

薄肉H形断面鋼柱の連成 座屈に関する研究

昭和61年10月

山 尾 敏 孝

薄肉H形断面鋼柱の連成 座屈に関する研究

昭和61年10月



山尾 敏 孝

INTERACTION BUCKLING STRENGTH OF THIN-WALLED H-SECTION COLUMNS

by
Toshitaka YAMAO

ABSTRACT

This dissertation presents the theoretical and experimental study concerning the interaction behavior of the local and overall buckling of welded thin-walled H-section columns. Brief description on each chapter is given below :

Chapter 1 : The problem and review of previous investigations on the interaction buckling is described.

Chapter 2 : An incremental equilibrium equations for a beam-column with arbitrary open cross sections is derived in a stiffness matrix form by using a moving element coordinate system and an incremental variational principle. Yielding of the material is judged as a bi-axial stress problem under normal and shear stresses by using the flow theory of plasticity associated with von Mises yield criterion. Validity and efficiency of the present method are shown by illustrative examples.

Chapter 3 : This chapter describes the development of a finite element method which enables to analyze a large displacement elasto-plastic behavior of plate structures which fail by local instability. The plate element used in this method is the ordinary planar triangular element. The in-plane flexural stiffness of the component plates is taken into account using a technique based on the micropolar theory to avoid the singularity of the global stiffness matrix.

Since a large portion of the displacement in the postbuckling behavior of the plate element is caused by a rigid body displacement, the nodal forces are calculated by effective displacements which are determined by subtracting the rigid body displacement from the total one. Validity and efficiency of present method are confirmed.

Chapter 4 : A finite element technique which enables to connect plate elements with a beam element is developed to analyze large displacement problems of elasto-plastic thin-walled beam-columns. The stiffness matrix is derived by using multipoint constraints technique at the coupling nodal point. Numerical results of the present method are compared with the exact solutions and experimental results.

Chapter 5 : Ultimate strength behaviors of elasto-plastic thin-walled H-section stub-columns are studied experimentally and theoretically. Seven specimens with various width-to-thickness ratio of the component plates of the cross section are tested under uni-axial compression. The test results are compared with the results of nonlinear analysis by the developed finite element method. Validity and efficiency of the present method are shown. Based on the test results, an interaction formula for predicting the ultimate strength of H-section stub-column under axial compression is proposed.

Chapter 6 : The interaction behavior of the local and overall buckling of welded thin-walled H-section columns are studied experimentally. A total of 13 specimens with various slenderness ratios and width-to-thickness ratios of the component plates are tested under axial compression. The AISC form factor method for predicting the ultimate strength of H-section columns is revised for those composed of plates with large width-to-thickness ratios. The predictions of the revised method are found to give fairly accurate results for the columns tested.

Chapter 7 : Based on the analytical and experimental study, a design formula of the local and overall interaction strength of compression members is proposed. The applicability of the formula is examined in comparison with the numerical results.

Chapter 8 : The conclusions obtained from Chapters 2 through 7 are summarized

目 次

ABSTRACT

第 1 章	序 論	1
1.1	緒 言	1
1.2	連成座屈に関する既往の研究	2
1.3	本論文の目的と構成	5
	参考文献	7
第 2 章	薄肉開断面三次元骨組構造の弾塑性有限変位解析	15
2.1	概 説	15
2.2	つり合い方程式の誘導	17
2.2.1	仮定と座標系の設定	17
2.2.2	ひずみと変位の関係	18
2.2.3	応力増分とひずみ増分の関係	20
2.2.4	断面力増分と応力増分の関係	21
2.2.5	接線剛性マトリックスの誘導	22
2.2.6	数値計算手順	27
2.3	数値解析結果	27
2.4	結 論	29
	付録2.1 応力増分とひずみ増分の関係式の誘導	30
	付録2.2 要素剛性マトリックス k_{ep}, k_g の誘導	32
	付録2.3 骨組の座標変換マトリックス T_b	38
	付録2.4 偏心荷重時のつり合い方程式	39
	用いた記号	41
	参考文献	44
	図表	47

第3章	板構造の弾塑性有限変位解析	59
3.1	概説	59
3.2	つり合い方程式の誘導	60
3.2.1	仮定と座標系の設定	60
3.2.2	ひずみと変位の関係	61
3.2.3	応力増分とひずみ増分の関係	63
3.2.4	接線剛性マトリックスの誘導	65
3.2.5	剛体変位の除去	66
3.2.6	不つり合い力の算定	71
3.2.7	数値計算手順	73
3.3	数値解析結果	75
3.4	結論	77
付録3.1	係数マトリックス $B_m, B_\phi, B_b, B_\theta$ の誘導	79
付録3.2	剛性マトリックス $k_{mm}, k_{\phi\phi}, k_{mb}, k_g, k_{bb}$ の誘導	84
付録3.3	板の座標変換マトリックス T_p の誘導	90
	用いた記号	93
	参考文献	97
	図表	101
第4章	はり要素と板要素の結合解析	117
4.1	概説	117
4.2	はり要素と板要素の結合解析法	118
4.2.1	結合解析のモデル化	118
4.2.2	多点拘束処理の手法	120
4.2.3	結合マトリックスと不つり合い力の計算	121
4.3	数値解析結果	123
4.4	結論	125
	用いた記号	126
	参考文献	127
	図表	130

第5章	薄肉H形短柱の局部座屈に関する実験	137
5.1	概説	137
5.2	短柱実験の概要	138
5.2.1	供試体の設計	138
5.2.2	予備試験	139
5.2.3	短柱実験装置と測定方法	140
5.3	実験及び解析結果と考察	140
5.3.1	解析方法	140
5.3.2	荷重－変形特性	141
5.3.3	最大強度の検討	142
5.4	結論	143
	付録5.1 H形短柱の弾性座屈解析	145
	用いた記号	148
	参考文献	150
	図表	153
第6章	薄肉H形鋼柱の連成座屈に関する実験	173
6.1	概説	173
6.2	連成座屈実験の概要	174
6.2.1	供試体の設計	174
6.2.2	予備試験	175
6.2.3	実験装置と測定方法	176
6.3	実験結果と考察	176
6.3.1	荷重－変形挙動特性	176
6.3.2	耐荷力の検討	178
6.4	結論	180
	用いた記号	182
	参考文献	184
	図表	187

第7章	薄肉鋼柱の連成座屈強度の算定式	209
7.1	概説	209
7.2	既往の研究	210
7.3	連成座屈実験の解析と考察	215
7.3.1	解析方法	215
7.3.2	解析と実験結果の比較検討	215
7.4	連成座屈強度の算定式の提案と検討	216
7.4.1	連成座屈強度の算定式の提案	216
7.4.2	解析パラメータ	217
7.4.3	算定式の検討	217
7.5	結論	218
	用いた記号	220
	参考文献	222
	図表	224
第8章	結論	233
	著者の発表した論文	237
	謝辞	238

第1章 序 論

1.1 緒 言

近年、構造物の大型化や溶接技術の進歩あるいは高張力鋼等の使用により部材の薄肉化が促進されつつあるが、鋼構造物の終局状態での挙動や強度を求めることができるならば、終局状態を基準にした合理的な設計が可能となる。また、それは経済的な設計にもつながるであろう。通常、鋼構造物部材に使用される I 形はりや、はり一柱では横ねじれ座屈強度が、圧縮や圧縮と曲げを受ける柱では部材の全体座屈が問題となる。さらにそれを構成する板要素の局部座屈も考慮しなければならない。

鋼圧縮部材あるいは曲げ部材を設計する場合、局部座屈を生じないように設計するのが合理的である。なぜなら、現実の鋼構造物において、特に柱などでは、初期たわみおよび溶接残留応力の初期不整や荷重の偏心が必ず存在するので、薄い板要素で部材を構成すると、荷重の小さいうちから曲げ変形を生じて、部材としての全体的な座屈を生じる前に構成板要素が面外変形をおこし、全体の耐荷力を低下させることになるからである。そこで、部材を構成する板要素の板厚は、局部座屈が降伏点応力度まで生じないような板厚としてきたわけである。しかしながら、交番応力として小さな圧縮応力を受ける部材、もしくは架設時のみに小さな圧縮応力を受ける部材において、鋼材の降伏点応力度まで局部座屈を生じないような板厚を用いることは不必要に厚い板を使用することになり、時には不経済な設計になると思われる。

現道路橋示方書¹⁾では降伏点応力度以下での局部座屈の発生を考慮した許容応力度式が採用されており、比較的幅厚比の大きい板要素の使用が認められている。しかし、局部座屈を考慮した部材の許容応力度つまり耐荷力をどのように評価するかが問題となる。幅厚比が大きい板要素で構成される薄肉構造物が圧縮や圧縮と曲げを受ける場合、部材の全体座屈と構成板要素の局部座屈の連成座屈を生じる。特に、幅厚比が大きい両縁単純支持板の荷重変形挙動の場合、最大強度に達した後強度が急激に低下し、幅厚比の小さい板要素に比べてねばりがないといわれている。さらに、実構造物では板要素が単一に使用されることはなく、必ず複数で構成されており、構成板要素相互の局部変形挙動も全体強度に影響すると考えられる。そして、構成板要素の幅厚比の組合せによっても、連成座屈挙動は非常に複雑なものとなると考えられる。このように、幅厚比が大きい板要素で構成される

部材の耐荷力や連成座屈後の挙動等については未解決な問題点も多く、ここに理論的・実験的研究の必要性があると思われる。また、高張力鋼材の使用においては、幅厚比は相当小さく制限され断面の薄肉化が妨げられており、高張力鋼の有効な利用のためにも必要と考えられる。以上のことから、初期たわみや残留応力等の初期不整が存在するH形断面鋼部材の連成座屈挙動を正確に解析する手法を開発し、連成座屈強度に関する厳密な評価式を確立することは重要な問題であると考ええる。

本研究では、まず、薄肉開断面部材の三次元有限変位弾塑性解析法の定式化と三角形板要素の有限変位弾塑性解析法の定式化を示し、それぞれの解析方法の妥当性を検討をする。そして、局部座屈を考慮して全体構造を解析するために、はり要素と板要素を結合一体化する手法を述べ、要素の分割方法や結合位置について検討する。また、構成板要素相互の局部変形挙動と耐荷力及び連成座屈耐荷力の算定方法を検討するため、幅厚比を組合せたH形断面短柱の耐荷力実験を行ない、さらに、部材の全体座屈と板要素の局部座屈の連成座屈挙動及び耐荷力を調べるため、細長比と幅厚比を組合せた溶接H形鋼柱の連成座屈実験を行なう。実験結果と解析結果の比較検討を行ない、さらにパラメータ解析の結果をふまえて中心軸圧縮を受けるH形断面鋼柱の設計強度式を提案し、その妥当性を検証する。

1.2 連成座屈に関する既往の研究

本節では、はり、柱の全体曲げ座屈と構成板要素の局部座屈のいわゆる連成座屈に関する既往の研究を述べる。まず、はり、柱の座屈及び板の座屈に関して簡単に述べる。なお、本論文に密接な関係のある文献については各章で示す。

柱の座屈問題は、1744年にEuler⁸⁾が最初に研究し、柱の座屈強度に関する研究を発表したのは1759年のことである。Eulerは座屈強度を弾性範囲内で取り扱っていた。そして、100年以上後の1889年にEngesserが非弾性座屈強度に関する接線係数理論⁹⁾を発表し、さらに数年後に等価係数理論¹⁰⁾を発表している。この等価係数理論から得られる荷重が正しい座屈荷重と考えられていたが、実験値は接線係数理論によく一致するという矛盾が生じ、1947年のShanley¹¹⁾の論文が発表されるまで解決されなかった。接線係数理論による座屈荷重は下限値であり、等価係数理論から得られる座屈荷重は上限値を与え、実際の柱の座屈荷重はその中間にあることがわかった。更に、1950年頃から柱の座屈強度に初期たわみや残留応力などの初期不整あるいは荷重の偏心が大きく影響することが認識され出した。

特に、米国Lehigh大学を中心に数多くの柱の実験が行なわれ、残留応力が耐荷力に大きく影響することが明らかにされた¹²⁾。さらに、ヨーロッパ鋼構造協会連合(ECCS)⁶⁾の第8委員会により多量の中心軸圧縮座屈実験と解析が行なわれ、その結果3本の座屈曲線が得られた。

はりの曲げねじれ座屈の理論解がPrandtl¹³⁾およびMichell¹⁴⁾により発表されたのは1899年のことである。そしてTimoshenko^{15),16)}は2軸対称I形ばりの基礎微分方程式を求め、エネルギー法により解を求めている。これ以後、鋼はりの弾性及び弾塑性挙動に関して数多くの理論的・実験的研究が行なわれ、種々の荷重条件や支持条件、初期不整および種々の断面形状について解析されて設計のための資料が得られている^{18)~22)}。さらに、有限要素法とコンピュータの発達により、部材の終局強度を材料学的非線形性と幾何学的非線形性の両者を考慮した解析が可能となり、多くの研究者により複雑なはりや柱の非線形問題の理論解析および実験も行なわれている^{24)~32)}。

板の座屈強度に関して理論的に取り扱ったのは1891年にBryan³³⁾が最初で、一方向の等分布圧縮応力を受ける周辺単純支持板の座屈問題を解析した。1924年にBleich³⁴⁾は、塑性域にまで板の座屈問題を拡張して取り扱った。また、Timoshenko³⁵⁾も同様な考えで行なっている。さらに、1925年ごろから多次元応力状態に関する塑性理論の研究が盛んになり、その成果が塑性域の板の座屈解析にも取り入れられるようになった。つまり、Henky-Nadaiに代表される塑性変形理論とPrandtl-Reussに代表される塑性流れ理論である。解析と実験により板の座屈強度には、柱の座屈の場合以上に初期たわみや残留応力の存在が大きく影響することも明らかにされた^{36)~38)}。幅厚比が大きい板は降伏点応力度より小さな応力で座屈を生じるが、支持側辺部の最大応力が降伏点応力度に達するまで強度を保ついわゆる後座屈強度がある。この後座屈強度を有効幅の概念を用いて最初に評価したのはvon Kármánら³⁹⁾である。板の座屈後の挙動については、有限変位理論により多くの研究者によって解析されてきた^{45)~47)}。一方、解析的な方法でなく近似的に板の極限強度を求めたのはKármánらであり、実験を基にして圧縮板の極限強度における有効幅を近似的に求めた。さらに、Winter⁴⁰⁾は実験結果に基づき有効幅公式を提案している。これはAISI³⁾の軽量形鋼の規定となっている。また、Dwight⁴¹⁾らも有効幅公式を提案している。しかし、圧縮板の極限強度に及ばず初期不整や非線形挙動の影響等を総合的に研究する必要が生じてきたが、これは有限要素法の発達と大型計算機の進歩により解析が可能となり、圧縮板の複雑な非線形挙動解析の研究が行なわれるようになった^{48)~53)}。しかし、これらの研究の多くは単一部材に対する解析が主であった。板要素で立体構成した場合の連成局部座屈挙

動に関する解析的研究としては、たとえば、固有値問題としての局部座屈強度に関する研究^{54)~57)}、塑性解析法により局部座屈後の変形挙動を扱った研究^{58)~61)}等がある。最近では、この連成局部座屈挙動を厳密に解析する有限要素法を使用して解析が行なわれるようになり、宇佐美ら⁶²⁾、中井ら⁶³⁾の研究は箱形断面を対象に、また、H形断面を対象にした解析は藤本ら⁶⁴⁾、吉田ら⁶⁵⁾、鈴木ら^{66), 67)}の研究がある。いずれの解析法においても計算機を用いて厳密に挙動を解析するには、多くの記憶容量や演算時間を必要としているのが現状である。

連成座屈に関する研究としては、1952年にBleich⁶⁸⁾がT形補剛材の曲げねじり座屈をウェブの変形を考慮して行なっている。また、Goldbergら⁶⁹⁾は桁の断面変形を考慮した座屈解析を、また、弾性固有値問題として有限要素法あるいは有限帯板法を用いてI形ばりの横座屈及びねじり座屈と局部座屈の連成を解析した研究^{70)~72)}、さらに弾塑性域まで拡張して連成座屈を解析した研究^{73), 74)}等がある。解析法とは別に現在までに種々の近似解法も提案されている。まず、板要素の後座屈強度を近似的に求めるためvon Kármánにより導入された有効幅理論を用いた解析法で、箱形やH形断面の冷間加工鋼部材の連成座屈強度を解析したWang⁷⁵⁾、Skaloud⁷⁶⁾、Winterら⁷⁷⁾、Hancock⁷⁸⁾等の研究がある。この方法では計算は簡単であるが最大荷重後の変形挙動は求められない。つぎに、Little⁷⁹⁾によって提案された手法で、圧縮板要素の非弾性解析より断面の曲げモーメントー軸力ー曲率曲線を求め、さらにそれを部材方向に積分して解析する方法で、伊藤⁹⁶⁾、宇佐美ら^{62), 91)}、中井ら⁶³⁾の研究がある。なお、吉田ら⁶⁵⁾は、立体構造を板要素のみで解析するため応力仮定の板要素を誘導して解析している。しかし、複雑な構造物全体を対象に板要素のみで解析すること、現在の計算機事情では計算時間や記憶容量が膨大なものとなり、経済的にも困難であるのが現状である。また、本研究と同様な解析手法を用いている和田ら⁹²⁾の研究がある。

一方、実験的研究としては、箱形断面や二つの溝形材を張り合わせたI形断面にした冷間加工鋼部材について実験が多く行なわれており、AISCの設計規定に取り入れられている²⁾。たとえば、Skaloudら⁸²⁾、Graves Smith⁸³⁾、DeWolfら⁸⁴⁾、Brahamら⁸⁵⁾等は箱形断面についての実験であり、Kalyanaramanら⁷⁷⁾は、二つ溝形材を張り合わせたI形断面の柱とはりの連成座屈の実験を行なっている。また、溶接箱形断面部材に関しては、まず、Klöppelら⁸⁶⁾、Ingvarsson⁸⁷⁾の中心軸および偏心圧縮を受ける柱の実験、宇佐美ら^{88)~90)}の溶接箱形断面柱が中心軸および偏心圧縮の実験がある。さらに、宇佐美らは連成座屈が生じる部材の設計式を提案している。また、山尾ら¹⁰⁵⁾も溶接長方形断面柱が中心軸圧縮を受ける場合について、幅厚比と細長比を変化させて連成座屈の実験を行なっている。

