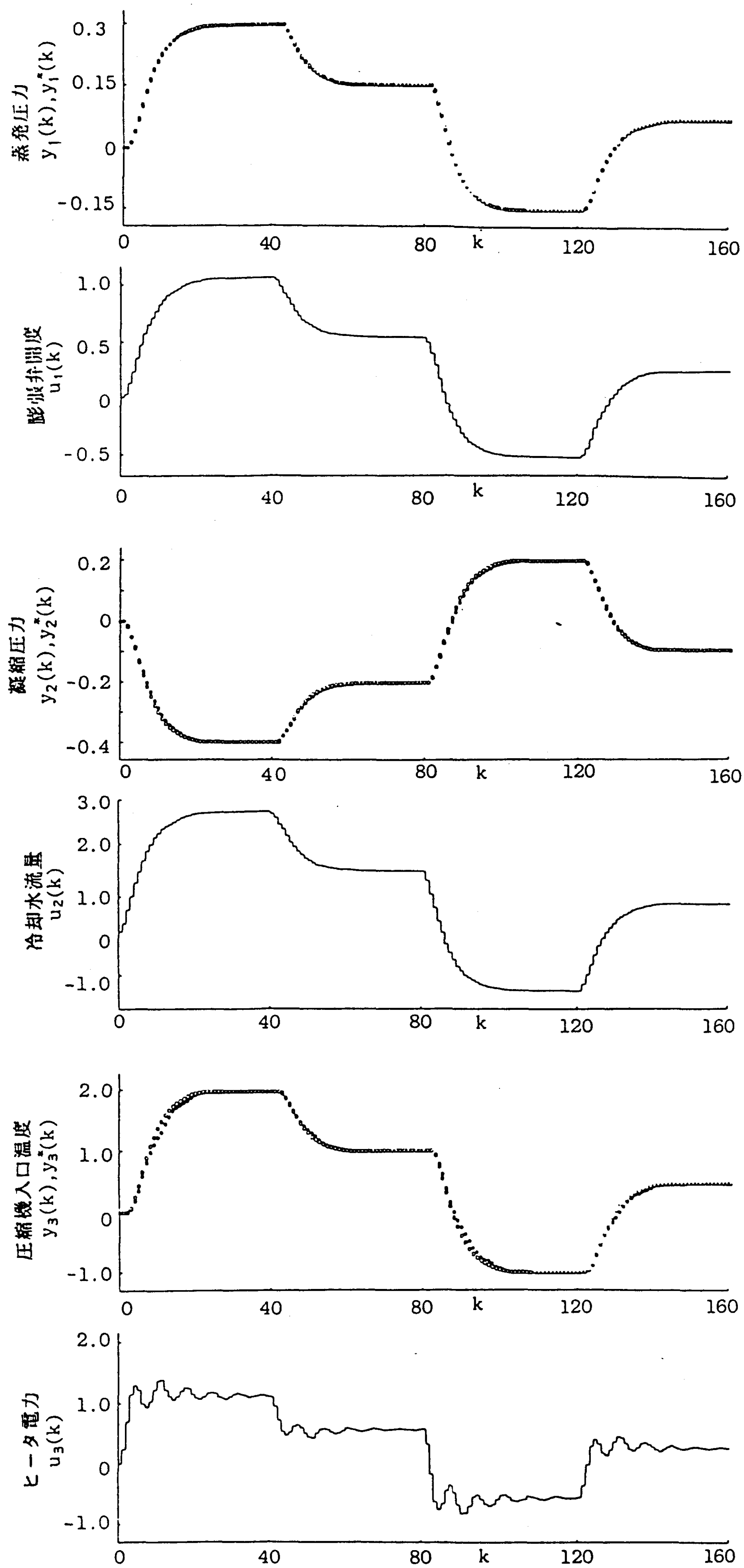


図　9．4　直接法により設計された適応制御系を用いたシミュレーション結果（T＝６０秒）

ループの内側ループに第１の手法と同一の制御ループを含んでいる点で，制御系の自由度が大きくなるなどの利点があるが，入力発生までに要する計算は複雑となる．

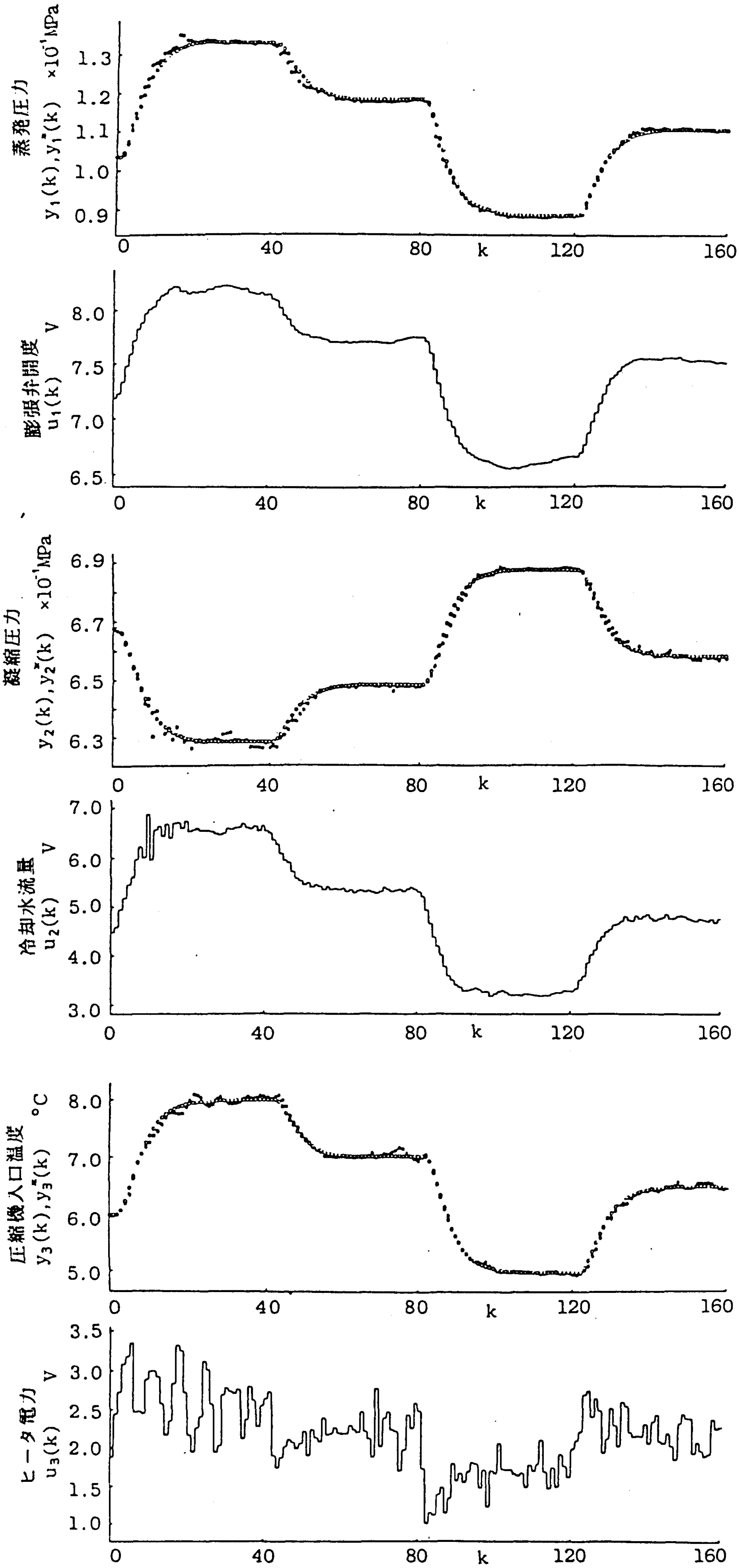


図　9．6　設計１による実験結果（T＝６０秒）

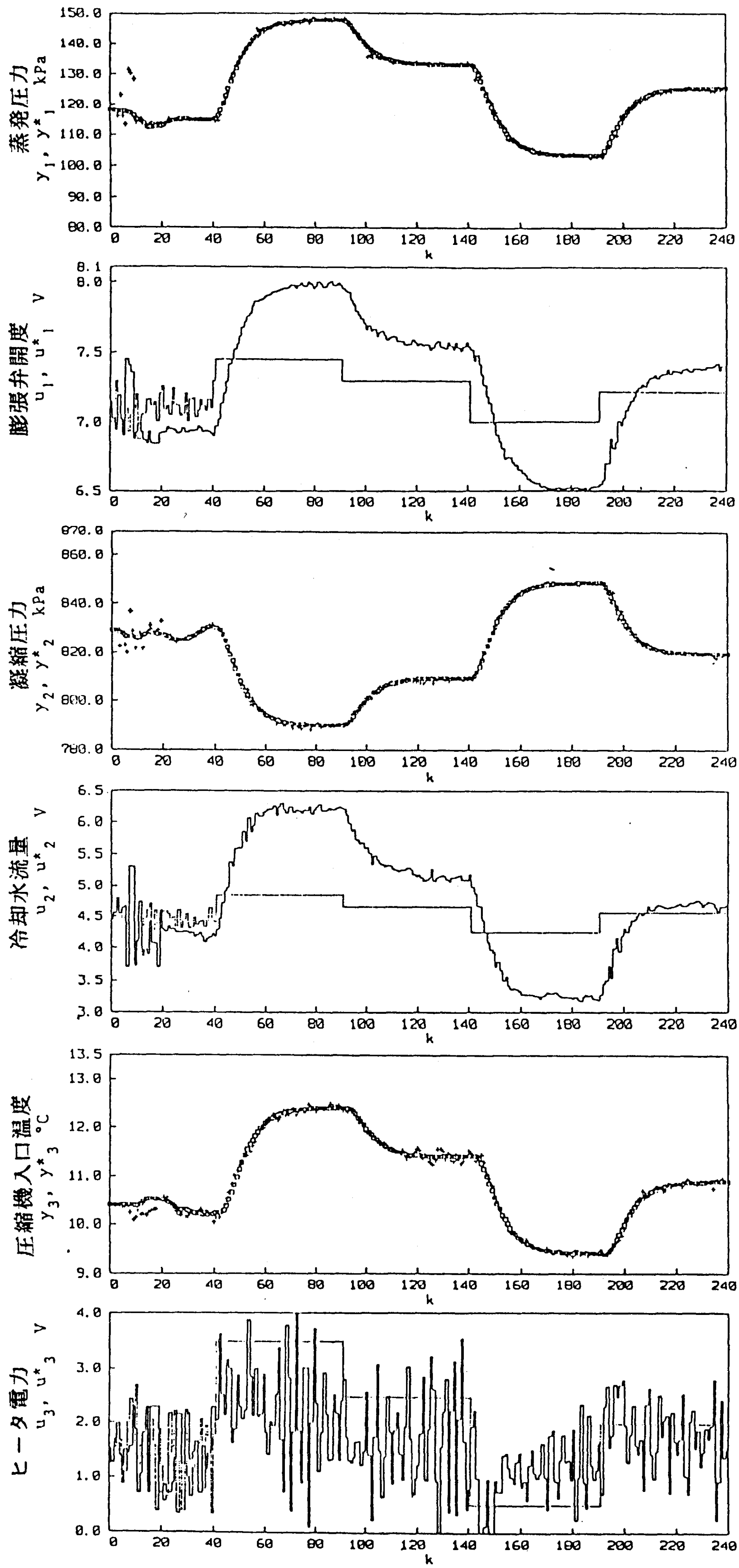


