

報告番号 甲 1803 号

平均場の方法による
格子ゲージ・スカラー模型の研究

杉山雄規

目次

序論

第1章 格子ゲージ理論の概要

- 1-1: 格子正則化したゲージ模型の導入
- 1-2: 格子ゲージ模型の設定
- 1-3: Wilson ループと秩序パラメーター
- 1-4: 連続極限と臨界現象

第2章 格子ゲージ・スカラー模型

- 2-1: 物質場の導入
- 2-2: 格子ゲージ・スカラー模型の設定
- 2-3: ゲージ・スカラー系の可能な相

第3章 格子ゲージ・スカラー模型の平均場近似

- 3-1: 平均場の方法の考え方と以後の概観
- 3-2: ゲージ・スカラー系への平均場の方法の適用
- 3-3: $U(1)$ 荷電 \pm ゲージ・スカラー模型
 - 3-3-1: $U(1)$ スカラー模型
 - 3-3-2: ユニタリ - ゲージ固定による平均場の方法
 - 3-3-3: ゲージ固定しない方法

3-3-4: まとめと問題点、

3-4: $U(1)$ 荷電 2 ゲージ・スカラー 模型

第 4 章 格子ゲージ・スカラー 模型のループ展開法

4-1: 平均場のループ補正

4-2: 軸性ゲージ固定

4-3: ループ展開法

4-4: Coleman - Weinberg 転移

第 5 章 ゲージ・スカラー 系に対する平均場近似の改良

5-1: ゲージ不変性と相図

5-2: 平均場真空に対する平均場の方法

第 6 章 まとめと議論

6-1: まとめと問題点、

6-2: 閉じ込めについて

6-3: Higgs 機構について

6-4: 強結合領域について

序論

現在までに発見されている、素粒子の大部分は、強粒子と呼ばれる、核子や π 中間子などの、強い相互作用をする粒子であり、その数は、優に百を超える。これは、ほとんどが寿命の短い粒子であるが、比較的安定なものでも十数種ある。ここで、これらの粒子は、さらに基本的な構成子からなる複合粒子であると考えられるようになった。

この構成子は、'クォーク'と呼ばれる、それぞれが三種の'色'と呼ばれる特有の量子数を持っている。強粒子は、そのクォークが複合した、白色状態として存在すると考えると、主な十数種の強粒子を盲く分類説明できる。低エネルギーにおける強粒子の散乱現象による質量分光学の研究により、残りの寿命の短い多くの粒子はこれらの共鳴状態の粒子であるとして、盲く説明された。この'二重共鳴模型'の理論により、この構成子間のポテンシャルは、距離に比例し、低エネルギーでは、強粒子はひもの様に見える事がわかってきた。また、高エネルギーでの散乱現象を観測すると、強粒子は、あたかも、内部に幾つもの質量が殆んど無い点状の構成子が存在し、高エネルギーでこれらは、相互作用をせずに自由に動き回っている様に見える。これを、'漸近的自由性'という。この構成子は、量子数などの解析により、まさに、三つの'色'を持つ

クォークである事がわかってきた。

この様にして、「強粒子は、クォークと呼ばれる『色』の量子数を持つ構成子の複合粒子であり、低エネルギーでは、『ひも』の様にふるまい、高エネルギーでは内部でクォークが自由に動き回れる」という、特徴的な力学を持つ」という描像ができ上がった。しかし、クォーク自身は、質量がほとんど無いにもかかわらず、発見されてはいない。これは、この力学の性質の反映であり、クォークはひもの力によって、白色状態としてハドロン内部に「閉じ込め」られており、決して単独ではとり出せない」と考えられるようになった。

以上の様な特徴的な力学として、クォークの持つ『色』の自由度を基にするゲージ理論が考えられた。これを、量子色力学(QCD)という。

QCDでは、三色の色電荷を持つクォーク間の力は、八色のグルーオンと呼ばれるゲージ場との相互作用として記述される。これは、すでに大きな成果を得ている量子電磁気学(QED)と同種の理論である。QEDは、一種の電荷と光子という中性のゲージ場との相互作用を記述する。違いは、QEDでは $U(1)$ 群という可換群をゲージ群としており、QCDでは $SU(3)$ 群という非可換群をゲージ群とする、という点のみである。しかし、この違いは物理的様相を一変させる。

QCDでは、ゲージ場も(色)電荷を持っているので、ゲージ場自身が自己相互作用する。この効果を考慮

すると、色電荷の結合定数は、高エネルギーでは実質的にゼロに近づいてゆき、漸近的自由性を説明する。また逆に、低エネルギーでは、この有効結合定数は大きくなり、クォークは互いに強く束縛し合うようになる。これは、QEDと全く逆の性質である。このQCDの性質は、強い相互作用を記述するクォーク間の力学として有力である。実際は、高エネルギーでの現象は、漸近的自由性を基にした、摂動的QCDによってよく説明された。そこで、低エネルギーでも、この力学によって、ハダロンの描像やクォークの閉じ込め等を説明できないかという関心が強まった。

しかしQCDでは、低エネルギーでは有効結合定数が大きくなるので、高エネルギー領域で有効であった摂動論が使えない。そこで、ゲージ理論を摂動計算によらずに解析することが重要となった。その有力な手段として、格子ゲージ理論が導入された。本論文では、この格子ゲージ理論について議論が展開される。

格子ゲージ理論は、格子に分割された時空上にゲージ場を定式化した場の理論である。こうして設定された格子ゲージモデルは、古典統計力学系の一つのモデルと見做すことができる。その相構造を調べる事によって、ゲージ場の非摂動的真空の性質を調べる事ができる。最終的には、格子間隔をゼロにする極限をとり、連続空間の理論を構成するが、これは格子間隔を固

定した系では、相関距離が無限大の現象を見る事と同等である。したがって、連続理論とは、系の持つ二次転移点での臨界現象に他ならない。この様にして、ゲージ場の非摂動的性質を担った理論が得られる。本論文では、第1章において、以上の様な格子ゲージ理論の基本的枠組についてまとめる。それをもつて、第2章以降で行なわれる、格子上のゲージ・スカラー系についての研究への導入とある。

第2章では、まず格子上のゲージ・スカラー模型の設定とこの模型の概要について述べられる。この章以下では、この模型について第1章で示した枠組に沿っての解析がなされるが、本論文では、特に平均場の方法を用いての分析が行われる。第3章では、平均場の方法と概観と、この方法を格子ゲージ・スカラー模型に適用する手法について述べ、最低次近似での理論が展開される。この章で得られた結果と問題点を基に、第4章では、この模型に対する平均場近似のループ補正の方法が議論され、第5章では、ゲージ不変性に伴う、平均場の方法の基本的問題に対して一つの改良手法を与える。最後に、第6章においてまとめと議論を行う。

§ 1 格子ゲージ理論の概要

1-1: 格子正則化したゲージ模型の導入

局所場の理論を有限理論として明瞭に規定するためには、相互作用によって生ずる紫外発散を処理することが必要である。そのため、われわれは、くりこみの処方を使ってこの発散を除去し、摂動論が有効なスケールで理論を定義し、運用してきた。非可換ゲージ理論である Q.C.D では、漸近的自由性のために、このスケールは強粒子のスケール (\sim 数 G_{UV}^{-1}) に比して十分小さい。したがって、摂動論が有効なスケールでは、強粒子の深部についての情報を得るのみである。強粒子間の物理を知るためには、強粒子スケールでの情報が必要であり、このスケールでの Q.C.D の性質を調べるには、摂動論は有効でない。実際に、この理論では遠距離で有効結合定数が大きくなり、非摂動的効果が重要になる。そこでは、ゲージ場のゆらぎが大きくなって、真空のゲージ不変性が本質的な役割を果たすと思われる。このことは、クォークやグルーオンが漸近場として現実世界に現れられないという「閉じ込め」の性質と深く関係していると考えられる。

K. G. Wilson¹⁾ は、このような理論の非摂動的性質の解析のために、従来の方法に代わるものとして、格子ゲージ理論を導入した。この理論は、格子正則化した

ユークリッド時空上に、ゲージ場を定式化した場の理論である。格子間隔は、紫外発散の切断と考えることができる。格子間隔がゼロでないとき、理論は有限に定義され、計算は明白に実行できる。連続時空での理論において、物理量が、発散を除去した後のくりこみの処方に依らないのと同様に、格子理論においては、切断に依存しないと考えられる。よって、最終的に格子間隔をゼロにする極限をとって連続時空での理論を構成するとき、物理的に意味のある量は有限になっており、理論の非摂動的情報まで保持されていると期待される。また、この理論では、ゲージ不変のまま正規化されており、ゲージ不変のままの量子化が可能である。したがって、ゲージ不変性が重要であるような非摂動的性質の解析には、適している。

ユークリッド格子化された場の理論は、経路積分による量子化を考えるとき、同じ次元の古典統計力学系と同等である。一般に、ユークリッド化した理論では、時間を無限大にとることにより基底状態を取り出して、理論の真空の性質をみるのに有用である。格子理論では、この基底状態の性質を調べることは、系の相構造を調べることに他ならない。したがって、われわれは、格子ゲージ模型の相構造を調べることによって、ゲージ理論の非摂動的な真空の性質を調べることができる。そして、連続極限(格子間隔をゼロにする極限)をとることによって、その性質の反映した物理量

を有限に求めることが可能になるのである。

本章では、以上のような、格子ゲージ理論の基本的枠組について述べる。格子ゲージ理論における模型は、すべてこの文脈に沿って調べられてゆく。その意味で、本章は、2章以下で述べられるゲージ・スカラー系の研究についての導入とする。

以下、1-2節で、格子ゲージ模型の設定を与えた後、1-3節で、この模型の相構造を調べるための秩序パラメータについて述べる。最後に、1-4節において、連続極限での理論構成と相構造及び臨界現象との関係について述べる。

1-2: 格子ゲージ模型の設定

本節では、ゲージ場のみの系を例として、K. G. Wilson^{1)~3)}の与えた形式に基づいて格子ゲージ模型の設定を行う。

格子化された、 d 次元ユークリッド

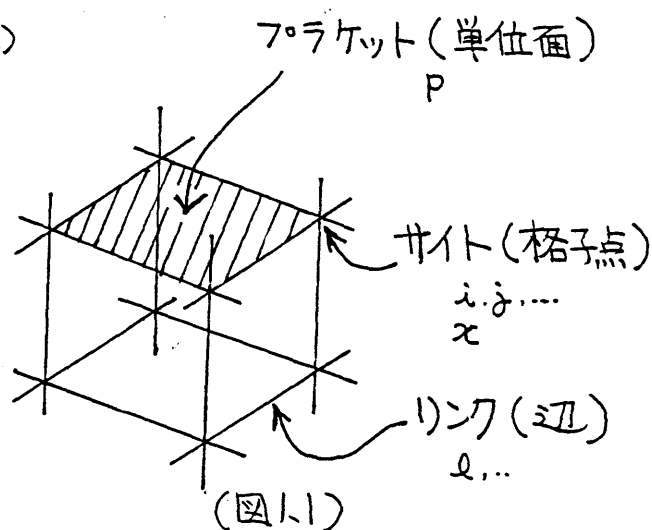
時空上で、ゲージ変数 $U_\mu(x)$

は、格子間隔を a として、

(図 1.1) のように、

リンク上に定義される。

$U_\mu(x)$ は、ゲージ群の要素であり、



$$U_\mu(x) = \exp(iag A_\mu(x)) \quad (1.1)$$

$$A_\mu(x) = A_\mu^\alpha(x) T^\alpha$$

と書ける。 T^α は、群の生成子であり、行列で表わされる。 g は、ゲージ場の裸の結合定数である。 $a \rightarrow 0$ で、

$$\prod_{\text{経路}} U_\mu(x) \rightarrow \mathbb{P} \exp ig \int_{x_1}^{x_2} A_\mu(x) dx_\mu \quad (1.2)$$

(\mathbb{P} : 経路の順序に沿った意)

となることからわかるように、ゲージ場の経路順序演算子を、基本経路(すなわち、リンク)上に定義したものと見做せる。ゲージ群が Lie 群であれば、 $U_\mu(x)$ は

ユニタリであり、表記法について、以下に一括する。

$$\begin{array}{c} x \longrightarrow x \\ x \quad \mu \quad x+\hat{\mu} \end{array} : U_{\mu}(x) \left(\begin{array}{l} \text{または, } l=(x, \hat{\mu}) \text{ とし } U_l \\ (i, j) \quad U_{ij} \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{c} x \longleftarrow x \\ x \quad \mu \quad x+\hat{\mu} \end{array} : U_{\mu}^{-1}(x) = U_{\mu}^{\dagger}(x) = U_{-\mu}(x+\hat{\mu})$$

などと、表わす。

$U_{\mu}(x)$ は、格子点上に定義されたゲージ群の要素 $h(x)$ によって、次のように変換する。

$$U_{\mu}(x) \rightarrow h(x) U_{\mu}(x) h^{-1}(x+\hat{\mu}) \quad (1.3)$$

これは、 $a \rightarrow 0$ で、(1.1) より、

$$U_{\mu}(x) \sim 1 + ig A_{\mu}(x) dx_{\mu} \quad (1.4)$$

$$\rightarrow 1 + ig \left[h(x) A_{\mu}(x) h^{-1}(x) + \frac{1}{ig} h(x) \frac{\partial h^{-1}(x)}{\partial x_{\mu}} dx_{\mu} \right]$$

となって、連続理論におけるゲージ場 $A_{\mu}^{\alpha}(x)$ に対する通常の局所ゲージ変換に帰着する。

作用 S_p は、次のようにとる。

$$S_p[U] = \beta_g \sum_{x, \mu > \nu} \text{tr} [U_{\mu}(x) U_{\nu}(x+\hat{\mu}) U_{\mu}^{\dagger}(x+\hat{\nu}) U_{\nu}^{\dagger}(x)] \quad (1.5)$$

これは、1つのプラケット： $\begin{matrix} \mu \\ \square \\ \nu \end{matrix}$ にある4つのリンク上のゲージ変数を、向きをつけて積をとったもののトレースを、すべてのプラケットについて、たし上げたものである。したがって、明らかに、ゲージ変換(1.3)に対して不変である。 $a \sim 0$ では、(1.4)より

$$S_P[U] \rightarrow -\beta_g g^2 a^{4-d} \times \frac{1}{4} \int dx^d \text{tr} \tilde{F}_{\mu\nu}(x) \tilde{F}_{\mu\nu}(x) + (\text{定数}) \quad (1.6)$$

ただし、

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$$

となり、

$$\beta_g = \frac{1}{g^2} \times a^{4-d} \quad (1.7)$$

とすれば、連続理論での作用に一致する。

以上のように、K. G. Wilson は定式化し、群の基本表現をとって $U_\mu(x)$ を定義した。実際には、ゲージ不変性と(1.6)の条件を満足する格子上的作用には、任意性があり、様々な変形版、改良版がある。^{(11)~(12)}しかし、要点は、最も簡単な形をした Wilson の作用で十分に満たされており、以下の議論はこの作用について行う。

量子化を連続理論の経路積分法に習うと、格子ゲージ理論での経路積分は、群の要素 $U_\mu(x)$ についての群上の積分として表わされる。分配関数 Z は、次のように与えられる。

$$Z = \int \prod_{x,\mu} dU_\mu(x) \exp S[U] \quad (1.8)$$

物理量 $\mathcal{O}[U]$ の期待値は、次式で定義される。

$$\langle \mathcal{O}[U] \rangle = Z^{-1} \int \prod_{x,\mu} dU_\mu(x) \exp S[U] \times \mathcal{O}[U] \quad (1.9)$$

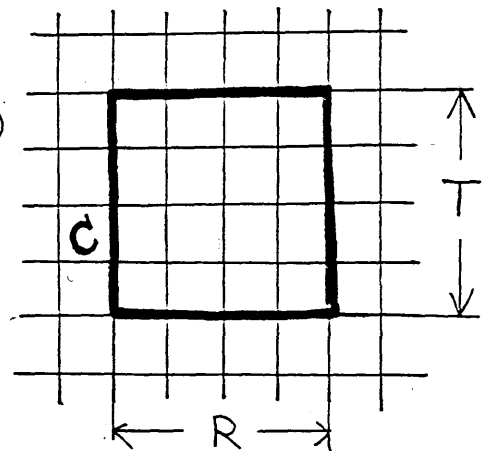
$dU_\mu(x)$ は、群の不変測度 (Haar 測度) であり、ゲージ変換 (1.3) に対して不変である。このように、格子ゲージ理論は、ゲージ不変な形で構成し量子化することができ、ゲージ固定の必要がない^{*}。また、しでっくられるゲージ不変な量以外の期待値はゼロになる。これは、Elitzur の定理[†]として知られている。この事は、(1.8) で設定された系の真空が常にゲージ不変性を保っていることを意味する。したがって、例えば、相の性質を調べるために、 $\langle U \rangle$ 等を考えても、秩序パラメータとしては使えない。秩序パラメータとしては、ゲージ不変な量が選ばれる。次節でそれを見る。

1-3 : Wilson ループ と秩序パラメータ

前節の (1.8) で与えられた系の基底状態、すなわち、相構造及びその物理的性質を調べるのが、要点である。そのために、秩序パラメータを設定し、そのふるまいによって知ることが出来る基底状態の性質をみる。

Wilson は、(図 1.2) の様に、閉じたループ C に沿ってゲージ変数を乗じて作ったゲージ不変量の期待値 (Wilson ループと呼ばれる) を、秩序パラメータとして選んだ。¹⁾

$$W[C] = \langle \prod_{l \in C} U_l \rangle \quad (1.9)$$



まず、この量の物理的意味を知るために、 $a \rightarrow 0$ とし、連続理論での形を見る。

(1.2) より明らかのように、

(図 1.2)

$$W[C] \underset{a \rightarrow 0}{\sim} \langle \mathcal{P} \exp i g \oint A_\mu(x) dx_\mu \rangle \quad (1.10)$$

となる。そこで、 $dx_\mu = dx_\mu/d\tau \times d\tau$ とし、 $g dx_\mu/d\tau = J_\mu$ と形式的に置き換えると、(1.10) は、外場の入った分配関数 ($Z[J]$ とかく) を使って書け、 $T \gg R$ とすると、

$$\sim Z[J] / Z[0] \quad (1.11)$$

19

$$\sim e^{-E_0(J)T} / e^{-E_0 T} \quad (1.12)$$

$$\sim e^{-V(R)T} \quad (1.13)$$

となる。以上の表式は、Wilsonループが、外場のあるときとそうでないときの基底エネルギー $(E_0(J), E_0)$ の差として、(4.12)でRの距離に置かれた試験電荷間の静的ポテンシヤル $V(R)$ を表わしていることを示す。すなわち、

$$\begin{aligned} V(R) &= - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \langle \text{P exp} \left(ig \oint_{\mathcal{C}} A_{\mu} dx_{\mu} \right) \rangle \\ &= - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln W[\mathcal{C}] \quad , \quad T \gg R \quad (1.14) \end{aligned}$$

となる。Wilsonループは、また、一つのゲージ不変な相関関数と見ることもできる。

次に、Wilsonループの可能なふるまいについて、調べる。例として、 $d=4$ 、 $U(1)$ ゲージ群をとる。

$U(1)$ 群での(1.8)の表式は、次のようになる。

$$U_{\mu}(x) = e^{i\theta_{\mu}(x)} \quad ; \quad \theta_{\mu} = -\pi \sim \pi \quad (1.15)$$

$$\theta_M(x) = agA_M(x) \quad (1.16)$$

また,

$$Z = \prod_{x, \mu} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_M(x) \exp \left\{ \beta g \sum_{x, \mu > \nu} \cos(\Delta_\mu \theta_\nu(x) - \Delta_\nu \theta_\mu(x)) \right\} \quad (1.17)$$

ただし,

$$\Delta_\mu \theta_\nu(x) = \theta_\nu(x+\hat{\mu}) - \theta_\nu(x) \quad (1.18)$$

である。以下、ゲージ結合定数 $g^2 (= 1/\beta g)$ の二つの領域について説明する。

1) 弱結合 ($g^2 \ll 1$): この領域では、 $U_M(x) \sim 1 + iagA_M(x)$ として、Gauss 近似ができて³⁾、 $a \sim 0$ での連続理論における形式 (非コンパクト型) (1.6) に書ける。Wilson ループは、次式のようになる。

$$W[C] \underset{g^2 \ll 1}{\sim} \left\langle \exp \left(ig \oint_C A_M(x) dx \right) \right\rangle \quad (1.19)$$

$$\sim \prod_{x, \mu} \int_{-\infty}^{\infty} dA_M(x) \exp \left(-\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^2 + ig \oint_C A_M dx_\mu \right) / Z \quad (1.20)$$

ただし、この形式が意味を持つためには、ゲージ固定が必要である。^{*}しかし、Wilson ループは、ゲージ不変

な量なので、計算結果はゲージ固定の処方に依らな
ときえらぬ。(1.20)を g によって展開してゆく。
(これを、弱結合展開という。) $U(1)$ 群の可換性によ
り、

$$(1.19) = \exp\left(-\frac{1}{2}g^2 \oint_C \oint_C \langle A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle dx_\mu dy_\nu\right) \quad (1.21)$$

とかける。 $\langle A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle$ は、伝播関数 $\Delta_{\mu\nu}(x-y)$ であ
り、 $|x-y| > a$ では、大体、次の様になるまう。

$$\Delta_{\mu\nu}(x) \sim \frac{\delta_{\mu\nu}}{|x-y|^{d-2}} \quad (1.22)$$

なお、ここでは、Feynman η' - ζ 固定をとった。 $d=4$
について計算すると、 $T \gg R$ として、Wilson ル-70 は次の
ようになる。³⁾

$$W[C] \approx \exp\left\{-\frac{1}{2}g^2 c P + \frac{g^2}{2\pi} \frac{T}{R} + \frac{2g^2}{\pi^2} \ln(R/a)\right\} \quad (1.23)$$

ここで、 c は定数($\dim[c] = [L^{-1}]$)で、 $P = 2(T+R)$ であ
り経路 C の周辺の長さを示す。したがって、試験電荷
間の距離 R ($\ll T$)を大きくしてみたとき、大体のふるま
いは、

$$W[C] \sim \exp\left\{-(\text{定数}) \times P\right\} \quad (1.24)$$

となる。これを「周辺則」と呼ぶ。この場合、電荷間のポテンシャルは、(1.14)より、

$$V(R) \sim (\text{定数}) \quad (1.25)$$

となつて、2つの電荷は容易に引き離されることを示している。この意味で、「周辺則」を示す相を、「荷電自由相」と呼ぶ。(1.23)の場合について見ると、

$$V(R) \sim (\text{定数}) - \frac{g^2}{2\pi} \frac{1}{R} \quad (1.26)$$

となる。第2項は、Coulombポテンシャルの形である。この意味で、 $d=4$ 、 $U(1)$ 群での弱結合領域は、連続理論でのQEDの性質を持つと考え、この領域の相を「Coulomb相」と呼ぶ。

ii) 強結合 ($g^2 \gg 1$): この領域では、 $\beta_g \sim 1/g^2 \ll 1$ である。(1.15~18)より、Wilson ルーローは、

$$W[C] = \left\langle \exp \left(i \sum_C \Theta_m(x) \right) \right\rangle \quad (1.27)$$

$$= \prod_{x,m} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_m(x) \exp \left(S[U; \beta_g] + i \sum_C \Theta_m(x) \right) / Z$$

$$(1.28)$$

であり、この形式で β_g について展開してゆく。(これ

を、'強結合展開'という。これは、統計系でいう'高温展開'である。) 結果は、次の様になる。

$$W[C] \underset{\beta_g \ll 1}{\sim} \exp \left\{ -\ln(1/\beta_g) \cdot A/a^2 \right\} \quad (1.29)$$

ここで、 $A = RT$ であり、経路 C 内の面積を示す。したがって、大体のふるまいは、

$$W[C] \sim \exp \left\{ -(\text{定数}) \times A \right\} \quad (1.30)$$

となる。これを'面積則'と呼ぶ。この場合、ポテンシャルは、(1.14)より

$$V(R) \sim (\text{定数}) \times R \quad (1.31)$$

となり、2つの電荷を引き離すには、無限大のエネルギーが必要となる。この意味で、'面積則'を示す相を、荷電の'閉じ込め相'と呼ぶ。この真空では、荷電状態は見えないと考えられる。QCD ($SU(3)$ ゲージ群)におけるクォークの閉じ込めは、色電荷について同様の事が起きていると考えられる。実際に、 $SU(2)$ 群や $SU(3)$ 群についても、強結合領域では、同じ結果を得る。

また、(1.31)の形は、'ひも'のポテンシャルを示している。これは、低エネルギーでの強粒子の現象論によ

る二重共鳴模型から予言される、強粒子の‘ひも’描像とも合致している。ひもの張力定数は、(1.29)より、Wilson ループを使って、

$$\sigma = - \ln W[C] / A \quad (1.32)$$

で与えられる。今の場合、具体的には、

$$\sigma = - \frac{1}{a^2} \ln(1/\beta g) = \frac{1}{a^2} \ln g^2 \quad (1.33)$$

と書ける。

Wilson は、以上の様な秩序パラメータを設定し、真空の持つ‘閉じ込め’の性質に対する一つの判定法を与えた。この処方に従って、様々の群及び時空次元について、閉じ込めか否かが調べられた。

重要な結論の一つは、ゲージ群がコンパクトで、作用が Wilson 型のもの (コンパクトな形式 (1.5); 例 (1)(1.17)) であれば、あらゆる群及び時空次元で閉じ込めがいえる、ということである。Wilson 型の格子模型では、面積則は強結合領域でほとんど自明で、
重要なのは、

$$D_\mu(x) \equiv ag A_\mu(x) \quad (1.34)$$

の‘周期性’である。連続理論では、 $a \sim 0$ として、 A_μ は、

非コンパクトな領域に拮げらゝる。格子理論における θ_μ の周期性を回復するためには、連続理論における基本量 $g\mu$ のゆらぎが非常に大きくなる必要がある。これは、非摂動効果が本質的であることを意味する。逆にいえば、格子ゲージ理論は、周期性という形で、ゲージ場の非摂動効果を取り入れているともいえる。(例えば、非コンパクトな形式の作用の格子ゲージ模型では、閉じ込めがいえないことがわかっている。しかし、グローバルな実体、(例えば、格子模型での Vortex や、モノポールなど) 何らかの方法で周期性を回復した模型-(Villain 模型⁸⁾)では、閉じ込めがいえる。逆に、Wilson 型の模型から、閉じ込めに関与する、このような実体を見出すことが重要といえる。)

Wilson ループによる判定法は、あくまで、ゲージ場のみの系について適用できるものである。動的物質場を含んだ系については、あらゆる領域で、Wilson ループは周辺則を示してしまふ。しかし、この方法は、重要な情報を与えてくれるものである。物質場を含んだ系については、第 2 章以降で扱う。

実際には、相構造は、Wilson ループではなく、フラケットエネルギーと呼ばれる最小単位の Wilson ループの期待値のふるまいで調べられている。しかし、この量に

は、Wilsonループのような物理的意味はない。プラケットエネルギーは、次式の様に与えられる。

$$E(P) = \langle \square \rangle \equiv \left\langle \text{tr} \prod_{l \in P} U_l \right\rangle \quad (1.35)$$

大体のふるまいは、次の様になる。

$$i) \text{弱結合領域: } E(P) \sim 1 \quad (1.36)$$

$$ii) \text{強結合領域: } E(P) \sim 0 \quad (1.37)$$

こゝらが意味するところは、大体以下の通りである。

i) 弱結合では、(例 $U(1)$)

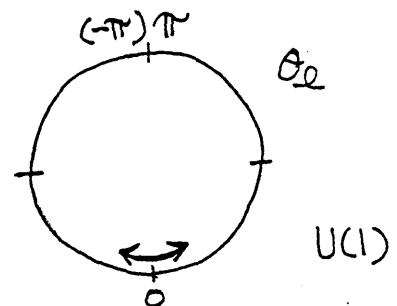
$$U_l \sim 1 + \theta_l \quad ; \quad |\theta_l| \ll 1$$

となつて、

ゲージ場 $\theta_l (= agA_l)$ の

ゆらぎは、小さく押えらる。

Gauss 的である。^{*}



(図 1.3a)

ii) 強結合では、

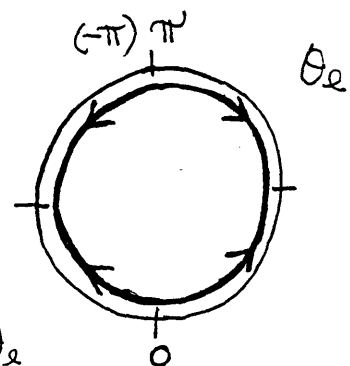
$$U_l = e^{i\theta_l} \quad ; \quad \theta_l: -\pi \sim \pi$$

となつて、 θ_l は $-\pi \sim \pi$ の間を

均等にとり、 θ_l の周期性が

効いている。すなわちゲージ場 θ_l

のゆらぎは大きいといえる。



(図 1.3b)

以上の様なゲージ場のふるまいは、Wilsonループにつ

いて見てきたゲージ場のふるまいと符合する。したがって、普通、 $E(p)$ を‘局所的’な秩序パラメータとみて、途中に相転移が認められれば、強結合では、一般に Wilson ループが面積則を示すことが厳密に示されているので、強結合領域は‘閉じ込め相’であり、弱結合領域では‘荷電自由相’と考えている。途中に相転移が無い場合には、強結合での性質が弱結合でも保持されて、すべての領域で閉じ込めが実現されていると考える。(弱結合で、Wilson ループが周辺則を示すことは、一般にはいえてない。示された例は、すべて、 $E(p)$ でみた時、途中に転移がある場合である。また、実際に相転移のない場合に、弱結合領域で、‘ひも’の張力定数を調べるとゼロではないし、 $d=4$, $U(1)$ 群の場合、弱結合相で、ひも定数はゼロになっている。)