また、鋼構造物の圧縮部材の設計において、我国のみならずアメリカや西ドイツ等でも降伏点応力度以下での局部座屈の発生を考慮した許容応力度式を採用している。

1.3 本論文の目的と構成

本論文は薄肉鋼構造物が圧縮および圧縮と曲げを受ける場合、曲げによる全体座屈と構成板要素の局部座屈の連成座屈挙動及び耐荷力について、局部座屈を考慮した全体構造の解析手法の開発、H形断面部材を用いた局部座屈実験と連成座屈実験による現象や挙動の把握、および実験結果と解析結果との比較検討、考察を行なっている。さらに、連成座屈強度の簡易算定方法を提示するものである。各章の内容は次のようである。

第2章は、任意形状の薄肉開断面部材の三次元有限変位弾塑性解析法の定式化と解析方法の妥当性について検討している。ここでは、Murray等^{25), 26)}の考え方をさらに拡張し、断面に固定した一つの任意点に関する方程式を誘導する。そして移動座標系⁴⁹⁾及び増分手法を使用し、ポテンシャルエネルギー増分の停留条件により増分つり合い方程式を導いている。これは、非弾性材料の応力-ひずみ関係が塑性増分理論によって表わされるように、非弾性材料の挙動そのものが増分的な性質をもっているので、非弾性挙動を表現する場合には、増分つり合い方程式によって解析する方が効果的と考えたものである。数値解析例を通して本解析結果と他の理論解析結果と比較検討し、本解析法の妥当性および有効性について検討する。

第3章は、局部変形を考慮した全体座屈挙動の解析を行なう上で必要な板要素の有限変位弾塑性解析法の定式化を行なっている。まず、はり要素と同様に板要素でも変位仮定の増分理論で定式化する必要から、ここでは通常のひずみ一定要素に、鈴木ら^{66), 67)}が採用しているmicropolar理論によるmicro変形に対応した面内回転剛性を導入し、一節点6自由度を有する三角形平板要素としている。また、板要素の座屈後の大変形挙動のほとんどは剛体変位であるので、北田ら⁵²⁾の方法に改良を加えて剛体変位を除去している。増分つり合い方程式は系の全ポテンシャルエネルギー増分の停留条件より誘導する。板要素の分割数による解析法の精度や収束性等を他の解析結果と比較検討し、本解析法の妥当性について検討する。

第4章は、局部座屈等による断面の変形を考慮して全体構造を解析する手法について述べている。まず、構造物を応力度や初期変形が大きく、局部座屈が生じそうな部分は板要素として細かく分割し、その他の部分ははり要素としてモデル化する。こうすることによ

り板要素のみの有限要素解析に比べ、自由度をあまり増やすことなく全体構造の解析が可能となる。そして、はり要素と板要素の結合部は変位の適合条件を満足するように、多点拘束処理の手法¹⁰⁵⁾を用いて結合部での自由度を一致させる。なお、ここで用いるはり要素は第2章で誘導した薄肉はり要素であり、板要素は第3章で求めた板要素である。両要素を結合した解析方法を用いて薄肉H形断面部材を解析し、板要素部分の要素の分割方法や結合位置と精度の関係等について理論解や他の解析結果と比較検討し、解析方法の妥当性について検討する。

第5章は、板要素相互の連成挙動や最大強度特性を明らかにするため、H形断面短柱の一樣圧縮の局部座屈実験を行なったものである。供試体は鋼H形断面でウェブとフランジの幅厚比を変化させた7体である。また、溶接集成による残留応力や初期たわみも測定し、最大強度や連成挙動に及ぼす影響も調べている。板要素による有限変位弾塑性解析法を用いてH形断面短柱全体を板要素に分割して解析し、板要素で立体構成した場合の解析法の妥当性について実験結果との比較検討を行なっている。また、H形断面短柱の最大強度をウェブとフランジの連成作用を考慮した等価幅厚比を用いて推定する方法について検討している。

第6章は、溶接集成のH形断面を有する鋼柱を供試体を選び、連成座屈挙動や耐荷力特性を明らかにするため板要素の幅厚比および部材の細長比を変化させて耐荷力実験を行なったものである。また、部材及び板としての初期たわみや溶接残留応力等の初期不整が連成座屈挙動や耐荷力に及ぼす影響を調べている。そして、板要素の連成を考慮した等価幅厚比により容易にH形断面短柱の最大強度を推定する方法を用いて、鋼柱の連成座屈強度を合理的に推定する方法を検討している。さらに、現行の道路橋示方書に規定されている連成座屈をする場合の部材の耐荷力評価式を用いて実験結果についての検討も行なっている。

第7章は、中心軸圧縮を受ける溶接H形断面柱の連成座屈強度についての設計強度式の提案を行なう。また、結合解析法を用いてH形断面鋼柱の連成座屈実験の解析を行なって局部変形が生じる場合の解析法の妥当性を示す。さらに、幅厚比及び細長比等をパラメータに選んでH形断面の短柱及び鋼柱のパラメータ解析を行なう。そして、提案強度式と耐荷力解析結果から得られた鋼柱の強度を比較検討し、提案式の妥当性について検証する。

第8章は、結論であり各章の結果をもとに本論文の総括を行なっている。

参考文献

- 1) 日本道路協会:道路橋示方書・同解説, 1980年2月.
- 2) AISC : Specifications for the Design, Fabrication and Erection of Structural Steel for Buildings, 1969.
- 3) AISI : Cold-Formed Steel Design Manual, Pt. I - Specification, 1968, Pt. V-Commentary, 1970.
- 4) Deutscher Ausschuss für Stahlbau(DASt.) : Beulsicherheitsnachweise für Platten, DASt-Richtlinie 012, 1978.
- 5) Standards Association of Australia: SAA Cold-Formed Steel Structures Code, AS1538, 1974.
- 6) European Convention for Constructional Steelwork : Introductory Report, 2nd, International Colloquim on Stability of the Structure, Liege, April, 1977.
- 7) Johnston, B. G. : Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures, 3rd., ed., John Wiley and Sons, Inc., New York, 1976.
- 8) Euler, L. : Sur la Force des Colonnes Acadmie Royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin, Memories, Vol.13, 1759, pp.252.
- 9) Engesser, F. : Zeitschrift für Architectur und Ingenieurwesen, 1889.
- 10) Engesser, F. : Schweizerische Bauzeitung, Vol.26, 1895.
- 11) Shanley, F. R. : Inelastic Column Theory, J. Aero. Sci., Vol.14, No.5, May, 1947, pp.261-268.
- 12) Beedle, L. S. and Tall, L. : Basic Column Strength, Proc. of ASCE, Vol.86, No. ST7, July, 1960, pp.139-173.
- 13) Prandtl, L. : Kipperscheinungen, Doctoral Thesis, Munich, Nov., 1899.
- 14) Michell, A. G. M. : Elastic Stability of Long Beams under Transverse Forces, Philosophical Magazine, Vol.48, Sep., 1899.
- 15) Timoshenko, S. P. : Beams without Lateral Support, Trans. ASCE, Vol.87, 1924.
- 16) Timoshenko, S. P. and Gere, J. M. : Theory of Elastic Stability, 2nd ed., McGraw-Hill, 1961.

- 17) Vlasov, V. Z. : Thin-Walled Elastic Beams, 2nd ed., Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1961 (奥村敏恵監訳:薄肉弾性ばりの理論, 技報堂, 1967年).
- 18) Galambos, T. V. : Structural Members and Frames, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1968 (福本嘯士・西野文雄共訳:鋼構造部材と骨組-強度と設計-, 丸善, 1970年).
- 19) Lee, G. C. : A Survey of the Literature on the Lateral Instability of Beams, Welding Research Council Bulletin, No. 36, Aug., 1960, pp. 50-59.
- 20) Galambos, T. V. : Inelastic Lateral Buckling of Beams, Proc. of ASCE, Vol. 89, No. ST5, Oct., 1963, pp. 217-242.
- 21) Fukumoto, Y. and Galambos, T. V. : Inelastic Lateral-Torsional Buckling of Beam-Columns, Proc. of ASCE, Vol. 92, No. ST2, April, 1966, pp. 41-61.
- 22) Barsoum, R. S. and Gallagher, R. H. : Finite Element Analysis of Torsional and Torsional-Flexural Stability Problems, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 2, No. 3, 1970, pp. 335-352.
- 23) Powell, G. and Klinger, R. : Elastic Lateral Buckling of Steel Beams, Proc. of ASCE, Vol. 96, No. ST9, Sep., 1970, pp. 1919-1932.
- 24) 結城皓曠・前田幸雄:薄肉断面構造の三次元挙動の解析, 土木学会論文報告集, 第224号, 1974年4月, pp. 67-78.
- 25) Murray, D. W. and Rajasekaran, S. : Technique for Formulating Beam Equations, Proc. of ASCE, Vol. 101, No. EM5, Oct., 1975, pp. 561-573.
- 26) Epstein, M. and Murray, D. W. : Three-Dimensional Large Deformation Analysis of Thin Walled Beams, Int. J. Solids Struct., Vol. 12, 1976, pp. 867-876.
- 27) 藤本盛久・和田 章・岩田 衛・中谷文俊:鋼構造骨組の三次元非線形解析, 日本建築学会論文報告集, 第227号, 1975年1月, pp. 75-85.
- 28) 前川幸次・吉田 博:鋼I形はりの横倒れ安定性の評価方法に関する研究, 土木学会論文報告集, 第312号, 1983年3月, pp. 55-63.
- 29) Yoshida, H. and Maegawa, K. : Lateral Instability of I-Beams with Imperfections, Proc. of ASCE, Vol. 110, No. ST8, Aug., 1984, pp. 1875-1892.
- 30) Vinnakota, S. : Inelastic Stability of Laterally Unsupported I-Beams,

- Computer & Structures, Vol.7, No.3, June, 1977, pp.377-389.
- 31) Komatsu, S. and Sakimoto, T. : Nonlinear Analysis of Spatial Frames Consisting of Members with Closed Cross-Sections, Proc. of JSCE, No.252, Aug., 1976, pp.143-157.
 - 32) Trahair, N. S. : Elastic Stability of Continuous Beams, Proc. of ASCE, Vol. 95, No. ST6, June, 1969, pp.1295-1312.
 - 33) Bryan, G. H. : On the Stability of a Plane Plate under Thrust in its own Plane with Application to the Buckling of the Side of a Ship, Proc. London Math. Soc., Vol.22, 1891, pp.54-67.
 - 34) Bleich, F. : Theorie und Berechnung der eisernen Brücken, Julius Springer, Berlin, 1924.
 - 35) Timoshenko, S. P. : Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie, Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1910.
 - 36) Ueda, Y. and Tall, L. : Inelastic Buckling of Plates with Residual Stresses, Publications, IABSE, Zürich, 1967, pp.211-254.
 - 37) Nishino, F. and Tall, L. : Residual Stress and Local Buckling Strength of Steel Columns, Trans. JSCE, No.172, 1969.
 - 38) 山本善之:初期たわみを有する柱と板の塑性変形を伴う挫屈, 造船協会論文集, 第97号, 1955年5月, pp.57-68.
 - 39) von Kármán, Th., Schechler, E. E. and Donnell, L. H. : The Strength of the Thin Plate in Compression, Trans. ASCE, 54, 1932, pp.53-56.
 - 40) Winter, G. : Strength of Thin Steel Compression Flanges, Trans., ASCE, Vol.112, Paper No.2305, 1947, pp.527-576.
 - 41) Dwight, J. B. and Moxham, K. E. : Welded Steel Plates in Compression, The Structural Engineer, Vol.47, No.2, Feb., 1969, pp.49-66.
 - 42) 青木徹彦・福本嘯士:鋼柱の座屈強度のばらつきにおよぼす残留応力分布について, 土木学会論文報告集, 第201号, 1972年5月, pp.31-41.
 - 43) 藤田 譲・吉田宏一郎・高沢 :不整量を有する構造物の強度について-初期撓みを有する柱の圧縮強度 -, 日本造船学会論文集, 第132号, 1973年, pp.299-306.
 - 44) 青木徹彦・福本嘯士:溶接H形鋼柱の座屈強度分布について, 土木学会論文報告集, 第222号, 1974年2月, pp.37-48.

- 45) Levy, S. : Bending of Rectangular Plates with Large Deflection , NACA, No. 737, 1942.
- 46) Coan, K. M. : Large Deflection Theory for Plates with Small Initial Curvature Loaded in Edge Compression, J. Applied Mech., Vol. 18, No. 2, June, 1951, pp. 143-151.
- 47) Yamaki, N. : Postbuckling Behavior of Rectangular Plates with Initial Curvature Loaded in Edge Compression, J. Applied Mech., Vol. 26, No. 3, Sep., 1959, pp. 407-414, June, 1960, pp. 335-342.
- 48) 川井忠彦・吉村信敏:有限要素法による平板の大たわみ問題の解析, 生産研究, 20巻8号, 1968年, pp. 383-387.
- 49) Murray, D. W. and Wilson, E. L. : Finite Element Postbuckling Analysis of Thin Elastic Plates, AIAA J., Vol. 7, No. 10, Oct., 1969, pp. 1915-1920.
- 50) 大坪英臣:平板の大たわみ問題の一解析法 - 特に平板の圧縮最終強度について-, 日本造船学会論文集, 第130号, 1971年12月, pp. 173-182.
- 51) 岡村宏一・吉田公憲:圧縮を受ける長方形鋼板の終局強度, 土木学会論文報告集, 第206号, 1972年10月, pp. 1-11.
- 52) 小松定夫・北田俊行・宮崎清司:残留応力および初期たわみを有する圧縮板の弾塑性解析, 土木学会論文報告集, 第244号, 1975年12月, pp. 1-14 .
- 53) 上田幸雄・安川 渡・矢尾哲也・池上 博・大南亮一:圧縮を受ける正方形板の最終強度に関する研究(第1報), 日本造船学会論文報告集, 第137号, 1975年6月, pp. 210-221, (第2報), 第140号, 1976年12月, pp. 205-209.
- 54) Akay, H. U., Johnson, C. P. and Will, K. M. : Lateral and Local Buckling of Beams and Frames, Proc. of ASCE, Vol. 103, No. ST9, Sep., 1977, pp. 1821-1832.
- 55) Hancock, G. J. : Local, Distortional, and Lateral Buckling of I-Beams, Proc. of ASCE, Vol. 104, No. ST11, Nov., 1978, pp. 1787-1798.
- 56) Tien, S. T. and Wang, S. T. : Local Buckling of Beams under Stress Gradient, Proc. of ASCE, Vol. 105, No. ST8, Aug. 1979, pp. 1571-1588.
- 57) Hancock, G. J., Bradford, M. A. and Trahair, N. S. : Web Distortion and Flexural-Torsional Buckling, Proc. of ASCE, Vol. 106, No. ST7, July., 1980, pp. 1557-1571.
- 58) Lay, M. G. : Flange Local Buckling in Wide-Flange Shapes, Proc. of ASCE,

Vol. 91, No. ST6, Dec., 1965, pp. 95-116.

- 59) 加藤 勉:面内圧縮を受ける板の塑性破壊について,日本建築学会論文報告集,第107号,1965年1月,pp. 37-42.
- 60) 田中 尚・高梨晃一:プラスチックヒンジにおけるウェブ幅,フランジ幅の制限に関する研究(3),日本建築学会論文報告集,第107号,1965年1月,pp. 31-36.
- 61) 三谷 勲・牧野 稔・松井千秋:H形鋼柱の局部座屈後の変形性状に関する解析的研究,日本建築学会論文報告集,第296号,1980年10月,pp. 37-47.
- 62) 宇佐美勉・土屋信洋・大谷恭弘・福本嘔士:薄板集成短柱の弾塑性有限変位解析,土木学会論文集,第362号/(I-4),1985年10月,pp. 293-302.
- 63) 中井 博・北田俊行・酒造敏廣:圧縮を受ける薄肉箱形短柱の終局強度特性と終局強度算定法に関する研究,構造工学論文集,Vol. 31A, 1985年3月,pp. 65-77.
- 64) 藤本盛久・須藤福三・和田 章:繰返し荷重を受ける鋼構造骨組の3次元弾塑性有限変位解析に関する研究,JSSC第13回マトリックス解析法研究発表論文集,1979年6月,pp. 129-134.
- 65) 吉田 裕・増田陳紀・松田 隆:薄板で構成される立体構造の弾塑性・大変位離散化要素解析法,土木学会論文報告集,第288号,1979年8月,pp. 41-45.
- 66) 鈴木敏郎・金子洋文:有限要素法による部材構成板要素の座屈及び座屈後挙動の大変形解析,日本建築学会論文報告集,第316号, 1982年6月,pp. 9-17.
- 67) 鈴木敏郎・金子洋文:鋼構造部材構成板要素相互の弾塑性連成局部座屈挙動の解析法,日本建築学会論文報告集,第323号,1983年1月,pp. 23-31.
- 68) Bleich, F.: Buckling Strength of Metal Structures, McGraw-Hill, 1952.
- 69) Goldberg, E. E., Bogdanoff, J. L. and Glauz, W. D.: Lateral and Torsional Buckling of Thin-Walled Beams, Pub. of IABSE, Vol. 24, 1964, pp. 91-100.
- 70) Rajasekaran, S. and Murray, D. W. : Coupled Local Buckling in Wide-Flange Beam-Columns, Proc. of ASCE, Vol. 99, No. ST6, June, 1973, pp. 1003-1023.
- 71) Wang, S. T., Yost, M. I. and Tien, Y. L. : Lateral Buckling of Locally Buckled Beams using Finite Element Techniques, Computer & Structures, Vol. 7, No. 3, 1977, pp. 469-475.
- 72) Wang, S. T. and Pao, H. Y. : Torsional-Flexural Buckling of Locally Buckled Columns, Computer & Structures, Vol. 11, No. 1-2, 1980, pp. 127-136.
- 73) 吉田 博:H型鋼柱の局部座屈と曲げ座屈の連成座屈強度,土木学会論文報告集,

第243号, 1975年11月, pp19-32.