図　9．7　設計2による実験結果（T＝40秒）

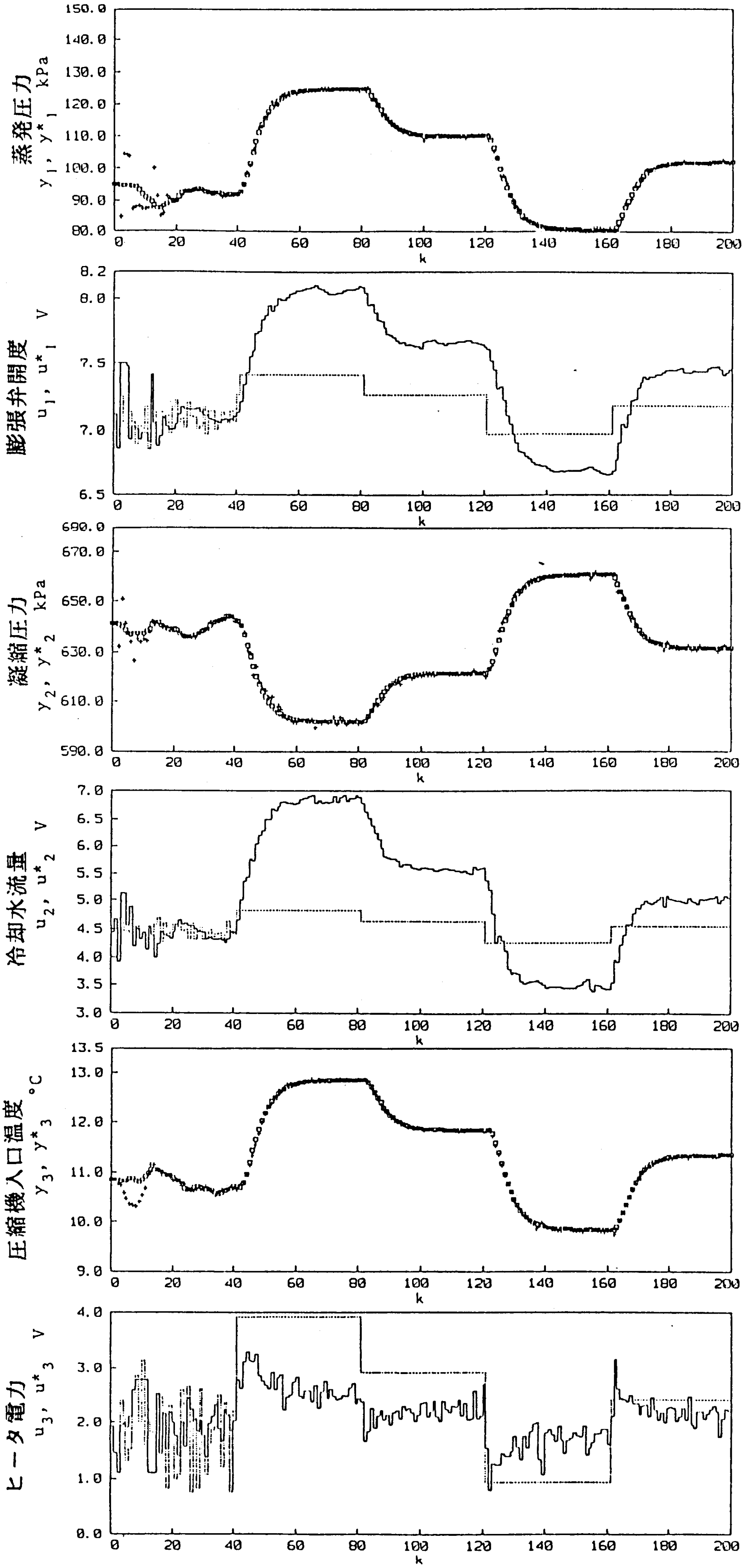


図　９．８　設計３による実験結果（Ｔ＝６０秒）

第十章　　　結　論

本論文では種々の適応制御手法のうちから，その構成が簡潔で，制御系の設計が容易であり，制御装置実現の観点からも実用的と考えられる離散時間モデル規範形適応制御手法を考察の対象とし，基本的設計法の持つ諸問題の中から工学的要求の高いいくつかの問題点を解決する拡張された設計法を提案した．