$E(p)$ を用いて、特に、モンテカルロ・シミュレーションによって、相構造が精力的に調べられた。^{13)~16)}

1-4: 連続極限と臨界現象

前節において、 g - g' 結合定数の弱・強結合領域で相の物理的性質を調べたが、そのらは、裸の結合定数についてであった。連続理論では、紫外発散をくりこんだ後、現象を見るスケールに依って変化してゆく有効結合定数が理論を規定する。格子正則理論において、格子間隔 a に比してマクロな現象を見るならば、裸の結合定数の理論は、連続理論の有効理論と見做す立場もある。(特に、くりこみ可能な理論で、次元導入されるような理論については、そうである。)しかし、格子理論と連続理論の関係を厳密に考えるならば、まず、格子正則理論の連続極限 $a \rightarrow 0$ で、どのように、連続空間の有限理論を構成するかを見なければならぬ。本節では、連続極限での理論構成及びそこでどのように相の性質が物理量に反映するかを見る。

連続極限($a \rightarrow 0$)をとるといふことは、 a に比べて、マクロな現象を見るということである。この事は、 a を固定した時、系の相転移点 g_c において、相関距離が無限大になる時の現象を見ることと同等である。これは、転移点が二次の紫外(UV)停留点であれば可能である。この臨界点付近では、スケールリング則が成り立っているので、物理的スケールを任意に固定すれば、(すなわち次元導入) $g \rightarrow g_c$ にしたがって $a \rightarrow 0$ となっ

ても、物理量は有限にとどまり、一つの連続理論が決まるのである。

以上のことは、ゲージ理論の様な、通常の連続理論で、くりこみ可能な理論では、実現しうることである。以下、QCD型の非可換ゲージ理論として、 $d=4$ で $SU(2)$ 群のゲージ理論を例にとり、上に述べた事を具体的にみる。

有限理論において、ある物理量 K を考える。系が、スケールリング領域にすでにあるならば、 K は紫外切断 a に依らず一定の値をとる。すなわち、次式が成り立つ。

$$a \frac{d}{da} K(\Lambda, a, g) = 0 \quad (1.38)$$

ここで、 Λ は任意に固定された物理スケールで ($[\Lambda] = [L]^{-1}$)、 g は、裸のゲージ結合定数 ($[g] = 1$) である。(1.38) が成り立つとき、 g は a 依存性を持っている筈である。そこで (1.38) は、次の様に書ける。

$$\beta(g) = -a \frac{\partial g(a)}{\partial a} \quad (1.39)$$

ただし、ここで導入した 'Callan-Symanzik の β -関数' $\beta(g)$ は、

$$\beta(g) \equiv a \frac{\partial K}{\partial a} / \frac{\partial K}{\partial g} \quad (1.40)$$

で定義される。(1.39)が g の a 依存性を決める。実際は、 $\beta(g)$ は物理量に依らずに、 g のふるまいを規定していると考えられる。 $\beta(g)$ のゼロ点が停留点 g_c を与える。

$$\beta(g_c) = 0 \quad (1.41)$$

このとき、 $a \rightarrow \lambda a$ で $g(\lambda a) = g_c$ であり、 g_c において、スケールリング則が成り立っている。したがって、 g_c は系の二次転移点を示すと考えられる。 $\beta(g)$ のゼロ点を調べるために、弱結合・強結合領域に分けて、大体の $\beta(g)$ の形を考えてみる。

i) $g \ll 1$: 弱結合

この領域では、 g の摂動論(弱結合展開)によって、連続理論と同様に計算すれば、¹⁷⁾

$$\beta(g) = -\beta_0 g^3 + o(g^5) \quad (1.42)$$

$$; \beta_0 = \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{11}{3} N \right] > 0$$

$$N=2, SU(2)$$

となり、 $g(a)$ は、次のようになる。

$$g^2(a) = \frac{1}{2\beta_0 \ln(1/\lambda a)} \quad (1.43)$$

λ は、物理的スケールを与える任意パラメータで、

1-21

$[\Lambda] = [L]^{-1}$, $\Lambda' > a$ である。(1.43)より、 $a \rightarrow 0$ で $g \rightarrow g_c = 0$ であり、 $g_c = 0$ が紫外停留点であることを示している。(1.43)より逆に、

$$\Lambda = \frac{1}{a} \exp(-1/2\beta_0 g^2(a)) \quad (1.44)$$

と書ける。今、(1.44)で、 $a \neq 0$ に固定して考えると $g \rightarrow g_c$ で、 $\Lambda \rightarrow \infty$ となり、 a を固定した系では、臨界点 g_c は、相関距離が無限大になる二次転移点であることを示している。逆に、 Λ を何らかの有限な値に固定して $g \rightarrow g_c$ をとると、 $a \rightarrow 0$ にならざるを得ず、また、 $g \sim g_c$ で (1.44) の示すスケールリング領域にあれば、 a はゼロでなくとも、同じ有限値 Λ を与え、実質的に $a \rightarrow 0$ の理論と等価となる。以上のことは、 g_c が二次の紫外停留点であることにより保証される。

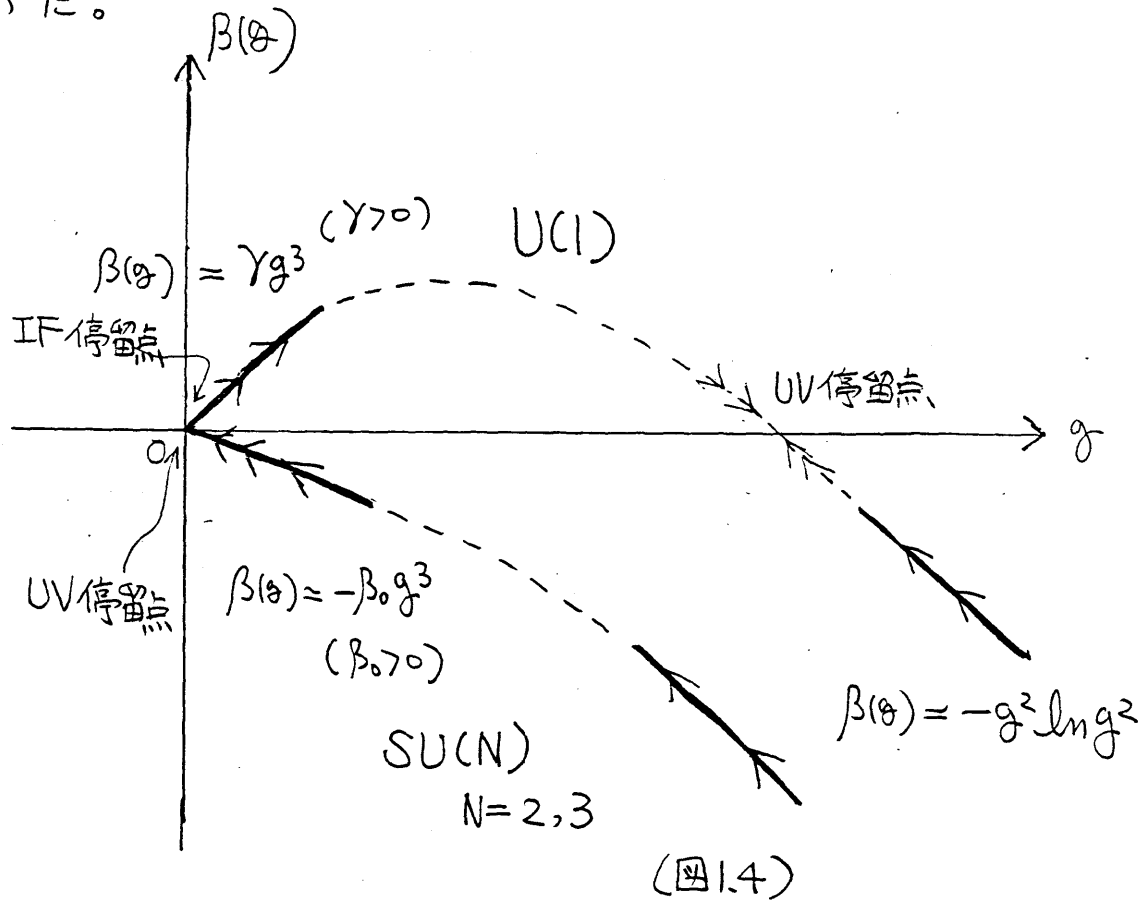
ii) $g < 1$: 強結合

この領域では、 g の摂動展開はできないので、(1.40)の K として、(1.33) で与えた 'ひも' の張力定数を使う。これによって、 $\beta(g)$ は次のようになる。

$$\beta(g) = -g^2 \ln g^2 \quad (1.45)$$

β -関数のゼロ点を調べるために、i) ii) の結果 (1.42), (1.45) を使って、 $\beta(g)$ のふるまいを予想し、(図 1.4) に

示した。比較のため、 $U(1)$ ゲージ群の場合も、併せて描いた。



この図を見ると、 $SU(N)$, $N=2,3$ の場合、 β -関数のゼロ点は、 $g_c=0$ のみであることが予想される。実際、前節1-3で述べた $E(p)$ (1.35) によるモンテカルロ・シミュレーションの結果では、 g の中間領域で相転移は認められていない。この事は、真空が一相であり、非可換ゲージ理論の重要な性質である、漸近的自由性と‘閉じ込め’とが、格子ゲージ理論において両立し、連続極限 $a \rightarrow 0$ をとったとき、 $g \rightarrow g_c=0$ のみに行って、漸近的自由性のみならず、強結合領域における‘閉じ込め’が示す非摂動的効果を含んだ理論が得られることを期待させる。以下で、実際に、非摂動的効果を反映し

ていると思われ、物理量が $a \rightarrow 0$ で、どう求められて同時に、連続極限での理論が決まるかを見る。

(U(1)群の場合は、強結合領域では、1-3で見たように、 $SU(N)$, $N=2,3$ の場合と同じだが、弱結合領域では、ふるまひが異なり、 $g_c=0$ は紫外(IF)停留点になって、連続極限をここでとることはできない。弱・強結合領域の β -関数の形からみて、途中に、 $g_c \neq 0$ の紫外停留点があると思われ、もしそうだとすると、弱結合側からと強結合側からと、異なった真空の性質を持つ二つの連続極限の理論の可能性もある。U(1)ゲージ模型での相転移点(モンテカルロ・シミュレーションによれば、この転移点は二次だとされている。)が、この g_c に相当すると考えられている。1-3で見たように、弱結合側の真空がQEDを与えると考えられる。)

ひもの張力定数(1.32)を例にとり、この物理量が $a \rightarrow 0$ で、どう得られるかを見る。これは、ゲージ結合定数の大きい領域では、(1.45)の様に表わされるが、これが $a \rightarrow 0$ でどうなるかを見るには、 $g \sim g_c=0$ でのふるまひを調べなければならぬ。物理的スケールを決めた時の $a \rightarrow 0$ で $g \rightarrow g_c=0$ への近づき方は、物理量に依らず β 関数で決まっておき、張力定数 σ の $g \sim g_c=0$ でのふるまひも、 $g \sim 0$ での摂動論で与えた β 関数によって支配されると考えられる。すなわち、(1.44)と同様に、次のように書ける。

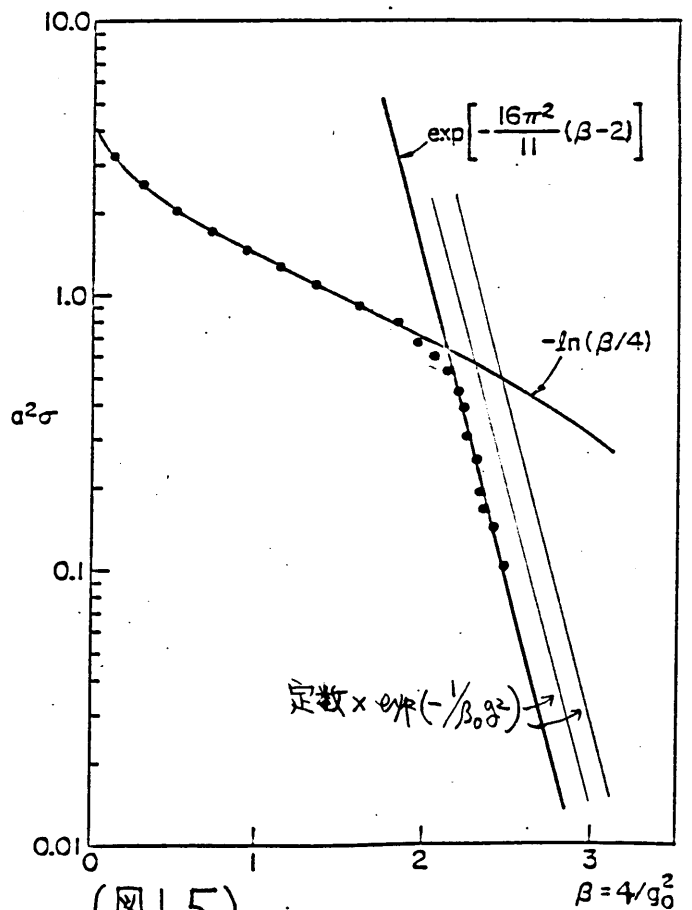
$$\sqrt{\sigma} \propto \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{1}{2\beta_0} g^2(a)\right) \quad [0] = [L]^{-2} \quad (1.46)$$

すなわち、 a を固定した時、臨界点 $g \rightarrow g_c$ での $\sqrt{\sigma}$ の発散の状況は、 Λ のそれと同じであって、そのため両者の間には、 $g \rightarrow g_c$ で、 a に依らず、大体、

$$C: \text{定数} \sim \sigma / \Lambda^2 \quad (1.47)$$

という関係が成り立つと考えられる。実際は、 $g = g_c$ でなくとも、 $g \sim g_c$ で (1.44) のスケーリング領域にあれば、(1.47) は成立する。(図 1.5) は、モンテカルロ・シミュレーションによって、^(47,24) (1.47) のスケーリングを見たものである。

g の強結合領域では、 σ は、面積則によって与えられる (1.45) に沿っているが、弱結合領域では (1.47) に沿っており、スケーリング領域には沿っていない。そこで定数 C を、グラフから読み取れば、 a に無関係に (1.48) の関係が決まる。そこで、物理的スケールを σ または、



(図 1.5)

Λ によって、導入してやれば、 $\theta \sim \theta_2$ で(1.44, 47)より、 $a \sim 0$ に行くことになる。このように、スケーリング領域では、物理量が有限値を持つ、実質的に連続極限と等価な理論が規定されるのである。

ここでは、現象論における二重共鳴模型の知識より、'ひも'の張力定数 σ によって、物理的スケールを導入する。

$$\sigma = 1/2\pi\alpha' \quad \alpha' : \text{Regge } \alpha_0 - \alpha' \text{ の傾き (1.48)}$$

$$\approx 1.0 \text{ GeV}^{-2}$$

(1.51)より、 $\sqrt{\sigma} = 420 \text{ MeV}$ を使えば、弱結合でのスケーリングパラメータ Λ の値が決まる。これを摂動的QCDを使って、高エネルギー現象である深非弾性散乱の知識により決めた Λ の値とを比べることができる。実際は、より精密な形で計算され、SU(3)群の場合では、^(18, 19)

$$\text{格子理論} : \Lambda = 170 \pm 50 \text{ MeV}$$

$$\text{摂動的QCD} : \Lambda \approx 200 \text{ MeV}$$

のような結果が得らぬことになる。

以上見てきたように、連続極限において、物理量を求めるには、二次の紫外停留点における臨界現象を調

べる事が重要であった。SU(2), SU(3)群では、この転移点が、 $g_2=0$ であるため、摂動計算によって得た β -関数によって、臨界点 g_2 でのふるまひを知ることができた。しかし、U(1)群については、同様にはできない。

SU(2), SU(3)群について調べた、ひもの張力定数 σ は、弱結合では摂動論によるスケーリング則を満たす様になるが、同じ相の強結合領域での非摂動効果を反映している。また、本節でみたような、連続極限での理論構成は、通常の連続理論における、ゲージ場理論などのくりこみ処方による、有限な理論の構成と深く関係している。例えば、くりこみ可能でないような、スカラー模型の格子理論は、連続極で、何らの相互作用もしない自明な理論になることが知られている。

格子ゲージ理論は、ゲージ理論の非摂動的性質を調べる目的で導入された。この理論の研究では、まず、模型の持つ相構造、すなわち、相の物理的性質や相転移の存在などを調べる事が必要である。そして、連続極限で、それらの性質が物理量に如何に現われ、非摂動的効果を含んだ理論が構成されるかを見るために、相転移点(特に、二次の紫外停留点)での臨界現象を調べる事が重要である。以上の様な枠組に沿って、第2章以降では、ゲージ場と物質場の相互作用系について、議論を展開する。

§ 2 格子ゲージ・スカラーモデル

2-1: 物質場の導入

前章では、ゲージ場のみの系を例として、格子ゲージ理論の基本的枠組が示されたが、本章以降では、同じ文脈に沿って、物質場を含んだ相互作用系についての議論を展開する。ゲージ場のみの系では、試験電荷を持った、質量が無限大の物質場が、静的外場として含まれているのみであった。しかし、自然を記述できる現実的なモデルとしては、動的物質場の導入が必要である。前章でみたように、連続極限での理論構成を考へるためには、モデルのくりこみ可能性が保証されていることが重要である。本論文では、その例として、スカラー粒子を物質場として含む系を扱う。

格子上で、スカラー粒子は、フェルミ粒子に比べて扱い易く、スカラー粒子のみの系での連続極限は、よく研究が進んでいる。スカラー場は、物質場を考へる場合の出発点でもある。本章で見える様に、スカラー場を含むことにより、ゲージ系に新しい様相が生じる。

ゲージ・スカラー系は、弱電相互作用のモデルの70ポートタイプでもあり、宇宙論におけるモデルとしても、このモデルの非摂動的性質の解析は重要である。実際、素粒子分野で考へられている、ゲージ・物質系のあらゆるモデルの基本となるものである。

2-1'

本章では、まず、ゲージ・スカラー系の模型の設定を行う。として、第3章以降、平均場の方法により、具体的に終わる解析の前に、この模型の持つ、可能な相とその性質について、概観する。

2-2

2-2: 格子ゲージ・スカラーモデルの設定 (格子ヒッグスモデル)

格子上で、ゲージ・スカラー系を設定する上で、基になるのは、 d 次元ユークリッド時空での連続理論の作用である。

$$S = \int d^d x \left\{ -\frac{1}{4} \text{tr} F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2} |(\partial_\mu - ig A_\mu(x)) \phi(x)|^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} m^2 |\phi(x)|^2 - \lambda (|\phi(x)|^2 - v^2)^2 \right\} \quad (2.1)$$

m は、スカラー粒子の質量であり、 $\propto \lambda |\phi|^4$ のポテンシャル ('Higgs ポテンシャル' と呼ぶ。)を持つ。このモデルを格子化すると、次式のようなになる。^{5,31,42)}

$$S[U, \varphi] = T[U, \varphi] - \sum_x V(\varphi(x)) \quad , \quad (2.2)$$

$$T[U, \varphi] = \beta_g \sum_P S_P[U] + \alpha \sum_x S_\varphi[\varphi, U] \quad , \quad (2.3)$$

ただし、

$$S_P[U] = \text{tr} [U_\mu(x) U_\nu(x+\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x+\hat{\mu}) U_\nu^\dagger(x)] \quad , \quad (2.4)$$

$$P: x, \mu > \nu$$

また、

$$\varphi(x) = r(x) S(x) \quad ; \quad |S(x)| = 1$$

$$S_2[\varphi, U] = \text{Tr} [S_i^\dagger(x) (U_m^{(R)}(x))_{ij} S_j(x+\hat{\mu})] \varphi(x) \varphi(x+\hat{\mu}) \quad (2.5)$$

$l : (x, \hat{\mu})$

$R : \text{ゲージ群の } R\text{-次元表現}$

$ij : \text{その行列の足}$

であり、

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\varphi(x)) &= \alpha d |\varphi(x)|^2 + \beta (|\varphi(x)|^2 - 1)^2 \quad (2.6) \\ &\quad + \varepsilon |\varphi(x)|^2 \end{aligned}$$

となる。(2.4)は、前章(1.5)で与えた、ゲージ場のみの系の作用と同一のものである。 $S_p[U]$ における $U_m(x)$ は、前章と同様、基本表現をとるが、 $S_2[\varphi, U]$ におけるゲージ変数は、スカラー場の表現をどう選ぶかに依って変わる。 ε は、(2.1)で与えた、裸の質量 m からの寄与である。 βg は、前章(1.7)で与えたゲージ結合定数、 α は、ゲージ変数とスカラー場の結合の強さを決めるパラメータであり、この自由度は、ポテンシャルの u^2 よりなる。 β は、スカラー場の動径成分 $\varphi(x)$ のゆらぎを支配するパラメータである。連続理論での作用(2.1)との対応は、次式より得られる。

$$\phi(x) = u\varphi(x)$$

$$\lambda = \beta/u^4$$

$$u^2 = \alpha$$

(2.7)

2-4

$$1/g^2 = \beta g$$

$$\frac{1}{2}mU^2 = \varepsilon$$

(ただし、次元を考慮することを忘れないとして、格子間隔 $a = 1$ とした。実際、(2.2) ~ (2.6) の表式には、 a は陽に表われない。)

分配関数は、次のように与えられる。

$$Z(\beta g, a, \beta) = \prod_{\square} \int dU_{\square} \times \prod_{\square} \int d\varphi(x) \exp(S[U, \varphi]) \quad (2.8)$$

ここで、 $\int d\varphi = \int_G ds \times \int_0^{\infty} dr$ であり、 ds は、 dU と同様、 G -群 G 上の不変測度 (Haar 測度) である。

なお、ゲージ変換は、サイト上に定義されたゲージ群 G の要素 $h(x)$ によって、以下の様に定義される。

$$\varphi(x) = r(x) S(x) \rightarrow r(x) (h(x) S(x)) \quad (2.9)$$

$$U_{\mu}(x) \rightarrow h(x) U_{\mu}(x) h^{-1}(x+\hat{\mu}) \quad (2.10)$$

この変換によって、作用 $S[U, \varphi]$ 及び、測度 $dU, d\varphi$ は不変である。したがって、前章のゲージ場のみの系と同様に、ゲージ・スカラー系 (2.8) も、完全に、ゲージ不変に、設定されている。

2-5

模型の独立なパラメータは、3つであり、 $(\varepsilon$ を、除いて)各パラメータの極限によって、よく知られた種々の模型に移行する。以下、それを概観する。

i) $\alpha = 0$, では、前章で扱った、ゲージ場のみになる。

ii) $\beta_g = \infty$, では、 $Sp[U] = 1$ より、 $U_\mu(x) = 1$ となって ϕ^4 -スカラー模型になる。

iii) $\beta_g = \infty$, では、ii)から、更に ϕ の動径成分が 1 に $\beta = \infty$ 固定され、統計力学でいう所の強磁性型のスピン模型になる。(例えば、 $\varepsilon = 0$ で; $G = Z_2$ で d 次元 Ising 模型, $G = U(1)$, $d=2$ では、 X - Y 模型, $G = SU(2)$, $R=1$, $d=2$ では、Heisenberg 模型, などである。

iv) $\beta = \infty$, では、ゲージ場とスピン (iii)の意味での'回転子'で動径成分を持たない。)との相互作用系になる。

v) $\beta = 0$, では、 ϕ がポテンシャルの束縛を受けず $\beta_g = \infty$ では、自由スカラー場になる。

2-6

vi) $\alpha = \infty$, では、 S_2 頂の $U_{\mu}^{(R)}(x) = 1$ となって、残存する対称性の群のゲージ場のみの系になる。

以下、特にことわらない限り、スカラー場は基本表現をとるとする。

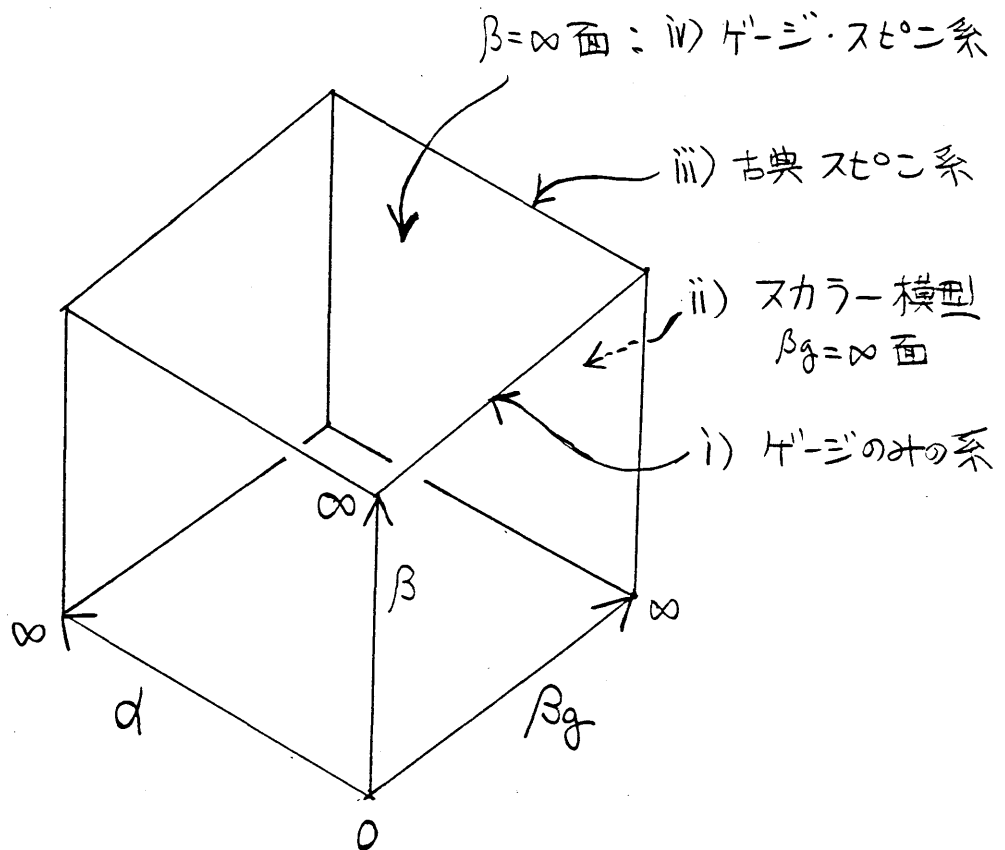


図 2.1

2-7

2-3: ゲージ・スカラー系の可能な相

この模型の相構造を調べるために、秩序パラメータを選ばねばならないが、それは、ゲージ不変な量でなければならぬ。素朴に考えつくのは、前章で調べた、Wilson ループ、 $W[C]$ と、次式で与えられる、'ゲージ不変相関関数' と呼ばれる量、 $G[P(x,y)]$ である。²⁵⁾

$$1) \quad W[C] = \left\langle \prod_{l \in C} U_l \right\rangle \quad (2.11)$$

$$2) \quad G[P(x,y)] = \left\langle \varphi(x) \prod_{l \in P} U_l \varphi(y) \right\rangle \quad (2.12)$$

P は、 x から y へ至る経路を示す。ところが、この二つの量は、パラメータのすべての領域で、同じふるまいをするため、実質的な秩序パラメータとはならない。それぞれの支配的なふるまいは、次の様になる。²⁵⁾

$$1) \quad W[C] \sim \exp(-c_1 |P(C)|) \quad (2.13)$$

$$2) \quad G[P(x,y)] \sim \exp(-c_2 |x-y|) \quad (2.14)$$

c_1, c_2 は定数で、 $|P(C)|$ は、 C の周辺の長さである。すなわち、 $W[C]$ は、常に周辺則を示し、 $G[P(x,y)]$ は、常に、質量ギャップを持つ。以上のふるまいは、直感的に次の様に説明できる。

1) の Wilson ループについてのふりまりは、前章のゲージ場のみの系で見た場合と異なり、ゲージ場の強結合領域 ($\beta_g \ll 1$) で、面積則を示すことはなく、いたる所で、周辺則になる。これは、格子上的にある静的荷電対を、1-3 で見た様に、線形ポテンシャルに抗して引き離してゆくと、動的場として入れたスカラー場の荷電対が、それより低いエネルギーで容易に対生成し、試験電荷をスクリーニングしてしまい、遠距離に引き離れた試験電荷間では、もはや、 $V(R) \sim R$ にならない、という事状を示している。(しかし、スカラー粒子が高次表現のときは、荷電は多価であるので、この対生成によっては、一価荷電の試験電荷をおおえないので、面積則は成り立つ。)

2) については、次のように考えられる。 $\beta_g \rightarrow \infty$ で、 $U_L = 1$ になった場合を考えると、 $G[P(x, y)]$ は、スカラー系の相関関数であり、 d の充分大きい領域では、連続群であれば、対称性の自発的破れを起して、質量がゼロのスポン波 (Goldstone 粒子) の相関が見えるであろう。ところが、 $\beta_g \neq \infty$ でゲージ場が存在すると、Goldstone 粒子はゲージ不変な粒子ではないので、もはやこのモードは見えない。したがって、(2.14) のふりまりをするしかない。