- 74) Maeda, Y., Hayashi, M. and Arioka, K. : Elasto-Plastic Analysis of Thin-Walled Structures by Finite Strip Method, Technology Reports of the Osaka Univ., Vol. 26, No. 1334, 1976, pp. 605-615.
- 75) Wang, S. T. : Nonlinear Analysis of Locally Buckled Thin-Walled Structures, Proc. Int. Conf. on Compu. Meth. in Nonlinear Mechanics, Austin, Texas, 1974, pp. 809-818.
- 76) Skaloud, M. and Naprstek, J. : Limit State of Compressed Thin-Walled Steel Columns with regard to the Interaction between Column and Plate Buckling, Preliminary Report of Inter. Collo. on Stability of Steel Structures, Liege, Belgium, April, 1977, pp. 405-417.
- 77) Kalyanaraman, V., Pekoz, T. and Winter, G. : Unstiffened Compression Elements, Proc. of ASCE, Vol. 103, No. ST9, Sep., 1977, pp. 1833-1848.
- 78) Hancock, G. J. : Interaction Buckling in I-Section Columns, Proc. of ASCE, Vol. 107, No. ST1, Jan., 1981, pp. 165-179.
- 79) Little, G. H. : The Strength of Square Steel Box Columns - Design Curves and their Theoretical Basis, The Structural Engineer, Vol. 57A, No. 2, Feb., 1979, pp. 49-61.
- 80) 藤本盛久・須藤福三・和田 章: 局部座屈を考慮したH形鋼部材の座屈解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 1977年10月.
- 81) 和田 章: 繰返し荷重を受ける鋼構造骨組の3次元弾塑性大変形解析に関する研究, 東京工業大学学位論文, 1981年5月.
- 82) Skaloud, M. and Zörnerova, M. : Experimental Investigation into the Interaction of the Buckling of Compressed Thin Walled Columns with the Buckling of their Plate Elements, ACTA TECHNICA CSAV, No. 4, 1970.
- 83) Graves Smith, T. R. : Local Buckling of Thin-Walled Columns Part II, The Ultimate Strength of Locally Buckled Columns of Various Slenderness Ratios, CIRIA Research Report, No. 12, May, 1968.
- 84) DeWolf, J. T., Pekoz, T. and Winter, G. : Local and Overall Buckling of Cold-Formed Members, Proc. of ASCE, Vol. 100, No. ST10, Oct., 1974, pp. 2017-2036.
- 85) Braham, M., Rondal, J. and Massonnet, C. : Large Size Buckling Tests on Steel

- Columns with Thin-Walled Rectangular Hollow Sections, paper presented at International Conference on Thin-Walled Structures, Univ. of Strathclyde, April, 1979, pp.3-13.
- 86) Klöppel, K., Schmied, R. and Schubert, J. : Die Traglast mittig und außermittig gedrückter dünnwandiger Stützen mit Kastenförmigem Querschnitt im überkritischen Bereich unter Verwendung der nichtlinearen Beultheorie, Teil II : Experimentelle Untersuchungen, Vergleich der experimentellen und theoretischen Ergebnisse, Der Stahlbau, 38, H.1, H.3, 1969.
- 87) Ingvarsson, L. : Welded Box Columns of High Strength Steel, Bulletin No.120, Dept. of Building Statics and Structural Engineering, The Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 1977.
- 88) 宇佐美勉・福本嘯士・青木徹彦:溶接箱形断面柱の局部座屈と全体座屈の連成強度に関する実験的研究, 土木学会論文報告集, 第308号, 1981年4月, pp. 47-58.
- 89) 宇佐美勉・福本嘯士:鋼圧縮部材の連成座屈強度実験と有効幅理論による解析, 土木学会論文報告集, 第326号, 1982年10月, pp. 41-50.
- 90) 宇佐美勉・福本嘯士・青木徹彦・松川昭夫:補剛箱形断面偏心圧縮柱の強度に関する実験的研究, 土木学会論文集, 第350号/(I-2), 1984年10月, pp. 197-205.
- 91) 宇佐美勉・土屋信洋・福本嘯士:鋼圧縮部材の連成座屈挙動の理論的研究, 土木学会論文集, 第362号/(I-4), 1985年10月, pp. 303-312.
- 92) Nakai, H., Kitada, T. and Miki, T. : Interaction Curve of Thin-Walled Box Stub-Column Subjected to Compression and Bending for Applying to Overall Buckling Analysis of Columns, Proc. of JSCE, No362/(I-4) , Oct., 1985, pp. 65-73.
- 93) Winter, G. : Thin Walled Structures - Theoretical Solutions and Test Results, Preliminary Publication of Eighth Congress, International Association for Bridge and Structural Engineering, 1968, pp.101-112.
- 94) 北田俊行:圧縮板の設計耐荷力曲線の統一化について, 土木学会第40回年次学術講演会概要集, 第I部, 1985年9月.
- 95) 金井道夫:道路橋示方書 II 鋼橋編改訂の背景と運用, 橋梁と基礎, Vol. 15, No. 2, 1981年2月, pp. 11-15, No. 3, 1981年3月, pp. 6-13.
- 96) 伊藤文人:局部座屈と全体座屈の連成問題, 橋梁と基礎, Vol. 15, No. 2,

- 1981年2月, pp. 16-18.
- 97) 小松定夫:薄肉構造物の理論と計算 I, 山海堂, 1969年.
 - 98) 山田嘉昭:塑性・粘弾性, コンピュータによる構造工学講座 II-2-A, 培風館, 1972年.
 - 99) 山田嘉昭:塑性力学, 日刊工業新聞社, 1960年.
 - 100) 宇佐美勉:板要素の抵抗強度の評価と信頼性, 土木学会第35回年次学術講演会概要集, 第I部, 1980年9月.
 - 101) 上田幸雄:残留応力と座屈(局部座屈), JSSC, Vol. 3, No. 16, 1967.
 - 102) Zienkiewicz, O. C. : The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, 1971 (邦訳:基礎工学におけるマトリックス有限要素法, 培風館, 1974年).
 - 103) Davids, A. J. and Hancock, G. J. : Compression Tests of Short Welded-Sections, Proc. of ASCE, Vol. 112, No. 5, May, 1985, pp. 960-976.
 - 104) Macneal, R. H. : The Nastran Theory of Manual, N. A. S. A., April, 1972.
 - 105) 山尾敏孝・崎元達郎:溶接箱形断面柱の連成座屈強度実験, 土木学会論文報告集, 第335号, 1983年7月, pp. 195-198.
 - 106) Sakimoto, T., Yamao, T., Kikuchi, R. and Sakata, T. : Nonlinear Analysis of Thin-Walled Frames and Members with Arbitrary Open Cross Sections, Proc. of JSCE, No. 362/(I-4), Oct., 1985, pp. 139-147.
 - 107) 崎元達郎・山尾敏孝・坂田 力:薄肉開断面部材の非線形解析, 構造工学論文集, Vol. 32A, 1986年3月, pp. 255-264.
 - 108) 山尾敏孝・崎元達郎:板要素とはり要素の結合による薄肉鋼構造物の有限変位弾塑性解析, 構造工学論文集, Vol. 32A, 1986年3月, pp. 291-302.
 - 109) Yamao, T. and Sakimoto, T. : Nonlinear Analysis of Thin-Walled Structures by a Coupled Finite Element Method, Proc. of JSCE, No. 374/(I-6), Oct., 1986.

第2章 薄肉開断面三次元骨組構造の弾塑性有限変位解析

2.1 概 説

骨組やはりの鋼構造物の終局状態での挙動や強度を求めることができるならば、終局状態を基準にした合理的な設計が可能となる。しかし、その終局強度を求めるためには部材の塑性化による材料学的非線形性と、つり合いに影響を及ぼす大きな変位による幾何学的非線形性の両者を考慮した解析が必要となる。通常、鋼構造部材に使用される I 形はりや、はり一柱では横ねじれ座屈強度が問題となり、これまで多くの研究が行なわれてきた。さらに、有限要素法とコンピュータの発達により非線形問題等の複雑な問題の解析が可能になった。たとえば、変断面ばりの横ねじれ座屈解析¹⁾や残留応力を考慮したはりや、はり一柱の非弾性解析の研究^{2), 3)}がある。また、薄肉開断面部材を有する三次元骨組構造の非線形解析も行なわれるようになり、残留応力や初期たわみなどの初期不整を考慮した鋼構造物の全体の座屈挙動や耐荷力が解析できるようになった。このような問題では有限要素法による定式化が有効であるため、これまで弾性・非弾性状態でのはり一柱要素の剛性マトリックスの誘導に努力が払われてきた。そして、そのつり合い式の誘導はポテンシャルエネルギーの原理あるいは仮想仕事の原理を用いて行なっている場合が多い。薄肉開断面部材の弾性有限変位解析に関しては、はりの横ねじれ座屈の解析や柱のねじれ座屈の解析等の研究^{4)~10)}がある。また、材料の塑性化を考慮した弾塑性有限変位解析に関しては、藤本・和田ら¹¹⁾の研究およびMurrayら^{12), 13)}の研究があり、はりや柱の耐荷力挙動の解析を行なっている。また、ねじれ耐荷力に関しては、解析と実験を行なったKlöppel and Unger¹⁴⁾の研究、伝達マトリックス法を用いた有限変位弾塑性解析法による吉田・前川^{15), 16)}の研究、差分法を用いた有限変位弾塑性解析法によるVinnakota¹⁷⁾の研究などがある。しかし、これらの解析法では必ずしも定式化が簡単でない。また、材料の弾塑性に関しては一軸応力状態のみで降伏を判定しており、曲げとねじり等の組み合わせ荷重を受ける応力状態ではせん断応力度が降伏に影響すると考えられる。

一方、薄肉弾性はり理論²⁷⁾においては、座標軸を断面の主軸にとり、軸力及び二軸曲げについては断面の図心軸に関して考え、ねじりモーメントについてはせん断中心に関して考えることにより、その取り扱いが簡単になる。これは、断面の一次モーメント、相乗モーメント及びそり一次モーメントの項が 0 になることによるものである。しかし、はり断

面が塑性化をはじめると、その塑性域の発達とともにせん断中心軸及び図心軸の位置や方向が連続的に変化するため、これらの二軸はその有効性を失うことになる。一般に、非弾性域ではすべての断面特性は、幾何学的なものとともに応力－ひずみ関係を表わす材料定数を考慮した数値積分によって決定される。Murray等^{9),12)}は、断面に固定した二つの任意点に関するはりの方程式を誘導しており、この任意点を中立軸とせん断中心にとることにによりMurray等のはり方程式が古典的な弾性方程式に一致することを示している。また、そのつり合い式は増分形で表わすのは複雑であると考え、全変位に対して仮想仕事法により誘導している。

本章では、任意形状の薄肉開断面部材の三次元有限変位弾塑性解析法の定式化について記述する。ここでは、Murray等^{9),12)}の考え方をさらに拡張し、断面に固定した一つの任意点に関する方程式を誘導した。古典的なはりの方程式の結果と逐一对応させる必要がなければ、このはり方程式はMurray等によるはり方程式に比べてさらに簡単な式となる。そして移動座標系^{21),22)}及び増分手法を使用し、ポテンシャルエネルギー増分の停留条件により増分つり合い方程式を導いた¹⁸⁾。これは、非弾性材料の応力－ひずみ関係が塑性増分理論によって表わされるように、非弾性材料の挙動そのものが増分的な性質をもっているので、非弾性挙動を表現する場合には、増分つり合い方程式によって解析する方が効果的と考えた。

本解析法の主な特徴として以下のようなものが挙げられる。

- (i) 任意形状開断面部材の非弾性そりねじり挙動を解析できる。
- (ii) 相当応力度、相当ひずみの概念を用いて二軸応力状態での材料の弾塑性ひずみ硬化挙動を、単軸応力状態の硬化型弾塑性関係で表わしている。
- (iii) 増分荷重ごとに部材断面の応力分布及び塑性域の発達を、全荷重過程を通して追跡し表示することができる。
- (iv) 任意の分布形状を持つ残留応力度やプレストレスの影響を考慮できる。
- (v) ひずみの反転の影響を考慮できる。
- (vi) 部材断面の図心軸以外の任意点に荷重が作用しても解析できる。

以上のように定式化した解析法について、数値解析例を通して本解析結果と他の理論解析結果と比較検討し、本解析法の妥当性、有効性について検討する。

2.2 つり合い方程式の誘導

2.2.1 仮定と座標系の設定

次に示すような仮定を設けた。

- (i) 部材は薄肉開断面である。
- (ii) 材料の弾塑性ひずみ硬化挙動は、硬化型弾塑性応力－ひずみ関係によって表わす。
- (iii) 断面が一部塑性化した後も曲げひずみは平面保持し、そりによるひずみは弾性理論のそり関数で表わせる。
- (iv) 曲げ及び曲げねじりによる板厚中心面内のせん断応力によるせん断ひずみは小さく無視できる。
- (v) 降伏基準は、von Misesの降伏条件式が成立し、非弾性域ではPrandtl-Reussの応力－ひずみ式が成立する。
- (vi) 断面の一部が塑性化した後も、St. Venantのねじりによるせん断ひずみは板厚方向に直線分布する。
- (vii) 変位は大きくてもひずみは小さい。
- (viii) 局部座屈は生じず、断面形状の変化は無視できる。

本解析では、軸力、二軸方向の曲げ及びねじれを受ける一般的な荷重条件のもとでの、はりや柱からなる薄肉立体骨組構造物の挙動の解析を扱う。骨組構造物は図2.1に示すようなはり要素に分割してモデル化する。これは、骨組構造物を対象にして挙動を解析する場合、載荷状態により部材の変形状態や塑性域の広がりおよび部材内部の応力状態は複雑なものとなり、これを連続な1つの関数により表わすことは困難である。それよりも、1部材を細かく要素にわけ、その要素ごとに独立な関数を用い、各要素間での変位や回転等の連続を満たす方が、複雑な挙動を追跡できることになる。

座標系は、図2.1に示すような空間固定の全体座標系(X, Y, Z)および荷重増分ごとに得られる変形後の物体に固定した局所座標系(x, y, z)を設定する。局所座標系は図2.2に示すような a 点を原点として要素両端の断面の同一の点を結ぶ直線を x 軸とした。そして、これに直交するような面の中に右手系の法則を満たすように y, z 軸を定義する。また、局所座標系における節点力増分およびそれに対応する節点変位増分を図2.3に示すように表わすものとする。全体座標系においても同様に定義する。また、図2.2に示すような荷重経路途中の変形状態 i を次の $i+1$ の応力、ひずみおよび変位を決定する際の初期応力状態と考え、

次の*i*+1状態をLagrangian表示するものとする²⁴⁾。

なお、以下の諸式においては、記号の上に $\bar{}$ を付したものは全変位、全ひずみ、全応力及び全外力などを表わし、付さないものは、すべてそれらの増分量を表わすものとする。

2.2.2 ひずみと変位の関係

図2.4(a)に示すような断面の基準点（例えば図心） O が三次元的変位 $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{\phi})$ を生じた時の断面の任意点 $P(\eta, \zeta)$ の変位 $(\bar{u}_p, \bar{v}_p, \bar{w}_p)$ を求める。

O 点が変位して O' 点に移動した時、 P 点は P'' 点に移動し、かつ $\bar{\phi}$ だけ回転して P' に移るものとすれば図2.4(a)に示す幾何学的な関係により

$$\bar{u}_p = \bar{u} - \bar{u}_o = \bar{u} - \eta(1 - \cos\bar{\phi}) - \zeta\sin\bar{\phi} \quad (2.1a)$$

$$\bar{w}_p = \bar{w} + \bar{w}_o = \bar{w} + \eta\sin\bar{\phi} - \zeta(1 - \cos\bar{\phi}) \quad (2.1b)$$

となる。なお、 \bar{v}_o , \bar{w}_o は図2.4(b)より

$$\bar{v}_o = \eta - \zeta\cos(\bar{\phi} + \beta) = \eta - \zeta(\cos\bar{\phi}\cos\beta - \sin\bar{\phi}\sin\beta) = \eta(1 - \cos\bar{\phi}) + \zeta\sin\bar{\phi} \quad (2.2a)$$

$$\bar{w}_o = \eta\sin(\beta + \bar{\phi}) - \zeta = \eta(\sin\beta\cos\bar{\phi} + \cos\beta\sin\bar{\phi}) - \zeta = \eta\sin\bar{\phi} + \zeta(\cos\bar{\phi} - 1) \quad (2.2b)$$

である。また \bar{w}_t は

$$\begin{aligned} \bar{w}_t &= -\bar{u}\sin\alpha + \bar{w}\cos\alpha + \rho\sin(\alpha - \beta) - \rho\sin(\alpha - \beta - \bar{\phi}) \\ &= -\bar{u}\sin\alpha + \bar{w}\cos\alpha + \rho\sin(\alpha - \beta)(1 - \cos\bar{\phi}) + r\sin\bar{\phi} \\ &\approx -\bar{u}\sin\alpha + \bar{w}\cos\alpha + r\bar{\phi} \end{aligned} \quad (2.3)$$

と表わせる。いま軸方向変位を \bar{u}_p とすると、仮定(iv)のせん断ひずみが0より

$$\partial\bar{u}_p/\partial s + \partial\bar{w}_t/\partial x = 0 \quad (2.4)$$

ここに s は任意点 D を原点とし、肉厚中心線に沿う曲線座標である。式(2.4)に式(2.3)を代入すると

$$\partial\bar{u}_p/\partial s = -\partial\bar{w}_t/\partial x = \bar{v}'\sin\alpha - \bar{w}'\cos\alpha - r\bar{\phi}' \quad (2.5)$$

となる。ここに $()' = d/dx$ を表わす。上式を積分して

$$\bar{u}_p|_0^s = \bar{v}'\int_0^s \sin\alpha ds - \bar{w}'\int_0^s \cos\alpha ds - \bar{\phi}'\int_0^s r ds \quad (2.6)$$