提案した手法はモデル規範形適応制御系をその基礎とすることから従来の制御方式との対応も明瞭であるという特徴を持っている．また，その構造も簡潔で制御装置として実現することも容易である．さらに，提案した手法の有効性を数値計算例で確認するとともに，実プラントとして冷凍機性能試験装置の制御問題を考え，提案した手法の一つによって設計された適応制御装置の有効性をオンライン実験によって実証した．

一般に，適応制御は現代制御理論の中では実際により適合する前提のもとに問題を取り扱っているにもかかわらず，実際問題への適用例は少ない．多入力多出力系への適用例はさらに少なく，本論文の結果は適応制御手法の実用化への一つの足掛かりを与えうるものと考える．

本論文では適応制御系を設計する際に，第三章でプラントの入力の振幅制限を，第四章ではプラントの逆系の不安定性を，第五章では逆系の不安定性とむだ時間のあいまいさを，第六章では逆系の不安定性と未知なむだ時間を，第七，第八章では外乱を考慮するという形で，個々の工学的要求を考慮した設計法を独立に述べたが，もち論，要求に応じてこれらの手法を組み合わせて用いることも可能である．この場合には制御装置の構造は考慮した特性に応じて複雑となるがマイクロプロセッサをはじめとするハードウェアの進歩により，実装上の問題は容易に解決できるものと思われる．むしろ，進歩したハードウェアを前提とした，より高性能な制御を実施しうる適応制御系の設計法を確立することが急務と考えられる．

なお，適応制御手法には本論文で基礎としたモデル規範形制御手法以外にもセルフチューニングレギュレータに代表される種々の手法があり，本論文で考察した工学的要求をその設計に取り入れたものがいくつか提案されている．それらの手法と本論文で提案した手法との比較は今後の課題である．

さらに，提案した手法を含め，適応制御手法がより実用的な設計法として完成されるためには，モデル化誤差の存在する場合の制御系の安定性（ロバスト性）の解析，より広い

範囲のプラントや外乱に対する設計法の開発，時変系，非線形系に対する設計法の拡張，過渡状態における適応制御系の挙動の解析など多くの問題が残されている．

謝　辞

本研究は，名古屋工業大学機械工学科電子機械工学研究室において，名古屋工業大学藤井省三教授の御指導のもとに行ったものである．適応制御という制御工学の分野でも夢多きテーマを研究する機会を与えられるとともに，終始懇切にして適切なる御指導と御支援を賜った藤井省三教授に対し，心より御礼申し上げます．

また，本研究を進めるにあたり，有益な御助言，御討論を賜った藤本英雄助教授に厚く御礼申し上げます．さらに，実験に際し，直接御指導をいただいた柴田晃助手（現　日本電装（株））に感謝の意を表します．

また，本論文をまとめるにあたり，御懇篤なる御指導を賜りました名古屋大学伊藤正美教授に対しまして厚く御礼申し上げます．さらに本論文に対して有益な御助言とご検討を賜りました名古屋大学伊藤忠哉教授および杉浦一郎教授に対しまして，ここに謹んで謝意を表します．

最後に，実験，計算に際し，種々の御協力を頂いた電子機械工学研究室の諸氏，図面の作成に多くの御助力をいただいた荒川和巳技官に対して厚く御礼申し上げます．

文　献

1)　I．D．ランダウ，富塚：適応制御システムの理論と実際，オーム社（１９８１）

2)　K.J.Åström：Thory and Applicatios of Adaptive Control , Preprints of 8th IFAC Congress, ＰＳ，２８／３９（１９８１）

3)　藤井：適応制御における最近の動向，システムと制御，２５－１２，７１５／７２６　（１９８１）

4)　鈴木：適応制御理論　今後の展開は，システムと制御，２６－３，１７２／１８１　（１９８２）

5)　I.D.Landau and R.Lozano: Unificatin of Discrete Time Model Reference Adaptive Control Design, Automatica, １７－４，５９３／６１１（１９８１）

6)　K.J.Åström & B.Wittenmark: Self-Tuning Controller Based on Pole-Zero Assignment, Proc. IEE, Vol.１２７，Pt.D. １２０／１３０　（１９８０）

7)　T.Ionescu and R.V.Monopoli: Discrete Model Reference Adaptive Control with an Augmented Error Signal: Automatica, １３－５，５０７／５１９（１９７７）

8)　R.V.Monopoli: Model Reference Adaptive Control with an Augmented Error Signal, IEEE Trans. on Automatic Control, AC- １９―５，４７４／４８４　（１９７４）

9)　鈴木，高島：超安定離散時間モデル規範形適応制御系の設計，計測自動制御学会論文集，１３－５，４３３／４３８　（１９７７）

10)　I.D.Landau: Adaptive Control - The Model Reference Approach, Marcel Dekker　（１９７９）

11)　G.C.Goodwin, P.J.Ramadge & P.E.Caines: Discrete Time Multivariable Adaptive Control, IEEE Trans. on Automatic Control , AC- ２５－３，４４９／４５６　（１９８０）

12)　K.S.Narendra & Y.H.Lin: Stable Discrete Adaptive Control, IEEE Trans. on Automatic Control, AC- ２５－３，４５６／４５１（１９８１）

１３）　Bo Egardt: Stability Analysys of Some Discrete Adaptive Control Schemes, IEEE Trans. on Automatic Control, AC-２５－４，６９３／６９７　(１９８０)

１４）　I.D.Landau & R.Lozano: Unification of Discrete Time Explicit Model Reference Adaptive Control Design, Automatica, １７－４，５９３／６１１　(１９８１)

１５）　藤井，水野：離散時間モデル規範形適応制御系の一設計法，計測自動制御学会論文集，１７－１，１６／２２　(１９８１)

１６）　鈴木，中村：多変数離散時間モデル規範形適応制御系の一設計法，計測自動制御学会論文集，１５－３，２８４／２９０　(１９７９)

１７）　藤井，水野：多変数離散時間モデル規範形適応制御系の一設計法，計測自動制御学会論文集，１８－２，１２４／１３０　(１９８２)

１８）　R.V.Monopoli: Adaptive Control for Systems with Hard Saturation, Proc. of IEEE CDC ８４１／８４３　(１９７５)

１９）　F.Ohokawa and Y.Yonezawa: A Discrete Model Reference Adaptive Control Systems for a Plant with Input Amplitude Constraints, Int. J. of Control, ３６－５，７４７／７５３　(１９８２)

２０）　藤井，水野：プラント入力に振幅制限のある場合のモデル規範形適応制御系の一構成法，計測自動制御学会論文集，１８－８，８５９／８６１　(１９８２)

２１）　K.J.Åström, P.Hagander and J.Sternby: Zeros of Sampled Systems, Automatica, ２０－１，３１／３８　(１９８４)

２２）　R.M.Johnestone, S.H.Shah & D.J.Fisher: An Extention of Hyperstable Adaptive Control to Non-minimum Phase Systems, Int. J. of Control, ３１－３，５３９／５４５　(１９８０)

２３）　R.Kumar & J.B.Moor: Minimum Variance Control Harnessed for Non-Minimum-Phase Plants, Preprints of 8th IFAC Congress, VII, ７７／８２　(１９８１)

２４）　藤井，水野：非最小位相系に対する離散時間モデル規範形適応制御系の一構成法，計測自動制御学会論文集，１７－３，４４９／４５１　(１９８１)

２５） S.Fujii and N.Mizuno: A Discrete Model Reference Adaptive Control Using an Autoregressive Model with Dead Time of the Plant, Preprints of 8th IFAC Congress, VII, １２０／１２５ （１９８１）

２６） 藤井，水野：プラントのむだ時間＋ＡＲモデルによる多入出力離散時間モデル規範形適応制御系の設計法とその応用，計測自動制御学会論文集，１８－３，２３８／２４５ （１９８２）