以上の様に、どちらの場合も、系はゲージ不変であり、真空はあくまでゲージ不変を保っていることに、寄因している。

そこで、実際は、前章 1-3 の最後に述べた、プラケ

2-9

ットエネルギー $E(P)$ (1.35) と $G[P]$ の最小単位である。
'リニクエネルギー' と呼ばれる量 $E(L)$ によって、シュミレーション等によって、大体の相図の様子が調べられている。まず、二つの量は、次式で与えられる。

$$E(P) = \langle \square \rangle \equiv \langle \text{tr} \prod_{\ell \in P} U_{\ell} \rangle \quad (2.15)$$

$$E(L) = \langle \varphi U \varphi \rangle \equiv \langle \text{tr} \varphi^{\dagger}(x) U_{\mu}(x) \varphi(x+\hat{\mu}) \rangle \quad (2.16)$$

この二つの量を基に、 $\beta = \infty$ の場合 (IV) については、種々の群、時空次元及びスカラーの表現について、モンテカルロ・シュミレーションによって、大体の相図が調べられている。^{24,32)}

$d = 4$, $U(1)$ ゲージ群で、スカラー粒子の荷電が1の系 ($U(1), d=4, q=1$) を例にとり、シュミレーションから予想される相図を基に、各相の性質を見る。ここでは、ゲージ・物質場 (スカラー場) 系において、重要な性質は、すべて現われている。

相図は大体、(図2.2)の
 様に予想される。ここ
 には、3つの相がある。

I) 閉じ込め相 ;

$$E(P) \sim 0$$

$$E(L) \sim 0$$

II) Coulomb 相 ;

$$E(P) \sim 1$$

$$E(L) \sim 0$$

III) Higgs 相 ;

$$E(P) \sim 1$$

$$E(L) \sim 1$$

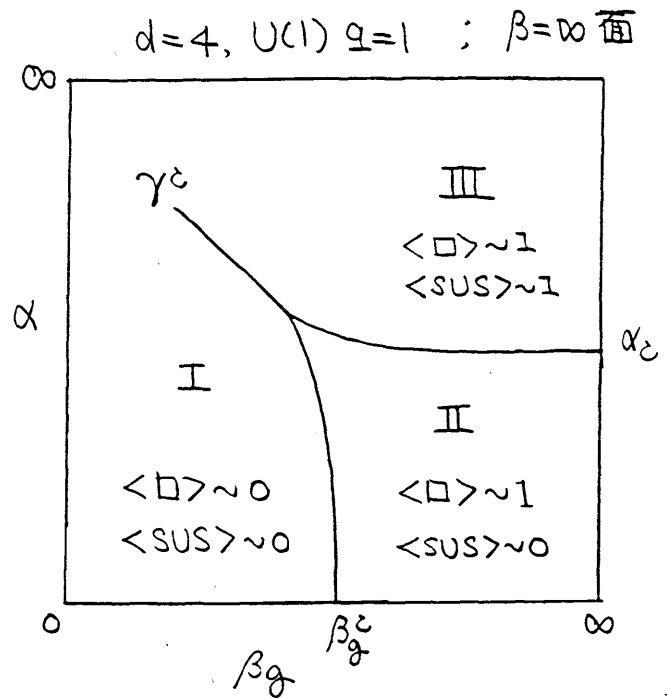


図2.2

以下各相で予想される事及び相図の特徴について述
 べる。

Iを‘閉じ込め相’、IIを‘Coulomb相’と呼ぶ理由は、第
 1章で調べたゲージ場のみの系($\alpha=0$)でのWilsonループ
 のふるまいの意味(1.31)(1.26)をそれぞれ、延用したもの
 である。実際には、先に注意した様に、Wilsonループの支
 配的なふるまいは、同じであり、特に、I,IIについて、‘閉
 じ込め’の意味で区分することはできない。しかし、 $E(P)$
 のふるまいは、 $\alpha=0$ でも $\neq 0$ でも同じであり、1-3

節で述べた様な、ゲージ場のゆらぎのふるまいが、閉じ込めの要件と考えるならば、その意味において特に相の性質は変わっていきなりだろうと思われれる。現在のところ、I, II を区別し特徴づけられる、はっきりした秩序パラメータは、様々な試みはあるものの、得られてない。

III は、物質場を導入した事によって、新しく現われた相である。ここでは、Higgs 機構が起こっていると考えられる。先に述べた様に、スカラー場の自発的対称性の破れに伴う Goldstone 粒子が、ゲージ場に吸われて、質量を持つと考えられる。連続理論でのこの様な描像は、格子模型では、II \rightarrow III への相転移を通して見られる筈である。しかし、格子ゲージ理論では、Elitzur の定理のため、自発磁化 $\langle S \rangle$ も、Goldstone 粒子も見えない。かわりに $\langle S_{\text{SU}} \rangle$ が II \rightarrow III で有限値を持って、同様の事が起っていると考えられるが、ゲージ不変な量のみを見て調べるのは、難しいと思われれる。実際、II と III の相を区別する秩序パラメータは得られてない。WCCJ も G[Γ_{SU}] も II, III で主なふるまいは、同じである。しかし、さしに次の寄与まで見れば、違いが見える可能性はある。また、ゲージ固定をして、 $\langle U_x U_x \rangle$ の相関を見れば、II と III で $\langle S \rangle \neq 0$ を通して違いを見ることが出来る。以上の点については、第4章及び6章で考える。

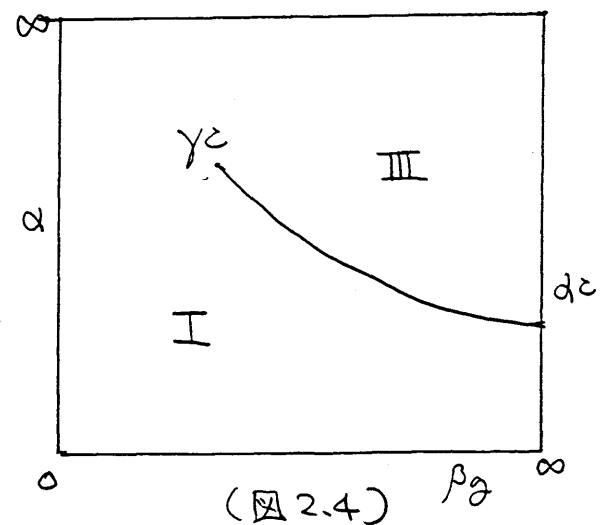
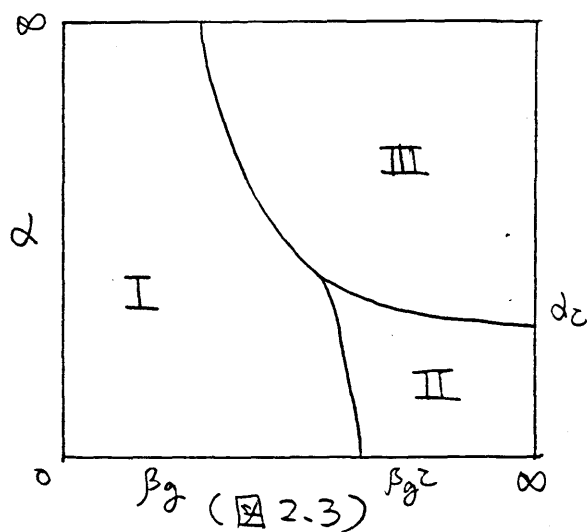
物質場（スカラー場）を導入した事によって、現われた、もう一つの特徴的な性質は、相転移曲線 (I-III)

の終点 γ_c の存在である。これは I と III の相が、 $\beta_g \sim 0$, $\alpha \sim \infty$ (すなわち、ゲージ結合子とスカラー向の結合 α の両方の強結合領域で、ゲージ、スカラーの両方のゆらぎが大きい所である。) を迂回すれば、解析的につながっていることを示す。このことは、K. Osterwalder と E. Seiler によって、厳密に示されている。これは、閉じ込めという現象と Higgs 機構という現象が、実は同一の真空の性質が別の形をとって現われるという可能性を示しており、興味を持たれる。この性質は、連続理論において、一つの理論を、閉じ込めによるものと Higgs 機構によるものとの別の見方ができるという、'相補性'³⁴⁾ の示唆を与え、種々の模型の指導原理ともなっている。³⁵⁾ 実際、Higgs 粒子(ここのスカラー粒子)によって、ゲージ対称性を完全に破った真空は、ゲージ不変な粒子しか物理状態に存在しない、という意味で、閉じ込めが実現している、と見ることもできる。(もし、このことが、クォーク場のみによって実現できれば、閉じ込めの説明になるが、それは、クォーク場とゲージ場の動力学的性質によると思われる。) この事は、格子理論で、Higgs 粒子として、基本表現をとれば、 $\alpha \rightarrow \infty$ で、残存する対称性はなく、この時以外にも、二相がつながっているという事実と符合する。Higgs 粒子が高次表現をとれば、(例えば、 $U(1)$ で荷電が 2 のスカラー粒子) 前節の VI) で見たように、 $\alpha \rightarrow \infty$ で残存する対称性があり、それによる相転移が $\alpha = \infty$ 軸で存在し、終点 γ_c は存在しない。(図 2.3)

この性質は、非可換ゲージ理論でも同様である。

この性質は、ゲージ場とスカラー場の両方のゆらぎが大きい所で現われており、ゲージ不変性が本質的に役割をする非摂動効果による現象と思われ、物質場が存在する時の興味ある性質である。これについては、第3章及び6章で再びとり上げる。

最後に、非可換ゲージ・スカラー系についての相図も示しておく。SU(2)群及びSU(3)群については、ゲージ場のみの系で転移が認められないのと同様に、IとIIの相の間の転移は見られない。(図2.4)



以上、述べた様に、ゲージ・スカラー系については、シュミレーションによって、 $\beta = \infty$ の模型iv)での相図の大体の様子は調べられてはいるものの、まだ明らかでないことが多い。本論文では、第3章以降で、平均場の方法を用いて、この模型の解析を行い、最後に第6章で、他の方法から考えられる事とも併せて議論する。

§3 格子ゲージ・スカラー模型の平均場近似

格子ゲージ・スカラー模型の平均場の
方法の応用と概観

本章以降では、第2章において設定した、ゲージ・スカラー模型を、平均場の方法に基づいて調べてゆく。この方法は、ゲージ場のみの系については、すでに使用され、成功を納めている。^{23), 27) ~ 30)}しかし、物質場を含んだ系に適用した例は少なく、 $\beta = \infty$ でのゲージ・スピニ系について、わずかな研究があるだけである。 $\beta = \infty$ も含んだ、ゲージ・スカラー系について応用された例はない。また、ゲージ系に平均場の方法を適用させる際に、ゲージ不変性に関連した基本的問題があり、これは、物質場を含んだ系では、さらに困難な状況を与える。また、物質場がゲージ場と異なった表現(多価荷電)を持つ時の平均場近似の適用法についての問題もある。

以上のような点に留意して、ゲージ・スカラー系に対するこの方法の適用を論じた後、この方法によって得た結果を基に、前章で触れた、この模型の持つ種々の性質について述べてゆく。

本章では、ゲージ・スカラー系に対する平均場近似の基本的手法と最低次の平均場理論及び結果について調べる。第4章と5章では、この模型に対する平均場

の擾動展開法と、ゲージ不変性に関する問題解決の一つの試みについて、それぞれ議論する。

本論文で行われる、ゲージ・スカラー模型の研究は、第1章で述べた格子ゲージ理論の枠組においては、まだ初段階と言わざるを得ない。第2章で見たように、有効な秩序パラメータが、今の所ないので、相の物理的性質については、ゲージ場のみの系と、スカラー模型とがらの知識からの推測に負う所が大きい。また、連続極限を考へるにしても、まず相構造及び相転移の次数等、まだ、はっきりしてない点が多い。実際、この模型は、各極限の模型についての研究はすべて進んでいない。本章以降では、これらの点の解明に向けて、平均場の手法を用いて研究を行ってゆく。

3-1: 平均場の方法の考え方と以後の概観

本節では、本章以後に進められる、ゲージ・スカラー系の平均場の方法による研究の導入として、まず、平均場近似の基本的考え方を述べ、この方法による相転移の調べ方について、説明する。そして、本章で扱う、最低次の近似を出発点とする、それ以降の研究について概観する。

はじめに、平均場の方法について要点を述べる。平均場の方法とは、格子上の一つの場を考えたとき、それと互いに相関している周りの場を、すべて力学的には相関を断ち切った‘平均場’で置き換え、そうして得た一体近似の作用を使って、その力学的場に対する期待値を計算する式を解き、無矛盾に平均場を決める、というものである。²⁸⁾

平均場で書かれた、一体近似の作用を S_0 とすると、これは、次の様に書ける。

$$S_0 = T_0[U, \varphi; \bar{u}, \bar{\varphi}] - \sum_x V(\varphi(x)) \quad (3.1)$$

ただし、

$$T_0 = \sum_l X_l U_l + \sum_x K(x) \varphi(x) \quad (3.2)$$

ここで、ポテンシャル $V(\varphi(x))$ のような、同一格子点での関数の項は、力学変数のまま残しておく。 $X_l, K(x)$ は、リンク変数、サイト変数に対する平均化された背景場であり、実際は、それらは平均場 \bar{u}_l や $\bar{\varphi}(x)$ (と

それぞれ、リンク変数 U_ℓ 、サイト変数 $\varphi(x)$ に対する平均場である。) によつて、書けている。

$$X_\ell = X_\ell(\bar{U}, \bar{\varphi}) \quad , \quad K(x) = K(x)(\bar{U}, \bar{\varphi}) \quad (3.3)$$

そこで、 S_0 を使って、無矛盾に平均場を決める以下の式を作る。

$$\bar{U}_\ell = \langle U_\ell \rangle_0 \quad , \quad \bar{\varphi}(x) = \langle \varphi(x) \rangle_0 \quad (3.4)$$

ここで、 φ を任意の物理量として、

$$\langle \varphi \rangle_0 = Z_0^{-1} \prod_\ell \int dU_\ell \prod_x \int d\varphi(x) e^{S_0} \times \varphi \quad (3.5)$$

$$Z_0 = \prod_\ell \int dU_\ell \prod_x \int d\varphi(x) e^{S_0} \quad (3.6)$$

である。通常、近似した系の並進不変性を仮定して、(3.4)式は解かれる。(したがって、この素朴な方法では、何か大局的な実体などを扱うことはできない。) また、状態和 $\mathcal{W} = \ln Z$ を使って、自由エネルギー F をつくと、今の場合、1サイト当りの自由エネルギーを F_0 とすると、 N を格子空間内の全サイトの数として、

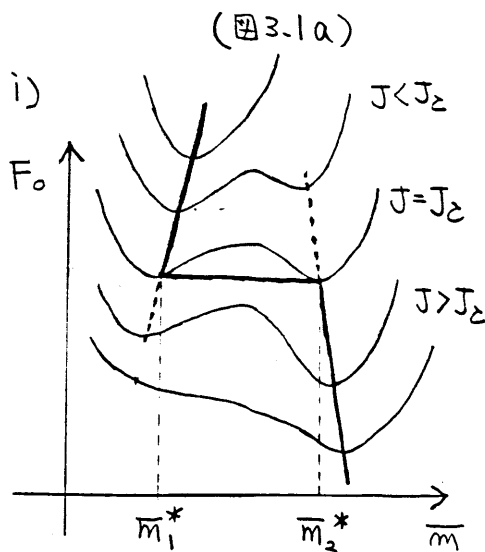
$$Z_0 = e^{-F_0 N} \quad (3.7)$$

と書ける。 $F = NF_0$ は、この近似での基底状態のエネルギーを与える。したがって、 F_0 の最小値が、真空を決める。

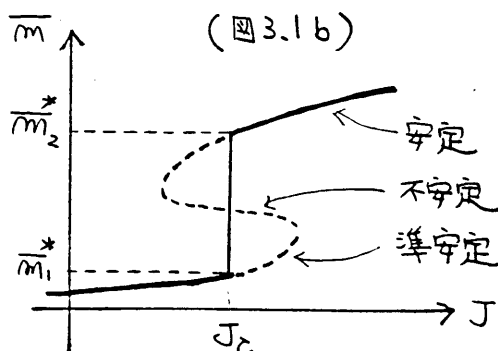
$$\frac{\partial F_0}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial F_0}{\partial \varphi} = 0 \quad (3.7)$$

(3.8) は、(3.4) と同じ式を表わす。

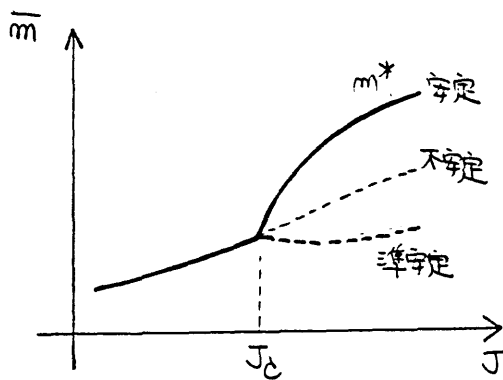
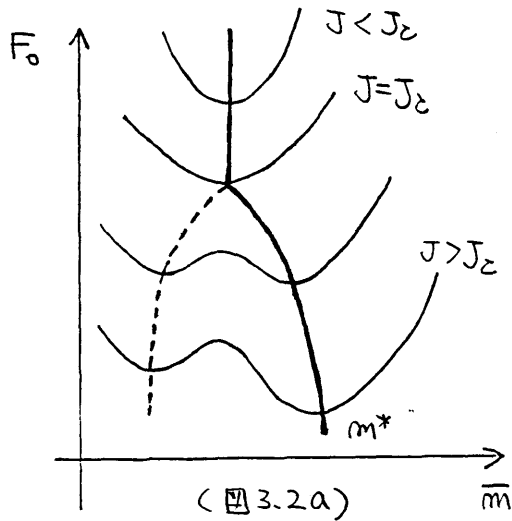
系の持つパラメータ (例えば、 α, β_2, \dots) を変化させた時の F_0 のふるまいには、大別して、次の二種類がある。今、平均場を代表して m と書き、パラメータを代表して J と書くことにする。 m^* を (3.8) の解とする。



i) の場合、 F_0 の最小値が示す真空は、 m_1^* から m_2^* へ、不連続に跳ぶ。 F_0 はこの間、解析的だが、その一回微分は J_c で発散する。そして、一方の F_0 の極小値は、準安定真空を示す。これは一次相転移の特徴的ふるまいである。(図3.1)



ii)



ii) の場合、 F_0 を最小にする \bar{m}^* は、連続的に移動する。 F_0 の一回微分は、解析的だが、二回微分は J_c で発散し、相関距離は J_c で無限大になる。これは、二次転移の特徴的ふるまいである。(図3.2)

格子理論の連続極限を求めるとき、格子間隔 a を一定にとった時、相関距離が発散することが必要であった。(第1章1-4節)したがって、今の場合の $J = J_c$ は、連続極限をとりうる裸の結合定数として望ましいものである。

この F_0 のふるまいによる転移の次数の判定は、あくまで粗い近似によるものである。この章で扱っている、平均場の0次近似では、一般に群や時空次元 ($d > 2$) に依らず、ゲージ場のみ系では一次転移であり、スカラー系では二次転移になってしまう。もちろん、実際は、一律にそう決っているわけではない。ゲージ場のみ系では、次元や群によって転移の状況は異なっていると思われる。例えば、 $U(1)$ 群の場合 $d = 4$ では二次転移、 $d = 5$ では一次転移であり、 $SU(2)$ 群、 $d = 4$

では転移はなく、 $SO(3)$ 群、 $d=4$ では一次転移がある筈の違いをシュミレーションのデータは予測している。しかし、0次近似を基にして、ゲージ場のゆらぎの効果摂動補正によってとり入れ、補正項 ΔF を加えた $F_0 + \Delta F$ については、(図3.2)の様子は、補正を受けて、次元や群の違いが現われてくる。実際に、ゲージ場のみの系については、計算が実行され、士にあげた例については、それぞれシュミレーションが予測する結果と同じ結論を得ている²⁹⁾。ゲージ・スカラー系についてのゆらぎの摂動計算については、次章(第4章)で扱う。

連続極限を考えるためには、二次転移というだけでなく、(もちろん紫外停留点であることも必要)転移点での相関距離等の物理量の発散のふるまい、すなわち、臨界指数等まで含めた、詳しい知識が必要である。このような精密な臨界現象の研究には、平均場の方法だけでは足りない。例えば、0次の平均場近似では、臨界指数は一律に決っている。平均場の摂動計算では、ゆらぎを全スケールでたしあげて計算するが、これは、臨界点で簡単に紫外発散を与えてしまう。これを回避しつつ、物理量の臨界点でのふるまいを見るには、ゆらぎを各スケールで、段階的にとり入れて、あるスケールでの平均場近似を基に次のスケールのゆらぎをとり入れる、と繰り返した平均操作をステップ・バイ・ステップに繰り返す必要がある。これは、くりこ

み群の考え方である。すなわち、段階的に平均場近似 + 摂動補正を行うことに、他ならない。例えば、真空間でのくりこみ群の操作は、原理的には、ゲージ不変のまま行なえる筈だが、実際には難しい。これは、平均場近似の方法において、すでに問題となっているようによい。

しかし、格子ゲージ模型の研究を行う上で、まず初めの段階としては、系の相構造、相転移の存在やその次数、また、臨界点において連続極限の理論として反映されるであろう相の性質などを調べる必要がある。ゲージ・スカラー系については、これらの点について、研究されるべき事が多くある。その研究方法として、平均場の方法は、有用である。

3-2節以降で、ゲージ・スカラー系に対して、平均場の方法を具体的に適用する。

3-2: ゲージ・スカラー系 Λ の平均場の方法の適用

ゲージ・スカラー系に、平均場の方法を適用する際の要点を一括しておく。³¹⁾

i) ポテンシャル $V(\varphi(x))$ は平均場作用を作る際、そのまま力学変数として残す。これにより、variational 法としての整合性を持ち、本章の結果をゼロ次近似とする、ループ補正計算を可能にする。³¹⁾

ii) スカラー系には、作用 (2.2~6) より明らかのように、 $U_m(x)$ 及び $V(x)$, $S(x)$ の3つのモードがある。平均場作用を作る際、各モード間の相関をどうとり入れるかに関して、(特に、ゲージ場とスピノ $S(x)$ のモードの相関について) 次の二つの方法が考えられる。

方法1) (MFI) 'ユニタリー・ゲージ固定' の方法;
E. Brezin と J.M. Drouffe²³⁾ は $\beta = \infty$ のゲージ・スピノ系について、作用の持つ、ゲージ変換 (2.9,10) に対する不変性を用いて、スピノのモード $S(x)$ を表面上消去して平均場をとった、次の様にする。(U(1)群を例にとるとして、tr は省く) まず (2.9,10) より $s^+ U S = (s^+ h^+) (h U h^+) (h S)$ で $h S = 1$ にゲージ固定する。この時、測度のゲージ不変性より $ds = d(h S)$, $d(h U h^+)$ であり、 $h U h^+ \equiv \tilde{U}$ と書くと、 $S_p(U) = S_p(\tilde{U})$, $S_e(\varphi, U) = S_e(\varphi, \tilde{U})$ であり、 $dU = d\tilde{U}$ である。その後 \tilde{U} について、平均

場をとる。これは、 $S^{\dagger}US$ を \tilde{U} として平均場をとること
と同義であり、 U と S のモードの相関は、とり入れら
れていると考えられる。しかし、 $\varphi = rS$ について、 r - S の
相関はない。平均場作用 S_0 は次の様になる。

$$S_0 = \sum_{\ell} X_{\ell} \tilde{U}_{\ell} + \sum_{\alpha} \{ K(\alpha) r(\alpha) - V(r(\alpha)) \} \quad (3.9)$$

方法2) (MF2) ゲージ固定しない方法;^{31,33,42)} U と $\varphi = rS$
についての平均場, \overline{U} , $\overline{\varphi} = \overline{rS}$ をとる。この場合は、 U と
 S の相関はないが、 r と S の相関がとり入れられてい
る。このとき、 S_0 は、次の様になる。

$$S_0 = \sum_{\ell} X_{\ell} U_{\ell} + \sum_{\alpha} \{ K(\alpha) \varphi(\alpha) - V(|\varphi(\alpha)|) \} \quad (3.10)$$

iii) 群の表現が異なる場が存在する時、それぞれに
ついて、別の平均場を導入する。⁴²⁾

ゲージ・スカラー系では、物質場が高次表現の時、
 $Sp(U)$ では基本表現をとっているが、 $S_0(U)$ の U_{ℓ} につ
いては、高次表現をとる。(2.5) このとき、 $U_{\ell}^{(R)}$ につ
いて、 \overline{U}_{ℓ} とは別に、 $\overline{U_{\ell}^{(R)}}$ をとる。

以下では、この i) ~ iii) の3点に留意して、3-1 で述
べた方法を用いて解析する。

3-11

3-3 : U(1) 荷電スカラーゲージ模型.

例として, U(1) 群の模型を使う。

$$S[U, \varphi] = T[U, \varphi] - \sum_x V(\varphi(x)) \quad (3.11)$$

$$T[U, \varphi] = \beta_g \sum_p S_p(U) + \alpha \sum_x S_x(U, \varphi) \quad (3.12)$$

ただし,

$$S_p(U) = \frac{1}{2} \left\{ U_{\mu\nu}(x) U_{\nu\mu}(x+\hat{\mu}) U_{\mu\nu}^+(x+\hat{\nu}) U_{\nu\mu}^+(x) + \text{h.c.} \right\} \quad (3.13)$$

$$S_x(U, \varphi) = \frac{1}{2} \left\{ \varphi^\dagger(x) U_\mu(x) \varphi(x+\hat{\mu}) + \text{h.c.} \right\} \quad (3.14)$$

$\mu=1 \sim d$

ここで,

$$U_\mu(x) = e^{i\theta_\mu(x)} \quad ; \quad (3.15)$$

$$\varphi(x) = r(x) e^{i\theta(x)} \quad ; \quad (3.16)$$

$$\theta : [-\pi, \pi], \quad r = [0, \infty)$$

また,

$$V(\varphi(x)) = \alpha d |\varphi(x)|^2 + \beta (|\varphi(x)|^2 - 1)^2 + \varepsilon |\varphi(x)|^2 \quad (3.17)$$

3-3-1 : U(1) スカラー模型

まず, $\beta_g = \infty$ の極限である, スカラー模型に, ついて調べる。作用は, (3.11)(3.14)より

$$S[\varphi] = \alpha \sum_{x,\mu} \operatorname{Re} \varphi(x)^\dagger \varphi(x) - \sum_x T(\varphi(x)) \quad (3.18)$$

平均場作用は、MF2より（MF1は、スカラーモデルでは意味がない）
 $S'_0 (\equiv S_0/N)$ ； N は全格子空間のサイトの数として、

$$S'_0 = K\varphi - T(\varphi) \quad (3.19)$$

平均背景場 K は、次の様になる。

$$K = 2dd\bar{\varphi} \quad (3.20)$$

$\bar{\varphi}$ は、次の条件のもとに決めらる。

$$\bar{\varphi} = \langle \varphi \rangle.$$

ここで、

$$\langle \varphi \rangle = Z'^{-1} \int d\varphi e^{S'_0} \varphi \quad (3.21)$$

$$Z' = \int d\varphi e^{S'_0}$$

$\bar{\varphi}$ は、実数にとれる。この模型は、 $\beta = \infty$ で ($d > 3$) のスピン模型と同様に、 $\bar{\varphi} = 0$ において、二次転移の特徴である次式、

$$\left. \frac{d^2}{d\bar{\varphi}^2} F_0(\bar{\varphi}) \right|_{\bar{\varphi}=0} = 0 \quad (3.22)$$

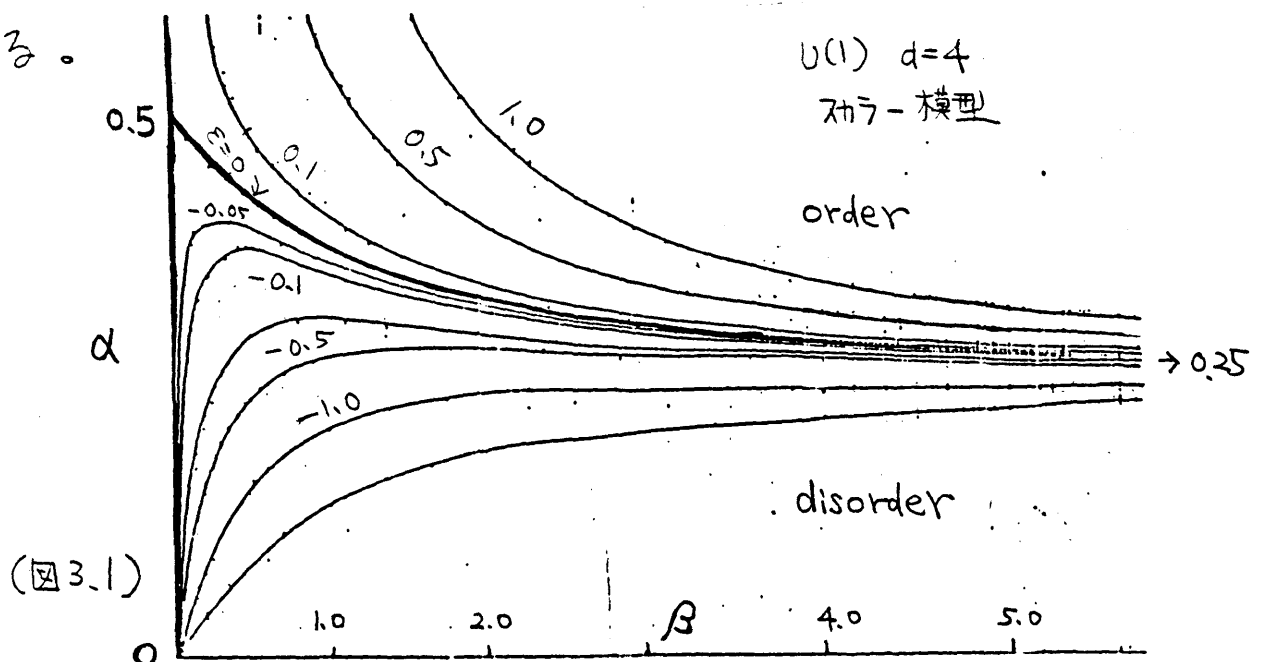
を示し、これは、次式と同等である。

$$\left. \frac{\partial \langle \varphi \rangle_0}{\partial \bar{\varphi}} \right|_{\bar{\varphi}=0} = 0 \quad (3.23)$$