また、図2.4(b)より

$$dy/ds = -\sin\alpha, \quad dz/ds = \cos\alpha \quad (2.7)$$

であるから、

$$\bar{u}_p = \bar{u}_D - \bar{v}'(y - y_D) - \bar{w}'(z - z_D) + \omega_{DS}\bar{\phi}' \quad (2.8)$$

となる。ここに $\omega_{DS} = -\int_0^s r ds$ で P 点の任意点 O に対するそり関数である。ところでこの場

合O点($x=y=0$)の軸方向変位 \bar{u} は

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + y_0 \bar{v}' + z_0 \bar{w}' + \omega_{D0} \bar{\phi}' \quad (2.9)$$

となり、かつO点のそり関数は0より $\omega_{D0} = 0$ として、上式を式(2.8)に代入して \bar{u}_0 を消去すると

$$\bar{u}_p = \bar{u} - y \bar{v}' - z \bar{w}' + \omega_{DS} \bar{\phi}' \quad (2.10)$$

となる。ここで、図2.4(a)より

$$y = \eta \cos \bar{\phi} - \zeta \sin \bar{\phi}, \quad z = \eta \sin \bar{\phi} + \zeta \cos \bar{\phi} \quad (2.11)$$

であるから、式(2.10)は次式で表わされる。

$$\bar{u}_p = \bar{u} - (\eta \cos \bar{\phi} - \zeta \sin \bar{\phi}) \bar{v}' - (\eta \sin \bar{\phi} + \zeta \cos \bar{\phi}) \bar{w}' + \omega \bar{\phi}' \quad (2.12)$$

ただし、 ω は実際の計算に於いて、任意点Oを断面の中立軸に選び計算を行なっているため、単位そり関数は従来の薄肉はり理論によって求められる。

一方、変位と軸方向のひずみの関係は、

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_p &= \bar{u}_p' + \frac{1}{2} \{ (\bar{u}_p')^2 + (\bar{v}_p')^2 + (\bar{w}_p')^2 \} + (\text{higher order terms}) \\ &\approx \bar{u}_p' + \frac{1}{2} \{ (\bar{v}_p')^2 + (\bar{w}_p')^2 \} \end{aligned} \quad (2.13)$$

であるから、上式に式(2.1)と式(2.12)を代入して整理すると次式となる。

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon} &= \bar{u}' - (\eta - \zeta \bar{\phi}) \bar{v}'' - (\zeta + \eta \bar{\phi}) \bar{w}'' + \frac{1}{2} \{ (\bar{v}_p')^2 + (\bar{w}_p')^2 \} + \frac{1}{2} (\eta^2 + \zeta^2) (\bar{\phi}')^2 \\ &\quad + \omega \bar{\phi}'' \end{aligned} \quad (2.14)$$

ここで、 $\sin \bar{\phi}$, $\cos \bar{\phi}$ などは級数に展開し、最終的に変位の三次以上の項を省略した。

次にひずみ増分を考える。式(2.14)を空間固定座標でのひずみのLagrangian表示と考えれば、この場合には一般に次式となる。

$$\begin{aligned} \epsilon &= u' - (\eta - \zeta \bar{\phi}) v'' - (\zeta + \eta \bar{\phi}) w'' + (\zeta \bar{v}'' - \eta \bar{w}'') \bar{\phi} + \bar{v}' v' + \bar{w}' w' + (\eta^2 + \zeta^2) \bar{\phi}' \bar{\phi}' \\ &\quad + \omega \bar{\phi}'' \end{aligned} \quad (2.15)$$

しかし、本解析では荷重段階毎に座標系とともに移動し、その座標系から次の段階の変位をLagrangian表示するので、ひずみ増分は式(2.14)の全変位を変位増分とおいて、次式で表わされる。

$$\epsilon = u' - (\eta - \zeta \bar{\phi}) v'' - (\zeta + \eta \bar{\phi}) w'' + \frac{1}{2} \{ (\bar{v}')^2 + (\bar{w}')^2 \} + \frac{1}{2} (\eta^2 + \zeta^2) (\bar{\phi}')^2 + \omega \bar{\phi}'' \quad (2.16)$$

特に荷重増分を適切にとることにより、変位増分が微小になる場合には、式(2.16)の二次式は省略でき、次式のようにひずみ増分 ϵ が表わせる。

$$\epsilon = u' - \eta v'' - \zeta w'' + \omega \bar{\phi}'' \quad (2.17)$$

一方、St. Venantのねじりによるせん断ひずみ増分 γ は仮定より次式で与えられる。

$$\gamma = -2n\phi' \quad (2.18)$$

ここに n は、図2.6(a)に示すように板厚中心線に沿った曲線座標の接線に垂直な方向の座標を表わす。

2.2.3 応力増分とひずみ増分の関係

本解析では、降伏条件に対して軸方向応力度 σ とSt. Venantのねじりによるせん断応力度 τ だけを考慮している。さらに、この二軸応力状態での材料の弾性ひずみ硬化挙動を、図2.5に示す相当応力度-相当ひずみのTri-linear関係でモデル化する。また、仮定より弾性域ではHookeの法則が、塑性域ではPrandtl-Reussの式およびvon Misesの降伏条件式が成立するものとする。そうすると、応力増分とひずみ増分の関係は次式で表わされる。なお誘導の詳細は付録2.1に示す。

$$\begin{bmatrix} \sigma \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(1-D_1) & -ED_2 \\ -ED_2 & G(1-D_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (2.19a)$$

または、

$$\sigma = D\varepsilon \quad (2.19b)$$

ただし、 E と G はそれぞれヤング率、せん断弾性係数である。なお、 $D_1 \sim D_3$ の係数は次の3つの領域、すなわち弾性域、塑性域、およびひずみ硬化域に、相当応力度 $\bar{\sigma}_E$ と相当塑性ひずみ $\bar{\varepsilon}_E$ により分けられ、決定される。

$$(i) \text{ 弾性域 } (\bar{\varepsilon}_E = 0, \bar{\sigma}_E < \bar{\sigma}_y)$$

$$D_1 = D_2 = D_3 = 0 \quad (2.20)$$

$$(ii) \text{ 塑性域 } (0 < \bar{\varepsilon}_E < \bar{\varepsilon}_{st} - \bar{\varepsilon}_y, \bar{\sigma}_E = \bar{\sigma}_y)$$

$$D_1 = \frac{E\bar{\sigma}^2}{3GB}, D_2 = \frac{\bar{\sigma}}{B}\bar{\tau}, D_3 = \frac{3\bar{\tau}^2}{B}$$

$$B = \frac{H'\bar{\sigma}^2}{3G} + \frac{E\bar{\sigma}^2}{3G} + 3\bar{\tau}^2 \quad (H' = 0) \quad (2.21)$$

$$(iii) \text{ ひずみ硬化域 } (\bar{\varepsilon}_{st} - \bar{\varepsilon}_y \leq \bar{\varepsilon}_E, \bar{\sigma}_E = \bar{\sigma}_{yst})$$

D_1, D_2, D_3 は塑性域と同じで、

$$H' = \frac{E\bar{E}_{st}}{E - \bar{E}_{st}}, \bar{\sigma}_{yst} = \bar{\sigma}_y + H'(\bar{\varepsilon}_E - \bar{\varepsilon}_{st} + \bar{\varepsilon}_y) \quad (2.22)$$

なお、 H' は図2.5に示すように引張試験より得られる応力-ひずみ図の勾配であり、 E_{st} はひずみ硬化係数である。また、相当応力度 $\bar{\sigma}_E$ 、相当塑性ひずみ $\bar{\epsilon}_E$ は次式で与えられる。

$$\bar{\sigma}_E = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad (2.23a)$$

$$\bar{\epsilon}_E = \Sigma \bar{\epsilon}_E = \Sigma \frac{2}{3} \bar{\sigma}_E \lambda \quad (2.23b)$$

上式の Σ は各々の荷重増分で得られる和を示す。また、係数 λ はPrandtl-Reussの式により計算される正の係数で次式で与えられる。

$$\lambda = \frac{\{(E\bar{\sigma}/2G)\epsilon + \frac{3}{2}\bar{\tau}\gamma\}}{H'\bar{\sigma}_E^2/3G + E\bar{\sigma}^2/3G + 3\bar{\tau}^2} \quad (2.24)$$

2.2.4 断面力増分と応力増分の関係

断面力増分 $r^T = N, -M_z, M_y, M_x, T$ と変形増分 $d^T = u', -v'', -w'', \phi'', \phi'$ の関係について図2.6(a)に示す単位長さの要素が一部塑性化した状態の時を考えて求める。断面力増分は応力増分を断面全体にわたって積分して求まるので、次式で表わされる。

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma dA, \quad M_z = -\int_A \eta \sigma dA, \quad M_y = \int_A \zeta \sigma dA \\ M_x &= \int_A \omega \sigma dA, \quad T = 2 \int_A \tau n dA \end{aligned} \quad (2.25)$$

ここに、 dA は実際の計算の時に細要素の面積、 M_x はバイモーメント、 T はSt. Venantのねじりモーメントである。

以上をマトリックス表示すると、

$$r = \int_A C^T \sigma dA \quad (2.26)$$

ここに、

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \eta & \zeta & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2n \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

また、添字 T はマトリックスの転置を示す。式(2.17)と式(2.18)からひずみ増分と変形増分の関係を求めると、

$$\begin{bmatrix} \epsilon \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \eta & \zeta & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ -v'' \\ -w'' \\ \phi'' \\ \phi' \end{bmatrix} \quad (2.28a)$$

となる。または、

$$\epsilon = Cd \quad (2.28b)$$

である。式(2.19b)と式(2.28b)を式(2.26)に代入すると断面力は次式となる。

$$\begin{aligned}
r &= \int_A C^T D C dA \\
&= \left\{ \int_A C^T (D_e + D_p) C dA \right\} d
\end{aligned} \tag{2.29a}$$

または、

$$r = S d \tag{2.29b}$$

なお、この S は部分的に降伏した単位長さの部材の接線剛性を表わしており次式のようになる。

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} \\ & & & S_{44} & S_{45} \\ & & & & S_{55} \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

ここに

$$\begin{aligned}
S_{11} &= E \int_A (1-D_1) dA, \quad S_{12} = E \int_A \eta (1-D_1) dA, \quad S_{13} = E \int_A \zeta (1-D_1) dA \\
S_{14} &= E \int_A \omega (1-D_1) dA, \quad S_{15} = -2E \int_A n D_2 dA, \quad S_{22} = E \int_A \eta^2 (1-D_1) dA \\
S_{23} &= E \int_A \eta \zeta (1-D_1) dA, \quad S_{24} = E \int_A \eta \omega (1-D_1) dA, \quad S_{25} = -2E \int_A n \eta D_2 dA \\
S_{33} &= E \int_A \zeta^2 (1-D_1) dA, \quad S_{34} = E \int_A \zeta \omega (1-D_1) dA, \quad S_{35} = -2E \int_A n \zeta D_2 dA \\
S_{44} &= E \int_A \omega^2 (1-D_1) dA, \quad S_{45} = -2E \int_A n \omega D_2 dA, \quad S_{55} = 4G \int_A n^2 (1-D_3) dA
\end{aligned} \tag{2.31}$$

2.2.5 接線剛性マトリックスの誘導

全外力 \bar{p} が部材要素に作用したときのつり合い状態 i に、荷重増分を作用させ、変位増分 u が生じ新しいつり合い状態 $i+1$ になったときの外力ポテンシャル増分 V は

$$\begin{aligned}
V &= -\{(\bar{u} + u)^T (\bar{p} + p) - \bar{u}^T \bar{p}\} \\
&= -\bar{u}^T (\bar{p} + p) - u^T p
\end{aligned} \tag{2.32}$$

で表わされる。一方、外力増分間の線形性を仮定すると、要素長さ l の部材にたくわえられるひずみエネルギー増分 U は次式で表わされる。

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l d^T r dx + \int_0^l (\int_A \bar{\sigma} \epsilon dA) dx + \int_0^l (\int_A \bar{\tau} \gamma dA) dx \tag{2.33}$$

そこで、式(2.16)、式(2.18)および式(2.29b)を上式に代入すると

$$\begin{aligned}
U = & \frac{1}{2} \int_0^l d^T S d dx + \int_0^l \bar{N} \left\{ u' + \frac{1}{2} (v')^2 + \frac{1}{2} (w')^2 \right\} dx + \int_0^l \bar{M}_z (v'' + \phi w'') dx \\
& + \int_0^l \bar{M}_y (w'' - \phi v'') dx + \int_0^l \bar{K} (\phi')^2 dx + \int_0^l \bar{M}_\omega \phi'' dx + \int_0^l \bar{T} \phi' dx
\end{aligned} \quad (2.34)$$

ここに、

$$\begin{aligned}
\bar{N} &= \int_A \bar{\sigma} dA, \quad \bar{M}_z = - \int_A \bar{\sigma} \eta dA, \quad \bar{M}_y = \int_A \bar{\sigma} \zeta dA \\
\bar{K} &= \int_A \bar{\sigma} (\eta^2 + \zeta^2) dA, \quad \bar{M}_\omega = \int_A \bar{\sigma} \omega dA, \quad \bar{T} = 2 \int_A \bar{\tau} n dA
\end{aligned} \quad (2.35)$$

である。弾塑性部材要素に対する変位関数は、本解析では弾性部材に対して一般的に使用されている多項式の変位関数とする。すなわち u は x の一次式、 v, w, ϕ は三次式である。また、断面力については、 \bar{N} は一定で、 $\bar{M}_z, \bar{M}_y, \bar{M}_\omega, \bar{K}, \bar{T}$ は x の一次式で表わされると仮定している。

これらの関係より、系のポテンシャルエネルギーの増分 $\Pi = U + V$ は、節点変位増分 u によって表わすことができる。ここで、 Π の停留条件 $\delta \Pi = 0$ はつり合い条件と同義より Π の u に関する第一変分をとれば、節点外力増分と節点変位増分の間の増分つり合い方程式が得られ、次式となる。誘導の詳細は付録2.2に示す。

$$(k_{ep} + k_g)u = p + (\bar{p} - \bar{f}) \quad (2.36)$$

ここに、 u は節点変位増分ベクトル、 p は節点外力ベクトル、 \bar{p} は全節点外力ベクトル、 \bar{f} は全節点断面力ベクトルであり、次式となる。

$$u = [u_a \ v_a \ w_a \ \phi_a \ w'_a \ v'_a \ \phi'_a \ u_b \ v_b \ w_b \ \phi_b \ w'_b \ v'_b \ \phi'_b]^T \quad (2.37a)$$

$$p = [P_{xa} \ P_{ya} \ P_{za} \ M_{xa} \ M_{ya} \ M_{za} \ M_{\omega a} \ P_{xb} \ P_{yb} \ P_{zb} \ M_{xb} \ M_{yb} \ M_{zb} \ M_{\omega b}]^T \quad (2.37b)$$

$$\bar{p} = [\bar{P}_{xa} \ \bar{P}_{ya} \ \bar{P}_{za} \ \bar{M}_{xa} \ \bar{M}_{ya} \ \bar{M}_{za} \ \bar{M}_{\omega a} \ \bar{P}_{xb} \ \bar{P}_{yb} \ \bar{P}_{zb} \ \bar{M}_{xb} \ \bar{M}_{yb} \ \bar{M}_{zb} \ \bar{M}_{\omega b}]^T \quad (2.37c)$$

$$\begin{aligned}
\bar{f} = & \left[-\frac{(\bar{N}_a + \bar{N}_b)}{2} \quad -\frac{(\bar{M}_{za} - \bar{M}_{zb})}{l} \quad -\frac{(\bar{M}_{ya} - \bar{M}_{yb})}{l} \quad -\frac{(\bar{M}_{\omega a} - \bar{M}_{\omega b})}{l} \quad -\bar{T} \quad -\bar{M}_{ya} \quad -\bar{M}_{za} \quad -\bar{M}_{\omega a} \quad -\frac{(\bar{T}_b - \bar{T}_a)l}{12} \right. \\
& \left. \frac{(\bar{N}_a + \bar{N}_b)}{2} \quad \frac{(\bar{M}_{za} - \bar{M}_{zb})}{l} \quad -\frac{(\bar{M}_{ya} - \bar{M}_{yb})}{l} \quad \frac{(\bar{M}_{\omega a} - \bar{M}_{\omega b})}{l} \quad +\bar{T} \quad \bar{M}_{ya} \quad \bar{M}_{za} \quad \bar{M}_{\omega a} + \frac{(\bar{T}_b - \bar{T}_a)l}{12} \right]^T
\end{aligned} \quad (2.37d)$$