２７） S.Fujii, N.Mizuno and Y.Nomura: A Discrete Time Multivariable Model Reference Adaptive Control Algorithm with Application to a Real Plant, Preprints of 9th IFAC Congress, １４．４／Ｄ－４，９９／１０４ （１９８４）

２８） 新，北森：未知むだ時間系に対する離散時間適応制御，第１０回制御理論シンポジウム資料，２４３／２４６ （１９８１）

２９） 藤井，水野：むだ時間系の適応制御，システムと制御，２８－６，３６４／３７３ （１９８４）

３０） 藤井，水野：むだ時間未知の非最小位相プラントに対する離散時間適応制御系の一設計法，計測自動制御学会論文集，１８－１２，１１６５／１１７２ （１９８２）

３１） 新，北森：多変数モデル規範形適応制御系の一つの一般化，計測自動制御学会論文集，１９－１０，８０７／８１２ （１９８３）

３２） N.Mizuno and S.Fujii:Discrete Time Multivariable Adaptive Control for Non-Minimum Phase Plants with Unknown Dead Time, Preprints of IFAC Workshop on Adaptive Systems in Control and Signal Processing （１９８３）

３３） Bo Egardt: Stability of Adaptive Controllers, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol.２０，Springer-Verlag （１９８２）

３４） B.B.Peterson and K.S.Narendra: Bounded Error Adaptive Control, IEEE Trans. on Automatic Control, AC- ２７－６，１１６１／１１６８ （１９８２）

３５） 藤井，水野：未知外乱に対するモデル規範形適応制御系の一構成法，計測自動制御学会論文集，２１－６，６５０／６５２ （１９８５）

３６)　G.C.Goodwin and S.W.Chan: Model Rference Adaptive Control of System Having Purely Deterministic Disturbances, IEEE Trans. on Automatic Control, AC- ２５－８，８５５／８５８　(１９８３)

３７)　O.A.Sebakhy and A.I.A.Salama: Adaptive Control of Linear Plants with Step Disturbances, Int. J. of Control,３６－２，２３５／２４７　(１９８２)

３８)　田村，川合：ランプ状未知外乱を伴った線形離散時間系の適応制御，計測自動制御学会論文集，１９－８，６１４／６２１　(１９８４)

３９)　真野，岩井，得丸：未知外乱を考慮した指数減衰収束性を有する離散時間ＭＲＡＣＳの一構成法：間接法による構成，第四回適応制御シンポジウム資料，１０３／１０８　(１９８４)

４０)　藤井，水野：未知外乱を考慮した離散時間モデル規範形適応制御，計測自動制御学会論文集，２１－９，９１４／９２０　(１９８５)

４１)　南出：外乱を考慮した適応サーボ系の設計，第６回Ｄｙｎａｍｉｃａｌ Ｓｙｓｔｅｍ Ｔｈｅｏｒｙ シンポジウム資料，１５１／１５４　(１９８３)

４２)　内出，金井：外乱に強い多変数適応制御系の設計，第２６回自動制御連合講演会前刷，１５／１６　(１９８３)

４３)　藤井，水野：未知外乱を考慮した離散時間適応極配置制御系，計測自動制御学会論文集，２１－１０，１０２１／１０２８　(１９８５)

４４)　藤井　他：適応制御システムの実システムへの適用，計測と制御，２３－５，４７２／４８９　(１９８４)

４５)　G.Lüders and K.S.Narendra: A New Canonical Form for an Adaptive Observer, IEEE Trans. on Automatic Control, April,１１７／１１９　(１９７４)

４６)　P.N.Nikiforuk, H.Ohta, M.M.Gupta: On the Development of Equi-observable Canonical Forms for Linear Multivariable Systems, Systems and Adaptive Control Research Laboratory

４７)　P.Kudva and K.S.Narendra: An Identification Procedure for Discrete Multivariable Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, AC-１９－５，５４９／５５２　(１９７４)

４８）　伊藤：適応制御におけるパラメータ可調整，計測と制御，８－４，２２０／２４６　（１９６９）

４９）　Lasalle: Eventual Stability, Proc. of ２nd Congr. IFAC, ４１５ １／４　（１９６３）

５０）　児玉，須田：システム制御のためのマトリクス理論，計測自動制御学会編（１９８３）

５１）　藤井，水野：入力の変化量に制限がある場合のモデル規範形適応制御，第３回適応制御シンポジウム資料，３７／４０　（１９８３）

５２）　金井，野口，佐々木：プラント入力に振幅制限がある適応制御系の構成，計測自動制御学会論文集，１９－５，３６７／３７３　（１９８３）

５３）　野口，金井：入力振幅制限をもつ適応制御系の多項式代数法による構成，計測自動制御学会論文集，２０－３，２２０／２２６　（１９８４）

５４）　E.G.Gilbert: The Decoupling of Multivariable Systems by State Feedback: SIAM J. on Control, ７，５０／６４　（１９６９）

５５）　武藤，市川：漸減ゲインを持つＭＲＡＣＳの一般形，第２７回自動制御連合講演会前刷，７３／７４　（１９８４）

５６）　H.Kurz, R.Isermann and R.Schumann: Experimental Comparison and Application of Various Parameter Adaptive Control Algorithms, Automatica, １６，１１７／１３３　（１９８０）

５７）　水野，藤井：行列とスカラーのパラメータを含む離散時間多変数系の同定アルゴリズムの改善，計測自動制御学会論文集，１９－７，５９５／５９７（１９８３）

５８）　新中，鈴木：一般化パラメータ適応則の拡張とその性質，計測自動制御学会論文集，１９－１１，８８１／８８８　（１９８３）

５９）　鈴木，新中，田中：適応極配置系の一構成法，計測自動制御学会論文集，１９－１，２８／３５　（１９８３）

６０）　南出：内部安定な適応トラッキング系の設計，計測自動制御学会論文集，２０－１０，９０５／９１１　（１９８４）

６１）　新中，鈴木：未知次数システムに対する適応極配置法，電子通信学会論文誌，Ｊ６６－Ａ，１２，１２２８／１２３５　（１９８３）

６２）　K.S.Narendra and R.V.Monopoli (ed.) : Applications of Adaptive Control, Academic Press （１９８０）

６３）　H.Unbehauen (ed.): Methods and Applications in Adaptive Control, Lecture Notes in Control and Information Sciences, ２４, Springer-Verlag （１９８０）

６４）　藤井，柴田，水野：冷凍機性能試験装置の多次元自己回帰モデル，計測と制御，１９－７，６４０／６４３　（１９８０）

６５）　藤井，水野，森田：メカニカルアームにおける関節駆動モータのモデル規範形適応制御，第２５回自動制御連合講演会前刷，９１／９２　（１９８２）

６６）　藤井，水野，田中，伊藤，有江：船の変針におけるモデル規範形適応制御，第２２回ＳＩＣＥ学術講演会予稿集，１１／１２　（１９８３）

６７）　新中，鈴木：未知次数システムに対する適応極配置－可変リミッタによるモデリング誤差の吸収－，第四回適応制御シンポジウム資料，４１／４４　（１９８４）

付録1　　モデル規範形適応制御系の漸近安定性

第二章で行ったモデル規範形適応制御系の漸近安定性の証明は，より一般的なモデル規範形適応制御系の安定解析にも用いることが可能である．ここではGoodwinら[11]の手法にしたがってこれを証明する．

このとき，安定解析の要となるのはつぎの定理の形にまとめられる．

［定理］

$$\lim_{k\to\infty} \frac{s^2(k)}{b_1(k)+b_2(k)\,\sigma^T(k)\,\sigma(k)}=0 \tag{A.1}$$