この(3.23)式が、二次の相転移点を与える。(3.23)は実際は、 (α, β) パラメータ平面で、二次の相転移曲線(次式)を与える。

$$1 = \frac{\alpha d}{\sqrt{\beta}} \left\{ -\chi + \frac{e^{-\chi^2}}{\sqrt{\pi} [1 - \Phi(\chi)]} \right\} \quad (3.24)$$

ここで、 $\chi = (\varepsilon + \alpha d - 2\beta) / 2\sqrt{\beta}$ であり、 $\Phi(x)$ は、Gaussの誤差関数である。(3.15)の大体の形は、(図3.1)の様になる。



$\beta \rightarrow \infty$ と $\beta \rightarrow 0$ のそれぞれの場合の α は、

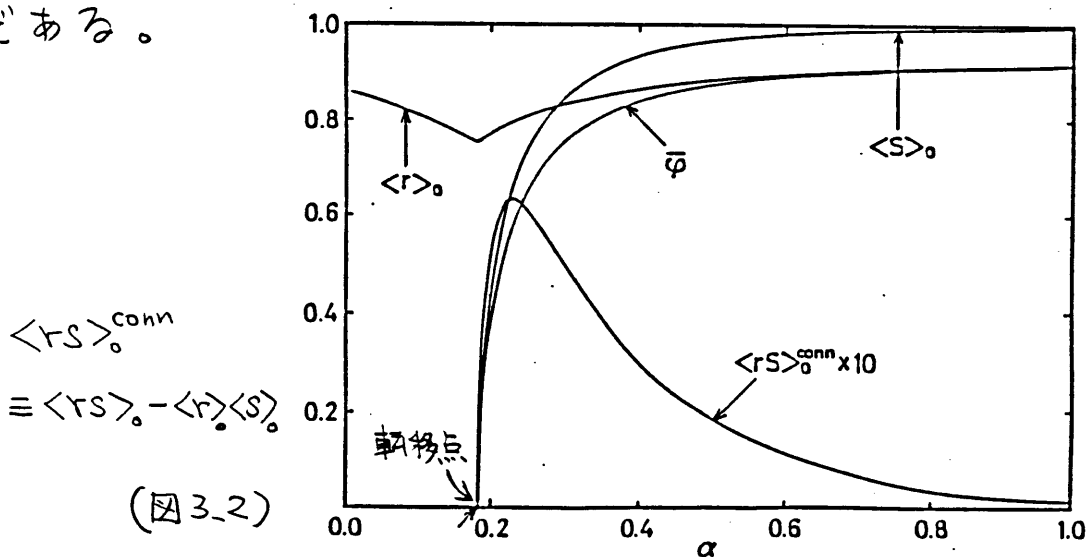
$$\beta \rightarrow \infty : \alpha = 1/d + 1/2d\beta + o(1/\beta^2) \quad (3.25)$$

$$\beta \rightarrow 0 : \alpha \approx \frac{\varepsilon}{d} \frac{1}{(\beta - \varepsilon/2)} + \frac{2}{d} + \frac{1}{d}(\beta - \frac{\varepsilon}{2}) + o(\beta^2) \quad (3.26)$$

ただし、 $\varepsilon > 0$ のとき

となっており、 $\beta = \infty$ では、 d 次元 $U(1)$ spin 模型の転移点、 $d = 1/d$ を与える。 $\varepsilon \propto m^2$ (m は裸の質量)であり、 $\varepsilon = 0$ の時、 α 軸は、(3.24)を恒等的に満たし、 $m=0$ の場合の特殊性を示している。これは、 $m=0$ で、 $\varphi \rightarrow \varphi + \text{定数}$ の対称性を模型が持つことの現われである。

MF2の方法によつて、 $\overline{rS} = \overline{\varphi}$ とした事により、 r と S の相関がとり入れられていることを見たのが、(図3.2)である。



(図3.2)

\overline{r} と \overline{S} の二つのモードを別々に平均場として、とつても、結果は、定性的に変わらな。動径モードは、秩序パラメータではなく、転移は、あくまで、ス

ピンモード S によるものである。 $\beta \sim 1$ では、 γ は小さくなり、 (< 1)、結合定数 d を実質的に弱くする効果を与え、系の対称性が保たれやすくなり、結果として、非秩序相が拓がる。動径成分は、この様な副次的な役割をする。

以下では、 $\varepsilon = 0$ として、裸の質量 $m = 0$ のスカラー粒子について、考える。第4章、5章についても同様にする。次に、ゲージ・スカラー系について調べる。

3-3-2: 'ユニタリ - ゲージ固定'法 (MF1)

ゲージ・スカラー系について、(MF1) によって調べる。これは、上に見た(MF2)の方法によるスカラーモデルの結果とは、直接につながらないうが、(四3.2)の結果より、 $\tilde{U} = S^\dagger U S$ について、 $\overline{\tilde{U}} = \overline{S^\dagger U S}$ と平均場をとる(MF1)の方法が U - S の相関をとり入れていることを示唆する。もちろん、 $S_p(U)$ が $S_p(\tilde{U})$ でかかれた事は、ゲージ不変性によるもので、その効果が見えると考えられる。平均場作用 ($S'_0 \equiv S_0/N$) は、(3.9)より

$$S'_0 = XU + Kr - V(r) \quad (3.27)$$

と書いて、背景場 K 、 X は、それぞれ、

$$X = \alpha F^2 + 2(d-1)\beta g \bar{U}^3 \quad (3.28.a)$$

3-16

$$K = 2\alpha d \bar{r} \bar{u} \quad (3.28.b)$$

と書ける。平均場を決める条件式は、

$$\bar{u} = \langle u \rangle, \quad \bar{r} = \langle r \rangle. \quad (3.29.a, b)$$

ここで、

$$\langle r \rangle = Z^{-1} \int du \int_0^\infty dr e^{\beta_0'} \quad (3.30)$$

$$Z = \int du \int_0^\infty dr e^{\beta_0'}$$

である。(実際は、 \bar{u} は実数に帰着できるので、 $\text{Re} \bar{u} \equiv \bar{u}$ として、記号はそのまま使う。) / サイト当たりの自由エネルギー $-F_0' (\equiv F_0/N)$ は、次の様になる。

$$\begin{aligned} F_0'(\bar{u}, \bar{r}) = & d\Gamma^u(\bar{u}) + \Gamma^r(\bar{r}) \\ & - \frac{d(d-1)}{2} \beta_0' \bar{u}^4 - \alpha d \bar{r}^2 \bar{u} \end{aligned} \quad (3.31)$$

ここで、エントロピー項 Γ^u , Γ^r は、次式で決まる。

$$\Gamma^u(\bar{u}) = X(\bar{u})\bar{u} - W_0(X(\bar{u})) \quad (3.32.a)$$

$$W_0(X) = \ln I_0(X) \quad (3.32.b)$$

3-17

$$\bar{u} = \partial W_0(x) / \partial x \quad (3.32.c)$$

ここで、 $I_0(x)$ は、変形 Bessel 関数である。また、

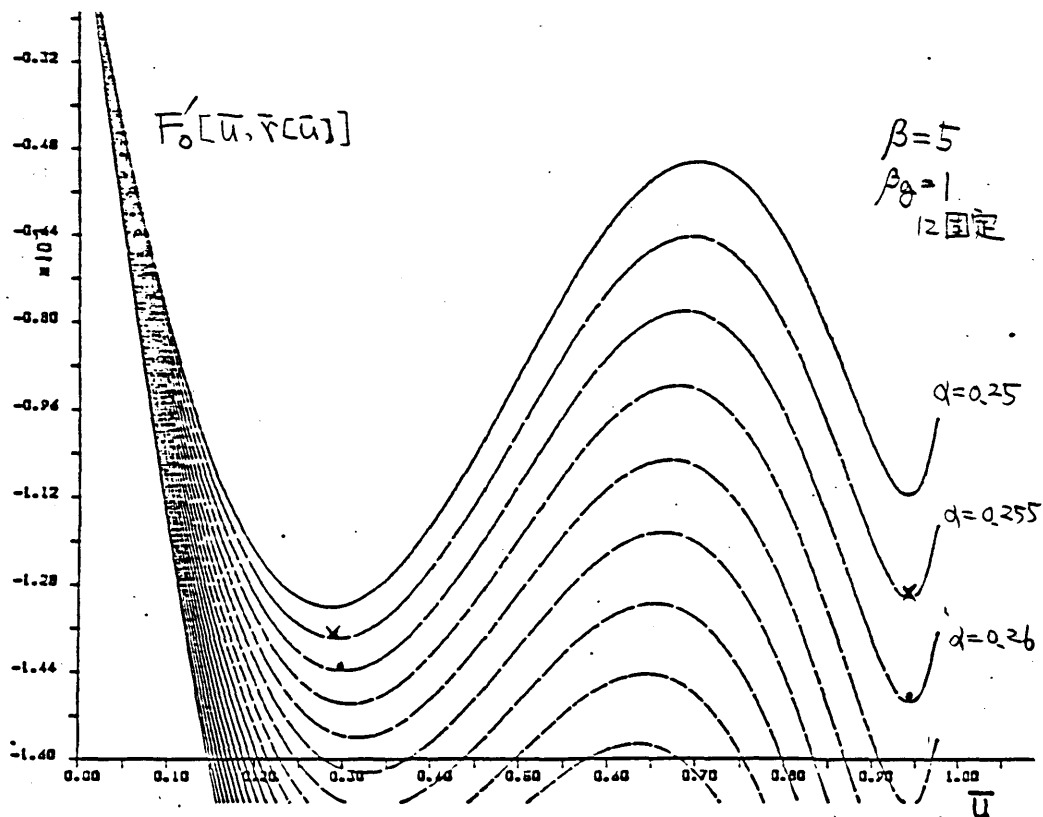
$$\Gamma^r(\bar{r}) = K(\bar{r})\bar{r} - W_r(K(r)) \quad (3.33.a)$$

$$W_r(K) = \ln \int_0^\infty dr \exp[Kr - V(r)] \quad (3.33.b)$$

$$\bar{r} = \partial W_r(K) / \partial K \quad (3.33.c)$$

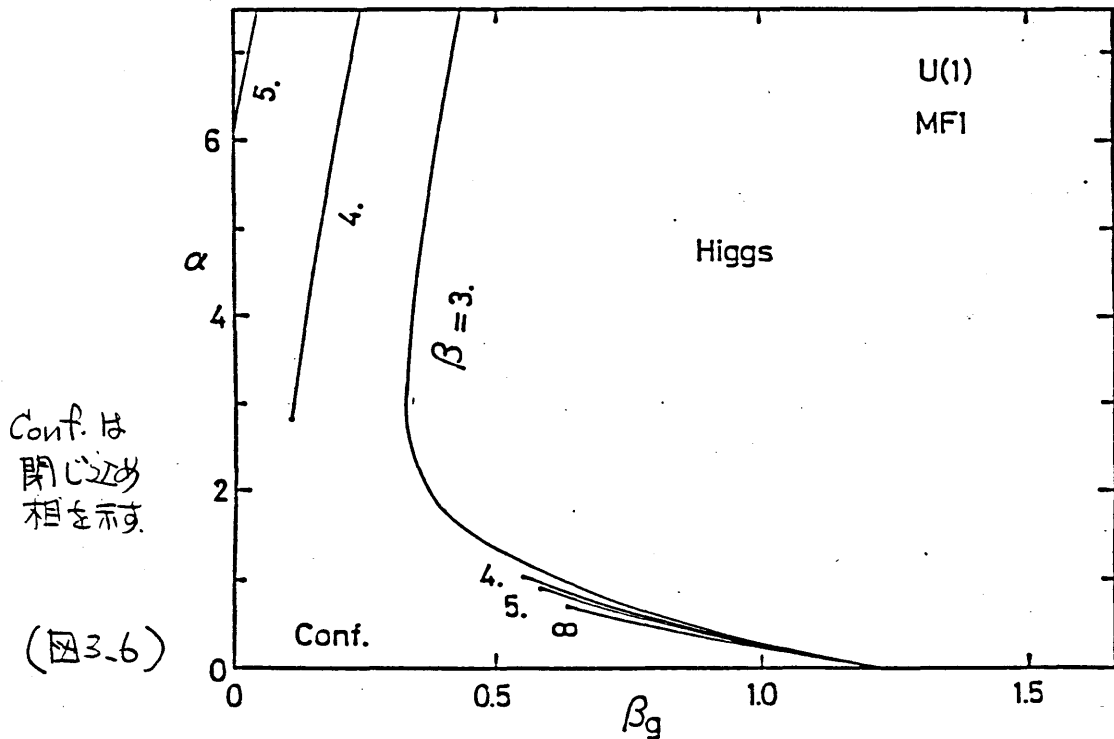
となる。

F_0' の大体の様子は、(図 3.5) に示す。



(図 3.5)

(図3.5) は、3-1節で述べた(図3.1a)の形であり、一次の相転移があることを示している。ところが、 β_g がある β_g^* より小さくなると、 F_0 の極値は、一つしかなくなり、 ρ ラキータ α を変化させても、極値を示す \bar{U}^* が $\infty \rightarrow \infty$ と動いてゆくだけであり、相転移は起きない。したがって、 β を固定した時、 (α, β_g) 平面での一次転移曲線は、終点 $Y^c(\alpha^*, \beta^*)$ を持つことがわかる。得られた相図を、(図3.6)に示す。



転移は、 \bar{U} についてのみ生じ、 \bar{V} は、前と同様、副次的である。 \bar{U} は実際は、 $\bar{U} = S^\dagger U S$ の平均場であり、(図3.6)の転移は、 U と S とが相乗的に寄与して生じる相転移と思われる。特に、 β_g が小さく、 α が大きい領域(相図の左側 $\alpha > \sim 0.5$)では、ゲージ場 U のゆらぎも、スピンモードのゆらぎも大きいので、この周りでは、 \bar{U} を平均場としたMFUの結果は、良い近似であると思われる。相図の結果で大事な点は、 β が大きい所での相転移

曲線の終点の存在である。これは、閉じ込め相と Higgs 相が解析的につながっている事を示す。これは、 $\beta = \infty$ での モンテ・カルロ・シミュレーションの結果とも一致する。しかし、 β が充分小さいと、二相は、完全に分離される。これは、動径モードの存在による新しい様相である。

β_g が大きい領域では、ゲージ場のゆらぎは小さく、 $U \sim 1$ にほとんど固定されており、この領域での相転移を支配するのは、スカラー ϕ のスピノモード S であると思われる。したがって、この領域では、スピノのモードが、独立な平均場 $\overline{\phi} = \overline{\sqrt{S}}$ として、とられる (MF2) の方法が有効であると思われる。次に、それを見る。

3-3-3: ゲージ固定しない方法 (MF2)

この方法では、 $U, \overline{\phi}$ が独立な平均場として導入される。U-S の相関はない。しかし、3-3-1 で見たのと同様に、 \sqrt{S} の相関は、とり入れられている。(3.10) より、平均場作用は、

$$S'_0 = XU + K\overline{\phi} - V(|\phi|) \quad (3.34)$$

であり、背景場 X, K は、それぞれ、

$$X = \alpha \overline{\phi}^2 + 2(d-1)\beta_g \overline{U}^3 \quad (3.35a)$$

$$K = 2\alpha d \overline{\phi} \overline{U} \quad (3.35b)$$

とかける。平均場に対する条件式は、

$$\bar{u} = \langle U \rangle, \quad \bar{\varphi} = \langle \varphi \rangle. \quad (3.36. a, b)$$

ここで、 $\langle \rangle$ は、これまでと同様 \mathcal{H}_0 を作用とする分配関数による平均を意味する。また、 \bar{u} , $\bar{\varphi}$ は、実数にとることができる。自由エネルギーの表式は、

$$\begin{aligned} F_0(\bar{u}, \bar{\varphi}) &= d\Gamma^u(\bar{u}) + \Gamma^\varphi(\bar{\varphi}) \\ &\quad - \frac{d(d-1)}{2} \beta_g \bar{u}^4 - d d \bar{u} \bar{\varphi}^2 \end{aligned} \quad (3.37)$$

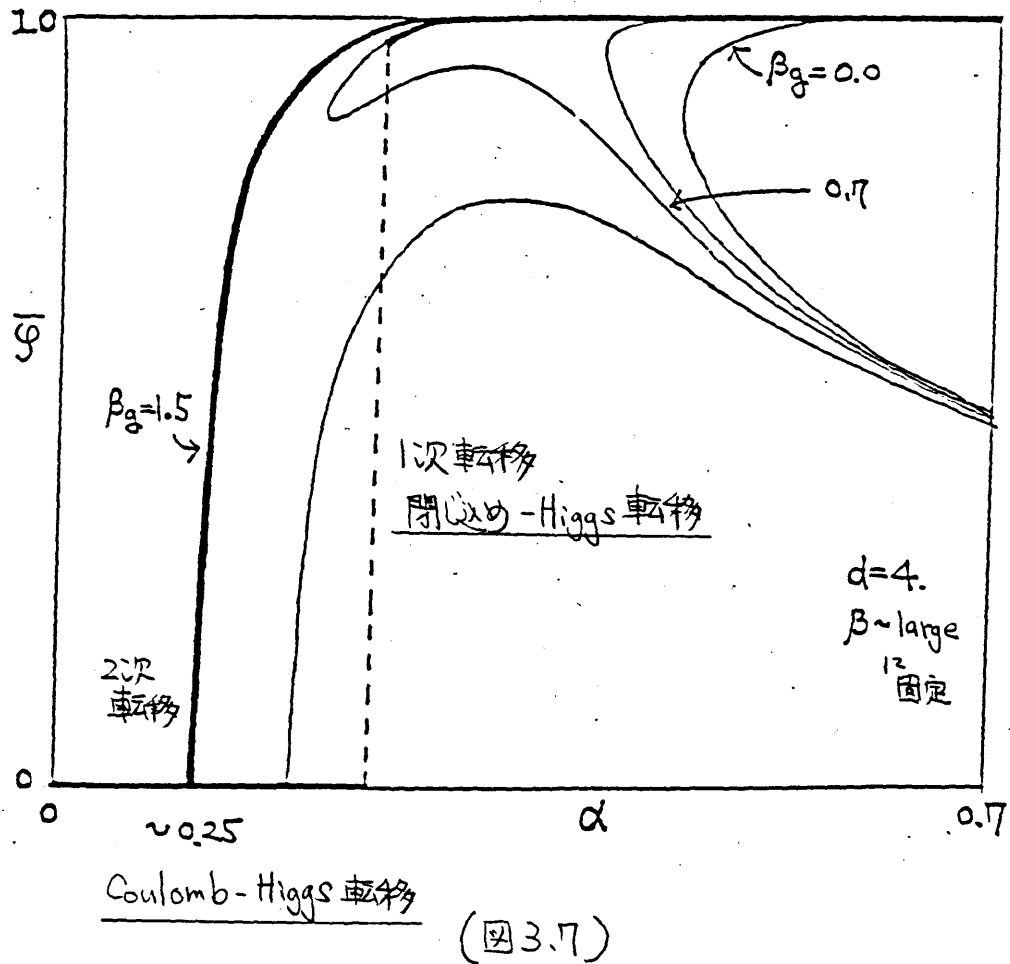
である。 $\Gamma^u(\bar{u})$ は (3.32) と同じであり、 $\Gamma^\varphi(\bar{\varphi})$ は、次式で与えられる。

$$\Gamma^\varphi(\bar{\varphi}) = K(\bar{\varphi}) \bar{\varphi} - W_\varphi(K(\bar{\varphi})) \quad (3.38 a)$$

$$W_\varphi(K) = \ln \int_0^\infty dr \cdot r \cdot I_0(Kr) e^{-V(r)} \quad (3.38 b)$$

$$\bar{\varphi} = \partial W_\varphi(K) / \partial K \quad (3.38 c)$$

相転移の状況を見るために、以上の式を $\bar{\varphi}$ について、解いた平均場に対する条件式 (3.36) の解曲線を四示すると (図 3.7) の様になる。これは、 F_0 の極小(大)値を与える $\bar{\varphi}^*$ を示している。



まず $\bar{u} = 0$ は自明な解になっていることに注意する。
 β_g が小さい領域では、解曲線は、3-1で議論した、
 (図3.1b)の型であり、 α_c で一次相転移を示している。 β_g
 が大きくなると曲線が α 軸の方に伸びてゆき、 β_g が充
 分大きいと、 α 軸に到達する。これは、(図3.2b)の型で
 あり、 α_c での二次転移を示している。これらの相転移
 は、 $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$ 及び $\langle U \rangle$ のふるまいから、 β_g が小さい領域では
 、閉じ込め相とHiggs相の一次転移を示し、 β_g が大きい
 領域では、Coulomb相とHiggs相の間の二次転移を示して
 いると考えられる。より正確には、 F_0 を調べなければ

ならない。 $\alpha < \alpha^c (= \frac{1}{2})$ の領域では、 β_g, β によらず、 $\langle \sigma \rangle = 0$ が成り立っており、この領域では、本質的にゲージ場のみの系と同等である。したがって、この領域では、团じ込め相と Coulomb 相の間の転移が、ゲージ場のみの系の示す転移点 $\beta_g^c (\approx 1.22, d=4)$ で起こる。

注意すべきは、 β_g がいくら小さくても、一次転移が存在することである。これは、 β に依らないことである。因まり、 $\beta_g = 0$ でも α が充分大きければ、必ず一次転移が起こる事は容易に想像される。これは、 U と S の相関を切っている近似の悪さであると思われぬ。この領域では、 U と S の両方のゆらぎが大きく、両者の相関が本質的に重要と思われぬからである。

二次転移曲線は、3-3-1 のスカラー-模型の場合と同様に求める事ができる。結果は、次式で与えられる。

$$1 = \frac{\alpha d}{\sqrt{\beta}} \left\{ -\chi + \frac{e^{-\chi^2}}{\sqrt{\pi} [1 - \Phi(\chi)]} \right\} \bar{U}_*(\beta_g) \quad (3.39)$$

ここで、 $\chi \equiv (\alpha d - 2\beta) / 2\sqrt{\beta}$ であり、 $\bar{U}_*(\beta_g)$ は、次式の解として与えられる。

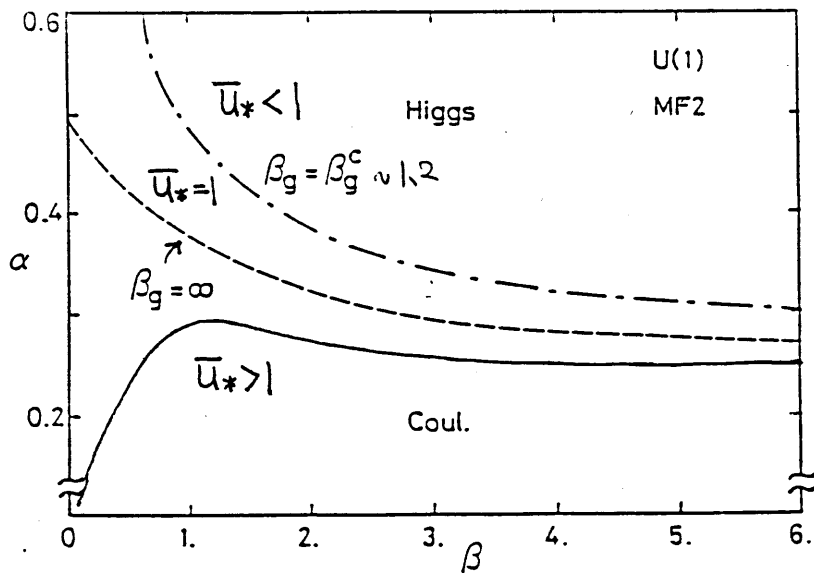
$$\bar{U} = I_1(2(d-1)\beta_g \bar{U}^3) / I_0(2(d-1)\beta_g \bar{U}^3) \quad (3.40)$$

I_0, I_1 は変形 Bessel 関数である。(3.39) は、 (α, β_g, β) をパラメータ空間とする二次転移曲面を与える。 $\beta_g = \infty$

では、 $\bar{U}_*(\infty) = 1$ であり、(3.24) のスカラーモデルの転移曲線に一致する。 $\beta \sim \infty$ では、(3.39) は、次の様に書ける。

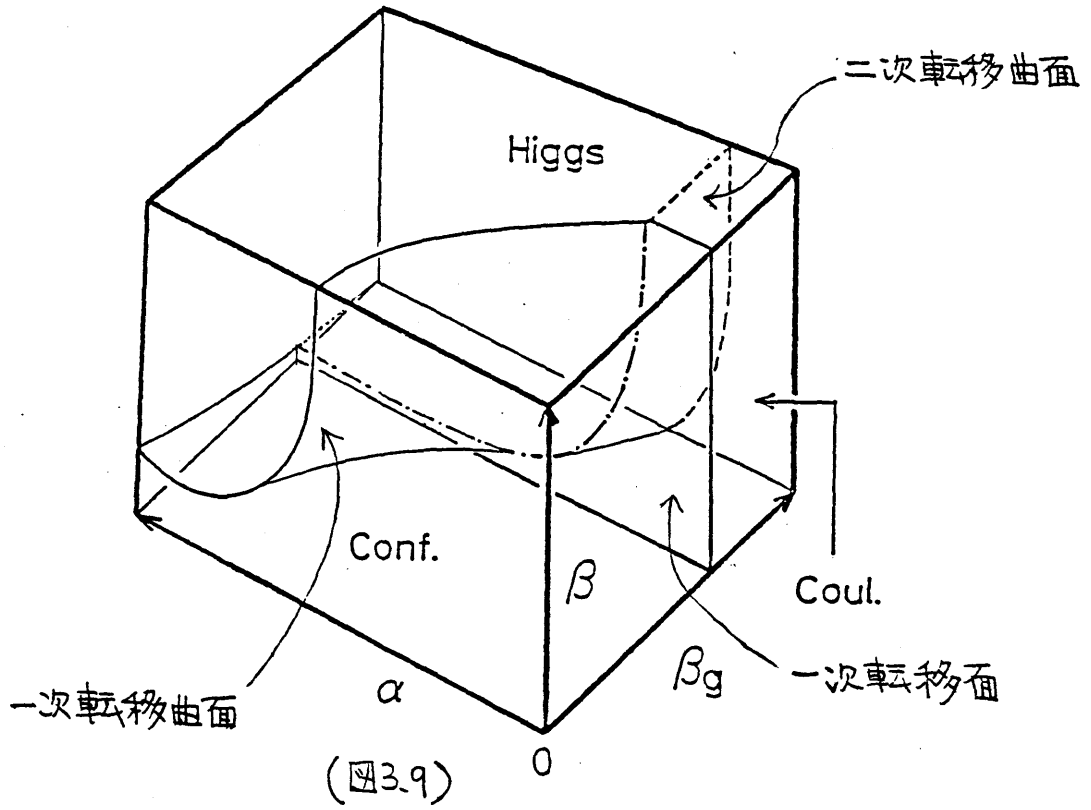
$$d = \frac{\bar{U}_*(\beta_g)}{d} + \frac{\bar{U}_*(\beta_g)^2}{2d\beta} + o(1/\beta^2) \quad (3.41)$$

(3.39) の大体の形は、(図 3.8) の様になる。



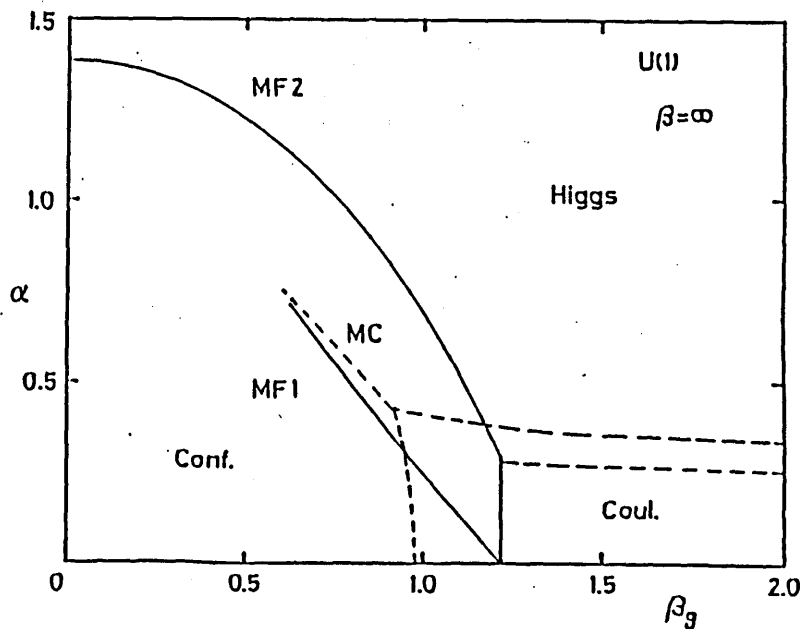
$\bar{U}_* = 1$ ($\beta_g = \infty$) すなわち、質量ゼロ ($\varepsilon = 0$) の転移曲線 (図 3.1, $\varepsilon = 0$) と同じ曲線は、 β - β_g 場 \bar{U}_* に対しても、(図 3.8) のような特異性を示す。(物理的に意味はないが ($\bar{U}_* > 1$) の場合と比較のため描いた。)