上式において添字 a, b を付した文字は、それぞれすでに定義した諸量の部材要素端 a および b での値を示す。部材軸方向に一定値をとる部材断面力 \bar{N} については両端 a, b での平均値とした。また、応力 $\bar{\sigma}$ は引張を正にとるので、部材断面力の正方向は、図2.6(b)に示すように、部材の b 端で座標および外力と同方向、 a 端で逆方向となる。また、この要素剛性マトリックス k_{ep}, k_g を次に示す。剛性マトリックス k_{ep} は弾塑性部材の剛性マトリックス、 k_g は状態 i で部材要素端の断面力を要素に含む初期応力マトリックスであり、有限変位によ

$$\begin{array}{ccccccc}
-\frac{1}{l}S_{15} & \frac{12}{l^3}S_{24} & \frac{12}{l^3}S_{34} & -\frac{12}{l^3}S_{44}-\frac{6}{5l}S_{55} & \frac{6}{l^2}S_{34}-\frac{1}{l}S_{35} & -\frac{6}{l^2}S_{24}+\frac{1}{l}S_{25} & \frac{6}{l^2}S_{44}+\frac{1}{10}S_{55} \\
-\frac{1}{l}S_{13} & \frac{6}{l^2}S_{23} & \frac{6}{l^2}S_{33} & -\frac{6}{l^2}S_{34}-\frac{1}{l}S_{35} & \frac{2}{l}S_{33} & -\frac{2}{l}S_{23} & \frac{2}{l}S_{34}+\frac{1}{2}S_{35} \\
\frac{1}{l}S_{12} & -\frac{6}{l^2}S_{22} & -\frac{6}{l^2}S_{23} & \frac{6}{l^2}S_{24}+\frac{1}{l}S_{25} & -\frac{2}{l}S_{23} & \frac{2}{l}S_{22} & -\frac{2}{l}S_{24}-\frac{1}{2}S_{25} \\
-\frac{1}{l}S_{14} & \frac{6}{l^2}S_{24}-\frac{1}{l}S_{25} & \frac{6}{l^2}S_{34}-\frac{1}{l}S_{35} & -\frac{6}{l^2}S_{44}-\frac{1}{10}S_{55} & \frac{2}{l}S_{34}-\frac{1}{2}S_{35} & -\frac{2}{l}S_{24}+\frac{1}{2}S_{25} & \frac{2}{l}S_{44}-\frac{1}{30}S_{55} \\
\frac{1}{l}S_{11} & 0 & 0 & \frac{1}{l}S_{15} & \frac{1}{l}S_{13} & -\frac{1}{l}S_{12} & \frac{1}{l}S_{14} \\
& \frac{12}{l^3}S_{22} & \frac{12}{l^3}S_{23} & -\frac{12}{l^3}S_{24} & \frac{6}{l^2}S_{23} & -\frac{6}{l^2}S_{22} & \frac{6}{l^2}S_{24}+\frac{1}{l}S_{25} \\
& & \frac{12}{l^3}S_{33} & -\frac{12}{l^3}S_{34} & \frac{6}{l^2}S_{33} & -\frac{6}{l^2}S_{23} & \frac{6}{l^2}S_{34}+\frac{1}{l}S_{35} \\
& & & \frac{12}{l^3}S_{44}+\frac{6}{5l}S_{55} & -\frac{6}{l^2}S_{34}+\frac{1}{l}S_{35} & \frac{6}{l^2}S_{24}-\frac{1}{l}S_{25} & -\frac{6}{l^2}S_{44}-\frac{1}{10}S_{55} \\
& & & & \frac{4}{l}S_{33} & -\frac{4}{l}S_{23} & \frac{4}{l}S_{34}+\frac{1}{2}S_{35} \\
& & & & & \frac{4}{l}S_{22} & -\frac{4}{l}S_{24}-\frac{1}{2}S_{25} \\
& & & & & & \frac{4}{l}S_{44}+S_{45}+\frac{2}{15}S_{55}
\end{array}$$

Sym.

$$\begin{array}{ccccccc}
k_g = & & & & & & \\
u_a & v_a & w_a & \phi_a & w'_a & v'_a & \phi'_a \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& \frac{6}{5l}\bar{N} & 0 & -\frac{11\bar{M}_{ya}+\bar{M}_{yb}}{10l} & 0 & \frac{1}{10}\bar{N} & -\frac{1}{10}\bar{M}_{ya} \\
& & \frac{6}{5l}\bar{N} & -\frac{11\bar{M}_{za}+\bar{M}_{zb}}{10l} & -\frac{1}{10}\bar{N} & 0 & -\frac{1}{10}\bar{M}_{za} \\
& & & \frac{6}{5l}\bar{K} & \frac{9\bar{M}_{za}+2\bar{M}_{zb}}{10} & -\frac{9\bar{M}_{ya}+2\bar{M}_{yb}}{10} & \frac{1}{10}\bar{K} \\
& & & & \frac{2l}{15}\bar{N} & 0 & -\frac{3\bar{M}_{za}+\bar{M}_{zb}}{30}l \\
& & & & & \frac{2l}{15}\bar{N} & -\frac{3\bar{M}_{ya}+\bar{M}_{yb}}{30}l \\
& & & & & & \frac{2l}{15}\bar{K}
\end{array}$$

Sym.

2.2.6 数値計算手順

外力の増加に伴う部材軸方向および断面方向の塑性域の拡がりを追跡するために、図2.1および図2.7に示すように構造物を部材要素と断面要素に分割する。部材要素に関する諸量は、要素端節点の諸量で断面要素に関する諸量は、断面要素の重心点の諸量で代表させる。曲げに関する平面保持の仮定などにより断面要素間の変位の自由度は拘束されており、断面分割によりあらたに変位の自由度が増加するわけではない。したがって平面三角形要素の各節点に変位の自由度を持たせる通常の有限要素法ほど大きな自由度とならないが、精度を向上させるために部材要素の分割はかなり多くなる。解くべき方程式の積分を断面分割による数値積分で近似することにより、任意形状の残留応力分布を持った、任意形状の開断面部材からなる構造物の弾塑性挙動の解析ができる。

また、外力荷重が図心軸以外の任意点に載荷する場合、外力によるねじりモーメントの影響は無視できない。そこで式(2.38)を修正することにより解析が可能となる。詳細については付録2.4に示す。

計算は、Newton-Raphson法と荷重増分法を併用することによりつり合い式を解いて行く。図2.8はそのフローチャートである。要約すれば次のようになる。

- i) 全体座標系での外力増分 P に対する変位増分 U の計算
- ii) 新座標での座標変換マトリックス T_b の作成と、現荷重状態の最初から、 i 回くり返し後の増分変位の総和 ΣU の計算
- iii) 各部材端での要素の応力の計算と、降伏、ひずみ硬化の判定及び、断面の平均剛性の計算
- iv) 応力の合力としての節点断面力 \bar{f} と不つり合い力 $(\bar{P}-T_b^T \bar{f})$ の計算
- v) 剛性マトリックス K_{ep}, K_g を新しく作成する。
- vi) 不つり合い力による変位増分の計算、収束条件が満足するまで i) ~ vi) をくり返す。
- vii) 収束条件が満足すれば次の荷重増分 P を与える。

2.3 数値解析結果

(1) 柱のエラスティカ

最初の解析例として、弾性大たわみ問題でよく利用される柱のエラスティカを解析した。

図2.9の挿入図に示すような解析モデルを用い、ヤング率は $E=206\text{kN/mm}^2$ とした。また、モデルの分割は柱の長さ方向に10分割し、断面要素はフランジの幅方向、ウェブの高さ方向及び板の厚さ方向ともに8分割の計192分割している。また、初期たわみとして $v_0=L/1000$ を与えた。図2.9は荷重－変位曲線で、縦軸は荷重 P を座屈荷重 P_{cr} で無次元化し、横軸は軸及び横方向の変位 u, v を長さ L で無次元化して示している。本解析法の結果は楕円積分解²⁸⁾とよく一致していることがわかる。一般に知られているように、大たわみ問題の大部分は倍精度計算（1ワード、64ビット）によって行なわれ、全変位から剛体変位を除去する手法などが用いられている。しかし、本手法によれば単精度計算（1ワード、32ビット）によって行なわれ、さらに剛体変位を除去する手法を用いないで図2.9に示すようなよい結果を得ることができた。

（2）はりの横ねじれ座屈解析

まず弾性横ねじれ座屈問題として、図2.10の挿入図に示すようなI形断面の片持はりの解析モデルにより解析した。荷重は自重に相当する荷重と、自由端にねじりモーメントによる初期変形を与えておき、自由端に荷重を載荷している。なお、要素分割については部材の長さ方向に6分割し、断面要素は柱のエラスティカの場合と同様に192分割した。図2.10は荷重－変位曲線で、縦軸に荷重 P を、横軸に自由端のウェブ中央点の面外方向のたわみ Δ をとって示したものである。解析結果は、Woolcock and Trahairの実験結果²⁹⁾及びEpstein and Murrayの解析結果¹⁰⁾と比較してある。実験結果及びMurrayらの解析結果に比べると本解析結果は、座屈強度が少し小さめに計算されているがよく対応していると思われる。

次に、非弾性域における横ねじれ座屈問題として、図2.11に示す解析モデルについて解析を行なった。要素分割は長さ方向に12分割し、断面要素はフランジおよびウェブの厚さ方向にそれぞれ6分割し、フランジの幅方向に12分割、ウェブの高さ方向に8分割の計192分割である。このH形ばりに自重に相当する荷重と、はりの中央に10(in-kip)のねじりモーメントを与えておき、はり中央での面外方向のたわみ w が発散するまではりの両端に荷重 P を載荷させた。図2.12は荷重－変位曲線で、縦軸はモーメント荷重 M を塑性モーメント荷重 M_p で無次元化し、横軸にはりの中央断面の y, z 軸方向の変位 u, w を示した。図中にはLee and Galambos等による実験結果³⁰⁾とMurrayらの解析結果¹³⁾と比較して示してある。この図からわかるようにそれぞれの結果がよく一致していることがわかる。面外たわみ w に対する本解析結果はMurrayらの結果と若干相違している。この相違は、Murrayらの解析で

は降伏を一軸応力状態に対して判定しており、降伏によるSt. Venantのねじり剛性への影響がないとしている。それに対し本解析法では降伏を二軸応力状態として判定し、降伏によるSt. Venantのねじり剛性への影響を考慮している点に起因しているものと考えられるが、この程度の相違は他の原因によっても生じ得るので確証は得られない。

(3) 二軸曲げと圧縮を受けるのはり一柱の非弾性解析

組み合わせ応力を受ける場合の例として、次に二軸曲げと圧縮を受けるはり一柱の非弾性解析を行なった。この解析例では、Birnstielによる実験結果³¹⁾ およびMurrayらの解析結果¹³⁾ に対して本解析結果と比較検討を行なっている。解析モデルは図2.13の挿入図示されている。また、構造特性及び材料特性については文献13)に従ったが、残留応力と降伏点応力度 $\sigma_y=34.5\text{ksi}(238\text{MPa})$ については文献31)の値を用いた。要素分割は最初の解析例のエラスティカと同様に10部材要素、192断面要素に分割している。偏心荷重は図心軸荷重と二軸端モーメントに置き換えて計算を行なった。図2.13は荷重-変位曲線であり、変位は柱の中央点での回転角 θ および横方向変位 v, w である。本解析例についても実験結果及び解析結果と本解析結果がよく一致していることがわかる。なお、図中の本解析結果において、最大荷重に達した後の荷重-変位曲線が示されていないのは、荷重制御法により計算を行なったためである。

2.4 結 論

本章では、任意形状の薄肉開断面の三次元構造の有限変位弾塑性解析法を、ポテンシャルエネルギー増分の停留原理に基づいて誘導し、本解析結果と他の理論解析結果及び実験結果と比較検討し、解析法の妥当性について検討した結果次のことが明らかになった。

- (1) 初期たわみや残留応力及び荷重の偏心等がある薄肉開断面構造物の幾何学的非線形性と材料学的非線形性の両方を考慮した剛性マトリックスを誘導した。
- (2) 本解析法では、剛体変位除去の手法を使用しないでも、大たわみ問題を単精度計算により精度よく行なえる。
- (3) 部材が組み合わせ荷重を受ける場合、本解析結果が実験結果や他の解析結果とよく対応しており、弾塑性状態での剛性評価がうまくできている。
- (4) 以上の結果より本解析法の妥当性が示された。

付録2.1 応力増分とひずみ増分の関係式の誘導

x 軸方向応力度 $\bar{\sigma}$ とSt. Venantのねじりによるせん断応力度 $\bar{\tau}$ のみを考慮する。すなわち図A2.1に示す薄肉ばりにおける応力状態で次のようにおく。

$$\bar{\sigma}_x = \bar{\sigma}, \quad \bar{\sigma}_n = \bar{\sigma}_s = 0, \quad \bar{\tau}_{ns} = \bar{\tau}_{xn} = 0, \quad \bar{\tau}_{xs} = \bar{\tau} \quad (\text{A2.1})$$

なお、添字の x, n, s は、図A2.1に示す座標系を表わす。弾性域ではHookeの法則より

$$\bar{\sigma} = E\bar{\epsilon}, \quad \bar{\tau} = G\bar{\gamma} \quad (\text{A2.2})$$

ここに E と G はヤング率とせん断弾性係数を、 $\bar{\epsilon}$ と $\bar{\gamma}$ はそれぞれ軸ひずみとせん断ひずみを表わす。

塑性域では、増分ひずみを弾性ひずみと塑性ひずみに分離できると仮定すると、

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p, \quad \gamma = \gamma^e + \gamma^p \quad (\text{A2.3})$$

となる。なお、添字 e は弾性を、 p は塑性を表わす。塑性域での応力-ひずみ関係は、Prandtl-Reussの式により

$$\epsilon_x^p/\bar{\sigma}_x' = \epsilon_n^p/\bar{\sigma}_n' = \epsilon_s^p/\bar{\sigma}_s' = \gamma^p/2\bar{\tau} = \lambda \quad (\text{A2.4})$$

ここに λ は応力状態に応じた正の比例定数である。なお上式の'付き応力は偏差応力で次式で表わされる。

$$\bar{\sigma}_x' = \bar{\sigma}_x - (\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_n + \bar{\sigma}_s)/3 = 2\bar{\sigma}/3 \quad (\text{A2.5a})$$

$$\bar{\sigma}_n' = \bar{\sigma}_n - (\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_n + \bar{\sigma}_s)/3 = -\bar{\sigma}/3 \quad (\text{A2.5b})$$

$$\bar{\sigma}_s' = \bar{\sigma}_s - (\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_n + \bar{\sigma}_s)/3 = -\bar{\sigma}/3 \quad (\text{A2.5c})$$

式(A2.5)を式(A2.4)に代入すれば、式(A2.3)は次式となる。

$$\sigma/E = \epsilon - 2\bar{\sigma}\lambda/3 \quad (\text{A2.6a})$$

$$\tau/G = \gamma - 2\bar{\tau}\lambda \quad (\text{A2.6b})$$

ここで相当応力度 $\bar{\sigma}_E$ と相当塑性ひずみ増分 ϵ_E^p は定義より次式となる。

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_E &= \sqrt{\frac{3}{2} \{ (\bar{\sigma}_x')^2 + (\bar{\sigma}_n')^2 + (\bar{\sigma}_s')^2 + 2\bar{\tau}_{xn}^2 + 2\bar{\tau}_{ns}^2 + 2\bar{\tau}_{xs}^2 \}} \\ &= \sqrt{\bar{\sigma}_x^2 + 3\bar{\tau}_{xs}^2} \end{aligned} \quad (\text{A2.7})$$

$$\begin{aligned} \epsilon_E^p &= \sqrt{\frac{2}{3} \{ (\epsilon_x^p)^2 + (\epsilon_n^p)^2 + (\epsilon_s^p)^2 + \gamma_{xn}^2/2 + \gamma_{ns}^2/2 + \gamma_{xs}^2/2 \}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3} \{ (\epsilon_x^p)^2 + (\epsilon_n^p)^2 + (\epsilon_s^p)^2 + (\gamma^p)^2/2 \}} \end{aligned} \quad (\text{A2.8})$$

式(A2.4)、式(A2.7)および式(A2.8)より

$$\lambda = \frac{\sqrt{(\epsilon_x^p)^2 + (\epsilon_n^p)^2 + (\epsilon_s^p)^2 + (\gamma^p)^2/2}}{\sqrt{(\bar{\sigma}_x')^2 + (\bar{\sigma}_n')^2 + (\bar{\sigma}_s')^2 + 2\bar{\tau}^2}} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} \epsilon_E^p}{\sqrt{\frac{2}{3}} \bar{\sigma}_E} = \frac{3}{2} \frac{\sigma_E}{\sigma_E H} \quad (\text{A2.9})$$

となる。ここで、 $H' = \sigma_E/\epsilon_E$ は引張試験における応力 $\bar{\sigma}$ -塑性ひずみ($\int \epsilon_E$)図の勾配である。非硬化材料の場合には、 $\bar{\sigma}_E = \bar{\sigma}_y$, $H' = 0$ となる。

式(A2.9)の右边 σ_E を λ で表示するため、まず式(A2.7)の両辺を二乗して微分すると次式となる。

$$2\bar{\sigma}_E\sigma_E/3 = 2\bar{\sigma}\sigma/3 + 2\bar{\tau}\tau \quad (\text{A2.10})$$

なお、式(A2.7)の両辺を二乗すると $\bar{\sigma}_E^2 = \bar{\sigma}^2 + 3\bar{\tau}^2$ となることよりvon Misesの降伏条件は上記の有効応力度 $\bar{\sigma}_E$ が降伏点応力度 σ_y に等しくなった時に成立することを意味する。

そこで、式(A2.9)と式(A2.6)を式(A2.10)に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{4}{9}\bar{\sigma}_E^2 H' \lambda &= \frac{2}{3}\bar{\sigma}(E\epsilon - E\bar{\sigma}\lambda) + 2\bar{\tau}(G\gamma - 2\bar{\tau}G\lambda) \\ &= \frac{2}{3}E\bar{\sigma}\epsilon + 2G\bar{\tau}\gamma - \left(\frac{4}{9}E\bar{\sigma}^2 + 4G\bar{\tau}^2\right)\lambda \end{aligned} \quad (\text{A2.11})$$

これより λ を求めると

$$\lambda = \frac{(2/3)E\bar{\sigma}\epsilon + 2G\bar{\tau}\gamma}{(4/9)\bar{\sigma}_E^2 H' + (4/9)E\bar{\sigma}^2 + 4G\bar{\tau}^2} \quad (\text{A2.12})$$

この λ を式(A2.6)に代入すると、増分応力と増分ひずみの関係が求まる。

$$\begin{aligned} \sigma &= E \left\{ 1 - \frac{(4/9)E\bar{\sigma}^2}{(4/9)\bar{\sigma}_E^2 H' + (4/9)E\bar{\sigma}^2 + 4G\bar{\tau}^2} \right\} \epsilon - \frac{(4/3)G\bar{\sigma}\bar{\tau}\gamma}{(4/9)\bar{\sigma}_E^2 H' + (4/9)E\bar{\sigma}^2 + 4G\bar{\tau}^2} \\ &= E \{ 1 - (E/3G)(\bar{\sigma}^2/B) \} \epsilon - (E\bar{\sigma}\bar{\tau}/B)\gamma \end{aligned} \quad (\text{A2.13a})$$

$$\tau = -(E\bar{\sigma}\bar{\tau}/B)\epsilon + G(1 - 3\bar{\tau}^2/B)\gamma \quad (\text{A2.13b})$$