ここで，$b_1(k)$，$b_2(k)$，$s(k)$はスカラ，$\sigma(k)$はベクトルとする．

上式が成立するとき以下の２つの条件

1）すべてのkに対して

$$0<b_1(k)<K<\infty \quad かつ \quad 0\leqq b_2(k)<K<\infty \tag{A.2}$$

2）

$$\|\sigma(k)\|\leqq c_1+c_2 \max_{0\leq\tau\leq k}|s(\tau)| \tag{A.3}$$

ここで，$0\leqq c_1<\infty$，$0<c_2<\infty$

が満たされれば

$$\lim_{k\to\infty} s(k)=0 \tag{A.4}$$

が成立し，$\|\sigma(k)\|$は有界となる．

［証明］

もし，$s(k)$が有界な数列と仮定すると（A.3)式より$\|\sigma(k)\|$も有界な数列となる．したがって，(A.2)，(A.1)式より

$$\lim_{k\to\infty} s(k)=0$$

が得られる．

つぎに，$s(k)$が有界でないと仮定し，矛盾を生ずることを示す．

いま，$s(k)$が非有界な（発散する）数列とすると，つぎのような時系列$\{k_n\}$が存在する．

$$\lim_{k_n\to\infty}|s(k_n)|=\infty$$

$$|s(k)|\leqq|s(k_n)| \qquad k\leqq k_n \tag{A.5}$$

いま，この時系列 $\{k_n\}$ に沿って次式が成立する．

$$\left|\frac{s(k_n)}{[b_1(k_n)+b_2(k_n)\sigma^T(k_n)\sigma(k_n)]^{1/2}}\right| \geqq \frac{|s(k_n)|}{[K+K\|\sigma(k_n)\|^2]^{1/2}}$$

(A.2)式を用いると

$$\geqq \frac{|s(k_n)|}{K^{1/2}+K^{1/2}\|\sigma(k_n)\|}$$

(A.3),(A.5)式を用いると

$$\geqq \frac{|s(k_n)|}{K^{1/2}+K^{1/2}[c_1+c_2|s(k_n)|]}$$

これより，

$$\lim_{k_n\to\infty}\left|\frac{s(k_n)}{[b_1(k_n)+b_2(k_n)\sigma^T(k_n)\sigma(k_n)]^{1/2}}\right| \geqq \frac{1}{K^{1/2}c_2}>0$$

となり，これは (A.1)式に矛盾する．したがって仮定は誤りであり，$s(k)$ は有界となる．

証明終わり．

以下では，この定理を用いたモデル規範形適応制御系の安定性の証明について述べる．モデル規範形適応制御系の記述としては本文中で用いたベクトル表現を用いる．

このとき，プラントの予測モデル表現を

$$y(k+d)=\theta^T\delta(k) \tag{A.6}$$

とする．プラント出力を目標値 $y^*(k+d)$ に一致させる入力は次式を満たすように発生させる．

$$y^*(k+d)=\hat{\theta}^T(k)\delta(k) \tag{A.7}$$

これより，出力誤差 $e(k)=y^*(k)-y(k)$ に関する誤差方程式はつぎになる．

$$e(k+d)=\{\hat{\theta}(k)-\theta\}^T\delta(k) \tag{A.8}$$

(A.8)式中の推定パラメータの調整アルゴリズムはつぎのものとする．

$$\hat{\theta}(k)=\hat{\theta}(k-1)+\Gamma(k-1)\delta(k-d)e^*(k) \tag{A.9}$$

$$\Gamma^{-1}(k)=\lambda_1(k)\Gamma^{-1}(k-1)+\lambda_2(k)\delta(k-d)\delta^T(k-d) \tag{A.10}$$

$$e^*(k)=\frac{y(k)-\hat{\theta}^T(k-1)\delta(k-d)}{1+\delta^T(k-d)\Gamma(k-1)\delta(k-d)} \tag{A.11}$$

ここで，$0<\lambda_1(k)\leqq 1$，$0\leqq\lambda_2(k)<2$，$\Gamma(0)>0$

(A.9)～(A.11)式のアルゴリズムは有界な$\theta(0)$に対して$\delta(k)$の有界，非有界によらず，$\lim_{k\to\infty} e^*(k)=0$の性質を持つ．これはつぎのようにして確かめられる．

ここで，非負関数

$$V(k)=\tilde{\theta}^T(k)\Gamma^{-1}(k)\tilde{\theta}(k),\quad \tilde{\theta}(k)=\theta-\hat{\theta}(k) \tag{A.12}$$

を考える．

このとき，(A.9),(A.11)式より

$$\begin{aligned} e^*(k) &= y(k)-\hat{\theta}^T(k)\delta(k-d) \\ &= \theta^T\delta(k-d)-\hat{\theta}^T(k)\delta(k-d) \\ &= \tilde{\theta}^T(k)\delta(k-d) \end{aligned} \tag{A.13}$$

であることを考慮して$V(k)$の差分$\Delta V(k)=V(k)-V(k-1)$を求める．

(A.9)～(A.13)式より

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= \tilde{\theta}^T(k)\Gamma^{-1}(k)\tilde{\theta}(k)-\tilde{\theta}^T(k-1)\Gamma^{-1}(k-1)\tilde{\theta}(k-1) \\ &= \tilde{\theta}^T(k)\{\lambda_1(k)\Gamma^{-1}(k-1)+\lambda_2(k)\delta(k-d)\delta^T(k-d)\}\tilde{\theta}(k) \\ &\quad -\tilde{\theta}^T(k-1)\Gamma^{-1}(k-1)\tilde{\theta}(k-1) \\ &= \tilde{\theta}^T(k)\Gamma^{-1}(k-1)\tilde{\theta}(k)-\tilde{\theta}^T(k-1)\Gamma^{-1}(k-1)\tilde{\theta}(k-1) \\ &\quad -\{1-\lambda_1(k)\}\tilde{\theta}^T(k)\Gamma^{-1}(k-1)\tilde{\theta}(k) \\ &\quad +\lambda_2(k)\{\tilde{\theta}^T(k)\delta(k-d)\}^2 \\ &= \{\tilde{\theta}(k)-\tilde{\theta}(k-1)\}^T\Gamma^{-1}(k-1)\{\tilde{\theta}(k)+\tilde{\theta}(k-1)\} \\ &\quad -\{1-\lambda_1(k)\}\tilde{\theta}^T(k)\Gamma^{-1}(k-1)\tilde{\theta}(k)+\lambda_2(k)e^*(k)^2 \\ &= -e^*(k)\delta^T(k-d)\{2\tilde{\theta}(k)+\Gamma(k-1)\delta(k-d)e^*(k)\} \\ &\quad -\{1-\lambda_1(k)\}\tilde{\theta}^T(k)\Gamma^{-1}(k-1)\tilde{\theta}(k)+\lambda_2(k)e^*(k)^2 \end{aligned}$$

$$= -\{2-\lambda_2(k)\}e^*(k)^2$$

$$-\{\tilde{\theta}(k)-\tilde{\theta}(k-1)\}^T\Gamma^{-1}(k-1)\{\tilde{\theta}(k)-\tilde{\theta}(k-1)\}$$

$$-\{1-\lambda_1(k)\}\tilde{\theta}^T(k)\Gamma^{-1}(k-1)\tilde{\theta}(k)$$

$$\leqq 0 \tag{A.14}$$

ここで，$V(k) \geqq 0$，$V(0) < \infty$であることを考慮すると上式は$\lim_{k\to\infty} V(k) =$ const.，$\lim_{k\to\infty} \Delta V(k) = 0$ を意味する．したがって，$k\to\infty$で(A.14)式の右辺の各項は零に収束する．

これより，(A.9)～(A.11)式のアルゴリズムから

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y(k)-\hat{\theta}^T(k-1)\delta(k-d)}{1+\delta^T(k-d)\Gamma(k-1)\delta(k-d)}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\tilde{\theta}^T(k-1)\delta(k-d)}{1+\delta^T(k-d)\Gamma(k-1)\delta(k-d)}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\hat{e}(k)}{1+\delta^T(k-d)\Gamma(k-1)\delta(k-d)} = 0 \tag{A.15}$$