(MF2) によって得られた結果の全体を (α, β_g, β) の 110 ラマ - タ空間の相図としてまとめたものが、(図 3.9) である。



3-3-4: まとめと問題点

(MF1), (MF2) によって得られた結果を以下にまとめる。まず、 $\beta = \infty$ (軌径成分固定) で調べられている、モンテカルロ・シミュレーション³²⁾の結果との比較のため、 $\beta = \infty$ での相図を見る。(図3.10)



Conf.: 閉心相
 Coul.: Coulomb 相
 MC: モンテカルロシミュレーションの結果
 実線は一次転移, 破線は二次転移を示す

(図3.10)からわかる様に、終点の存在以外には、(MF2)が大体の相図をよく示していると思われる。これは、 $\alpha < \alpha_c$ での転移は、実質的には、ゲージ場が関与するもので、 $\beta_g > \beta_g^c$ での転移は、スピノモードによるものであるからであり、両者の相関は小さなゆらぎ程度であって、両者の相関を切った平均場の方法で充分良い近似だからである。 $\langle U \rangle$ と $\langle S \rangle$ のふるまいが、それを示している。

$$\text{閉じ込め相} : \langle U \rangle \sim 0, \langle S \rangle \sim 0$$

$$\text{Coulomb 相} : \langle U \rangle \sim 1, \langle S \rangle \sim 0 \quad (3.42)$$

$$\text{Higgs 相} : \langle U \rangle \sim 1, \langle S \rangle \sim 1$$

これは、モンテカルロ・シミュレーションによって、ゲージ不変な量(2-3節(2.15,16))で調べた、ゆらぎのふるまいと同等の事を示している。

$$\text{閉じ込め相} : \langle \square \rangle \sim 0, \langle \text{SUS} \rangle \sim 0$$

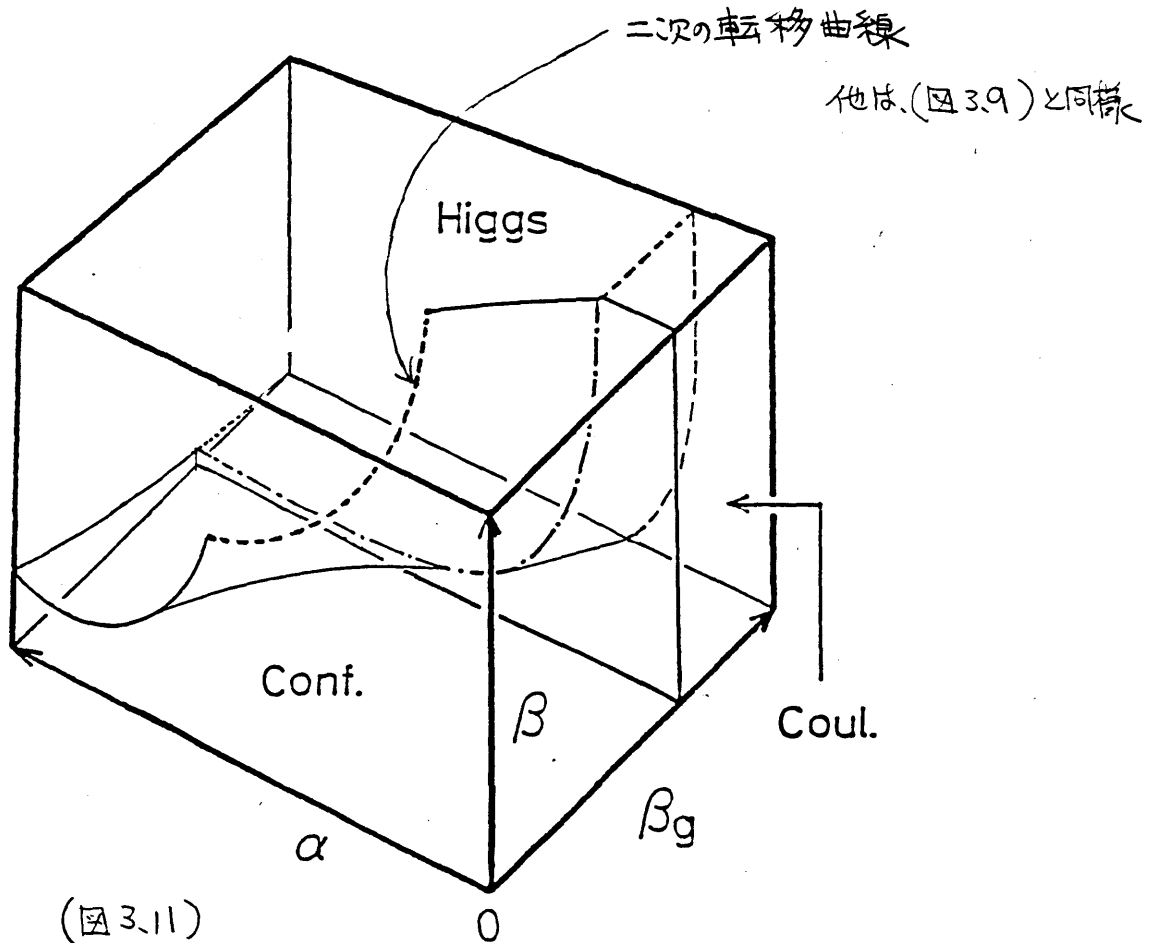
$$\text{Coulomb 相} : \langle \square \rangle \sim 1, \langle \text{SUS} \rangle \sim 0 \quad (3.43)$$

$$\text{Higgs 相} : \langle \square \rangle \sim 1, \langle \text{SUS} \rangle \sim 1$$

これは、平均場近似においては、 $\langle \square \rangle = \langle U \rangle^4$, $\langle \text{SUS} \rangle = \langle U \rangle \langle S \rangle^2$ となることよりうなずける。

しかし、 $(\beta_g < \beta_g^c, \alpha > \alpha_c)$ の領域では、U, S両方が転移に関与していると思われる。単純には、 $\beta_g > \beta_g^c$ でのスピノSの転移が、 $\beta_g > \beta_g^c$ では、ゲージ場のゆらぎの効果で

弱められ、消えてしまおうと考えられる。(MF2)では、 U と S の相関はないので、このような効果は見えず、 $\beta_g = 0$ でも転移が認められる。(MF1)では、この点が改善されている。終点 γ_c の存在は、ゲージ場とスピノモードとの大きなゆらぎによるもので、ゲージ不変性の非摂動的効果の現われであると思われる。(MF1)は、それを簡単な形でとり入れておくと考えられる。しかし、Coulomb相の存在を示し得ない。この様に(MF1)と(MF2)は、相補的であり、結合定数の領域に応じて、両者の結果を総合したものが、正しい相図を予言すると思われる。 $\beta \neq \infty$ について、(図3.6)と(図3.9)より予想される相図を画いたのが(図3.11)である。



これ以後、モンテカルロ・シミュレーション^{26) 52,53)}によって、 $\beta \neq \infty$ でのゲージ・スカラー模型の研究が進んだ。その結果が示す相構造と比較すると、定性的によく一致している。 β が充分小さい所では、閉じ込め相と Higgs 相とが分断される。これは、動径モードの効果であるが、転移の内容は、定かでない。この領域では、ゲージ場とスカラー場のゆらぎが大きく、 $\beta_g > \beta_g^c$ もしくは、 $\alpha < \alpha_c$ 領域のように単純ではない。もちろん、 β が充分大きければ、両相は解析的につながっている。この現象は、連続理論とどう直接関係するかは、まだわからなすが、ゲージ場とスカラー場が強結合する領域での性質を考える上で重要な情報を与えると思われる。

平均場近似におけるゲージ不変性について、以下に議論する。はじめに述べた様に、格子ゲージ理論では、ゲージ不変性を常に保って設定されているので、ゲージ不変量以外の期待値はゼロである。平均場近似の方法は明らかに、これに矛盾する。E. Brézin & J.M. Drouffe²²⁾は、ゲージ場のみの系について、平均場 \bar{U} に対して、ゲージ群 G の要素 V_i をサイト上に定義し、

$$\bar{U}_{ij} \rightarrow V_i \bar{U}_{ij} V_j^\dagger \quad (3.44)$$

(3.45)の変換に対しては、平均場近似で求めた、自由エネルギー $-F_0$ は不変であり、これによって得られた真空は、(3.45)に対して同一の真空を与えることを指摘した。したが

って、 \bar{U} でかかれた物理量について、 V_i によるゲージ軌道についての平均をとれば、ゲージ不変量のみ期待値が非ゼロで残るので、それは、平均場近似でのゲージ不変性の回復であるとした。ゲージ・スカラー系では、(3.45)に習って、

$$\bar{S}_i \rightarrow V_i^\dagger \bar{S}_i \quad (3.45)$$

の変換を併せて考えると、同様の事がいえる。これは、いわば「 ϕ -数に対するゲージ不変性」であり、 ϕ -数 U_{ij} に対する、もともとのゲージ不変性とは、別物である。確かに、 $\langle \phi \rangle$, $\langle S U S \rangle$ は (3.44, 45) について同一の値 \bar{U}^\dagger , $\bar{U} S^2$ を与える。しかし、この議論が成り立つのは、(MF2) についてであり、(MF1) については、成り立たない。(MF1) では、 $(U, S) \rightarrow (\tilde{U}, 1)$ と ϕ -数についてゲージ固定した後平均場をとるからである。実際 (MF1) と (MF2) は異なる相図を与え、しかも、相補的である。平均場の方法がゲージ不変性を回復するとすれば、必然的に、(MF1) と (MF2) の両方を長所を合せた一つの相図を与える筈である。(MF2) では、 U と S の相関が切られていたが、ゆがみの摂動補正で両者は相関してくる。しかし、摂動補正で終点 γ_c が現われることは望めない。(MF1) については、次の様に考えられる。ユニタリ - ゲージをとった時、系は $\tilde{U} = h U h^\dagger$ でかかれており、 $\beta_0 \rightarrow \infty$ では、 $\tilde{U}_{ij} \rightarrow h_i h_j^\dagger$ のゲージ変換部分のみの系になり、この自由度がスピノモードの示す転移を再現する筈である。 \tilde{U} を平均場にとった時 $\bar{U}_{ij} = \bar{U}$ の仮定がこれをこ

3-29

わしている。Coulomb相は、この ϕ に対するゲージ変換軌道に対する自由度をとり入れれば、回復できると考えられる。この点については、第5章で調べられる。

3-4: $U(1)$ 荷電 2, ゲージ・スカラー模型

スカラー場が多価電荷を持つ場合 (基本表現より高次表現の場合、 $SU(2)$ 模型でも以下の議論は同様である。)、第 2 章で見た様に、 $\alpha = \infty$ で、2-2 節 vi) の模型になり、 $\alpha = \infty$ で、この模型の転移が存在する可能性がある。モンテ・カルロシミュレーションによる相図 (図 2.3) も、この事を示している。この模型の場合、ゲージ・スカラー系での特徴である、閉じ込め相とクォーク相とが解析的につながっているという、前節 3-3 で調べた場合と、異なる性質を与えらる点で興味がある。この節では、この例として、 $U(1)$ 群で、スカラーが荷電 2 を持った模型について、調べる。また、この場合、3-2 節で述べた iii) の点に留意する。

作用 (2.2) において、相互作用項 (2.5) は、次の様になる。

$$S_2[\varphi, U] = \text{Re} [\varphi^\dagger(x) U_{11}^2(x) \varphi(x + \hat{1})] \quad (3.46)$$

終点のふるまいを調べたいので、(MFI) を用いると、平均場作用 (1サイト当り) は、次の様に書ける。

$$S_0' = XU + X'U^2 + Kr - T(\nu) \quad (3.47)$$

背景場 X, X', K は、 $\pm 4 \leq \nu \leq 4$ 、

3-31

$$X = 2(d-1)\beta_g \bar{u}^3 \quad (3.48.a)$$

$$X' = \alpha \bar{r}^2 \quad (3.48.b)$$

$$K = 2\alpha d \bar{r} \bar{V} \quad (3.48.c)$$

となる。ここで、 \bar{V} は、 $U_{\mu}^2(x)$ に対する平均場であり、 \bar{u} とは独立に導入する。平均場に対する条件は、

$$\bar{u} = \langle U \rangle, \quad \bar{V} = \langle U^2 \rangle. \quad (3.49)$$

$$\bar{r} = \langle r \rangle.$$

となる。 $\langle \rangle$ は、(3.30)と同様であり、自由エネルギーは、

$$F_0' = d\Gamma^{UV}(\bar{u}, \bar{V}) + P^r(\bar{r}) - \frac{d(d-1)}{2} \beta_g \bar{u}^4 - \alpha d \bar{r}^2 \bar{V} \quad (3.50)$$

ここで、 Γ^{UV} は、以下の式できまり、 P^r は(3.33)と同一である。

$$\Gamma^{UV}(\bar{u}, \bar{V}) = X\bar{u} + X'\bar{V} - W_{UV}(X, X') \quad (3.51.a)$$

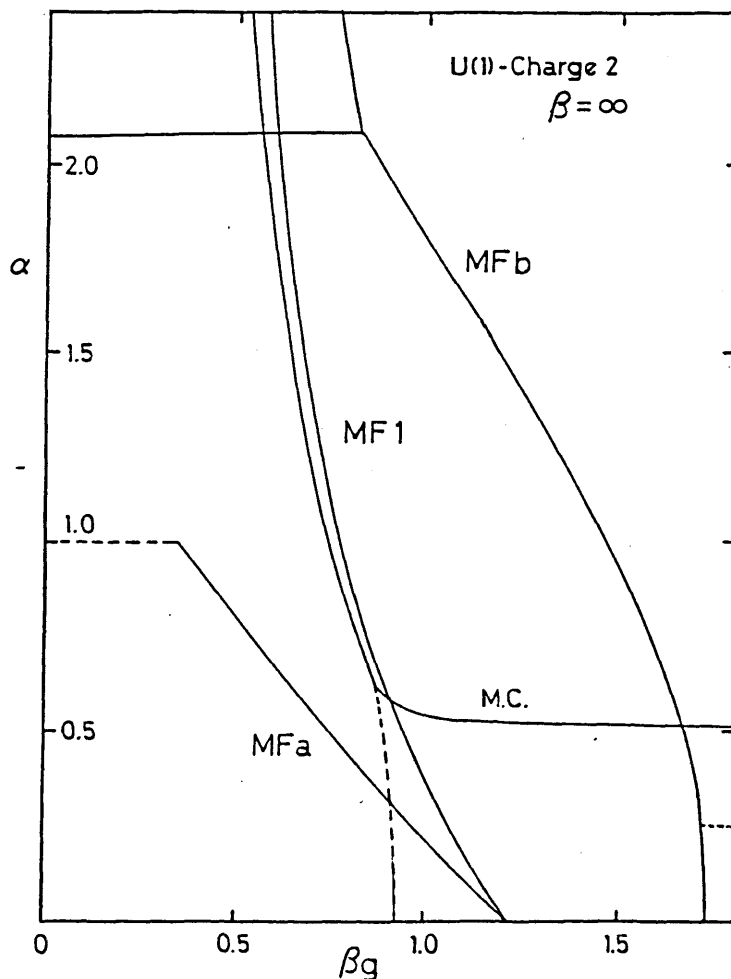
$$W_{UV}(X, X') = \ln \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \exp[X \cos \theta + X' \cos 2\theta] \quad (3.51.b)$$

$$\bar{U} = \partial W_{UV}(X, X') / \partial X$$

(3.51c)

$$\bar{V} = \partial W_{UV}(X, X') / \partial X'$$

(図3.12, 13) は、(3.50) により得られた結果である。(図3.12) は、 $\beta = \infty$ で、すでに示されている他の平均場近似の方法や、モンテカルロ・シミュレーションの結果との比較をしたものである。(MFA)³⁸⁾ は、 U^2 に対して、単に \bar{U}^2 で置き換えた方法による結果であり、(MFb)³⁹⁾ は、 U^2 に対して、 $\alpha = \infty$ で残る、 U^2 の内の Q_2 の自由度を切り離しこの $Q \in Q_2$ に対する平均場 $\bar{\sigma}$ と \bar{U} とを併用したものである。



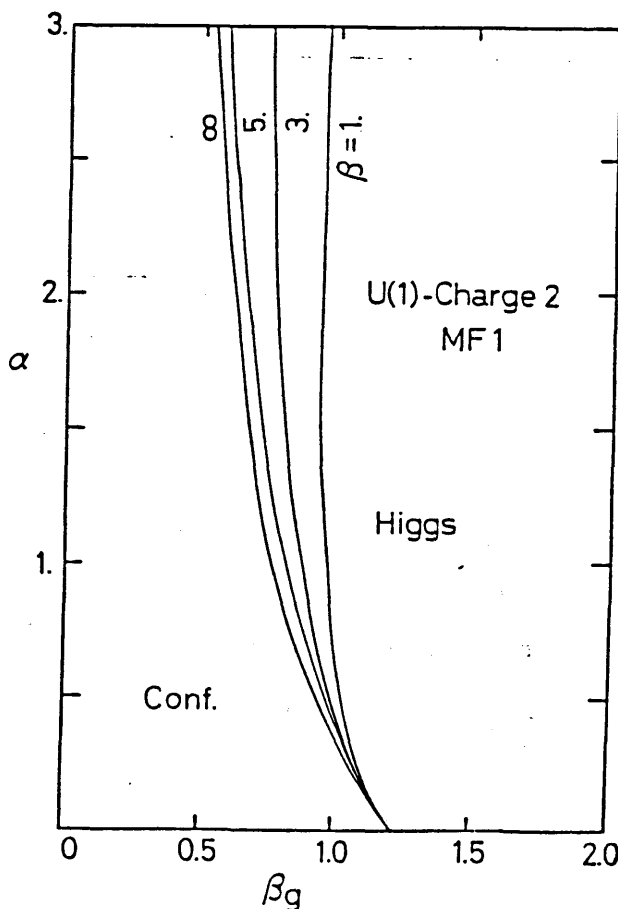
(図3.12)

MF1 は(3.50)の結果である。MFA, MFb は他の方法による結果である。M.C. は、モンテカルロ・シミュレーションの結果である。

実線は一次転移、破線は二次転移を示す。

模型は、 $\alpha = \infty$ で、 Z_2 群のゲージ場のみの模型になり、 $\alpha = 0$ では、 $U(1)$ 群のゲージ場のみの模型になる。
 (MFa) は、 $\alpha = 0$ では、良い近似であり、(MFb) は、 $\alpha = \infty$ で良い近似であることは、平均場のとり方より明らかである。しかし、いづれも、反対の極限では、よい近似ではない。 $F_0(3,50)$ は $\alpha = 0$ で、 $U(1)$ 群のゲージ場のみの系の自由エネルギーの表式になり、 $\alpha \rightarrow \infty$ で、自然に、 Z_2 群のゲージ場のみの系の自由エネルギーの表式に移行する。新しく導入した Γ は、実質的には、秩序パラメータとして働かず、 Γ_{UV} のふるまいを α に依存して、変化させ役割をしている。(図. 3.13) は、 β を変化させた時の結果である。

以上の結果からわかる様に、この模型では常に、閉じ込め相と Higgs 相は分離されている。



(図 3.13)

§ 4 格子ゲージ・スカラー模型のループ展開法

4-1 : 平均場のループ補正

本章では、ゲージ・スカラー系に対して、平均場の方法に基づく摂動論を展開する。

平均場によるループ展開法は、特に、ゲージ場のみ43~47)の系に対して適用されてきた。最低次の平均場近似では、ゲージ場のみ43~47)の系では一律に、一次相転移が示された。転移点の位置は、モニテカルロ・シミュレーションのデータと比較して、よく一致していたが、転移の次数については、信頼性が無かった。しかし、ループ補正によって、この点が改善され、次数についてもシミュレーションの結果と符合する様になった。この様に、ゲージ場のみ43~47)の系では、成功し、また盛んに研究されたが、物質場を含む系については、ほとんど応用されていらい。ゲージ・スカラー系について考えてみると、閉じ込め相と Coulomb 相の転移については、ゲージのゆがみの効果は重要だが、この領域については、実質的にゲージのみ43~47)の系と同じで、これに対するループ補正と変わる所はない。閉じ込め相と Higgs 相の間の転移曲線で、特に、終点付近については、前章 3-3-4 で述べた様に興味を持たれるが、この領域では、ゆがみの摂動計算は有効でよいと思われれる。この領域では、非摂動的効果が重要であると思われれるからである。Coulomb 相と Higgs 相の転移に

については、摂動補正は有効である。しかし、 $\beta=\infty$ のゲージ場とスピノモードの系においては、二次転移というのが一致した予想で、特に興味は持たれなかつた。しかし、 $\beta\neq\infty$ でのゲージ・スカラー系という現実的なモデルとしては、幾つかの興味ある問題がある。特に、この転移の次数が問題である。

連続理論における、Coleman-Weinberg⁴⁸⁾機構によれば、この転移は一次である事が予想される。非摂動的立場から、この相転移の研究が主にモンテカルロ・シミュレーションによつてなされているが^{26) 40, 41) 52)}、まだ結論には至ってない。また、この相転移は、宇宙論における模型の問題とも関連しており、一次転移であることが期待されている。また、この転移は、物性物理における超電導模型の相転移とも関係している。

動径成分が固定された模型では、二次転移である事がわかっているが、動径成分の存在によつて、次数が変わると期待される。また、ゲージ結合 $g=0$ ($\beta_g=\infty$) の極限である、スカラー模型では、やはり二次転移である事がわかっている。

前章の結果では、この転移は二次であつた。しかし、そこで使われた(MF2)の方法では、ゲージ・スカラー相互作用の効果がとり入れられてない。この領域では、ゲージ相互作用の効果は、摂動的に扱つて充分である。そこで、(MF2)で与えた解を、鞍点解として、ここからの補正計算を実行することを考える。しかし

、実際の計算では、鞍点解に対するゲージ場の運動項のゲージ不変性(3.44)から、Gauss的ゆらぎの計算を先行しようにすると、ゼロモードが出現し、計算ができな¹¹。そこで、ゲージ固定をある必要がある。この時、(MF2)による解の与える真空と、ほぼ同じ真空を与え、最も簡単なゲージ固定法として、軸性ゲージ固定を使う。まず、次節、4-2で、これについて述べる。次¹¹で、4-3節で、ゲージ場とスカラー場のゆらぎの計算を行う。ここで、述べられる方法では、スカラーポテンシャルの効果は、動径成分を通じて、非摂動的にとり入れられ、それを背景とするゲージ場のゆらぎに反映する。スカラーのスピノモードのゆらぎは、直接ゲージ場のゆらぎと相互作用する。この方法を用いて、以下、 Z_2 群及 $2^n U(1)$ 群の模型について、Coleman-Weinberg機構を調べてゆく。次節以下の定式化は、 $U(1)$ 群を用いて行う。

4-2: 軸性ゲージ固定 (0次)

ゲージ場のゆらぎを計算する際に、ゲージ群が連続群の場合には、ゲージ自由度の縮退に対応したゼロ振動モードが現われる。このモードは、分配関数の発散を与える。よって、このモードを除去するために、ゲージ固定が必要になる。軸性ゲージ固定⁴⁶⁾、共変的ゲージ固定 (Feynmanゲージ⁴⁷⁾、Landauゲージ⁴⁴⁾ 等があるが、ここでは、簡単のため、軸性ゲージ固定をとる。(他のゲージ固定法を使っても、結果は定性的に変わりない。)

軸性ゲージ固定

$$U_d(x) = 1 \quad x: \text{すべてのサイト} \quad (4.1)$$

を、行おうと、 $U(1)_{g=1}$ ゲージ・スカラーモデルの作用 (3.11~17) は次の様になる。

$$S_{\text{axial}}[U, \varphi] = T_{\text{axial}}[U, \varphi] - \sum_x V(\varphi(x)) \quad (4.2)$$

ただし、

$$T_{\text{axial}}[U, \varphi] = \frac{1}{2} \beta g \left[\sum_x \sum_{\substack{\mu > \nu \\ (\neq d)}} U_\mu(x) U_\nu(x+\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x+\hat{\nu}) U_\nu^\dagger(x) \right. \\ \left. + \sum_{\substack{x, \mu \\ (\neq d)}} \{ U_\mu(x) U_\mu^\dagger(x+\hat{\mu}) + U_\mu(x+\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x) \} \right] \\ + h.c.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \alpha \left[\sum_{x, \mu (\neq d)} \varphi^\dagger(x) U_\mu(x) \varphi(x+\hat{\mu}) \right. \\
& \quad \left. + \sum_x \varphi^\dagger(x) \varphi(x) \right] \\
& + \text{h.c.} \tag{4.3}
\end{aligned}$$

他は、前と同様である。

軸性ゲージ固定をしても、平均場として、 \bar{u} と $\bar{\varphi}$ をとる方法では、前章の 3-3 で見た (MF2) (ゲージ固定しないで、 \bar{u} と $\bar{\varphi}$ を導入する方法) の結果と β_g が大きい所では、ほとんど変わりがないことを以下に見る。

今の場合、自由エネルギーは、次の様になる。

$$\begin{aligned}
F_0^{\text{axial}} &= (d-1) [X \bar{u} - W_u(X)] + [K \bar{\varphi} - W_\varphi(K)] \\
&\quad - \beta_g \frac{(d-1)}{2} [(d-2) \bar{u}^4 + 2 \bar{u}^2] \\
&\quad - \alpha [(d-1) \bar{u} + 1] \bar{\varphi}^2 \tag{4.4}
\end{aligned}$$

よして、

$$X = 2\beta_g [(d-2) \bar{u}^3 + \bar{u}] + \alpha \bar{\varphi}^2 \tag{4.5a}$$

$$K = 2\alpha [(d-2) \bar{u} + 1] \bar{\varphi} \tag{4.5b}$$

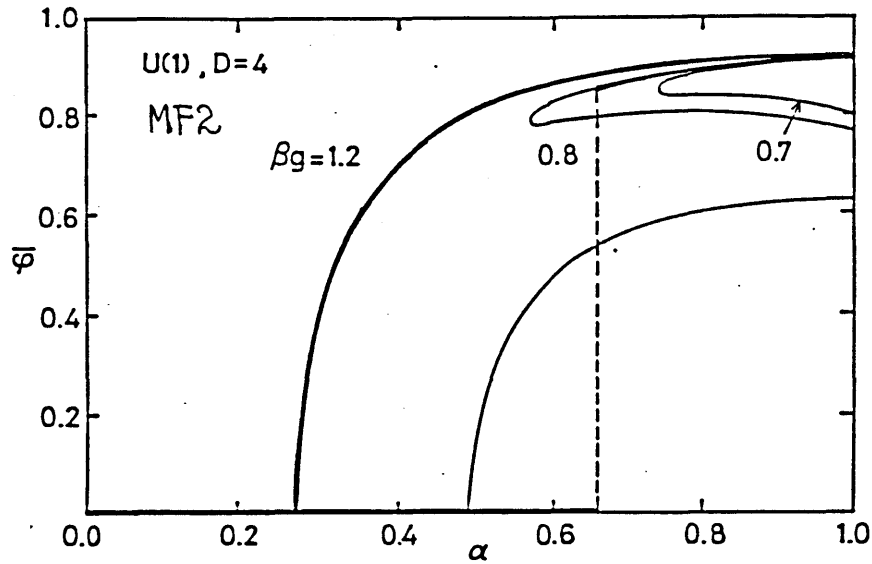
ここで、 $W_u(X)$ と $W_\varphi(K)$ の形式は、(MF2) の時 (3.30, 32) と

4-6

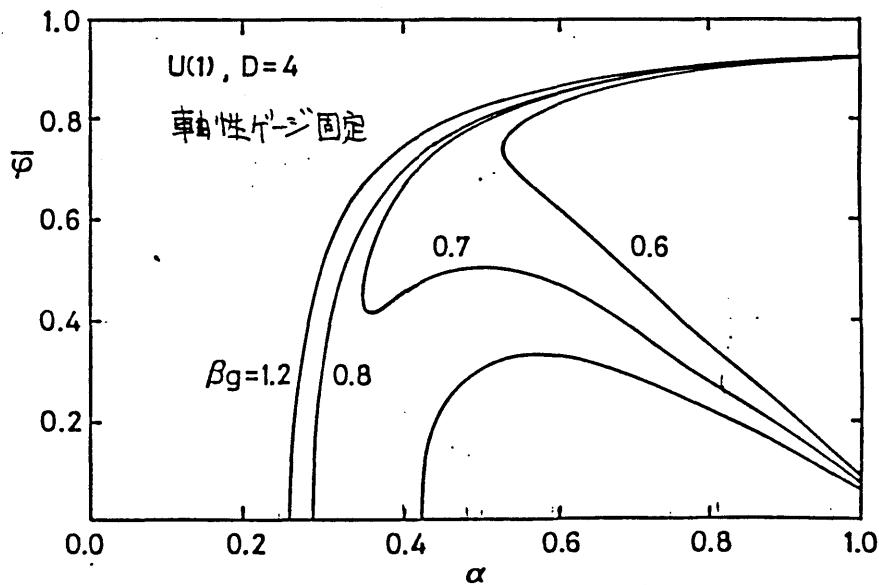
同じである。平均場に対する条件式も同様で、(4.5) を使って、次の様に書ける。

$$\bar{u} = W'_0(x) \quad , \quad \bar{\varphi} = W'_\varphi(k) \quad (4.6a, c)$$