ここに、

$$B = H'\bar{\sigma}_E^2/3G + E\bar{\sigma}^2/3G + 3\bar{\tau}^2 \quad (\text{A2.14})$$

相当塑性ひずみ ϵ_E は、式(A2.12)より $\epsilon_E = 2/3\bar{\sigma}_E\lambda$ であるから次式となる。

$$\bar{\epsilon}_E = \Sigma \epsilon_E = \Sigma \{ (E\bar{\sigma}_E\bar{\sigma}/3GB)\epsilon + (\bar{\sigma}_E\bar{\tau}/B)\gamma \} \quad (\text{A2.15})$$

ここに、 Σ はすべての増分経路の和を示す。材料の応力-ひずみ関係は図2.4に示す硬化型弾塑性関係とすると次の増分応力と増分ひずみの関係が得られる。

$$\begin{bmatrix} \sigma \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(1-D_1) & -ED_2 \\ -ED_2 & G(1-D_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (\text{A2.16})$$

なお、この式(A2.16)は本文の式(2.19a)であり、係数 $D_1 \sim D_3$ は本文に与えられている。

付録2.2 要素剛性マトリックス k_{ep}, k_g の誘導

変位増分と断面力を次の x の多項式で表わす。

$$\begin{aligned} u(x) &= \alpha_1 + \alpha_2 x \\ v(x) &= \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 x^3 \\ w(x) &= \alpha_7 + \alpha_8 x + \alpha_9 x^2 + \alpha_{10} x^3 \\ \phi(x) &= \alpha_{11} + \alpha_{12} x + \alpha_{13} x^2 + \alpha_{14} x^3 \end{aligned} \quad (A2.17)$$

また、

$$\begin{aligned} \bar{N}(x) &= \beta_1, \quad \bar{K}(x) = \beta_2 \\ \bar{T}(x) &= \beta_3 + \beta_4 x, \quad \bar{M}_z(x) = \beta_5 + \beta_6 x \\ \bar{M}_y(x) &= \beta_7 + \beta_8 x, \quad \bar{M}_\omega(x) = \beta_9 + \beta_{10} x \end{aligned} \quad (A2.18)$$

要素材端の境界条件は $x=0$ (節点a) で、

$$\begin{aligned} u &= u_a, \quad v = v_a, \quad w = w_a, \quad \phi = \phi_a, \quad w' = -w'_a, \quad v' = v'_a, \quad \phi' = \phi'_a, \\ \bar{N} &= (\bar{N}_a + \bar{N}_b)/2, \quad \bar{K} = (\bar{K}_a + \bar{K}_b)/2, \quad \bar{T} = \bar{T}_a, \quad \bar{M}_z = \bar{M}_{za}, \quad \bar{M}_y = \bar{M}_{ya}, \quad \bar{M}_\omega = \bar{M}_{\omega a} \end{aligned} \quad (A2.19a)$$

$x=l$ (節点b) で

$$\begin{aligned} u &= u_b, \quad v = v_b, \quad w = w_b, \quad \phi = \phi_b, \quad w' = -w'_b, \quad v' = v'_b, \quad \phi' = \phi'_b, \\ \bar{N} &= (\bar{N}_a + \bar{N}_b)/2, \quad \bar{K} = (\bar{K}_a + \bar{K}_b)/2, \quad \bar{T} = \bar{T}_b, \quad \bar{M}_z = \bar{M}_{zb}, \quad \bar{M}_y = \bar{M}_{yb}, \quad \bar{M}_\omega = \bar{M}_{\omega b} \end{aligned} \quad (A2.19b)$$

式(A2.17)と式(A2.18)を式(A2.19)に代入することにより、係数 α_i, β_i を決定できる。

これより変位増分と断面力は次式となる。

$$\begin{aligned} u &= (1-X)u_a + Xu_b \\ v &= (1-3X^2+2X^3)v_a + (3X^2-2X^3)v_b + (X-2X^2+X^3)lv'_a + (-X^2+X^3)lv'_b \\ w &= (1-3X^2+2X^3)w_a + (3X^2-2X^3)w_b - (X-2X^2+X^3)lw'_a - (-X^2+X^3)lw'_b \\ \phi &= (1-3X^2+2X^3)\phi_a + (3X^2-2X^3)\phi_b + (X-2X^2+X^3)l\phi'_a + (-X^2+X^3)l\phi'_b \\ \bar{N} &= (\bar{N}_a + \bar{N}_b)/2, \quad \bar{K} = (\bar{K}_a + \bar{K}_b)/2 \\ \bar{T} &= \bar{T}_a + (\bar{T}_b - \bar{T}_a)X, \quad \bar{M}_z = \bar{M}_{za} + (\bar{M}_{zb} - \bar{M}_{za})X \\ \bar{M}_y &= \bar{M}_{ya} + (\bar{M}_{yb} - \bar{M}_{ya})X, \quad \bar{M}_\omega = \bar{M}_{\omega a} + (\bar{M}_{\omega b} - \bar{M}_{\omega a})X \end{aligned} \quad (A2.20)$$

ここに、

$$X = x/l, \quad ()' = \partial/\partial x = 1/l \cdot \partial/\partial X$$

次に式(A2.20)を式(2.34)に代入すると、ひずみエネルギー増分 U は、節点変位増分 u で表わせる。そして、このひずみエネルギー増分 U を、各々の節点変位増分の成分で偏微分することにより接線剛性マトリックスの各々の要素が次のように得られる。

式(2.34)の第1項について：

$$T_1 = \frac{1}{2} \int_0^l d^T S d dx = \frac{l}{2} \int_0^1 d^T S d dX \quad (\text{A2.21})$$

ここで d, S は次式で表わされる。

$$d = [u' \quad -v'' \quad -w'' \quad \phi'' \quad \phi']^T \quad (\text{A2.22a})$$

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} \\ & & S_{sym.} & S_{44} & S_{45} \\ & & & & S_{55} \end{bmatrix} \quad (\text{A2.22b})$$

ここで、式(A2.20)より

$$\begin{aligned} u' &= \dot{u}/l = (u_b - u_a)/l \\ -v'' &= -\ddot{v}/l^2 = (6-12X)v_a/l^2 - (6-12X)v_b/l^2 + (4-6X)v'_a/l + (2-6X)v'_b/l \\ -w'' &= -\ddot{w}/l^2 = (6-12X)w_a/l^2 - (6-12X)w_b/l^2 - (4-6X)w'_a/l - (2-6X)w'_b/l \\ \phi'' &= \ddot{\phi}/l^2 = (6-12X)\phi_a/l^2 - (6-12X)\phi_b/l^2 - (4-6X)\phi'_a/l - (2-6X)\phi'_b/l \\ \phi' &= \dot{\phi}/l = (-6X+6X^2)\phi_a/l + (6X-6X^2)\phi_b/l + (1-4X+3X^2)\phi'_a + (-2X+3X^2)\phi'_b \end{aligned} \quad (\text{A2.23})$$

ここに、

$$(\dot{}) = \partial()/\partial X = l()'$$

と表わされるので、式(A2.23)は、 $d = Xu$ と表わすことができる。これを式(A2.21)に代入すると T_1 は

$$T_1 = \frac{l}{2} u^T \left[\int_0^1 X^T S X dX \right] u \quad (\text{A2.24})$$

よって、この式を u について2回偏微分することにより要素剛性マトリックス k_{ep} が得られる。

$$k_{ep} = l \int_0^1 X^T S X dX \quad (\text{A2.25})$$

ここに、

$$X^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{l^2}(1-2X) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{l^2}(1-2X) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{l^2}(1-2X) & -\frac{6}{l}(X-X^2) \\ 0 & 0 & -\frac{2}{l}(2-3X) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{l}(2-3X) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{l}(2-3X) & 1-4X+3X^2 \\ \frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{l^2}(1-2X) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6}{l^2}(1-2X) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6}{l^2}(1-2X) & \frac{6}{l}(X-X^2) \\ 0 & 0 & -\frac{2}{l}(1-3X) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{l}(1-3X) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{l}(1-3X) & -2X+3X^2 \end{bmatrix} \quad (A2.26)$$

k_g の誘導

k_g は、式 (A2.20) を式 (2.34) に代入した残りの項より同様に計算できる。まず第 2 項 T_2 は

$$\begin{aligned} T_2 &= \int_0^l \bar{N} \left\{ \dot{u}' + \frac{1}{2}(\dot{v}')^2 + \frac{1}{2}(\dot{w}')^2 \right\} dx \\ &= l \bar{N} \int_0^1 \left\{ \frac{1}{l} \dot{u} + \frac{1}{2l^2}(\dot{v})^2 + \frac{1}{2l^2}(\dot{w})^2 \right\} dx \end{aligned} \quad (A2.27)$$

ここに、

$$\bar{N} = (\bar{N}_a + \bar{N}_b)/2, \quad \bar{N}_a = \int_A \bar{\sigma}_a dA, \quad \bar{N}_b = \int_A \bar{\sigma}_b dA$$

$$\dot{u} = -u_a + u_b, \quad \int_0^1 \dot{u} dX = u_b - u_a$$

$$\dot{v} = (-6X+6X^2)u_a + (6X-6X^2)v_b + (1-4X+3X^2)l\dot{v}_a + (-2X+3X^2)l\dot{v}_b$$

$$\dot{w} = (-6X+6X^2)w_a + (6X-6X^2)w_b - (1-4X+3X^2)l\dot{w}_a - (-2X+3X^2)l\dot{w}_b \quad (A2.28a)$$

$$\frac{1}{2l} \int_0^1 (\dot{v})^2 dX = \left(\frac{3}{5l}u_a - \frac{3}{5l}v_b + \frac{1}{20}\dot{v}_a + \frac{1}{20}\dot{v}_b \right) u_a + \left(-\frac{3}{5l}u_a + \frac{3}{5l}v_b - \frac{1}{20}\dot{v}_a - \frac{1}{20}\dot{v}_b \right) v_b$$

$$+ \left(\frac{1}{20} v_a - \frac{1}{20} v_b + \frac{l}{15} v'_a - \frac{l}{60} v'_b \right) v'_a + \left(\frac{1}{20} v_a - \frac{1}{20} v_b - \frac{l}{60} v'_a + \frac{l}{15} v'_b \right) v'_b \quad (\text{A2.28b})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2l} \int_0^l (\dot{w})^2 dX = & \left(\frac{3}{5l} w_a - \frac{3}{5l} w_b - \frac{1}{20} w'_a - \frac{1}{20} w'_b \right) w_a + \left(-\frac{3}{5l} w_a + \frac{3}{5l} w_b + \frac{1}{20} w'_a + \frac{1}{20} w'_b \right) w_b \\ & + \left(-\frac{1}{20} w_a + \frac{1}{20} w_b + \frac{l}{15} w'_a - \frac{l}{60} w'_b \right) w'_a + \left(-\frac{1}{20} w_a + \frac{1}{20} w_b - \frac{l}{60} w'_a + \frac{l}{15} w'_b \right) w'_b \end{aligned} \quad (\text{A2.28c})$$

よって、式 T_2 (=A2.28 a ~ c) を各々の節点変位増分で偏微分し、マトリックス表示すれば、次式で表わされる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6\bar{N}/5l & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}/10 & 0 & 0 & -6\bar{N}/5l & 0 & 0 & 0 & \bar{N}/10 & 0 \\ & 6\bar{N}/5l & 0 & -\bar{N}/10 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6\bar{N}/5l & 0 & -\bar{N}/10 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2l\bar{N}/15 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}/10 & 0 & -l\bar{N}/30 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 2l\bar{N}/15 & 0 & 0 & -\bar{N}/10 & 0 & 0 & 0 & -l\bar{N}/30 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 6\bar{N}/5l & 0 & 0 & 0 & -\bar{N}/10 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 6\bar{N}/5l & 0 & \bar{N}/10 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & 2l\bar{N}/15 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 2l\bar{N}/15 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ v_a \\ w_a \\ \phi_a \\ w'_a \\ v'_a \\ \phi'_a \\ u_b \\ v_b \\ w_b \\ \phi_b \\ w'_b \\ v'_b \\ \phi'_b \end{bmatrix}$$

Sym.

(A2.29)

第3項は

$$T_3 = \int_0^l \bar{M}_z (\dot{v}'' + \phi \dot{w}'') dx = \frac{1}{l} \int_0^l \bar{M}_z (\ddot{v} + \phi \ddot{w}) dX \quad (\text{A2.30})$$

式(A2.20)、(A2.23)より

$$\frac{1}{l} \int_0^l \bar{M}_z \ddot{v} dX = \frac{(\bar{M}_{zb} - \bar{M}_{za})}{l} v_a + \frac{(\bar{M}_{za} - \bar{M}_{zb})}{l} v_b - \bar{M}_{za} v'_a + \bar{M}_{zb} v'_b \quad (\text{A2.31a})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{l} \int_0^l \bar{M}_z \phi \ddot{w} dX = & \left(-\frac{6}{5} \phi_a + \frac{6}{5} \phi_b - \frac{l}{10} \phi'_a - \frac{l}{10} \phi'_b \right) \frac{\bar{M}_{za}}{l} w_a + \left(\frac{6}{5} \phi_a - \frac{6}{5} \phi_b + \frac{l}{10} \phi'_a + \frac{l}{10} \phi'_b \right) \frac{\bar{M}_{zb}}{l} w_b \\ & + \left(\frac{11}{10} \phi_a - \frac{1}{10} \phi_b + \frac{2l}{15} \phi'_a - \frac{l}{30} \phi'_b \right) \bar{M}_{za} w'_a + \left(\frac{1}{10} \phi_a - \frac{11}{10} \phi_b - \frac{l}{30} \phi'_a + \frac{2l}{15} \phi'_b \right) \bar{M}_{zb} w'_b \end{aligned} \quad (\text{A2.31b})$$

よって、 T_3 を u により偏微分すると

$$\frac{\partial T_3}{\partial u_a} = \frac{\partial T_3}{\partial u_b} = 0$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial v_a} = \frac{-\bar{M}_{za} + \bar{M}_{zb}}{l}$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial w_a} = -\frac{11\bar{M}_{za} + \bar{M}_{zb}}{10l} \phi_a + \frac{\bar{M}_{za} + 11\bar{M}_{zb}}{10l} \phi_b - \frac{\bar{M}_{za}}{10} \phi'_a - \frac{\bar{M}_{zb}}{10} \phi'_b$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial \phi_a} = -\frac{11\bar{M}_{za} + \bar{M}_{zb}}{10l} w_a + \frac{11\bar{M}_{za} + \bar{M}_{zb}}{10l} w_b + \frac{9\bar{M}_{za} + 2\bar{M}_{zb}}{10} w'_a + \frac{2\bar{M}_{za} - \bar{M}_{zb}}{10} w'_b$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_3}{\partial w_a} &= \frac{9\bar{M}_{za}+2\bar{M}_{zb}}{10}\phi_a + \frac{\bar{M}_{za}-2\bar{M}_{zb}}{10}\phi_b + \frac{3\bar{M}_{za}+\bar{M}_{zb}}{30}l\phi'_a - \frac{\bar{M}_{za}}{30}l\phi'_b \\
\frac{\partial T_3}{\partial v_a} &= -\bar{M}_{za} \\
\frac{\partial T_3}{\partial \phi_a} &= -\frac{\bar{M}_{za}}{10}w_a + \frac{\bar{M}_{za}}{10}w_b + \frac{3\bar{M}_{za}+\bar{M}_{zb}}{30}lw'_a - \frac{\bar{M}_{zb}}{30}lw'_b \\
\frac{\partial T_3}{\partial v_b} &= \frac{\bar{M}_{za}-\bar{M}_{zb}}{l} \\
\frac{\partial T_3}{\partial w_b} &= \frac{11\bar{M}_{za}+\bar{M}_{zb}}{10l}\phi_a - \frac{\bar{M}_{za}+11\bar{M}_{zb}}{10l}\phi_b + \frac{\bar{M}_{za}}{10}\phi'_a + \frac{\bar{M}_{zb}}{10}\phi'_b \\
\frac{\partial T_3}{\partial \phi_b} &= \frac{\bar{M}_{za}+11\bar{M}_{zb}}{10l}w_a - \frac{\bar{M}_{za}+11\bar{M}_{zb}}{10l}w_b + \frac{\bar{M}_{za}-2\bar{M}_{zb}}{10}w'_a - \frac{2\bar{M}_{za}+9\bar{M}_{zb}}{10}w'_b \\
\frac{\partial T_3}{\partial w_b} &= \frac{2\bar{M}_{za}-\bar{M}_{zb}}{10}\phi_a - \frac{2\bar{M}_{za}+9\bar{M}_{zb}}{10}\phi_b - \frac{\bar{M}_{zb}}{30}l\phi'_a + \frac{\bar{M}_{za}+3\bar{M}_{zb}}{30}l\phi'_b \\
\frac{\partial T_3}{\partial v_b} &= \bar{M}_{zb} \\
\frac{\partial T_3}{\partial \phi'_a} &= -\frac{\bar{M}_{zb}}{10}w_a + \frac{\bar{M}_{zb}}{10}w_b - \frac{\bar{M}_{za}}{30}lw'_a + \frac{\bar{M}_{za}+3\bar{M}_{zb}}{30}lw'_b
\end{aligned} \tag{A2.32}$$

第4項は

$$T_4 = -\int_0^l \bar{M}_y (w'' - \phi v'') dx = -\frac{1}{l} \int_0^l \bar{M}_y (\ddot{w} - \phi \ddot{v}) dX \tag{A2.33}$$

この項は、第3項において

$$3 \rightarrow 4, \quad z \rightarrow y, \quad v_a \rightarrow -w_a, \quad v_b \rightarrow -w_b, \quad v'_a \rightarrow w'_a, \quad v'_b \rightarrow w'_b, \quad w_a \rightarrow v_a, \quad w_b \rightarrow v_b, \quad w'_a \rightarrow -v'_a, \quad w'_b \rightarrow -v'_b$$