が成立する．ただし，

$$\hat{e}(k) = \tilde{\theta}^T(k-1)\delta(k-d) = \{\theta-\hat{\theta}(k-1)\}^T\delta(k-d)$$

$$= y(k)-\hat{\theta}^T(k-1)\delta(k-d) \tag{A.16}$$

とした．また，

$$\frac{\hat{e}(k)^2}{1+\delta^T(k-d)\Gamma(k-1)\delta(k-d)}$$

$$= \frac{\{\tilde{\theta}^T(k-1)\delta(k-d)\}^2}{1+\delta^T(k-d)\Gamma(k-1)\delta(k-d)}$$

$$= \{1+\delta^T(k-d)\Gamma(k-1)\delta(k-d)\}e^*(k)^2$$

$$= e^*(k)^2 + \{\tilde{\theta}(k)-\tilde{\theta}(k-1)\}^T\Gamma^{-1}(k-1)\{\tilde{\theta}(k)-\tilde{\theta}(k-1)\} \tag{A.17}$$

上式と(A.14)式より次式

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\hat{e}(k)^2}{1+\delta^T(k-d)\Gamma(k-1)\delta(k-d)}=0 \tag{A.18}$$

すなわち，

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\hat{e}(k)}{[1+\delta^T(k-d)\Gamma(k-1)\delta(k-d)]^{1/2}}=0 \tag{A.19}$$

を得る．

ここで，(A.9),(A.16)式よりつぎの関係が得られる．

$$\begin{aligned}\hat{e}(k)&=\tilde{\theta}^T(k-d)\delta(k-d)-\{\hat{\theta}(k-d)-\hat{\theta}(k-1)\}^T\delta(k-d)\\&=\tilde{\theta}^T(k-d)\delta(k-d)-\sum_{i=1}^{d-1}\frac{\Gamma(k-1-i)\delta^T(k-d)\delta(k-d-i)\hat{e}(k-i)}{1+\delta^T(k-d-i)\Gamma(k-1-i)\delta(k-d-i)}\end{aligned} \tag{A.20}$$

(A.8),(A.20)式より

$$\begin{aligned}&\frac{\hat{e}(k)}{[1+\delta^T(k-d)\Gamma(k-1)\delta(k-d)]^{1/2}}\\&=\frac{-e(k)}{[1+\delta^T(k-d)\Gamma(k-1)\delta(k-d)]^{1/2}}\\&\quad-\sum_{i=1}^{d-1}\frac{\Gamma(k-1-i)\delta^T(k-d)}{[1+\delta^T(k-d-i)\Gamma(k-1-i)\delta(k-d-i)]^{1/2}}\\&\quad\times\frac{\delta(k-d-i)}{[1+\delta^T(k-d-i)\Gamma(k-1-i)\delta(k-d-i)]^{1/2}}\\&\quad\times\frac{\hat{e}(k-i)}{[1+\delta^T(k-d-i)\Gamma(k-1-i)\delta(k-d-i)]^{1/2}}\end{aligned} \tag{A.21}$$

ここで，$\lambda_{max}[\Gamma(k-1)]$ を $\Gamma(k-1)$ の最大固有値，$\lambda_{min}[\Gamma(k-1)]$ を $\Gamma(k-1)$ の最小固有値とする．いま，$\lambda_1(k)$ と $\lambda_2(k)$ が

$$\Gamma(k)>\varepsilon\Gamma(0),\quad \Gamma^{-1}(k)>\varepsilon'\Gamma^{-1}(0),\quad \varepsilon,\ \varepsilon'>0 \tag{A.22}$$

を成立させるように選ばれているとすると

$$\lambda_{max}[\Gamma(k-1)] \leqq \gamma < \infty$$

$$\lambda_{min}[\Gamma(k-1)] \geqq \delta' > 0 \qquad (A.23)$$

が成立する．

(A.23)式を考慮し，(A.21)式の右辺の絶対値を評価する．

$$\left| \frac{\Gamma(k-1-i)\delta^{T}(k-d)}{[1+\delta^{T}(k-d)\Gamma(k-1)\delta(k-d)]^{1/2}} \cdot \frac{\delta(k-d-i)}{[1+\delta^{T}(k-d-i)\Gamma(k-1-i)\delta(k-d-i)]^{1/2}} \cdot \frac{\hat{e}(k-i)}{[1+\delta^{T}(k-d-i)\Gamma(k-1-i)\delta(k-d-i)]^{1/2}} \right|$$

$$\leqq \left| \frac{\gamma\delta^{T}(k-d)}{[1+\delta'\delta^{T}(k-d)\delta(k-d)]^{1/2}} \cdot \frac{\delta(k-d-i)}{[1+\delta'\delta^{T}(k-d-i)\delta(k-d-i)]^{1/2}} \cdot \frac{\hat{e}(k-i)}{[1+\delta^{T}(k-d-i)\Gamma(k-1-i)\delta(k-d-i)]^{1/2}} \right|$$

$$\leqq \left| \frac{\gamma}{\delta'} \cdot \frac{\hat{e}(k-i)}{[1+\delta^{T}(k-d-i)\Gamma(k-1-i)\delta(k-d-i)]^{1/2}} \right| \quad (i=1,\ldots,d-1) \qquad (A.24)$$

さらに，(A.19)式より

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\Gamma(k-1-i)\delta^{T}(k-d)}{[1+\delta^{T}(k-d)\Gamma(k-1)\delta(k-d)]^{1/2}} \cdot \frac{\delta(k-d-i)}{[1+\delta^{T}(k-d-i)\Gamma(k-1-i)\delta(k-d-i)]^{1/2}} \cdot \frac{\hat{e}(k-i)}{[1+\delta^{T}(k-d-i)\Gamma(k-1-i)\delta(k-d-i)]^{1/2}} \right| = 0 \quad (i=1,\ldots,d-1) \qquad (A.25)$$

が成立する．

(A.19),(A.21),(A.25)式とCauchy-Schwarzの不等式より，結局，次式を得る．

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e(k)}{[1+\delta^{T}(k-d)\Gamma(k-1)\delta(k-d)]^{1/2}} = 0 \qquad (A.26)$$

さらに，(A.23)式を考慮すれば次式となる．

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e(k)^2}{1+\gamma\delta^T(k-d)\delta(k-d)} = 0 \tag{A.27}$$

上式は定理の（A.1)式において$s(k)=e(k)$，$b_1(k)=1$，$b_2(k)=\gamma$，$\sigma(k)=\delta(k-d)$としたものである．

したがって，定理の条件が満たされれば，出力誤差$e(k)$の零への収束と信号ベクトル$\delta(k)$の有界性が保証される．

定理の条件１）は明らかに成立する．さらに，プラントの逆系が漸近安定で，目標値が有界であれば，第二章 2.5節と同様の議論が成立する．

$$\|\delta(k-d)\| \leqq c_1 + c_2 \max_{0\leq\tau\leq k} |e(\tau)| \tag{A.28}$$

これは，定理の条件２）に相当することから

$$\lim_{k\to\infty} e(k) = 0 \tag{A.29}$$

が成立し，$\|\delta(k)\|$も有界となる．

以上の議論において，アルゴリズムに対して(A.22)式の仮定を設けたが，これは第二章で用いたようなパラメータ調整アルゴリズムのゲインが一定な方式では必ず成立する．また，(A.10)式において$\lambda_1(k)<1$と選んだアルゴリズムに関しても，ほとんどの場合に成立する．ただし，$\lambda_1(k)<1$と選んだアルゴリズムにおいては，信号ベクトル$\delta(k)$のいかんによってはゲイン行列$\Gamma(k)$が指数的に増大して不都合な場合がある．

このような不都合はつぎに示す固定トレースアルゴリズムによって避けることができる．

［　固定トレースアルゴリズム　］[1)]