(4.8) の解曲線を (図 4.1b) に示す。比較のため、前章 3-3-3 で見た (MF2) による解曲線 (図 3.7) をスケールを合わせて示す。(図 4.1a)



(図 4.1a)



(図 4.1b)

β_0 の大きい領域 (≥ 1) では、 $U \sim 1$ であり、両者の違いは、殆んど見られ無い。この領域では、両者とも二次の Coulomb - Higgs 転移を示す。したがって、軸性ゲージ固定による真空を 0 次近似として、ここからのゲージ場のゆらぎの補正をして、Coleman - Weinberg 転移を議論することができる。

最低次の平均場近似の結果は、軸性ゲージ固定した場合でも、時空次元や群による違いは認められ無い。 β_0 の大きい領域 (≥ 1) では、 β によらず、常に、二次転移を示す。しかし、摂動補正を加えると、定性的違いが現われる。(図 4-1) の様子に変更が加わる。次節以降で、ループ展開の結果を基に、(図 4-1) の形式で、転移の状況を見る。

4-3: ループ展開法

この節では、ゲージ・スカラー系の平均場近似に基づき摂動展開法について述べる。最低次の真空は、前節で与えたものを使い、それを鞍点とするループ展開を行う。今、注目しているのは、 β_g が大きい領域であり、Coleman-Weinberg 転移を問題にしているので、この転移が起こる領域において、適用可能な系統的展開法を定式化する。

まず(4.3)の作用に対して、場の変数 $U_M(x), (\varphi(x))$ を、コンパクトでない領域で定義された変数 $V_M(x), \Phi(x)$ に置き換えた形で、もともとの分配関数(4.7)を書き換える。

$$\begin{aligned}
 Z(\beta_g, \alpha, \beta) &= \int \prod_{x, M} dU_M(x) \int \prod_x d\varphi(x) \exp(S_{\text{total}}[U, \varphi]) \\
 &= \int \prod_{x, M} dU_M(x) \int \prod_x d\varphi(x) \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{x, M} dV_M^{(1)}(x) dV_M^{(2)}(x) \delta(\text{Re } U_M(x) - V_M^{(1)}(x)) \delta(\text{Im } U_M(x) - V_M^{(2)}(x)) \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \prod_x d\Phi^{(1)}(x) d\Phi^{(2)}(x) \delta(\text{Re } \varphi(x) - \Phi^{(1)}(x)) \delta(\text{Im } \varphi(x) - \Phi^{(2)}(x)) \\
 &\quad \times \exp\left[T_{\text{total}}(V, \Phi) - \sum_x V(\varphi(x))\right] \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

但し、この時、スカラー場のポラリシカル項 $V(\varphi)$ は、もとの変数のまま残す。これは、鞍点解が Variational 法の意で整合しているために必要で、これを 0 次近似にとった時、系統的摂動計算ができるためでもある。また $V(\varphi)$ については、直接計算するので、 β については、非摂動的に調べることができる。

(4.10) を、 δ -関数の表式を使って、書き換えると、

$$Z(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\alpha A) d\alpha$$

より、

$$\begin{aligned} Z(\beta_\varphi, \alpha, \beta) &= \int \prod_{x, \mu} \{dV_\mu^{(1)}(x) dA_\mu^{(1)}(x)\} \{dV_\mu^{(2)}(x) dA_\mu^{(2)}(x)\} \\ &\quad \times \int \prod_x \{d\Phi^{(1)}(x) dB^{(1)}(x)\} \{d\Phi^{(2)}(x) dB^{(2)}(x)\} \\ &\quad \times \exp \left[T_{\text{total}}(V, \Phi) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\substack{x, \mu \\ (\neq d)}} \{A_\mu^{(1)}(x) V_\mu^{(1)}(x) + A_\mu^{(2)}(x) V_\mu^{(2)}(x) - W_U(A_\mu(x))\} \right. \\ &\quad \left. - \sum_x \{B^{(1)}(x) \Phi^{(1)}(x) + B^{(2)}(x) \Phi^{(2)}(x) - W_\varphi(B(x))\} \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

ただし、

$$\int \{dV dA\} = \int_{-\infty}^{\infty} dV \times \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dA, \quad (V \rightarrow \Phi, A \rightarrow B)$$

そして、

$$W_U(A_M(x)) = \ln I_0 \left(\sqrt{A_M^{(1)2}(x) + A_M^{(2)2}(x)} \right) \quad (4.10a)$$

$$W_G(B(x)) = \ln \int_0^\infty dr \cdot r \cdot I_0 \left(r \sqrt{B^{(1)2}(x) + B^{(2)2}(x)} \right) \quad (4.10b)$$

ここで、 $A_M(x)$ 、 $B(x)$ は、それぞれ、リンク上、サイト上に定義された補助場である。(4.9) によって、 $U_M(x)$ 、 $\varphi(x)$ の各相互作用は、ランダムな背景場 $A_M(x)$ 、 $B(x)$ との相互作用という形で置き換えられた。(4.9) の exp の中の鞍点をとることにより、次の鞍点条件が得られる。

$$\left. \frac{\partial W_U(A)}{\partial A_M^{(1)}(x)} \right|_{A_M^{(1)}(x) = X_M(x), A_M^{(2)}(x) = 0} = \mu_M(x) \quad (4.11.a)$$

$$\left. \frac{\partial W_G(B)}{\partial B^{(1)}(x)} \right|_{B^{(1)}(x) = K(x), B^{(2)}(x) = 0} = P(x) \quad (4.11.b)$$

$$\left. \frac{\partial T_{\text{trial}}(V, \Phi)}{\partial V_M(x)} \right|_{\substack{V_M^{(1)}(x) = \mu_M(x), V_M^{(2)}(x) = 0 \\ \Phi^{(1)}(x) = P(x), \Phi^{(2)}(x) = 0}} = X_M(x) \quad (4.12.a)$$

$$\left. \frac{\partial T_{\text{trial}}(V, \Phi)}{\partial \Phi(x)} \right| = K(x) \quad (4.12.b)$$

4-11

鞍点方程式に対して、並進不変性を仮定し、 μ, \mathcal{P} を実数にとると (4.11), (4.12) は、次の様に書ける。

$$\frac{I_1(X)}{I_0(X)} = \mu \quad (4.15a)$$

$$\frac{\int_0^\infty dr \cdot r^2 \cdot I_1(kr) e^{-V(r)}}{\int_0^\infty dr \cdot r \cdot I_0(kr) e^{-V(r)}} = \mathcal{P} \quad (4.15b)$$

$$2\beta g \left\{ (d-2)\mu^2 + \mu \right\} + \alpha \mathcal{P}^2 = X \quad (4.16a)$$

$$2\alpha \left\{ (d-1)\mu + 1 \right\} \mathcal{P} = K \quad (4.16b)$$

これは、最低次の平均場近似の真空を決める式 (4.6)(4.5) と同じものである。

(4.15)(4.16) から求められる最低次の真空からの輻射補正を計算するために、積分変数を次の様に、移す。

ゲージ変数については、

$$V_M(x) = V_M^{(1)}(x) + i V_M^{(2)}(x) = \mu + m_M(x) + i n_M(x) \quad (4.17a)$$

$$A_M(x) = A_M^{(1)}(x) + i A_M^{(2)}(x) = X + i \left(\chi_M(x) + i \eta_M(x) \right) \quad (4.17b)$$

であり、スカラー変数については、

4-12

$$\Phi(x) = \Phi^{(1)}(x) + i\Phi^{(2)}(x) = P + \sigma(x) + i\tau(x) \quad (4.18a)$$

$$B(x) = B^{(1)}(x) + iB^{(2)}(x) = K + i(k(x) + ih(x)) \quad (4.18b)$$

とする。ここで、 m, m, χ, ψ 及 u, σ, τ, k, h は実数であり、鞍点からのゆらぎである。これによって、分配関数 (4.9) を展開する。T_{axial}[V, Φ] 中のゲージ場の運動項については、ゆらぎの二次までとり、 $W_0(A)$ $W_0(B)$ についても、背景場のゆらぎ χ, ψ, k, h の二次までとる。鞍点方程式 (4.15, 16) を用いて、整理し、背景場についての積分を実行してやると、分配関数は、次の様になる。

$$Z(\beta g, \alpha, \beta) \cong \exp[-NF_0^{axial}] \times Z'(\beta g, \alpha, \beta) \quad (4.19)$$

ここで、 F_0^{axial} は (4.4)、 N は格子空間の全サイトの数、 Z' が輻射補正の項である。

Z' は次の様になる。

$$Z'(\beta g, \alpha, \beta) = \frac{(2\pi)^{Nd}}{\left[\frac{\mu}{x} \left(1 - \frac{\mu}{x} - \mu^2\right)\right]^{\frac{Nd}{2}}} \frac{(2\pi)^N}{\left[\frac{P}{K} \left(1 - \frac{P}{K} - P^2\right)\right]^{\frac{N}{2}}} \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\ell} dm_{\ell} dm_{\ell}(x) \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\alpha} d\sigma(\alpha) d\tau(\alpha)$$

$$\times \exp \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2} \sum_{\ell \ell'} m_{\ell} \bar{\mathbb{P}}_{\ell \ell'} m_{\ell'} - \frac{1}{2} \sum_{\ell \ell'} n_{\ell} \mathbb{P}_{\ell \ell'} m_{\ell'} \\ -\frac{1}{2} \sum_{x, x'} \sigma(x) \bar{\mathbb{V}}_{xx'} \sigma(x') - \frac{1}{2} \sum_{x, x'} \tau(x) \mathbb{V}_{xx'} \tau(x') \end{array} \right]$$

$$\times \exp \text{Sint.} (m, n, \sigma, \tau) \quad (4.20)$$

$$\ell = (x, \hat{\mu} (\neq d))$$

ただし、

$$-\bar{\mathbb{P}}_{\ell \ell'} = \beta g \mu^2 \bar{\mathbb{P}}_{\ell \ell'} - \frac{\delta_{\ell \ell'}}{1 - \frac{\mu}{x} - \mu^2} \quad (4.21a)$$

$$-\mathbb{P}_{\ell \ell'} = \beta g \mu^2 \mathbb{P}_{\ell \ell'} - \frac{\delta_{\ell \ell'}}{\mu/x} \quad (4.21b)$$

ここで、

$$\bar{\mathbb{P}}_{\ell \ell'} = \begin{cases} 1 \text{ または } -1 & : \ell, \ell' \text{ が同一のプラケット} \\ & \text{内にある場合 } (\ell \neq \ell') \\ 0 & : \text{ それ以外の場合} \end{cases}$$

$\mathbb{P}_{\ell \ell'}$ も同様

($\mathbb{P}, \bar{\mathbb{P}}$ の具体的な存在は、後に、運動空間で明らかにされる。)

4-14

また,

$$-\overline{V}_{xx'} = \alpha M V_{xx'} - \frac{\delta_{xx'}}{1 - \frac{P}{K} - P^2} \quad (4.22.a)$$

$$-V_{xx'} = \alpha M V_{xx'} - \frac{\delta_{xx'}}{P/K} \quad (4.22.b)$$

ここで,

$$V_{xx'} = \begin{cases} 1 & : x, x' \text{ が同一のリンク内にある場合 } (x \neq x') \\ 0 & : \text{それ以外の場合} \end{cases}$$

以上の様に書ける。

相互作用項 S_{int} は、次の様になる。

$$S_{int.} = \alpha \sum_{\substack{x, \mu \\ (\neq d)}} \left[\begin{aligned} & P m_{\mu}(x) \sigma(x+\hat{\mu}) + \sigma(x) m_{\mu}(x) P \\ & - P m_{\mu}(x) \tau(x+\hat{\mu}) + \tau(x) m_{\mu}(x) P \\ & + \sigma(x) m_{\mu}(x) \sigma(x+\hat{\mu}) \\ & + \tau(x) m_{\mu}(x) \tau(x+\hat{\mu}) \\ & + \tau(x) m_{\mu}(x) \sigma(x+\hat{\mu}) - \sigma(x) m_{\mu}(x) \tau(x+\hat{\mu}) \end{aligned} \right] \quad (4.23)$$

4-15

S_{int} は m, M, σ, τ について、五つの型の相互作用を持つ。ゲージ変数の実数モード m_μ 、虚数モード M_μ 、及び、スカラー場の実数モード σ 、虚数モード τ に対する伝播関数を、 $\Delta_{ee'}^U, \Delta_{ee'}^S$ 及び $\Delta_{xx'}, \Delta_{yy'}$ と、それぞれ Δ と記すと、それらは、次式

$$\sum_m \Delta_{em}^U \overline{\mathbb{P}}_{me'} = \delta_{ee'} \quad , \quad \sum_m \Delta_{em}^S \overline{\mathbb{P}}_{me'} = \delta_{ee'} \quad (4.24.a.b)$$

$$\sum_y \Delta_{xy}^S \overline{\mathbb{V}}_{yx'} = \delta_{xx'} \quad , \quad \sum_y \Delta_{xy}^U \overline{\mathbb{V}}_{yx'} = \delta_{xx'} \quad (4.25.a.b)$$

と与えられ、 $\psi \psi S_{int}$ を Δ について展開した時、これらの伝播関数を通じて摂動計算が可能である。

実際の計算は運動量空間で実行される。(4.20)のゆらぎの二次の項を $S_{kin.}(m, M, \sigma, \tau)$ と記すと、 $S_{kin.}$ は運動空間では次の様に書ける。 $m_\mu^*(p) = m_\mu(-p) \dots$ とし、

$$S_{kin.} = -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{dp}{2\pi} \right)^d \left[\sum_{\mu, \nu} \left\{ m_\mu^*(p) \Lambda_{\mu\nu}^U(p) m_\nu(p) + M_\mu^*(p) \Omega_{\mu\nu}^U(p) M_\nu(p) \right\} \right. \\ \left. + \sigma^*(p) \Lambda^S(p) \sigma(p) + \tau^*(p) \Omega^S(p) \tau(p) \right] \quad (4.26)$$

ここで、 $\Lambda_{\mu\nu}^U, \Omega_{\mu\nu}^U$ 及び Λ^S, Ω^S は、それぞれ、上述した各モード m_μ, M_μ 及び σ, τ の逆伝播関数の運動量表示である。それらは、次の様になる。

$$\Lambda_{\mu\nu}^U(P) = \left\{ 2\beta g \left[\mu^2 \sum_{\lambda (\neq d)}^{d-1} (1 - \cos P_\lambda) + (1 - \cos P_d) \right] - \frac{X - \alpha P^2}{\mu} + \frac{1}{1 - \frac{\mu}{X} - \mu^2} \right\} \delta_{\mu\nu} \quad (4.27a)$$

$$- 4\beta g \mu^2 \cos \frac{P_\mu}{2} \cos \frac{P_\nu}{2} e^{i\frac{1}{2}(P_\mu - P_\nu)} + o(1/d)$$

$$\Omega_{\mu\nu}^U(P) = \left\{ 2\beta g \left[\mu^2 \sum_{\lambda (\neq d)}^{d-1} (1 - \cos P_\lambda) + (1 - \cos P_d) \right] + \frac{\alpha P^2}{\mu} \right\} \delta_{\mu\nu} - 4\beta g \mu^2 \sin \frac{P_\mu}{2} \sin \frac{P_\nu}{2} e^{i\frac{1}{2}(P_\mu - P_\nu)} \quad (4.27b)$$

$$\Lambda^S(P) = 2\alpha \left\{ \mu \sum_{\lambda (\neq d)}^{d-1} (1 - \cos P_\lambda) + (1 - \cos P_d) \right\} - \frac{K}{P} + \frac{1}{\langle \varphi^2 \rangle_K - P^2} \quad (4.28a)$$

$$\Omega^S(P) = 2\alpha \left\{ \mu \sum_{\lambda (\neq d)}^{d-1} (1 - \cos P_\lambda) + (1 - \cos P_d) \right\} \quad (4.28b)$$

ここで

$$\langle \varphi^2 \rangle_K = \frac{\int d\varphi e^{K\varphi - V(\varphi)} \varphi^2}{\int d\varphi e^{K\varphi - V(\varphi)}} \quad (4.29)$$

である。これらの表式より、伝播関数の運動量表示が得られる。それらを(4.24)(4.25)に習って $\Delta_{\mu\nu}^U(P)$, $\Delta_{\mu\nu}^S(P)$

4-17

$\Delta^S(p)$, $\Delta^S(p)$ とかく。これらの大体のふるまいをみる。転移点条件 (4.15, 16) より、 β_g が大きい領域では、 g^{-2} のゆらぎは小さく、 $\mu \sim 1$ であり、このとき、背景場は、 $X \sim 1/(1-\mu^2)$ となっていて、非常に大きい。この領域では、 g^{-2} の伝播関数は、 $\Delta_{\mu\nu}^U \sim O(1/X^2)$, $\Delta_{\mu\nu}^V \sim O(1/X)$ となっている。したがって、この領域では、 $1/X$ を展開パラメータとして選ぶことができる。ループ展開計算は、 d 及び $1/X$ について行われる。(実際は、 β_g が、 β_g^c に閉じ込め - Coulomb 転移点 より大きければ、充分 $1/X$ は小さくなっている。例えば $d=4$ で、 $\beta_g = 1.2$ (すなわち $\beta_g^c \sim 1.0$) で、 $\mu \sim 0.98$ である。したがって β_g はこの程度でも、すでに充分大きいといえる。これ以後、 β_g の大きい領域というのは、この様な意味においてである。)

Coulomb 相と Higgs 相の間の相転移 (Coleman-Weinberg 転移) が起るのは、 β_g ($\beta_g^c \leq 1.0, d=4$) の大きい領域であり、転移点 $d\alpha_2$ の実際の間は、 β を変化させても、よほど β を小さくしない限り $d\alpha_2 \leq 1$ である。(ゼロ次近似の時の結果 (図3.8), (図4.1) を参照) したがって、この領域で考える限り、上記の摂動法は、正当化される。しかし、 ϕ^4 -スカラーポテンシャルの結合定数 β については、数値的に full に積分しているので、動径モードの寄与に対する β の非摂動的様相を見る事が期待できる。この様に、Coleman-Weinberg 転移の生ずる、ほぼ全域について、調べる事ができる。スピンモードとゲージモードについての補正計算は、通常の方法

4-18

による補正計算と同様に、 $1/d$ -展開にもなっている。

ル-フ補正を含んだ平均場は、

$$\text{Re } \bar{U} = \mu + \langle m \rangle, \quad \text{Im } \bar{U} = 0 + \langle m \rangle \quad (4.30)$$

$$\text{Re } \bar{\sigma} = P + \langle \sigma \rangle, \quad \text{Im } \bar{\sigma} = 0 + \langle \sigma \rangle \quad (4.31)$$

であるが、すべての展開次数で $\langle m \rangle = 0$, $\langle \sigma \rangle = 0$ なので、 $\text{Re } \bar{U} \equiv U$, $\text{Re } \bar{\sigma} \equiv \sigma$ と改めて書くとする。(4.20) 及び (4.30, 31) の計算より、自由エネルギーの変化 ΔF は、ル-フ補正まで、次の様になる。

$$\begin{aligned} \Delta F_{1\text{-loop}} = & \frac{(d-1)}{2} \ln \left\{ \left(1 - \frac{\mu}{X} - \mu^2\right) \frac{\mu}{X} \right\} + \frac{1}{2} \ln \left\{ (\langle \sigma^2 \rangle_k - P^2) \frac{P}{K} \right\} \\ & + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^d} \left(\frac{d^d p}{(2\pi)^d} \right) \left[\begin{aligned} & (d-2) \ln \omega_R^U(p) + \ln \tilde{\omega}_R^U(p) \\ & + (d-2) \ln \omega_I^U(p) + \ln \tilde{\omega}_I^U(p) \\ & + \ln \omega_R^S(p) + \ln \omega_I^S(p) \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (4.32)$$

$\omega_R^U, \tilde{\omega}_R^U$ は、 $\Lambda_{\mu\nu}^U$ の固有値であり、 $\omega_I^U, \tilde{\omega}_I^U$ は、 $\Omega_{\mu\nu}^U$ の固有値である。また、 ω_R^S, ω_I^S は、 Λ^S, Ω^S の固有値である。 ω_R^S は、 $(d-2)$ 個の縮退したゲージ場の実数モー

4-19

ドであり、 $\tilde{\omega}_R$ は縮退のないモードである。よめらば、 $o(1/d)$ を捨てて、次の様になる。

$$\omega_R^U(p) = 2\beta_g \left\{ \mu^2 \sum_{\lambda \neq d}^{d-1} (1 - \cos p_\lambda) + (1 - \cos p_d) \right\} - \frac{X - \alpha P^2}{\mu} + \frac{1}{1 - \frac{\mu}{X} - \mu^2} + o(1/d) \quad (4.33)$$

$$\tilde{\omega}_R^U(p) = 2\beta_g \left\{ -2\mu^2 \sum_{\lambda \neq d}^{d-1} (1 - \cos p_\lambda) + (1 - \cos p_d) \right\} - \frac{X - \alpha P^2}{\mu} + \frac{1}{1 - \frac{\mu}{X} - \mu^2} + o(1/d) \quad (4.34)$$

表式より、わかる様に、いづれも質量を持ったモードである。その質量は、 $\beta_g \rightarrow \infty$ ($X \rightarrow \infty, \mu \rightarrow 1$) で、無限大になる。(4.32)の右辺第一項と相殺した後、これらのモードの ΔF_{Hoop} に対する寄与は $o(1/X^2)$ である。(d-2)個に縮退したゲージ場の虚数モード $\omega_{\pm}^U(p)$ と縮退していないモード $\tilde{\omega}_{\pm}^U(p)$ は、次の様になる。

$$\omega_{\pm}^U(p) = 2\beta_g \left\{ \mu^2 \sum_{\lambda \neq d}^{d-1} (1 - \cos p_\lambda) + (1 - \cos p_d) \right\} + \frac{\alpha P^2}{\mu} \quad (4.35)$$

$$\tilde{\omega}_{\pm}^U(p) = 2\beta_g (1 - \cos p_d) + \frac{\alpha P^2}{\mu} \quad (4.36)$$

これらは、11個のうち、Coulomb相 ($P=0$) では、質量を持たないが、Higgs相 ($P \neq 0$) では、 P^2 に比例した質量を持つ。(4.35) は、Coulomb相で、通常の質量ゼロの、'光子' に対応すると考えられる。これらのモードの ΔF_{1-loop} に対する寄与は、(4.32) の右辺第2項と相殺させた後、 $O(1/x)$ となる。 $\tilde{\omega}_{\pm}^U$ は、Coulomb相では、赤外発散を与える。しかし、これらの寄与は、 ω_{\pm}^U , $\tilde{\omega}_{\pm}^U$, ω_{\pm}^S と比べると、 $1/d$ について高次である。それで、この寄与は、考慮に入れない。(または、通常行われている、赤外発散の正則化の方法を使っても良い。⁴⁶⁾ それによれば、 $\tilde{\omega}_{\pm}^U$ の寄与は、ゼロである。) スカラー場についての固有値 ω_{\pm}^S は、次式の様になり、

$$\omega_{\pm}^S(p) = 2\alpha \left\{ \mu \sum_{\lambda(\neq d)}^{d-1} (1 - \cos p\lambda) + (1 - \cos p d) \right\} - \frac{k}{P} + \frac{1}{\langle \varphi^2 \rangle_k - P^2} \quad (4.37)$$

その質量 (m_R^S と記す) は、

$$m_R^S \propto -\frac{k}{P} + \frac{1}{\langle \varphi^2 \rangle_k - P^2} \quad (\geq 0) \quad (4.38)$$

であり、転移点 $\alpha = \alpha_c$ でのみ、安定方程式に従って、ゼロになる。虚数モードの固有値 ω_{\pm}^S は、

$$\omega_{\pm}^S(p) = 2\alpha \left\{ \mu \sum_{\lambda(\neq d)}^{d-1} (1 - \cos p\lambda) + (1 - \cos p d) \right\} \quad (4.39)$$

4-21

であり、常に質量ゼロである。(これは、Goldstoneモードに対応すると思われる。)これらの固有値の様子から、想像される様に、各伝播関数も各相によって、ふるまいを変える。特に、ゲージ場の虚数モードについての $\Delta_{\mu\nu}^U$ のふるまいが重要と思われる。(

1-ループ補正によって、条件式(4.6)は、次の様な補正を受ける。

$$\bar{u} - W'_u(x) = -\frac{1}{J_d} \mathcal{D}^k \{ \Delta F_{\text{Hoop}} \} \quad (4.40a)$$

$$\bar{g} - W'_g(k) = \frac{1}{J} \mathcal{D}^x \{ \Delta F_{\text{Hoop}} \} \quad (4.40b)$$

ここで、

$$X = 2\beta_g \{ (d-2)\bar{u}^3 + \bar{u} \} + \alpha \bar{g}^2 \quad (4.41a)$$

$$K = 2\alpha \{ (d-1)\bar{u} + 1 \} \bar{g} \quad (4.41b)$$

また、

$$\mathcal{D}^k = \frac{\partial k}{\partial \bar{g}} \frac{\partial}{\partial \bar{u}} - \frac{\partial k}{\partial \bar{u}} \frac{\partial}{\partial \bar{g}} \quad , \quad \mathcal{D}^x = (k \rightarrow X)$$

$$J = \mathcal{D}^k \{ X \} = -\mathcal{D}^x \{ K \}$$

である。(4.40)の右辺が、補正の寄与である。

(4.40)式を実際に解くのは、難しいので、更に、 $1/d$, $1/X$ までの寄与だけを考慮し, Coleman-Weinberg 転移を調べるのに支障がないと思われぬものも削る。要点は以下の三点である。第一に、スカラー場のストンモードのゆらぎの寄与を無視する。実際、この寄与は、 $\beta_g = \infty$ のときを考えると、転移点をずらせるのみであり、転移の次数を変えることはない。また、この寄与は、ゲージ場の寄与に比べて、 $1/d$ について高次である。(また、実際、ストン変数に対する平均場の補正計算は、例えば、内部対称性が大きくなり限り、高次元 ($d > 4$) でないと、正当化されない、特に d_2 付近で良くなり。したがって、今の場合 $d \leq 4$ を調べる時は、これを考慮に入れない。しかし、正しくこの寄与が考慮されたとしても、現象には、影響を与えないと思われぬ。重要なのは、あくまで、ゲージ場の寄与と動径モードの寄与であると考えらる。実際、ゲージの寄与は、ストンモードの寄与に対して、 $1/d$ について高次である。) 第二に、ゲージ場の実数モードの ω_R , $\tilde{\omega}_R$ の寄与は、虚数モード ω_I の寄与に比べて、 $1/X$ について高次である。したがって、ここでは、 ω_I の寄与のみを考える。また、このモードは、 $o(d)$ に縮退しており、これは、最低次の自由エネルギーのスカラー・ゲージ相互作用項と同じ次数である。したがって、実質的な寄与は、 $o(d)$ で縮退しているゲージモードであり、そのうちでも、Coulomb相では、質量がゼロで大きなゆらぎを与える、 ω_I のモードに依ると思われぬ。第三に、ゲージの平均場 $\bar{\mu}$ に対する補正((4.40.a)の右辺)は、無視する。実際、 β_g の大きい

4-23

領域では、 $\bar{u} \sim \bar{u}$ であり、 α を変化させても、ほとんど動かない。また、(4.40.b) の補正項は、 $O(1/d)$ (Jelliffe) であり、(4.40.a) の補正項は、 $O(1/d)^2$ である。結局、次式の方程式によって、Coleman-Weinberg 転移を調べる。

$$\bar{u} - W'_0(x) = 0 \quad (4.42.a)$$

$$\bar{\varphi} - W'_\varphi(k) = \frac{1}{J} \mathcal{D}^X \{ \Delta F_{\bar{u}} \} \quad (4.42.b)$$

ここで、

$$\Delta F_{\bar{u}} = \frac{(d-2)}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{dP}{2\pi} \right)^d \quad (4.43)$$

$$\times \ln \left[\left\{ 2\beta_0 \bar{u}^2 \left[\sum_{\lambda(4d)}^{d-1} (1 - \cos P_\lambda) + (1 - \cos P_d) \right] + \frac{\alpha \bar{\varphi}^2}{\bar{u}} \right\} \frac{\bar{u}}{\lambda} \right]$$

である。

4-4: Coleman-Weinberg 転移

前節で与えた、ループ展開法を含めた平均場の方法により、Coleman-Weinberg 転移 (Coulomb相-Higgs相の転移) を調べる。 Z_2 群及び $U(1)$ 群の模型について調べる。結果は $d=3,4$ について示し、更に高次元について議論する。結果は、(4.42, a, b) 式に基づいており、スカラー場のスピンのゆらぎは無視したので、 $\varphi=0$ は、再び (4.42) の自明な解になっていることに注意する。以下、 Z_2 群と $U(1)$ 群に、分けて、結果を示す。