と置き換えれば得られる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_4}{\partial v_a} &= \frac{\partial T_4}{\partial u_b} = 0 \\
\frac{\partial T_4}{\partial w_a} &= \frac{\bar{M}_{ya}-\bar{M}_{yb}}{l} \\
\frac{\partial T_4}{\partial v_a} &= -\frac{11\bar{M}_{ya}+\bar{M}_{yb}}{10l}\phi_a + \frac{\bar{M}_{ya}+11\bar{M}_{yb}}{10l}\phi_b - \frac{\bar{M}_{ya}}{10}\phi'_a - \frac{\bar{M}_{yb}}{10}\phi'_b \\
\frac{\partial T_4}{\partial \phi_a} &= -\frac{11\bar{M}_{ya}+\bar{M}_{yb}}{10l}v_a + \frac{11\bar{M}_{ya}+\bar{M}_{yb}}{10l}v_b - \frac{9\bar{M}_{ya}+2\bar{M}_{yb}}{10}v'_a - \frac{2\bar{M}_{ya}-\bar{M}_{yb}}{10}v'_b \\
\frac{\partial T_4}{\partial v_a} &= -\frac{9\bar{M}_{ya}+2\bar{M}_{yb}}{10}\phi_a - \frac{\bar{M}_{ya}-2\bar{M}_{yb}}{10}\phi_b - \frac{3\bar{M}_{ya}+\bar{M}_{yb}}{30}l\phi'_a + \frac{\bar{M}_{ya}}{30}l\phi'_b \\
\frac{\partial T_4}{\partial w_a} &= -\bar{M}_{ya} \\
\frac{\partial T_4}{\partial \phi_a} &= -\frac{\bar{M}_{ya}}{10}v_a + \frac{\bar{M}_{ya}}{10}v_b - \frac{3\bar{M}_{ya}+\bar{M}_{yb}}{30}lv'_a + \frac{\bar{M}_{yb}}{30}lv'_b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_4}{\partial w_b} &= -\frac{\bar{N}_{ya} + \bar{N}_{yb}}{l} \\
\frac{\partial T_4}{\partial v_b} &= \frac{11\bar{N}_{ya} + \bar{N}_{yb}}{10l} \phi_a - \frac{\bar{N}_{ya} + 11\bar{N}_{yb}}{10l} \phi_b + \frac{\bar{N}_{ya}}{10} \phi'_a + \frac{\bar{N}_{yb}}{10} \phi'_b \\
\frac{\partial T_4}{\partial \phi_b} &= \frac{\bar{N}_{ya} + 11\bar{N}_{yb}}{10l} v_a - \frac{\bar{N}_{ya} + 11\bar{N}_{yb}}{10l} v_b - \frac{\bar{N}_{ya} - 2\bar{N}_{yb}}{10} v'_a + \frac{2\bar{N}_{ya} + 9\bar{N}_{yb}}{10} v'_b \\
\frac{\partial T_4}{\partial v'_b} &= -\frac{2\bar{N}_{ya} - \bar{N}_{yb}}{10} \phi_a + \frac{2\bar{N}_{ya} + 9\bar{N}_{yb}}{10} \phi_b + \frac{\bar{N}_{yb}}{30} l \phi'_a - \frac{\bar{N}_{ya} + 3\bar{N}_{yb}}{30} l \phi'_b \\
\frac{\partial T_4}{\partial w_b} &= \bar{N}_{yb} \\
\frac{\partial T_4}{\partial \phi_b} &= -\frac{\bar{N}_{yb}}{10} v_a + \frac{\bar{N}_{yb}}{10} v_b + \frac{\bar{N}_{ya}}{30} l v'_a - \frac{\bar{N}_{ya} + 3\bar{N}_{yb}}{30} l v'_b
\end{aligned} \tag{A2.34}$$

第5項は

$$T_5 = \frac{1}{2} \int_0^l \bar{K} (\phi')^2 dx = \frac{1}{2l} \int_0^l \bar{K} (\dot{\phi})^2 dX \tag{A2.35}$$

式(A2.23)より

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2l} \int_0^l \bar{K} (\dot{\phi})^2 dX &= \left(\frac{3}{5} \phi_a - \frac{3}{5} \phi_b + \frac{l}{20} \phi'_a + \frac{l}{20} \phi'_b \right) \frac{\phi_a \bar{K}}{l} + \left(-\frac{3}{5} \phi_a + \frac{3}{5} \phi_b - \frac{l}{20} \phi'_a - \frac{l}{20} \phi'_b \right) \frac{\phi_b \bar{K}}{l} \\
&\quad + \left(\frac{1}{20} \phi_a - \frac{1}{20} \phi_b + \frac{l}{15} \phi'_a - \frac{l}{60} \phi'_b \right) l \frac{\phi'_a \bar{K}}{l} + \left(\frac{1}{20} \phi_a - \frac{1}{20} \phi_b - \frac{l}{60} \phi'_a + \frac{l}{15} \phi'_b \right) l \frac{\phi'_b \bar{K}}{l}
\end{aligned} \tag{A2.36}$$

$$\frac{\partial T_5}{\partial u_a} = \frac{\partial T_5}{\partial v_a} = \frac{\partial T_5}{\partial w_a} = \frac{\partial T_5}{\partial \phi_a} = \frac{\partial T_5}{\partial v'_a} = 0$$

$$\frac{\partial T_5}{\partial \phi_a} = \frac{6}{5l} \bar{K} \phi_a - \frac{6}{5l} \bar{K} \phi_b + \frac{1}{10} K \phi'_a + \frac{1}{10} \bar{K} \phi'_b$$

$$\frac{\partial T_5}{\partial \phi'_a} = \frac{1}{10} \bar{K} \phi_a - \frac{1}{10} \bar{K} \phi_b + \frac{2l}{15} K \phi'_a - \frac{l}{30} \bar{K} \phi'_b$$

$$\frac{\partial T_5}{\partial u_b} = \frac{\partial T_5}{\partial v_b} = \frac{\partial T_5}{\partial w_b} = \frac{\partial T_5}{\partial \phi_b} = \frac{\partial T_5}{\partial v'_b} = 0$$

$$\frac{\partial T_5}{\partial \phi_b} = -\frac{6}{5l} \bar{K} \phi_a + \frac{6}{5l} \bar{K} \phi_b - \frac{1}{10} K \phi'_a - \frac{1}{10} \bar{K} \phi'_b$$

$$\frac{\partial T_5}{\partial \phi'_b} = \frac{1}{10} \bar{K} \phi_a - \frac{1}{10} \bar{K} \phi_b - \frac{l}{30} K \phi'_a + \frac{2l}{15} \bar{K} \phi'_b \tag{A2.37}$$

第6項は

$$T_6 = \int_0^l \bar{M}_\omega \phi'' dx = \frac{1}{l} \int_0^l \bar{M}_\omega \ddot{\phi} dX \tag{A2.38}$$

式(A2.23)より

$$\frac{1}{l} \int_0^l \bar{M}_\omega \ddot{\phi} dX = -\frac{\bar{M}_{\omega a} - \bar{M}_{\omega b}}{l} (\phi_a - \phi_b - l \phi'_b) - \bar{M}_{\omega a} \phi'_a + \bar{M}_{\omega b} \phi'_b \tag{A2.39}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_6}{\partial u_a} &= \frac{\partial T_6}{\partial v_a} = \frac{\partial T_6}{\partial w_a} = \frac{\partial T_6}{\partial \dot{w}_a} = \frac{\partial T_6}{\partial \dot{v}_a} = 0 \\
\frac{\partial T_6}{\partial \phi_a} &= -\frac{\bar{M}_{\omega a} - \bar{M}_{\omega b}}{l} \\
\frac{\partial T_6}{\partial \dot{\phi}_a} &= -\bar{M}_{\omega a} \\
\frac{\partial T_6}{\partial u_b} &= \frac{\partial T_6}{\partial v_b} = \frac{\partial T_6}{\partial w_b} = \frac{\partial T_6}{\partial \dot{w}_b} = \frac{\partial T_6}{\partial \dot{v}_b} = 0 \\
\frac{\partial T_6}{\partial \phi_b} &= \frac{\bar{M}_{\omega a} - \bar{M}_{\omega b}}{l} \\
\frac{\partial T_6}{\partial \dot{\phi}_b} &= \bar{M}_{\omega b}
\end{aligned} \tag{A2.40}$$

第7項は

$$T_7 = \int_0^l \bar{T} \dot{\phi}' dx = \int_0^l \bar{T} \dot{\phi} dX \tag{A2.41}$$

式(A2.23)より

$$\begin{aligned}
\int_0^l \bar{T} \dot{\phi} dX &= -\phi_a \bar{T}_a + \phi_b \bar{T}_b + (\bar{T}_b - \bar{T}_a) \left(-\frac{1}{2} \phi_a + \frac{1}{2} \phi_b - \frac{l}{12} \phi'_a + \frac{l}{12} \phi'_b \right) \\
\frac{\partial T_7}{\partial u_a} &= \frac{\partial T_7}{\partial v_a} = \frac{\partial T_7}{\partial w_a} = \frac{\partial T_7}{\partial \dot{w}_a} = \frac{\partial T_7}{\partial \dot{v}_a} = 0 \\
\frac{\partial T_7}{\partial \phi_a} &= -\frac{1}{2} (\bar{T}_a + \bar{T}_b) \\
\frac{\partial T_7}{\partial \dot{\phi}_a} &= -\frac{l}{12} (\bar{T}_b - \bar{T}_a) \\
\frac{\partial T_7}{\partial u_b} &= \frac{\partial T_7}{\partial v_b} = \frac{\partial T_7}{\partial w_b} = \frac{\partial T_7}{\partial \dot{w}_b} = \frac{\partial T_7}{\partial \dot{v}_b} = 0 \\
\frac{\partial T_7}{\partial \phi_b} &= \frac{1}{2} (\bar{T}_a + \bar{T}_b) \\
\frac{\partial T_7}{\partial \dot{\phi}_b} &= \frac{l}{12} (\bar{T}_b - \bar{T}_a)
\end{aligned} \tag{A2.42}$$

以上の結果より式(A2.29)、式(A2.32)、式(A2.34)、式(A2.37)、式(A2.40)および式(A2.43)をまとめてマトリックス表示すると、 k_g が得られる。

付録2.3 骨組の座標変換マトリックス T_b

はり要素の全体座標系 $X(Y, Z)$ と局所座標系 $x(y, z)$ の間の三次元座標変換マトリックスは一般的によく使用されている³⁷⁾ので、ここではその座標変換マトリックス λ_b のみを示す。すなわち次式で表わされる。

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{ll'} \begin{bmatrix} Xl' & Yl' & Zl' \\ -(Yl\cos\alpha + ZX\sin\alpha) & Xl\cos\alpha - YZ\sin\alpha & (l')^2\sin\alpha \\ Yl\sin\alpha - ZX\cos\alpha & -(Xl\sin\alpha + YZ\cos\alpha) & (l')^2\cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (\text{A2.44})$$

ここに

$$l = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad l' = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} \quad (\text{A2.45})$$

ただし、 α は部材の x 軸回りの回転角である。これをマトリックス表示すれば

$$x = \lambda_b X \quad (\text{A2.46})$$

となる。よって全体座標系での要素の節点変位増分 u と局所座標系で表わした節点変位増分 U は次の関係が成り立つ。

$$u = T_b U \quad (\text{A2.47})$$

ここに

$$T_b = \begin{bmatrix} \lambda_b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \lambda_b & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & & & \lambda_b & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A2.48})$$

つまり、 T_b が骨組要素の座標変換マトリックス(14×14)である。

付録2.4 偏心荷重時のつり合い方程式

外力として重心線以外の断面上の任意点に横荷重 $\bar{P}_Y + P_Y$, $\bar{P}_Z + P_Z$ が作用する場合は次のようになる。荷重の作用点を図A2.2のように局所座標系で $L_1(y_1, z_1)$, $L_2(y_2, z_2)$ とする。

重心 O が三次元的変位を生じた時の任意点 L_1, L_2 の全体座標系での増分変位は

$$u_{L1} = v - \zeta_1\phi - \frac{1}{2}\eta_1\phi^2, \quad w_{L1} = w + \eta_1\phi - \frac{1}{2}\zeta_1\phi^2 \quad (\text{A2.49})$$

$$u_{L2} = v - \zeta_2\phi - \frac{1}{2}\eta_2\phi^2, \quad w_{L2} = w + \eta_2\phi - \frac{1}{2}\zeta_2\phi^2 \quad (\text{A2.50})$$

ここで、図A2.2より次式の関係がある。

$$\begin{bmatrix} \eta_i \\ \zeta_i \end{bmatrix} = \frac{1}{ll'} \begin{bmatrix} lX\cos\alpha - YZ\sin\alpha & -(lX\sin\alpha + YZ\cos\alpha) \\ (l')^2\sin\alpha & (l')^2\cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad (\text{A2.51})$$

$$l = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad l' = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (\text{A2.52})$$

もし $l' = \sqrt{X^2 + Y^2} = 0$ なら

$$\begin{bmatrix} \eta_i \\ \zeta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad (\text{A2.53})$$

よって、外力ポテンシャルの増分 V_L は、 u_{L1}, w_{L2} により

$$\begin{aligned}
V_L &= -(\bar{P}_Y + P_Y) v_{L1} - (\bar{P}_Z + P_Z) w_{L2} \\
&= -(\bar{P}_Y + P_Y) \left(v - \zeta_1 \phi - \frac{1}{2} \eta_1 \phi^2 \right) - (\bar{P}_Z + P_Z) \left(w + \eta_2 \phi - \frac{1}{2} \zeta_2 \phi^2 \right)
\end{aligned} \tag{A2.54}$$

となる。この V_L を ϕ で偏微分することにより、次のねじりモーメントに関するつり合い式に追加される項が得られる。

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial V_L}{\partial v} &= \bar{P}_Y + P_Y, \quad \frac{\partial V_L}{\partial w} = \bar{P}_Z + P_Z \\
-\frac{\partial V_L}{\partial \phi} &= -(\bar{P}_Y + P_Y) \zeta_1 + (\bar{P}_Z + P_Z) \eta_2 - (\bar{P}_Y + P_Y) \eta_1 \phi + (\bar{P}_Z + P_Z) \zeta_2 \phi
\end{aligned} \tag{A2.55}$$

これより全体座標系におけるつり合い方程式は次式のようになる。

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ P_{Xi} \\ P_{Yi} \\ P_{Zi} \\ T_i - P_{Yi} \zeta_1 + P_{Zi} \eta_2 \\ M_{Yi} \\ M_{Zi} \\ M_{\omega i} \\ \vdots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vdots \\ \bar{P}_{Xi} \\ \bar{P}_{Yi} \\ \bar{P}_{Zi} \\ \bar{T}_i - \bar{P}_{Yi} \zeta_1 + \bar{P}_{Zi} \eta_2 \\ \bar{M}_{Yi} \\ \bar{M}_{Zi} \\ \bar{M}_{\omega i} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \langle * \rangle + (\bar{P}_{Yi} + P_{Yi}) \zeta_1 + (\bar{P}_{Zi} + P_{Zi}) \eta_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ u_i \\ v_i \\ w_i \\ \phi_i \\ w'_i \\ v'_i \\ \phi'_i \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$\langle * \rangle$: ordinary term of K

(A2.56)

また、マトリックス表示すると

$$F - T^T \bar{f} + \bar{F} = KU \tag{A2.57}$$

となる。

用いた記号

A	: 断面積
C	: ε と d を関係づける係数マトリックス
d	: 変形増分ベクトル
D	: σ と ε を関係づける係数マトリックス
$D_1 \sim D_3$: マトリックスの係数
E	: ヤング率
E_{st}	: ひずみ硬化係数
f	: 局所座標系での節点力ベクトル
F	: 全体座標系での節点力ベクトル
G	: せん断弾性係数
H'	: $EE_{st}/(E-E_{st})$
k	: 局所座標系での剛性マトリックス
k_{ep}, K_{ep}	: 局所及び全体座標系での弾塑性剛性マトリックス
k_g, K_g	: 局所及び全体座標系での初期応力マトリックス
F	: 全体座標系での剛性マトリックス
K	: 軸力による付加ねじり
l	: 要素の長さ
L	: 部材長
L_1, L_2	: 偏心荷重の作用点
M_y, M_z	: y, z 軸に関する曲げモーメント
M_ω	: そりモーメント
M_p	: 塑性モーメント
n	: 要素の板厚中心線に沿った曲線座標の接線に垂直方向の座標
N	: 軸力
O	: 任意に選んだ局所座標系の基準点
p	: 局所座標系での節点外力ベクトル
P	: 全体座標系での節点外力ベクトル
P_x, P_y, P_z	: x, y, z 軸方向の外力
r	: 要素内の任意点 P までの距離

- r_y : 弱軸回りの断面二次半径
- r : 断面力増分ベクトル
- S : 要素の肉厚中心線に沿う曲線座標
- S_{ij} : S マトリックスの成分
- S : 部分的に降伏した単位長さの部材の接線剛性マトリックス
- T : ねじりモーメント
- T_b : はり要素の座標変換マトリックス
- u, v, w : 要素の中心点 O における x, y, z 軸方向の変位
- U, V, W : 要素の任意点 P における x, y, z 軸方向の変位
- u : 局所座標系での節点変位ベクトル
- U : 全体座標系での節点変位ベクトル
- U : ひずみエネルギー増分
- V : 外力のポテンシャルエネルギー増分
- x, y, z : 要素の局所座標系
- X, Y, Z : 全体座標系
- α, β : 点 P の変位前と後の関係を表わす回転角
- γ : St. Venant のせん断ひずみ
- γ^e : 弾性せん断ひずみ
- γ^p : 塑性せん断ひずみ
- ε : 軸ひずみ
- ε_E : 相当塑性ひずみ
- ε_y : 降伏ひずみ
- ε_{st} : ひずみ硬化開始ひずみ
- ε_e : 弾性軸ひずみ
- ε_p : 塑性軸ひずみ
- ε : 軸ひずみベクトル
- η, ζ : 要素断面内の中心軸に関する任意点 P の y, z 座標
- λ : 塑性ひずみ増分の正值の比例係数
- λ_b : 局所座標系と全体座標系の間の座標変換マトリックス
- Π : 全ポテンシャルエネルギー増分 ($U + V$)
- σ : 軸方向応力度