(A.9)〜(A.11)式のアルゴリズムにおいて$\alpha=\lambda_1(k)/\lambda_2(k)$の値を予め指定し

$$\mathrm{tr}\Gamma(0) = \frac{1}{\lambda_1(k)} \mathrm{tr}\left[\ \Gamma(k-1) - \frac{\Gamma(k-1)\ \delta^T(k-d)\ \Gamma(k-1)\ \delta(k-d)\ \Gamma(k-1)}{\alpha+\delta^T(k-d)\ \Gamma(k-1)\ \delta(k-d)}\right] \tag{A.30}$$

が成立するように$\lambda_1(k)$を各時点で選ぶ．上式を$\lambda_1(k)$について解けば次式となる．

$$\lambda_1(k) = 1 - \frac{\delta^T(k-d)\ \Gamma(k-1)\ \Gamma(k-1)\ \delta(k-d)}{\mathrm{tr}\Gamma(0)\ \{\alpha+\delta^T(k-d)\ \Gamma(k-1)\ \delta(k-d)\}} \tag{A.31}$$

付録2　　離散時間モデルの零点とむだ時間＋ＡＲモデルによる近似

連続時間系が極ｐを持つとき，その系に零次ホールド要素を前置して，サンプリング周期Ｔで離散化したときの離散時間系の極はe^{pT}となることはよく知られている．これはｓの左半平面をｚ平面の単位円内に写像する$z=e^{sT}$という変換となっている．しかし，零点はこのような単純な関係はなく，連続時間系がｓ平面の右半平面に零点を持たない場合でも，対応する離散時間系がｚ平面の単位円外に零点を持ち得ることを第四章で指摘した．

ここでは，最近Åström ら[21]によって解析された連続時間系と離散時間系との零点の関係について述べ，ｚ平面の単位円外の零点をむだ時間で近似するむだ時間＋ＡＲモデルの考え方の妥当性について説明する．

連続時間系と離散時間系の零点の関係はつぎのような定理にまとめられている．

［　定理　１　］

連続時間系の伝達関数Ｇ（ｓ）を

$$G(s)=K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} \qquad (A.32)$$

とする．ただし，ｍ＜ｎとする．また，Ｇ（ｓ）に零次ホールド要素を前置し，離散化されたパルス伝達関数をＨ（ｚ）とする．

このとき，サンプリング周期$T\to 0$となるとＨ（ｚ）のｍ個の零点は$e^{z_iT}\to 1$となり残りのＨ（ｚ）のｎ－ｍ－１個の零点は次数差ｋ＝ｎ－ｍだけで定まる付表１の多項式$B_k(z)=0$の根に収束する．

表から明らかなように，連続時間伝達関数Ｇ（ｓ）の分母，分子の次数差ｎ－ｍが２以上のプラントは$T\to 0$のとき不安定な逆系を持つ離散時間系となることがわかる．さらに，この場合特徴的な点は，$B_k(z)=0$の根がすべて負の実数となっていることである．

一方，十分長いサンプリング周期に対してつぎの定理が成立する．

［　定理　２　］

Ｇ（ｓ）が$G(0)\neq 0$，その極をp_iとしたとき$R_e\,p_i<0$を持つ強プロパな有理伝達関数（$G(\infty)=0$）とすれば，そのパルス伝達関数Ｈ（ｚ）のすべての零点は$T\to\infty$のときｚ平面の原点に収束する．

上述の定理は十分長いサンプリング周期を選べば，離散時間系の逆系が不安定となることを避けられることを示しているが，長いサンプリング周期は制御性能の劣化をもたらす．

Åström らはさらに，離散時間系の逆系が漸近安定となる連続時間伝達関数の条件も一部ではあるが明らかにしている．

［　定理　３　］

Ｇ（ｓ）が強プロパで，つぎの性質を持つものとする．

１）p_i をＧ（ｓ）の極として $R_e\,p_i<0$

２）$G(0)\neq 0$

３）$-\pi<\arg G(j\omega)<0 \quad \text{for} \quad 0<\omega<\infty$

このとき，対応するパルス伝達関数Ｈ（ｚ）のすべての零点はサンプリング周期Ｔの大きさによらずｚ平面の単位円内となる．（ただし，$R_e(\cdot)$ は・の実数部分を，$\arg(\cdot)$ は・の偏角を示す．）

この定理は，例えば制御対象となるプラントがむだ時間を持たず，ｓの右半平面に零点を持たない漸近安定な２次遅れ系であれば，離散時間系の逆系が常に漸近安定となることを表しているが，実際には１）～３），特に，３）の条件をプラントが満たすことはまれであると考えられる．

また，これらの定理で考察しているＧ（ｓ）はむだ時間を含まないものとしているが，Ｇ（ｓ）がむだ時間を含む場合には，事情はより複雑となる．

例えば

$$G(s)=e^{-s\tau}\cdot\frac{1}{s} \quad ,\ 0<\tau<T \tag{A.33}$$

τはむだ時間

のとき，零次ホールド要素を前置してパルス伝達関数を求めると

$$H(z)=\mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-s\tau}}{s}\cdot G(s)\right]$$

$$=(1-z^{-1})\frac{1}{2\pi j}\int_{\gamma-j\omega}^{\gamma+j\omega}\frac{e^{-sT}}{z-e^{-sT}}\cdot\frac{e^{-s\tau}}{s^2}\,ds$$

$$= \frac{(T-\tau)z+\tau}{z(z-1)} \quad ,\text{ただし，} j=\sqrt{-1} \qquad (A.34)$$

となり，T/2＜τ＜TのときH（z）の零点は単位円外になる．（この場合も 0＜τ＜Tであることから単位円外の零点は負の実数となる．）

このように，連続時間系がむだ時間を持つ場合には，離散時間系は，よりしばしば不安定な逆系を持つこととなる．

一般にG（s）が強プロパのときτ→TとするとH（z）の少なくとも１つの零点はz平面の単位円外となる．また，τがTの整数倍でないとき，その端数に対して同様の結果となる．

したがって，離散時間で適応制御系を設計する場合には，プラントの逆系が不安定となることを考慮して設計を行うことが重要であり，特に，第六章で考察したようなプラントのむだ時間が未知，あるいは変化するようなときには，離散時間のプラントはその逆系が不安定であると仮定することが物理的にも妥当であると考えられる．

そこで，以下ではz平面の単位円外に零点を持つ系をむだ時間＋ARモデルで近似することを考える．このとき，z平面の単位円外に零点を持つ離散時間系としてつぎのH（z）を考える．ただし，H（z）は強プロパとする．

$$H(z) = \frac{B(z)\prod_{i=1}^{p}(z-\alpha_i)\prod_{k=1}^{q}\{z-(\beta_k+j\gamma_k)\}}{A(z)\prod_{i=1}^{p}(1-\alpha_i)\prod_{k=1}^{q}\{1-(\beta_k+j\gamma_k)\}} \qquad (A.35)$$

ここで，B（z）の零点はすべてz平面の単位円内に存在し，$|\alpha_i|>1$，$\sqrt{\beta_k^2+\gamma_k^2}>1$ とする．

(A.35)式は次式に変形できる．

$$H(z) = \frac{B(z)z^{p+q}}{A(z)} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{p}(z-\alpha_i)\prod_{k=1}^{q}\{z-(\beta_k+j\gamma_k)\}}{z^{p+q}\prod_{i=1}^{p}(1-\alpha_i)\prod_{k=1}^{q}\{1-(\beta_k+j\gamma_k)\}} \qquad (A.36)$$

上式において右辺第２項がむだ時間で近似できれば，すなわち

$$\frac{\prod_{i=1}^{p}(z-\alpha_i)\prod_{k=1}^{q}\{z-(\beta_k+j\gamma_k)\}}{z^{p+q}\prod_{i=1}^{p}(1-\alpha_i)\prod_{k=1}^{q}\{1-(\beta_k+j\gamma_k)\}} \fallingdotseq \frac{1}{z^{p+q}} \tag{A.37}$$