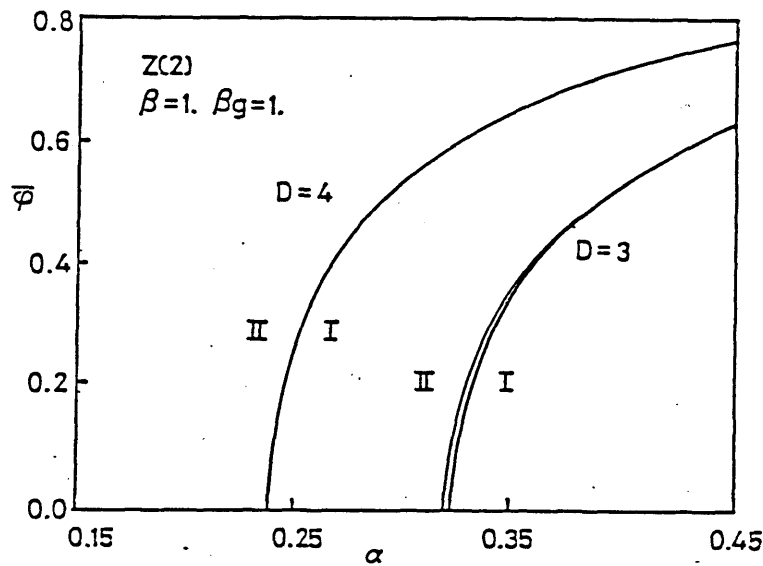
1) Z_2 -模型: Z_2 群の模型に対して、前節の方法を適用した時の $U(1)$ 群の場合との違いについて、述べる。 Z_2 -模型では、鞍点解の連続的ゲージ変換の不変性に伴うゼロモードはないので、ゲージ固定の必要はない。ループ展開は、ゲージ固定せずに行なえる。 β_2 の大きい領域では、ゲージ固定した場合と定量的にも、ほとんど変わらない。 $U(1)$ 群の場合との本質的な違いは、 $U(1)$ 群の場合で最も大きい寄与である、質量ゼロのゲージ・モードを持たない点である。他りに、 ω_R に対応する、質量を持つゲージ・モードが、支配的な寄与となる。 β_2 については、 $U(1)$ の時と同じ寄与を持つ。(4.43) 式の代りに、 Z_2 群では次式の量が使われる。

$$\Delta F^U = \frac{(d-1)}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{dp}{2\pi} \right)^d \quad (4.44)$$

$$\times \ln \left[\left\{ 2\beta g \bar{u}^2 \sum_{\lambda}^d (1 - \cos R_{\lambda}) + \frac{\alpha \bar{g}^2 - X}{\bar{u}} \right\} (1 - \bar{u}^2) + 1 \right]$$

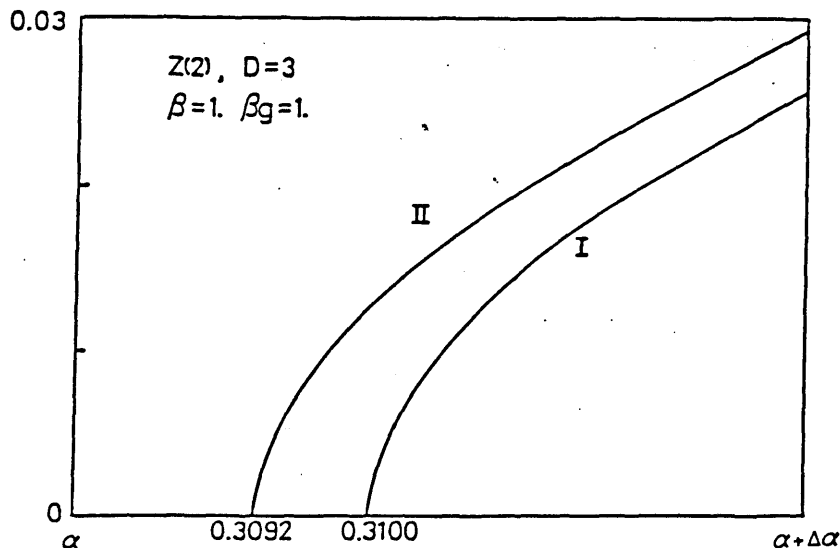
ここで、 X は、(4.41a) で与えられる。

(図4.2) は、 Z_2 -模型の (4.42) 式の解曲線を描いたものである。比較のため、ゼロ次の式((4.6)に対応する Z_2 の場合の式)を併せて描いた。(図4.2a) は、概観であり、(図4.2b) は、 $d=3$ の場合、 $\bar{g} = 0$ 付近について詳しく見たものである。



(図4.2a)

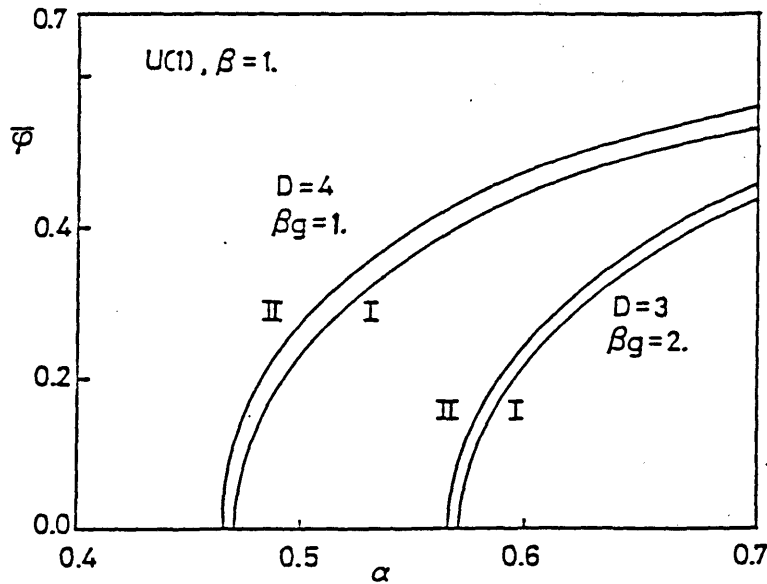
I: 0次
 II: 1ル7°補正
 $\beta_g=1$ は、前節
 述べた意味で
 充分大きい
 とする。



(図4.2b)

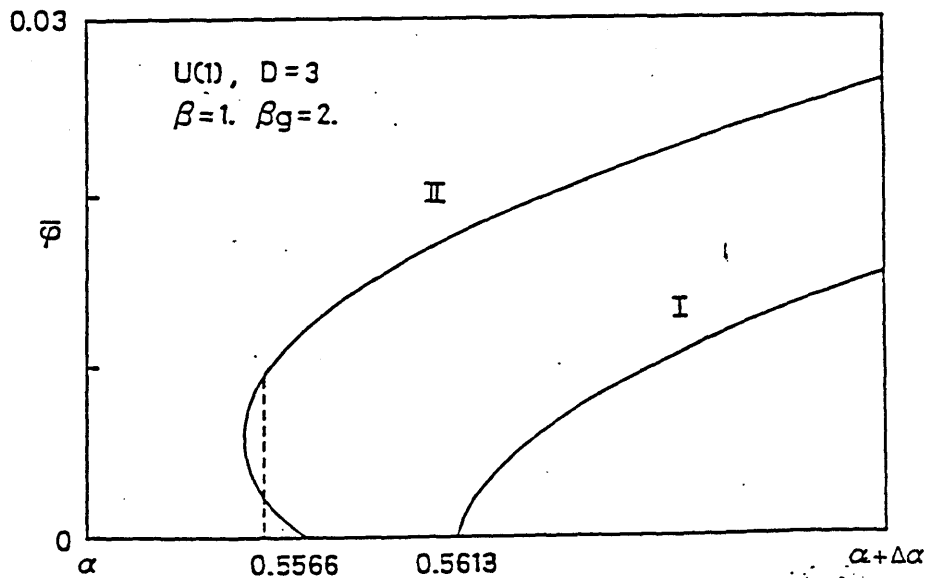
(図4.2a) から、わかる様に、質量を持ったゲージ・モードの寄与(実数モード)は、非常に小さい。(図4.2b)から、補正の効果は、転移点をずらすのみであり、転移の次数は二次のまま変わりがないことがわかる。 $d=4$ の場合も定性的に同様である。

ii) $U(1)$ -模型: 図4.3は、 $U(1)$ の場合、(4.42)式そのものを描いたものである。(図4.3a)は、概観であり、(図4.3b,c)は、 $\bar{\varphi} = 0$ の付近について、 D_2 の時と同じスケールで見たものである。

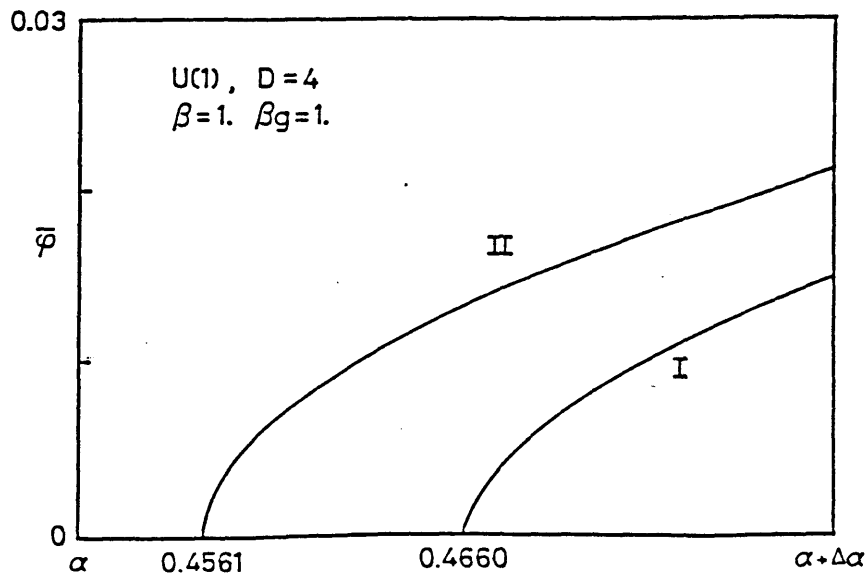


I: 0次
 II: 1ル70補正
 $D=4, \beta_g=1$
 $D=3, \beta_g=2$
 は、1つだけ、
 β_g は大きい
 とする。

(図4.3a)



(図4.3b)



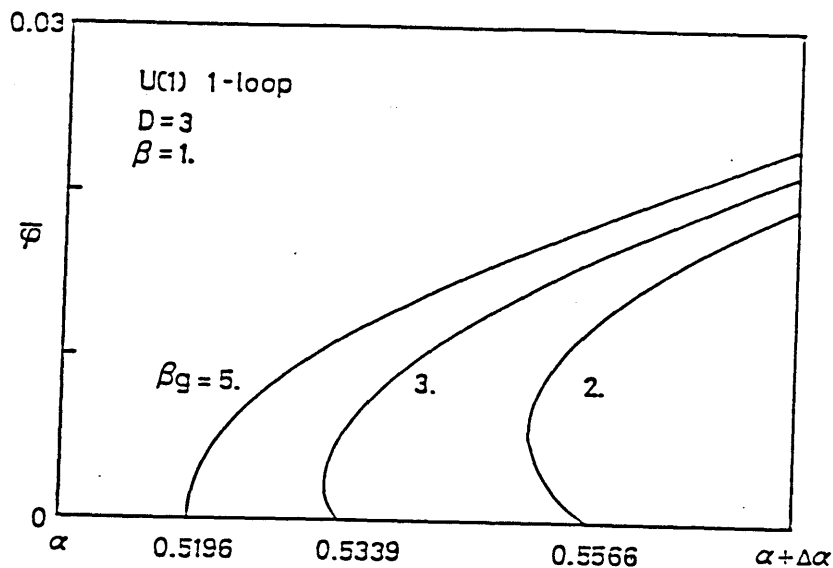
U(1) 模型 については、補正の結果、弱い一次転移を示すようになる。(図4.3b)は、一次転移の型(3章, 図3.1)を示している。これは、 Z_2 -模型の場合には無い、質量ゼロのゲージモードの効果である。しかし、この現象は $d=3$ ではよく認められるが、 $d=4$ では、そうでない。 $\bar{\varphi}=0$ の付近での、解曲線の傾きは、次の様に書ける。

$$\frac{d\alpha}{d\bar{\varphi}} = (\text{定数}(>0)) \times \frac{m_R^S}{\bar{\varphi}} + \Delta G_{\text{loop}}(\bar{\varphi}; d) \quad (4.45)$$

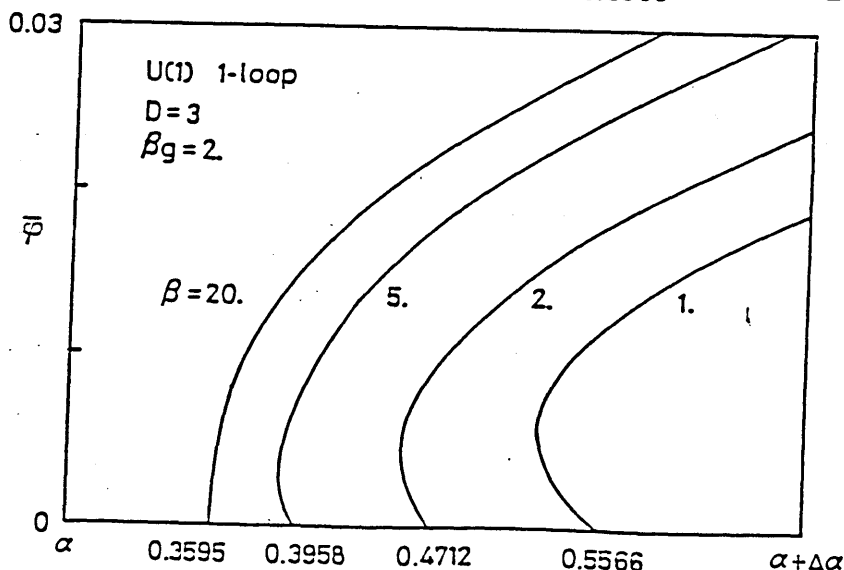
ここで、 m_R^S は、(4.38)で示した、スカラーの実数モードの質量であり、前に述べたように、 $\alpha \rightarrow \alpha_{c_2}$ で、ゼロになる。 ΔG は、ループ補正による寄与であり、定数は常に正である。転移点 $\alpha \rightarrow \alpha_{c_2}$ では、 $m_R^S \rightarrow 0$ 、 $\bar{\varphi} \rightarrow 0$ だが、両者の比は、 $m_R^S/\bar{\varphi} \rightarrow 0$ となる。したがって、ゼロ次近似では、どの場合も、二次転移を与える。転移の性質の変化には、ループ補正の寄与が、本質的である。 ΔG は、複雑な形をしているが、 $d=3, 4$ で、

$\bar{\varphi} \sim 0$ では、 Z_2 模型の場合は正であるが、 $U(1)$ 模型の場合には、負になっている。これが、 $U(1)$ の場合の一次転移を導く。しかし、 $|\Delta G|$ は次元が高くなるにつれて、急速に小さくなってゆく。その場合、 ΔG の寄与が表われるのは、 $\bar{\varphi}$ が充分ゼロに近い所であり、精密な解析を必要とする。もし、一次転移であるとしても、非常に弱い転位であることが予想される。

(図4.4)及び(図4.5)は、一次転移の強さが、 G - J 結合定数 β_g 及び φ^4 -結合定数 β によって、それぞれ、どう変化するかを見たものである。



(図4.4)



(図4.5)

(図 4.4) から、わかる様に、 β_g が大きくなると、一次転移は、弱められてゆく。この傾向は、 $\beta_g \rightarrow \infty$ で、 $U(1)$ - $U(1)$ 場のゆらぎが、全く無くなる事より考えて、もっともである。 $\beta_g = \infty$ では、 \mathcal{G}^4 -スカラー-模型になり、これは、二次の転移を持つことが、わかっている。(図 4.5) は、 β が大きくなると、やはり、一次転移は弱められることを示している。 $\beta = \infty$ では、ループ補正によるゲージのゆらぎの効果がはいったとしても、0次近似と同じ、二次転移の結果を与えると思われる。これは、これまでに行われてきた、動径成分を固定した時のシミュレーションの結果と符合している。したがって、動径モードのゆらぎの効果は、Coleman-Weinberg 機構にとって重要である。この機構は、 β が小さい領域で強く働く。

§ 5 ゲージ・スカラー系に対する平均場近似の改良

5-1: ゲージ不変性と相関

第3章 3-3-4 節で述べた様に、3-3 で見た、ゲージ固定について異なる二つの平均場の方法 (MF1, MF2) は、もともとの模型の定式化がゲージ不変に設定されているにもかかわらず、異なった結果を与える。これは、平均場の方法に理設のゲージ不変性が、うまく反映されていない事を意味する。ゲージ固定せずに平均場をとる方法 (MF2) では、平均場 $\bar{U}, \bar{\psi}$ に対し、ゲージ軌道上の変数の自由度をたし上げる事によって、形式的に 'ゲージ不変性' を回復させた。しかし、ゲージ場とスカラー場の強結合領域では、(MF2) は、たとえ、それぞれゆらぎの補正を加えたとしても、相転移曲線の終点の存在を示し得ない。これは、 ψ 数であるもともとの変数 U, ψ に対するゲージ不変性がとりとれられてないからである。(MF1) では、ゲージ不変な量 $\psi U \psi$ をそのまま平均場としたので、この領域では、旨く物理を反映できたと思われるが、弱結合領域でのそれぞれモードの自発的破れに伴う相転移は、示しえなかった。(MF1) の結果は、(MF2) の結果の持つ、 ψ -数 (平均場) に対する 'ゲージ不変性' (3.44, 45) の形の不変性を持たない。しかし、3-3-4 で議論した様に、失われたゲージ変換の自由度を考慮すれば、この形の不変性を回復で

きる可能性がある。しかし、初めから、この自由度に対して、直接平均場を置くと、(MF2)と同じ事になってしまう。すると、強結合領域での利点は、失われてしまう。

それぞれの方法に対して、適切な改良を加えれば、結果として、同一の相図を与え、そこにおいて、ゲージ不変性が、平均場の方法において全く反映してゐる筈である。補正として、単に Gauss 的ゆらぎをとり入れても、相図の非解析的様相まで変える事は難しい。実際、(MF1)、(MF2)の結果に対して、この種の補正を加えても、期待される様な成果は得られない。あくまで、非摂動的効果とその背景にあるゲージ不変性とか、本質的であると思われる。

本章では、(MF1)の方法を基にして、この意味での改良を行う。そして、ゲージ不変な理論が示すであろう性質、すなわち、強結合領域において終点が存在し、弱結合領域において、Coulomb相(荷電自由相)が存在するという、(MF1)と(MF2)で相補的に与えられた性質が、結果として両立する事を見る。

5-2 : 平均場真空に対する平均場の方法

前節で述べた様な、ゲージ・物質場系(スカラー粒子)に対する平均場近似の改良手法の要点は、(MF1)を出発点とする場合、次の二点である。一つは、平均場をとる時に失われた、ゲージ軌道方向の自由度を取り戻すこと、今一つは、ガウスのゆらぎの補正では盲くいかまいことを考慮すること、である。

後者に代める方法として、平均場近似によって決めた真空を基にする有効理論に対して、再度、平均場近似を適用する、という方法を考える。(類似の考え方に基づく手法が、 $U_N (N \geq 4)$ 群のゲージ場のみの系について、試みられている⁴⁹⁾。)ここでは、この方法と前者の要点を支柱に据え、ゲージ・スカラー系に対する平均場の方法の改良手法を試みる。最も、簡単な模型として、 U_2 群のゲージ・スピノ系($\beta = \infty$)に対して、以下議論する。この模型においても、問題の本質は変わらな^い。

U_2 ゲージ・スピノ模型の作用は、2-2節、(2.2)~(2.5)より、 $\beta = \infty$ に

$$S[U, S] = \beta_0 \sum_P S_P[U] + \alpha \sum_Q S_Q[U, S] \quad (5.1)$$

ここで、

5-4

$$S[U] = \prod_{l \in P} U_l \quad (5.2)$$

$$S_l[U, S] = S_i U_{ij} S_j \quad ; l = (i, j) \quad (5.3)$$

であり、各変数は、次式で与えられる。

$$U, S = \pm 1 \in Z_2 \quad (5.4)$$

まず、(5.1)に対して、 $U=1$ 、 $S=1$ 固定を行う。

$\hat{U} = U$ と改めて、書いて、

$$S[U] = \beta_g \sum_P S_P[U] + d \sum_l U_l \quad (5.5)$$

(5.5)を出発点の作用とする。分配関数は、

$$Z = \int \prod_l dU_l \exp S[U] \quad (5.6)$$

ただし、

$$\int dU = \frac{1}{2} \sum_{U=\pm 1} \quad (5.7)$$

である。(もともある $\int ds$ は、定数を与えるのみなので落とした。)

前章、4-3節に習って、 U_l 間の相互作用をランダムな背景場 A_l との相互作用の形に置き換える。(5.6)は、次の様になる。

$$Z = \int \prod_l \{dV_l dA_l\} \exp \left[S(V) - \sum_l \{A_l V_l - W_0(A_l)\} \right]$$

ただし、 $dV dA$ については、(4-3節)と同じで、また、(5.8)

$$W_0(A) \equiv \cosh A \quad (5.9)$$

である。(5.8)に対する次式の鞍点条件により、平均場の真空が与えられる。

$$\left. \frac{\partial W_0(A_l)}{\partial A_l} \right|_{A_l = X_l} = \mu_l \quad (5.10)$$

$$\left. \frac{\partial S(V)}{\partial V_l} \right|_{V_l = \mu_l} = X_l \quad (5.11)$$

並進不変性を課して、具体的表式を書くと、次の様になる。

$$\tanh X = \mu \quad (5.12)$$

$$\gamma \mu^3 + d = X \quad (5.13)$$

また、1-リンク当りの自由エネルギーは、次式で与えられる。

5-6

$$F_0 = -\frac{1}{4}\gamma\mu^4 - \alpha\mu + \frac{1+\mu}{2}\ln(1+\mu) + \frac{1-\mu}{2}\ln(1-\mu) \quad (5.14)$$

以上までが、一回目の平均場近似であり、(MF1)による結果と同一のものである。Gauss的ゆらぎによる、 $1/\mu$ 展開をする場合、4-3節の様にして、

$$V_e = \mu + m_e \quad (5.15a)$$

$$A_e = X + \alpha_e \quad (5.15b)$$

として、 m, α で展開し、鞍点条件(5.12, 13)を使って、 Z を書きかえると、

$$Z = e^{-Nd \cdot F_0[\mu]} \times \int \prod_e \{dm_e \cdot d\alpha_e\} \exp \left[\beta_0 \sum_P S'_P(m; \mu) - \sum_e m_e \alpha_e + \sum_e \mathcal{W}(\alpha_e; X) \right] \quad (5.16)$$

ここで、

$$\begin{aligned} S'_P(m; \mu) = & \sum_{e, e' \in P} \mu^2 m_e m_{e'} \\ & + \sum_{e, e', e'' \in P} \mu m_e m_{e'} m_{e''} \\ & + \prod_{e \in P} m_e \end{aligned} \quad (5.17)$$

5-7

また,

$$\tilde{W}(x_e; X) = \sum_{m=2}^{\infty} W_0^{(2)}(X) \frac{x_e^m}{m!} \quad (5.18)$$

である。ここで、ゲージ場 μ からの ゆらぎが m_e が小さいと見做せれば、 $o(m^3)$ 以上を前章 4-3 の様に捨てる。実際に、ゲージ場のみ系では、この近似をして、Gauss 的ゆらぎの補正を計算し、モンテカルロ シミュレーションともよく一致する結果を得た。しかし、今の場合、同じ事を行っても、転移点がずれるのみで、相図の定性的性質は、何ら変換を受けない。

そこで、(5.16) の表式を基に、以下の改良手法を行う。3-3-4 節で述べた様に、(MF2) の結果は、平均場についての変換 (3.44, 45) についての不変性を持つ。 μ に対して、(3.44) と同様の変換

$$\mu' = \sigma_i \mu \sigma_j \quad \sigma_i \in \mathbb{Z}_2 \quad (5.19)$$

を考えると、この変換に対しての不変性は、(5.16) にはない。そこで、 μ を (5.19) の形に書き換えて、 σ_i のゲージ軌道について平均化する。すなわち、次式の操作をする。

$$\mathcal{F}(\mu) \rightarrow \int \prod_i d\sigma_i \mathcal{F}(\sigma_i \mu \sigma_j) \quad (5.20)$$

この操作により、(5.19) に対して、一回目の平均場近似に基づく有効理論 (5.16) は不変である。(5.20) によって、分配関数 (5.16) を書き変える。その前に、まず、 x_e についての積分を、もとの δ -関数の表式を使って、形式的に行う。(5.16) は、次の様になる。

$$Z = e^{-Nd F_0[\mu]} \times \int_{-\infty}^{\infty} \prod_e dm_e \exp[S_{\text{eff}}(m; \mu)] \quad (5.21)$$

ここで、

$$S_{\text{eff}}(m; \mu) = \beta g \sum_p S_p(m; \mu) + \sum_e \mathcal{V}(m_e; \mu) \quad (5.22)$$

ただし、 $\mathcal{V}(m_e; \mu)$ は、以下の式によって定義される。

$$e^{\mathcal{V}(m_e; \mu)} = \frac{1}{2 \cosh X} \left[e^X \delta(\mu + m_e - 1) + e^{-X} \delta(\mu + m_e + 1) \right] \quad (5.23)$$

その後、(5.21) に対して、(5.20) の操作を行う。(5.23) より、 $(m_{i\tilde{j}}, \sigma_i \mu \sigma_{\tilde{j}}) = (\sigma_i m_{i\tilde{j}} \sigma_{\tilde{j}}; \mu)$ となるので、結局、 Z は次の様に書ける。($\sigma_i \sigma_{\tilde{j}} = 1$ 或 -1 である)

$$Z \rightarrow Z = e^{-Nd F_0[\mu]} \times \int_{-\infty}^{\infty} \prod_e dm_e \int d\sigma_i \exp[S_{\text{eff}}(m, \sigma; \mu)] \quad (5.23)$$

ここで、

5-9

$$S_{\text{eff}} = S_{\text{eff}}(\sigma_i, m_{ij}, \sigma_j; \mu)$$

$$= \beta_0 \sum_P S_P(\sigma_i, m_{ij}, \sigma_j; \mu) + \sum_l \mathcal{V}(m_l, \tilde{\mu}_l), \quad (5.24)$$

$$\text{ただし}, \quad \tilde{\mu}_l = \sigma_i \mu \sigma_j \quad (5.25)$$

であり、 \square は、

$$S_P(\sigma, m; \mu) = \left[\begin{array}{l} \mu^2 \sum_{\substack{i-j \\ k-l}} \sigma_i m_{ij} \sigma_j \sigma_k m_{kl} \sigma_l \\ + \mu^2 \sum_{\substack{i-j \\ k}} \sigma_i m_{ij} m_{jk} \sigma_k \\ + \mu \sum_{\substack{i-j \\ k-l}} \sigma_i m_{ij} m_{jk} m_{kl} \sigma_l \\ + \prod_{l \in P} m_l \end{array} \right] \quad (5.26)$$

$$P = \begin{array}{c} \hat{i} \quad \hat{j} \\ \square \\ k \quad l \end{array} \quad i, j, \dots \text{ は、 } \Gamma \text{ ランセット内の各サイトを示す。}$$

となる。 S_P の各項は、新たな相互作用を示す。

そこで、(5.23)の模型に対して、 m_l, σ_i についての平均場近似を行う。その時、 $\mathcal{V}(m_l, \tilde{\mu}_l)$ は、 m_l についてのホフン

シャルと見做せるので、第3章 3-2節の扱いに従う。(実際、これによつて、(5.23)の特異性は、以下の形式に持ち込まれる。また、これをゼロ次近似と看做、摂動計算も可能である。)

m_e, σ_e についてのゼロ次の平均場を決める。鞍点方程式は、次の様になる。(m_e, σ_e に対する平均場を $\bar{m}_e, \bar{\sigma}_e$ として、並進不変性を仮定する。)

$$\bar{\sigma} = \tanh k_0 \quad (5.27a)$$

$$\bar{m} = -\mu \bar{\sigma}^2 + \frac{\sinh k_m + \mu \bar{\sigma}^2 \cosh k_m}{\cosh k_m + \mu \bar{\sigma}^2 \sinh k_m} \quad (5.27b)$$

$$k_0 = 2d\gamma (\mu^2 \bar{m}^2 \bar{\sigma}^3 + \mu^2 \bar{m}^2 \bar{\sigma} + \mu \bar{m}^3 \bar{\sigma}) + 2d\mu \bar{\sigma} \left(-k_m + \frac{\tanh k_m}{1 + \mu \bar{\sigma}^2 \tanh k_m} \right) \quad (5.28a)$$

$$k_m = \gamma (\mu^2 \bar{m} \bar{\sigma}^4 + 2\mu^2 \bar{m} \bar{\sigma}^2 + 3\mu \bar{m}^2 \bar{\sigma}^2 + \bar{m}^3) \quad (5.28b)$$

以上が二回目の平均場近似である。これを、基にして、さらに、ゆらぎの摂動補正計算が可能である。ゼロ次近似での自由エネルギーは、一回目の平均場近似によるもの $F_0[\mu]$ と、二回目の平均場近似の寄とを合せたものになる。1-サイト当りの自由エネルギーは、次式で与えられる。

$$F[\bar{m}, \bar{\sigma}; \mu] = dF_0[\mu] + F_{e,0}[\bar{m}, \bar{\sigma}; \mu] \quad (5.29)$$