となれば，H（z）は逆系が漸近安定でむだ時間を持つ伝達関数でつぎのように近似できる．

$$H(z) \fallingdotseq z^{-(p+q)} \frac{B(z)\,z^{p+q}}{A(z)} \tag{A.38}$$

問題は(A.36)式が十分な精度で成立するか否かであるが，Åström の定理１においてT→0 でｚ平面の単位円外となる零点が付表１に示す範囲で実数であることから，$p=1$，$q=0$ の最も簡単な場合を考察する．このとき，

$$H(z) = \frac{B(z)\,z}{A(z)}\cdot\frac{z-\alpha}{(1-\alpha)\,z} \tag{A.39}$$

上式において

$$\lim_{|\alpha|\to\infty}\frac{z-\alpha}{(1-\alpha)\,z} = \lim_{|\alpha|\to\infty}\left\{\frac{1}{1-\alpha} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\frac{1}{z}\right\} = \frac{1}{z} \tag{A.40}$$

であることから，単位円外の零点の絶対値が十分に大きい場合にはH（z）のｚ平面の単位円外の零点による特性をむだ時間で近似できることがわかる．

実際にはαの絶対値によって近似の程度は異なるが，例えば，付表１における$B_3(z)=0$ の単位円外の零点を考え，$\alpha=-3.732$のときの（$z-\alpha$）／（$1-\alpha$）ｚのボード線図と１／ｚ のボード線図を付図１に示す．図において横軸の右端はナイキスト周波数を示す．図から明らかなようにナイキスト周波数に近い領域を除いて，両伝達関数のボード線図は十分に近く，(A.36)式の近似，すなわち，単位円外の零点をむだ時間で近似することの妥当性が確認できる．

実際に、この近似が十分に成立するためには，プラントの入出力の周波数成分がナイキスト周波数より十分に低いことが要求される．これは制御系の目標値の周波数成分を制限することで実用上満たされるが，より積極的にプラントの入力の変化を制限する手法が新中ら[67]によって提案されている．

これまでは，プラントのｚ平面の単位円外の零点の特性のみをむだ時間で近似できることを示したが，(A.35)式において，さらに

$$\frac{B(z)\,z^{p+q}}{A(z)} \fallingdotseq z^{-r}\,\frac{b'_0 z^{n'_A-1}}{A'(z)}$$ ，ただし，n'_AはA'(z)の次数 (A.41)

と近似すれば，H(z)は次式となる．

$$H(z) \fallingdotseq z^{-(p+q+r)}\,\frac{b'_0 z^{n'_A-1}}{A'(z)} \tag{A.42}$$

上式がプラントのむだ時間＋ARモデルによる近似である．

(A.41)式において$r=0$のときには

$A'(z) \fallingdotseq b_0 A(z)/B(z)$，（$b_0$はB(z)の最高次の係数，$b_0 \neq 0$）

(A.43)

となることから，n'_Aを適切に選定することで任意に近似精度を上げることが可能である．

以上のように単位円外に零点を持つプラントをむだ時間＋ARモデルで近似できることを示したが，すべてのプラントが十分な精度で近似できるわけではない．

例えば，プラントが漸近安定で逆応答を持つ場合を考える．このとき，簡単のため，つぎのH(z)を考える．

$$H(z) = \frac{b_0\,(z-\alpha)}{A(z)} \tag{A.44}$$

ここで，$b_0>0$，$\alpha>1$，$A(1)>0$とすると，単位ステップ入力に対するH(z)の出力の定常値，すなわちDCゲインは

$$H(1) = b_0\,(1-\alpha)/A(1) < 0 \tag{A.45}$$

一方，$b_0>0$はH(z)の単位ステップ入力に対する応答の最初にサンプルされる出力の値である．したがって，(A.43)式のH(z)は逆応答を持つ．

このH(z)をむだ時間＋ARモデルで近似し，つぎの伝達関数を得たとする．

$$H(z) \fallingdotseq H'(z) = z^{-d}\,\frac{b'_0 z^{n'_A-1}}{A'(z)} \tag{A.46}$$

このとき，H'(z)のステップ応答が逆応答を持ち，H(z)と同じDCゲインを持つためには$b'_0>0$かつ$A'(1)<0$でなければならない．しかし，$A'(1)<0$となるためには$A'(z)=0$の根の少なくとも1つの絶対値は1より大でなければならず，H'(z)は不安定となる．したがって，(A.44)式を十分な精度で近似する漸近安定なむだ時間＋ARモ

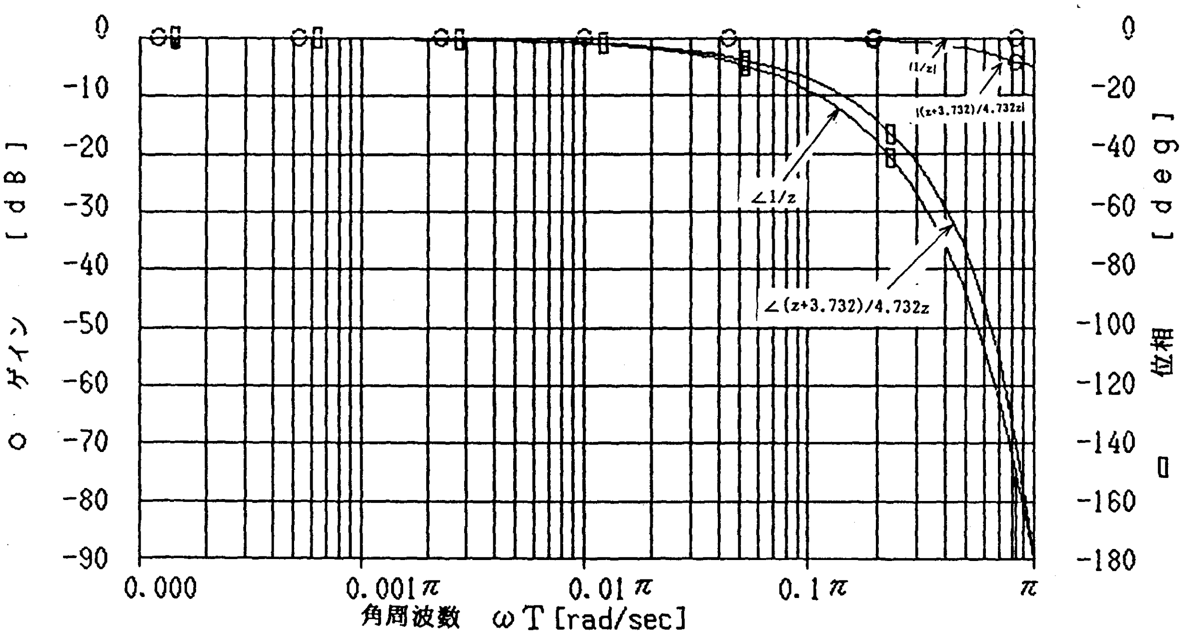
デルは存在しないこととなる．

　このように，むだ時間＋ＡＲモデルによる近似は，すべてのプラントに対しては有効ではないが，離散化によってその逆系が不安定となるプラントに対して有効であることが多くの例で確かめられている．

　また，多入力多出力系に対する同様な解析は困難であるが，基本となる考え方は多入力多出力系にも適用可能であると思われる．

付表　1　離散時間モデルの零点（T→0）を与える多項式

$B_k(z)$	$B_k(z)$ の零点　（＊は不安定な零点を表す）
$B_1(z) = 1$	
$B_2(z) = z + 1$	-1*
$B_3(z) = z^2 + 4z + 1$	-0.268, -3.732*
$B_4(z) = z^3 + 11z^2 + 11z + 1$	-0.101, -1*, -9.899*
$B_5(z) = z^4 + 26z^3 + 66z^2 + 26z + 1$	-0.0431, -0.431, -2.322*, -23.20*
$B_6(z) = z^5 + 57z^4 + 302z^3 + 302z^2 + 57z + 1$	-0.0195, -0.220, -1*, -4.542*, -51.22*



付図 1 単位円外の零点とむだ時間のボード線図による比較