ここで、 $F_0[\mu]$ は、(5.14)であり、 $F_{e,0}$ は次の様になる。

$$\begin{aligned} F_{e,0}(\bar{m}, \bar{\sigma}; \mu) = & -\frac{d\gamma}{4} S_p(\bar{m}, \bar{\sigma}; \mu) \\ & + d\Gamma_m(\bar{m}; \tilde{\mu}) + \Gamma_\sigma(\bar{\sigma}) \end{aligned} \quad (5.30)$$

ただし、

$$S_p(\bar{m}, \bar{\sigma}; \mu) = 2\mu^2 \bar{m}^2 \bar{\sigma}^4 + 4\mu^2 \bar{m}^2 \bar{\sigma}^2 + 4\mu \bar{m}^3 \bar{\sigma}^2 + \bar{m}^4 \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_m(\bar{m}; \tilde{\mu}) = & \frac{1 + (\bar{m} + \tilde{\mu})}{2} \ln\left(1 + \frac{\bar{m}}{1 - \bar{m}\tilde{\mu} - \tilde{\mu}^2}\right) \\ & + \frac{1 - (\bar{m} + \tilde{\mu})}{2} \ln\left(1 - \frac{\bar{m}}{1 - \bar{m}\tilde{\mu} - \tilde{\mu}^2}\right) \\ & - \ln\left(\frac{1 - \tilde{\mu}^2}{1 - \bar{m}\tilde{\mu}^2 + \tilde{\mu}^2}\right) \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\Gamma_\sigma(\bar{\sigma}) = \frac{1 + \bar{\sigma}}{2} \ln(1 + \bar{\sigma}) + \frac{1 - \bar{\sigma}}{2} \ln(1 - \bar{\sigma}) \quad (5.33)$$

ただし、 $\tilde{\mu} = \mu \bar{\sigma}^2$ である。

$F_{e,0}$ の μ -依存性は、 μ を通じて、はたしてくる。

(5.27) ~ (5.33) の解析結果を以下にまとめる。

最終的に得られた相図の概形は、(図 5.2) であるが、比較のため、(MF1) (5.14) 及び (MF2) による結果を、(図 5.1) にまとめた。(MF2) (ゲージ固定しない方法) による自由エネルギーを F_0^{NG} とかく。これは次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 F_0^{NG} = & -\frac{1}{4} \gamma \mu^4 - \alpha \mu s^2 \\
 & + \frac{1+\mu}{2} \ln(1+\mu) + \frac{1-\mu}{2} \ln(1-\mu) \\
 & + \frac{1+s}{2} \ln(1+s) + \frac{1-s}{2} \ln(1-s)
 \end{aligned}
 \tag{5.34}$$

ただし、 s は、スピン場の平均場である。

まず、閉じ込め相と Higgs 相との間の相転移曲線の終点の存在について述べる。 $\beta_g = 0$ では、 $F[\bar{m}, \bar{\sigma}, \mu] \rightarrow dF_0[\mu]$ になり、(MF1) による自由エネルギーに一致する。この与える転移は、(図 5.1) の MF1 の曲線で、明らかな様に少なくとも $\beta_g = 0$ では、 $F[\bar{m}, \bar{\sigma}, \mu]$ は転移を持たない。また、 $F_{e,0}[\bar{m}, \bar{\sigma}, \mu]$ の極小値を与える $\bar{\sigma}$ が、 μ に依らず、 $\bar{\sigma} = 0$ のみになる領域がある。(図 5.2 の斜線部 $\alpha < \alpha(\beta_g)$) この領域では、 $F_{e,0}[\bar{m}, \bar{\sigma}, \mu] \rightarrow$

$dF_0[\bar{m}; \alpha=0]$ になって、これは、ゲージ場のみ系の自由エネルギーを示す。これが与える転移点は、 $\beta_g = \beta_g^c$ のみである。したがって、斜線部内で、 $\beta_g < \beta_g^c$ の領域で転移は、起こりえない。このように、 $\beta_g \sim 0$ (強結合

領域での終点の存在は保証される。比較のため、(MF2) による自由エネルギー $F_0^{MG}[\mu, S]$ の極小値を与える σ が、 μ によらず $S=0$ のみになる領域をみる。(図5.1の斜線部; β_g に依らず $\alpha < \alpha_c (=1/2d)$) 斜線部以外の領域で σ による転移が起こる。実際、この領域の存在が、 $\alpha > \alpha_c$ で、荷電自由相 (Coulomb相) と Higgs 相の間の転移を可能にし、 $\alpha < \alpha_c$ では、起こりえないことを保証する。しかし、 $\beta_g \sim 0$ でも、 S による転移は禁止されてない。実際、終点は、(MF2) では存在しない。改良された手法では、この点が異なっている。

荷電自由相の存在は、今、述べた斜線部の存在で明らかである。 $\beta_g > \beta_g^c$ の $\alpha > (\alpha(\beta_g))$ の領域で、 σ による転移が (MF2) の時と同様に存在する。ただし、 $\beta_g \rightarrow \infty$ で、 $\alpha(\beta_g) \rightarrow 0$ になっていく。実際、 $F(\bar{m}, \sigma, \mu)$ の転移曲線は $\beta_g \rightarrow \infty$ で、 $\alpha \rightarrow 0$ になってしまい、 $\beta_g = \infty$ の極限で、 Z_2 Ising 模型の転移点 ($\alpha_c = 1/2d$) に移行しない。荷電自由相と Higgs 相の間の転移は、(MF2) と同様に求められて、二次転移を示す。転移曲線は次式の様になる。

$$\begin{cases} \mu^*(\gamma \mu^* \bar{m}^* - 1) = \frac{1}{2d} \bar{m}^* \\ \bar{m}^* = \tanh(\gamma \bar{m}^{*3}) \end{cases} \quad (5.35a)$$

$$\gamma = 2(d-1)\beta_g$$

ただし、 μ^* は次式で決まり、 α -依存性は、 μ^* を通じて得られる。

$$\mu^* = \tanh(\alpha + \gamma \mu^{*3}) \quad (5.35b)$$

比較のため、(MF2)によって得られる転移曲線を示す。

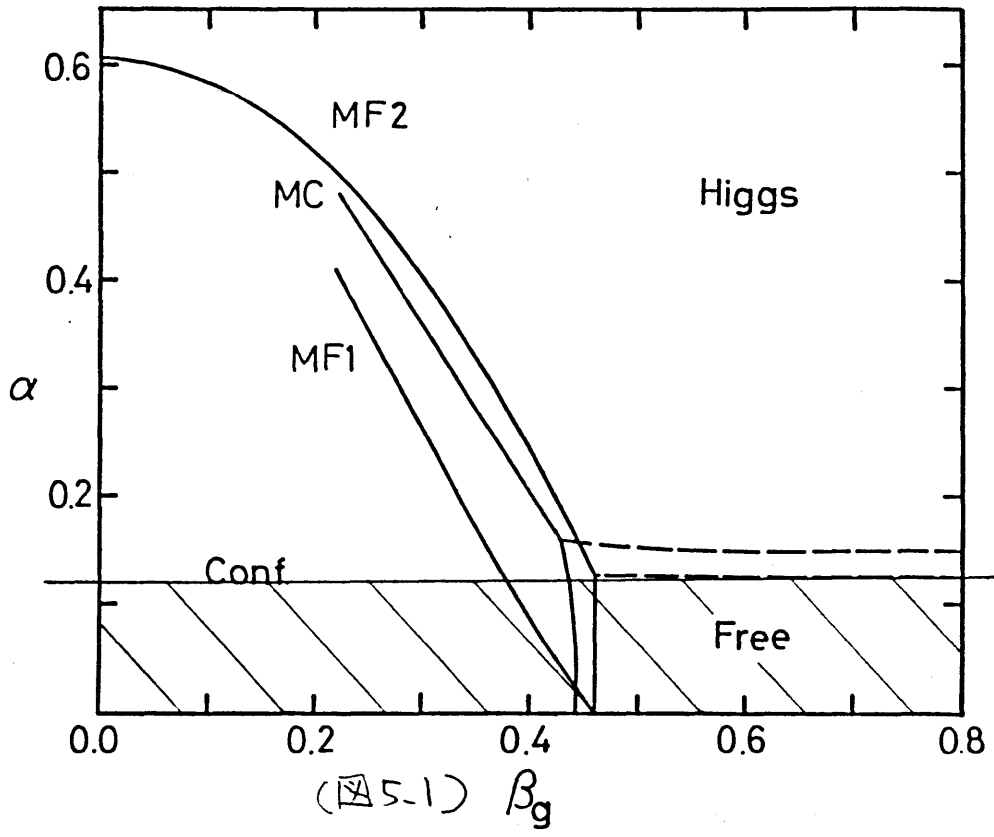
$$\alpha = \frac{1}{2} d\mu^* \quad (5.36a)$$

ただし、 μ^* は、次式で決まる。

$$\mu^* = \tanh(\gamma \mu^{*3}) \quad (5.36b)$$

(5.35)は、 $\beta_0 \rightarrow \infty$ で、 $\alpha \rightarrow 0$ に移る。しかし、これについては、擾動補正により改善される可能性がある。非解析的な性質は、ゼロ次近似(5.29)~(5.33)で与えられている。

以上、見た様に、閉じ込め相、荷電自由相、及び、Higgs相の存在と、強結合領域での終点の存在を、同時に示し得た。

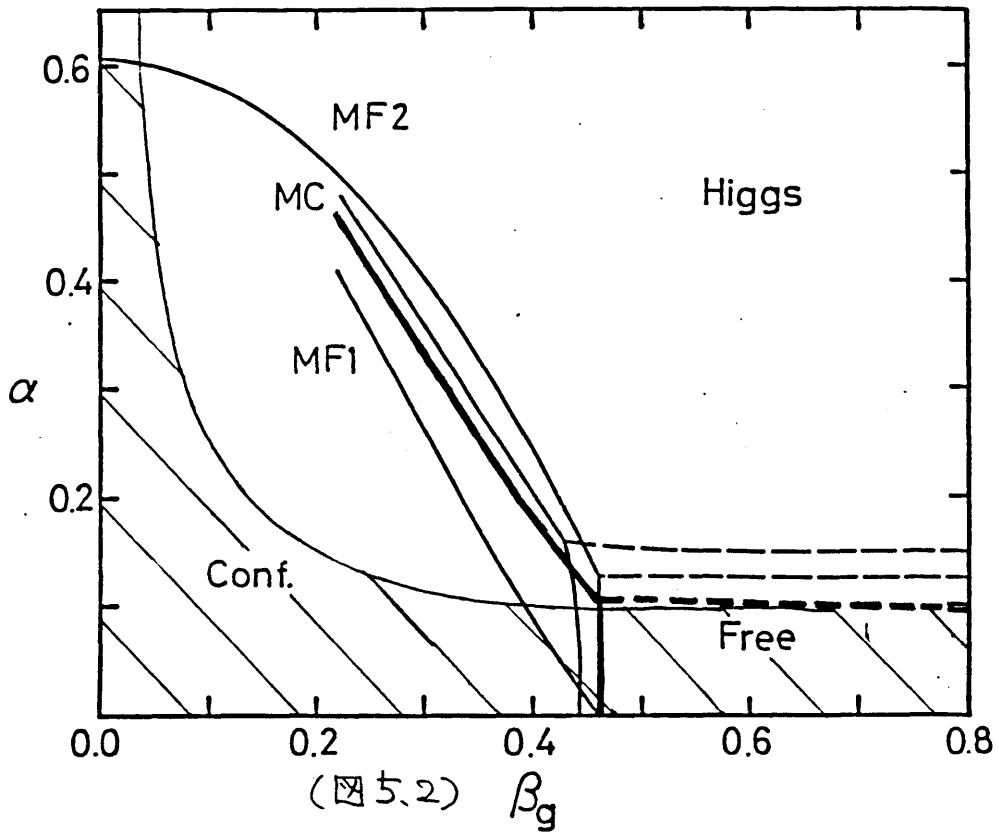


MC: モンテカルロ
シミュレーション
の結果

Conf. 閉じ込め
相

Free. 荷電自由
相

実線は一次,
破線は二次
転移を示す。



太線が
改良手法
(5.39) による。

§ 6 まとめと議論

6-1 : まとめと問題点

これまで、本論文で、ゲージ・スカラー系について調べてきた事は、初めに、第一章で提示した、枠組のシナリオの中では、まだ初期的段階にあると言わざるを得ない。相構造や相の物理的性質など、ゲージ場のみの系と比べて、はっきりしな点が多い。連続極限を考える際、まず、相転移の存在や転移の次数を知る事が必要であるが、本論文で幾つかの解析はされたものの、明確な結論には、至っていない。連続極限をとる転移点は、二次というだけでなく、紫外停留点である事が必要である。これを見るには、例えば、実空間のくりこみ群の方法によって、流し図などを調べる事が必要であろう。これは、ゲージ場のみの系では、Migdal近似によって、大体の様子が調べられている。しかし、物質場がはいった系では、Migdal近似の定式化すらない。ゲージ場のみの系の結果からの類推で、非可換ゲージ群の場合、連続極限は $\beta_g = \infty$ ($g=0$) の面の何処かであろうと思われているが、4章の結果から考えると、流し図における、その点 Λ の近づき方の心算が重要であろう。また、第一章でみた、非可換型のゲージ場のみの系について、連続極限での物理量の計算が可能だったのは、漸近的自由性によって、 g

$=0$ が、例外停留点であり、振動計算の知識で、この臨界点でのふるまいを考える事ができたからである。しかし、もし停留点が ϵ キロの有限の所にあった場合この付近での臨界現象を調べる事は、難しい。ゲージ系において、その様な場合の計算例は有り。したがって、例えば、振動論で 'よくわかっている' Ω 系について、連続極限をとって、この理論を再現することは、むしろ難しい。ともかく、ゲージ系における臨界現象の研究については、まだ不明な点が多いのである。しかし、ゲージ・スカラー系の相構造から考えるに、ゲージ系は、振動論の範囲では知られていない、興味ある力学的性質を多く含んでいると思われる。これらが、連続理論にどう反映するかは、やはり興味のある所である。

以下では、これまでの結果や他の手法による研究をまとめて、ゲージ・スカラー系についての可能性を考えてみる。

6-2: 閉じ込めについて

ゲージ場のみの系では、第1章で見た様に、Wilson ループについて、試験電荷間のポテンシャルを調べるという意味で、'閉じ込め'が調べられた。しかし、この判定法は、物質場が存在する場合は成立しない。第2章及び3章では平均場によって見た様に、代わりに、ゲージ場のゆらぎの問題として、閉じ込め相と荷電自由相 (Coulomb相) との区別を考えた。ゲージ場のみの系で、Wilson loopの面積則を与えるのは、 $\theta_n (= a g^2 \chi_n)$ の周期性である事を考えると、 θ_n のゆらぎについての見方は共通の考え方として、特に矛盾はない。しかし、余りに漠然としている。例えば、次の様な疑問が起こる。非可換ゲージ模型の場合、弱結合領域での'閉じ込め'とはどういうものか、という事である。非可換ゲージ模型の場合、閉じ込め相と荷電自由相の間の転移はないというのが、これまで種々の方法で調べて得られた、一致した考えである。そこで、常に'閉じ込め'が成立していると考えられる。第1章でも述べたように、 β も定数は、弱結合領域でもゼロでない。しかし、ゲージ場のゆらぎは、この領域では小さい。閉じ込めの本質が θ_n の周期性にあるとすると、これは、一見矛盾している。ところが、ここに、ゲージ群の非可換性の重要性が現われると思われる。可換ゲージ群 ($U(1), Z_N$) では、弱結合領域では、 θ_n のゆらぎの小さい事が、ゲ-

3場のみの系の場合、そのまま‘周辺則’を導く。(1-3)
 しかし、非可換群の場合はこれと異なる。非可換ゲージ群では、小さいゆらぎでも、群の非可換性で、周期性とは、別の機構で、閉じ込めになっているという考え方もある。しかし、非コンパクトな模型では、非可換群でも、すべての結合領域で(ゲージ場のみの系で)面積則にならないう事を考えると、そうではないと思われる。むしろ、強結合での周期性によって働いた機構が、弱結合でも、保持されていると考えるべきである。

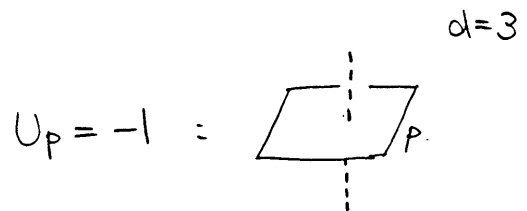
この様な問題を考えるために、ゲージ場にゆらぎを与える実体として、Isingスピニ模型($d=2$)における Peierls contour や、 $X-Y$ 模型における vortex と類似のものを考える。閉じ込めについては、プラケットと直交する、双対格子の上に定義されるものを考える。これは、‘vortex’

と呼ばれている。弱結合

領域では、ほとんどのプラ

ケットについて、 $U_p = 1$

であり vortex は存在しないが、強結合では、vortex ができ易くなり、凝縮が起こる。可換群の場合は、実際に、vortex の寄与を評価して、面積則が導ける。物質場が含まれる場合には、リンクに対して双対格子の上に Broch wall と呼ばれる、スカラー場のスピニモードにゆらぎを与えるものを考える。ゲージ不変性のため、両者は結びついており、閉じ込め相での小さい領域では、Broch wall の周囲に vortex が、は



6-5

りつりたものが凝縮して11子と考えられる。この
の物理量のふるまいを調べる事は意味があると思われ
る。

6-3 : Higgs 機構について.

スカラーモデルでは、二次転移が存在し、対称性が自発的に破れた相では、Goldstone 粒子が存在する。ゲージ場が加わると、この相では、Higgs 機構が起っていると認められる。しかし、第2章で述べた様に、格子ゲージ理論では、真空(基底状態)は常にゲージ不変性を保っているので、この機構は、連続理論で見るとは見えにくい。実際、この相で、Higgs 機構が起っている事を明快に示した例はない。ともとも、Coulomb 相と Higgs 相を明確に区別できる秩序パラメータが今の所、存在しない。第2章でも述べた様に、'ゲージ不変相関関数' $G[\Gamma]$ も、Wilson Loop も、両相で同じふるまいを示す。しかし、正確には、このふるまいは、最も支配的に効く寄与を見ているので、更に次の寄与まで見ると、違いが現われるかもしれない。J. Bricmont & J. Fröhlich⁵⁹⁾ は、ゲージ不変相関関数のふるまいについて、

$$\text{Coulomb 相 (荷電自由)} : G[\Gamma(x,y)] \sim |x-y|^{\frac{-(d-1)}{2}} \cdot e^{-m|x-y|} \quad (6.1)$$

$$\text{Higgs 相} : G[\Gamma(x,y)] \sim e^{-m'|x-y|} \quad (6.2)$$

であると指摘している。(6.1) のべき補正は、 $\beta_g = \infty$ のスピン系でも存在する、ふるまいであり、⁵¹⁾ そのからの寄与であるといる。しかし、この指摘は、2群に対してなされたものであり、連続

群において存在するゼロ質量のゲージ場とは、別ものの様に思える。

第4章で行なった、平均場近似による研究では、ゲージ場のゆらぎを計算するために、ゲージ固定をしているので、連続理論に近い描像が見られる。実際、二体 $\langle U_x U_y \rangle$ の Gauss 的ゆらぎを計算すると、4-3 で見た、ゲージ場の虚数モードの伝播関数は、Coulomb 相では質量ゼロだが、Higgs 相では、スカラーの真空期待値 $\langle \phi \rangle$ による質量を得る。しかし、スカラー場の虚数モードは、Higgs 相でも質量ゼロのまま残っている。やはり、直接、連続理論には結びつかない様に思える。

そこで、あくまで、ゲージ不変な量で調べる事を考える。具体的には、やはり、Wilson ループとゲージ不変相関関数しかない。はじめに述べた様に、両者とも、Coulomb 相と Higgs 相で、支配的に働く寄与は同じかきまりをする。しかし、4-3 節の方法によって、2-4-5 の量を計算すれば、次に効く寄与が見える可能性がある。第1章で見た、ゲージ場のみの系についての弱結合展開の計算では、Wilson ループの計算で、支配的寄与は、周辺則を与えたが、次の寄与は、Coulomb ポテンシャルを与えた。

平均場のゆらぎの計算は、弱結合展開の別のたしあげ方になっているので、類似のグラフ(図6.2)の計算をすれば、 $\langle U_{xy} \rangle$ は、4-3 で見た様に、Coulomb 相で質量ゼロなので、弱結合展開の

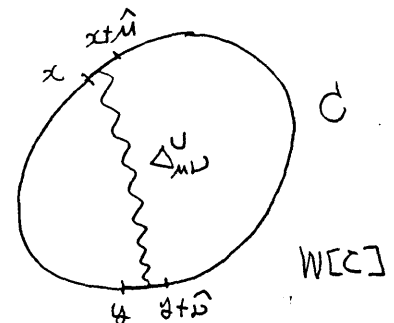


図6.2

結果と同様に、Coulomb 相互作用をきり、Higgs 相では、質量を持つようになるので、Yukawa 型の相互作用を与える可能性がある。これによつて、Higgs 機構を見いだすことができるであろう。

Coulomb 相と Higgs 相の間の転移は、本質的には、スカラー場の転移である。ゲージ場は、小さいゆらぎとして、存在するだけである。しかし、ゆがみのゆらぎではあつても、ゲージ場の効果は、スカラー場の転移の性質を変える事を、第4章で見た。これは、ゲージ場が、スカラー場に対して、ランダムな作用を与えている効果と思われぬ。実際、ゲージ系以外でも、Coleman-Weinberg 機構と類似の現象がある。非等方的な相互作用を持ったスカラー系や、ランダムな外場のはりつたスカラー系が、とうである。スカラー系では、二次であった転移が、これらの例では、一次になる。

6-4 : 強結合領域について

閉じ込め相と Higgs 相の間の相転移及び、この転移曲線の終点の存在は、ゲージ・スカラー系の持つ相構造のうちでも、最も興味ある問題といえる。これは、ゲージ場とスカラー場のゆらぎが相おとぎ大きい領域での現象だからである。閉じ込め相と Coulomb 相の間の転移は、本質的にはゲージ場の転移であり、スカラー場は殆んど関与しない。同様に、Coulomb 相と Higgs 相の間の転移は、スカラー場の転移である。したがって、この二つの転移は、各極限模型の転移の性質から、基本的な点では予想がつく。しかし、終点付近の転移現象は、これと本質的に異なると思われれる。ここでは、ゲージ場の持つランダムな作用がフルに効いていると思われれる。物性物理において、スピニグラス模型が提出された時、この模型が、ゲージ不変性を持ってゐる事が、指摘されたが、この領域でのゲージ・スカラー模型は、実質的に、この模型に類似してゐる。

謝辞

本論文を作成するにあたり、様々の議論をして下さいました、小川修三先生及び大貫義郎先生をはじめとする素粒子論研究室の皆様へ感謝致します。

参考文献

- 1) K.G. Wilson , Phys. Rev. D14 , 2445 (1974)
- 2) A.M. Polyakov , Phys. Lett. B59 , 82 (1975)
- 3) R. Barian , J.M. Drouffe , and C. Itzykson , Phys. Rev. D10 , 3376 (1974) . D11 ; 2104 , 2098 (1975) D19 , 2514 (E) (1979)
K.G. Wilson , Phys. Report 23 C , (1976)
J.B. Kogut , Rev. Mod. Phys 51.4 (67) (1979)
- 4) S. Elitzur , Phys. Rev. D25 , 3978 (1975)
- 5) K. Osterwarder and E. Seiler , Ann. of Phys. 110 , 440 (1978)
- 6) L-P. Kadanoff , Rev. Mod. Phys. 49 , 267 (1977)
- 7) N.S. Manton , Phys. Lett. 96B , 328 (1980)
- 8) J. Villain , J. Phys. (Paris) 36 , 581 (1975)
- 9) J.M. Drouffe , Phys. Rev. D18 , 1174 (1978)
- 10) C.B. Lang , C. Rebbi , P. Salomonson and B.S. Sakerstam
Phys. Lett. 101B (1981) 173
- 11) P. Menotti and E. Onofri , Nucl. Phys. B190[FS3] , 288 , (1981)
- 12) J.M. Drouffe and J.B. Zuber , Phys. Report 102 C (1983)
- 13) M. Creutz , Jacobs and C. Rebbi , Phys. Rev. Lett. 42 , 1396 (1979) , Phys. Rev. D20 , 1915 (1979)
- 14) M. Creutz , Phys. Rev. Lett 43 , 553 (1979) , Phys. Rev. D21 , 230 (1983)
- 15) C. Rebbi , Phys. Rev. D21 , 3350 (1980)
- 16) G. Bhanot and M. Creutz , Phys. Rev. D21 , 2892 (1980)

- 17) H.D. Politzer, Phys. Rev. Lett. 30, 1346 (1973)
 D.J. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 30, 1343 (1973)
- 18) A. Hasenfratz and P. Hasenfratz, Phys. Lett. 93B, 165 (1980)
- 19) R. Dashen and D.J. Gross, Phys. Rev. D23, 2340 (1981)
- 20) M. Creutz, Phys. Rev. D21, 2308, (1980), Phys. Rev. Lett. 45, 463 (1980)
- 22) L. Masperi and Omero, Phys. Lett. 107B (1981), 207
- 23) E. Brezin and J.M. Drouffe, Nucl. Phys. B 200 [FS4], 93 (1982)
- 24) M. Creutz, Phys. Rev. D21, 1006 (1980)
- 25) E. Fradkin and S. H. Shenker, Phys. Lett. 116B, 353 (1982)
- 26) T. Muehisa and Y. Muehisa, Phys. Lett. 116B (1982), 353
 Y. Muehisa, Phys. Rev. D30 1310, (1984)
- 27) H. Flyvbjerg, B. Lautrup and J. B. Zuber, Phys. Lett. 110B 279 (1982)
- 28) E. Brezin, J. C. LeGuillon and J. Zinn-Justin, Phase Transition and Critical Phenomena, ed. C. Domb and M. Green (Academic Press, 1976), vol. 6 p.125
- 29) J. Albery, H. Flyvbjerg and B. Lautrup, Nucl. Phys. B220 [FS8], 61 (1983)
- 30) V. Alessandrini, Nucl. Phys. B 215 [FS7], 337 (1983)
- 31) K. Kanaya and Y. Sugiyama, Prog. Theor. Phys. 72, 1158 (1984)

- 32) G. Bhanot and B. A. Freedman, Nucl. Phys. B190 [FS3] 357, (1981)
 K. Bowler, G. Pawley, B. Pendleton, D. Wallace and G. Thomas, Phys. Lett. 104B, 481 (1981)
 D. Callaway and L. Carlson, Phys. Rev. D25, 531 (1982)
 J. Ranft, J. Kriפטганз and G. Ranft, Phys. Rev. D28, 360 (1983)
- 33) B. J. Pendleton, Phys. Lett. 118B, 121 (1982)
- 34) S. Dimopoulos, S. Raby and L. Susskind, Nucl. Phys. B173 (1981), 547
- 35) L. Abbott and E. Farhi, Phys. Lett. 101B, 69 (1981)
 T. R. Taylor, Phys. Lett. 125B, 125 (1983)
- 36) Z. Xi-te C. - I. Tan and C. Tian-lunn, Phys. Rev. D26, 2893 (1982)
- 37) K. Odaka and M. Fukugita, Nucl. Phys. B220 [FS8], 471 (1983)
- 38) D. J. Pritchard, Phys. Lett. 106B, 193 (1981)
- 39) J. M. Drouffe, Phys. Lett. 105B 46 (1981); Nucl. Phys. B 205 [FS5] (1982), 27
- 40) G. Koutsoumbas, Phys. Lett. 140B, 379 (1984)
- 41) H. Kühnelt, C. B. Lang and G. Vones, Nucl. Phys B230 [FS10], 508 (1984)
- 42) Y. Sugiyama and K. Kanaya, Prog. Theor. Phys 73, 176 (1985)
- 43) J. M. Drouffe, Nucl. Phys. B205 [FS5] (1982), 27
- 44) V. Alessandrini, V. Hakim and A. Krzywici, Nucl. Phys. B215 [FS7] (1983), 109

- W. Rühl, Z. phys. Σ 18, 207 (1983)
- 45) J. M. Albery, H. Flyvbjerg and B. Lautrup, Nucl. Phys. B 220 [FS8] (1983) 61.
- 46) N. Kawamoto and K. Sigemoto, Systematic expansion of lattice mean-field calculation, NBI-HE-83-02 (Jan. 1983)
- V.F. Müller, T. Raddatz and W. Rühl, Phys. Lett. 122 B (1983), 148.
- V.F. Müller and W. Rühl, Nucl. Phys. B 210 [FS6], 289 (1982)
- 47) H. Schlichting, Phys. Lett 148 B, 133 (1984)
H. Flyvbjerg, Nucl. Phys. B 235 [FS11], 331 (1984)
- 48) S. Coleman and E. Weinberg, Phys. Rev. D 7 (1973), 1888
- 49) J. M. Albery, H. Flyvbjerg and B. Lautrup, Nucl. Phys. B 220 [FS8] 61, (1983)
- 50) J. Bricmont and J. Fröhlich, Phys. Lett. 122 B, 73 (1983)
- 51) L.S. Ornstein and F. Zernike, Proc. Acad. Sci. Amsterdam 17 (1914), 793
- 52) K. Jansen, J. Jęrsiak, C.B. Lang, T. Neuhaus and G. Vones, Phys. Lett. 155 B, 268 (1985)
- 53) W.D. Toussaint and R.L. Sugar, Phys. Rev. D 32, 2061 (1985)