- σ_y : 降伏点応力度
- σ_{rc} : 圧縮残留応力
- σ_{yst} : ひずみ硬化応力度
- σ_E : 相当応力度
- σ : 応力度ベクトル
- τ : St. Venantのせん断応力度
- ϕ : 要素断面のねじり角
- ϕ' : ねじり率
- ω : 任意点Oに関する単位そり関数
- Δ : 面外たわみ
- $(\quad)'$: d/dx
- $(\overline{\quad})$: 全体量
- a, b : 節点 a, b を表わすサフィックス

参考文献

- 1) Trahair, N. S. and Kitipornchai, S. : Elastic Lateral Buckling of Stepped I-Beams, Proc. of ASCE, Vol. 97, No. ST10, Oct., 1971, pp. 2535-2548.
- 2) Galambos, T. V. : Inelastic Lateral Buckling of Beams, Proc. of ASCE, Vol. 89, No. ST5, Oct., 1963, pp. 217-242.
- 3) Fukumoto, Y. and Galambos, T. V. : Inelastic Lateral-Torsional Buckling of Beam-Columns, Proc. of ASCE, Vol. 92, No. ST2, April, 1966, pp. 41-61.
- 4) Barsoum, R. S. and Gallagher, R. H. : Finite Element Analysis of Torsional and Torsional-Flexural Stability Problems, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 2, No. 3, 1970, pp. 335-352.
- 5) Powell, G. and Klinger, R. : Elastic Lateral Buckling of Steel Beams, Proc. of ASCE, Vol. 96, No. ST9, Sep., 1970, pp. 1919-1932.
- 6) Bazant, Z. P. and EL Nimeiri, M. : Large-Deflection Spatial Buckling of Thin-Walled Beams and Frames, Proc. of ASCE, Vol. 99, No. EM6, Dec., 1973, pp. 1259-1281.
- 7) 坂井 藤一: 薄肉開断面部材の弾性安定基礎方程式の統一的誘導, 土木学会論文報告集, 第221号, 1974年1月, pp. 1-15.
- 8) 結城 皓曠・前田 幸雄: 薄肉断面構造の三次元挙動の解析, 土木学会論文報告集, 第224号, 1974年4月, pp. 67-78.
- 9) Murray, D. W. and Rajasekaran, S. : Technique for Formulating Beam Equations, Proc. of ASCE, Vol. 101, No. EM5, Oct., 1975, pp. 561-573.
- 10) Epstein, M. and Murray, D. W. : Three-Dimensional Large Deformation Analysis of Thin Walled Beams, Int. J. Solids Struct., Vol. 12, No. 12, 1976, pp. 867-876.
- 11) 藤本 盛久・和田 章・岩田 衛・中谷 文俊: 鋼構造骨組の三次元非線形解析, 日本建築学会論文報告集, 第227号, 1975年1月, pp. 75-85.
- 12) Rajasekaran, S. and Murray, D. W. : Finite Element Solution of Inelastic Beam Equations, Proc. of ASCE, Vol. 99, No. ST6, June, 1973, pp. 1025-1041.
- 13) Epstein, M. Nixon, D. and Murray, D. W. : Large Displacement Inelastic Analysis of Beam-Columns, Proc. of ASCE, Vol. 104, No. ST5, May, 1978, pp. 841-853.

- 14) Klöppel, K. and Unger, B. : Eine Experimentelle Untersuchung des Kippverhaltens von Krägtragern im elastischen und im Plastischen Bereich im Hinblick auf eine Neufassung des Kippsicherheitsnachweises der DIN4114, Der Stahlbau 40, Heft 11/12, Nov./Dez., 1971, s.321-329/s.375-383.
- 15) 前川幸次・吉田 博: 鋼I形はりの横倒れ安定性の評価方法に関する研究, 土木学会論文報告集, 第312号, 1983年3月, pp.55-63.
- 16) Yoshida, H. and Maegawa, K. : Lateral Instability of I-Beams with Imperfections, Proc. of ASCE, Vol.110, No. ST8, Aug., 1984, pp.1875-1892.
- 17) Vinnakota, S. : Inelastic Stability of Laterally Unsupported I-Beams, Computer & Structures, Vol.7, No.3, June, 1977, pp.377-389.
- 18) Komatsu, S. and Sakimoto, T. : Nonlinear Analysis of Spatial Frames Consisting of Members with Closed Cross-Sections, Proc. of JSCE, No.252, Aug., 1976, pp.143-157.
- 19) Komatsu, S. and Sakimoto, T. : Ultimate Load Carrying Capacity of Steel Arches, Proc. of ASCE, Vol.103, No. ST12, Dec., 1977, pp.2323-2336.
- 20) Trahair, N. S. : Elastic Stability of Continuous Beams, Proc. of ASCE, Vol.95, No. ST6, June, 1969, pp.1259-1312.
- 21) Murray, D. W. and Wilson, E. L. : Finite Element Postbuckling Analysis of Thin Elastic Plates, AIAA J., Vol.7, No.10, Oct., 1969, pp.1915-1920.
- 22) Hofmeister, L. D., Greenbaum, G. A. and Evensen, D. A. : Large Strain Elasto-Plastic Finite Element Analysis, Proc. of AIAA/ASME, July, 1971, pp.1248-1254.
- 23) Martin, H. C. : On the Derivation of Stiffness of Large Deflection and Stability Problems, Proc. of 1st Inter. Conf. on Matrix Method in Struct. Mecha, Vol.2, Ohio, 1965, pp.697-716.
- 24) Stricklin, J. A., et. al. : Static Geometric and Material Nonlinear Analysis, presented at the Aug., 1972, the 2nd U.S.-Japan Seminar held at Tokyo, Japan, Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, The Univ. Alabama Press, pp.301-324.
- 25) 日本道路協会: 道路橋示方書・同解説, 1980年2月.
- 26) 三本木茂夫: 梁および板の非線形解析, JSSC第5回マトリックス解析法研究発表論文集, 1971年6月, pp.186-193.

- 27) Vlasov, V. Z. : Thin-Walled Elastic Beams, 2nd ed., Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1961 (奥村敏恵監訳: 薄肉弾性ばりの理論, 技報堂, 1967年).
- 28) Timoshenko, S. P. and Gere, J. M. : Theory of Elastic Stability, 2nd ed., McGraw-Hill, 1961.
- 29) Woolcock, S. T. and Trahair, N. S. : Post-Buckling Behavior of Determinate Beams, Proc. of ASCE, Vol. 100, No. EM2, April, 1974, pp. 151-171.
- 30) Galambos, T. V. : Structural Members and Frames, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1968 (福本嘯士・西野文雄共訳: 鋼構造部材と骨組-強度と設計-, 丸善, 1970年).
- 31) Birnstiel, C. : Experiments on H-Columns under Biaxial Bending, Proc. of ASCE, Vol. 94, No. ST10, April, 1968, pp. 2429-2449.
- 32) Sakimoto, T. and Ojalvo, M. : The Lateral Instability of Continuous Steel Beams, NSF Project No. ENG-7820580, Ohio State College., Jan., 1981.
- 33) 高岡宣善: 構造部材のねじり解析, 共立出版, 1974年.
- 34) 小松定夫: 薄肉構造物の理論と計算 I, 山海堂, 1969年.
- 35) 山田嘉昭: 塑性・粘弾性, コンピュータによる構造工学講座 II-2-A, 培風館, 1972年.
- 36) 山田嘉昭: 塑性力学, 日刊工業新聞社, 1960年.
- 37) 大地羊三: 変形による構造解析, 数学ライブラリー, 森北出版.
- 38) 山尾敏孝・崎元達郎: 薄肉開断面ばりの弾塑性有限変位解析, 第35回土木学会年次学術講演会講演概要集, 第I部, 1980年9月.
- 39) 崎元達郎・山尾敏孝・坂田 力: 薄肉開断面骨組の弾塑性有限変位解析, 第40回土木学会年次学術講演会講演概要集, 第I部, 1985年9月.
- 40) Sakimoto, T., Yamao, T., Kikuchi, R. and Sakata, T. : Nonlinear Analysis of Thin-Walled Frames and Members with Arbitrary Open Cross Sections, Proc. of JSCE, No. 362/(I-4), Oct., 1985, pp. 139-147.
- 41) 崎元達郎・山尾敏孝・坂田 力: 薄肉開断面部材の非線形解析, 構造工学論文集, Vol. 32A, 1986年3月, pp. 255-264.

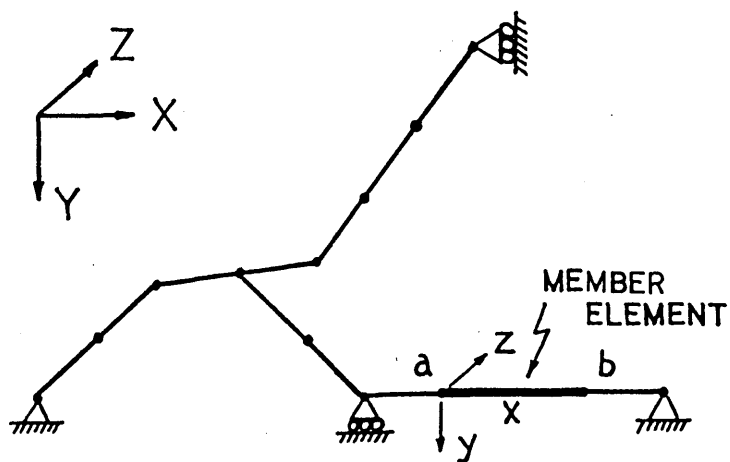


図2.1 鋼骨組構造のモデル化

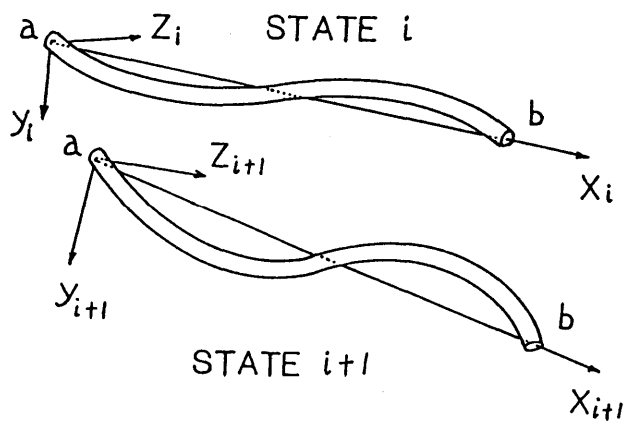


図2.2 移動座標系

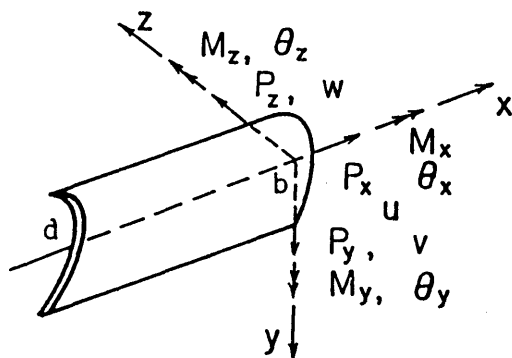


図2.3 節点力増分と節点変位増分

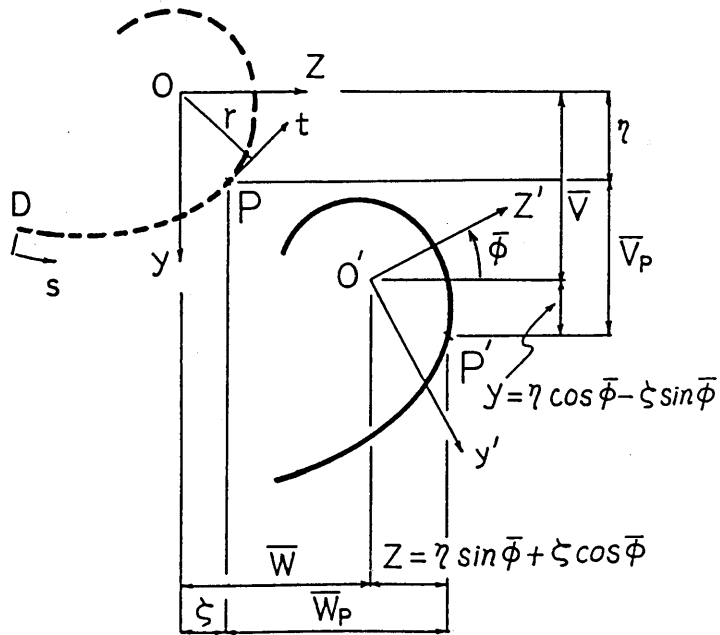


図2.4(a) 断面の移動と回転の関係

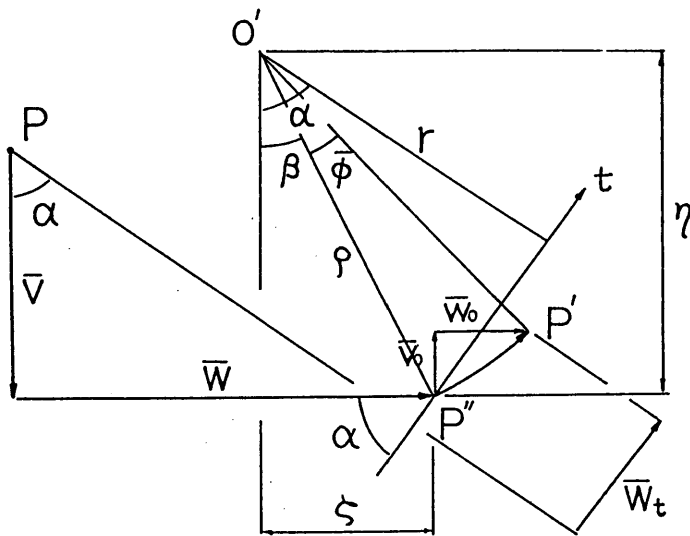


図2.4(b) 任意点Pの変位関係

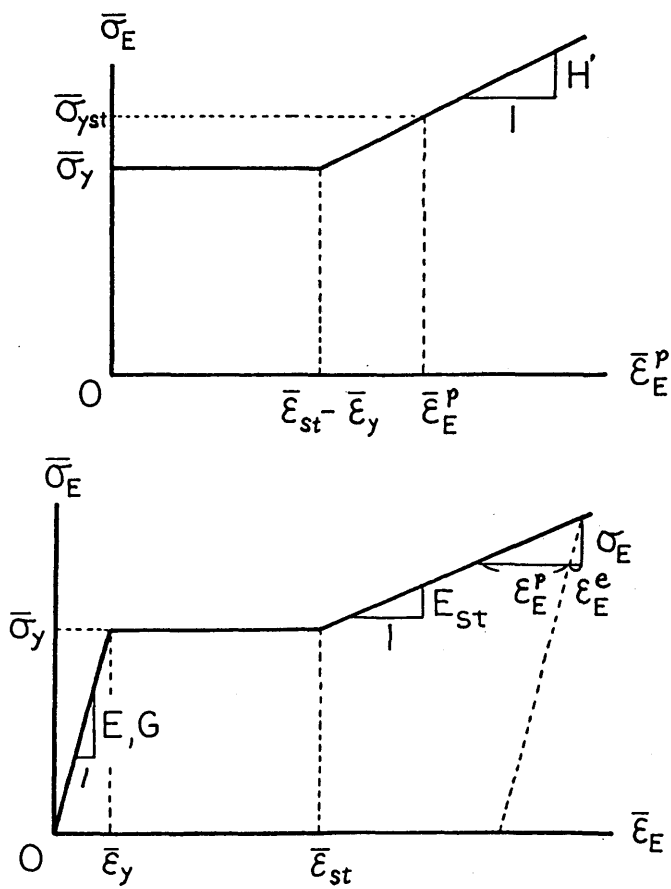


図2.5 応力－ひずみ関係

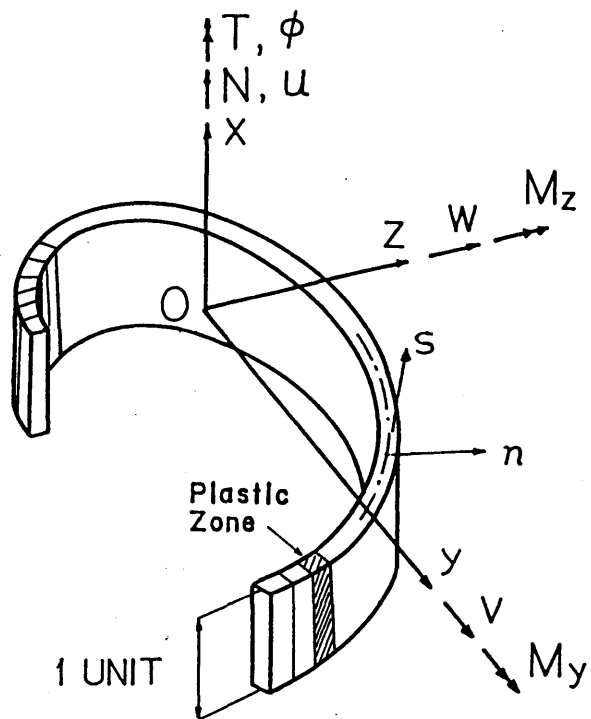


図2.6(a) 要素の断面力増分と変位増分

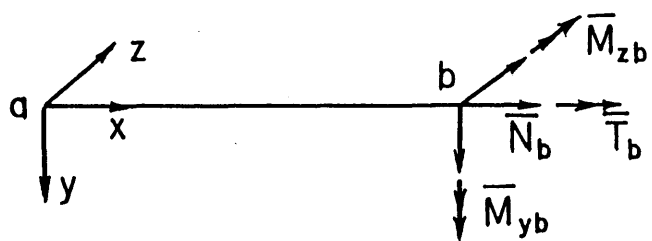


図2.6(b) 断面力の正方向

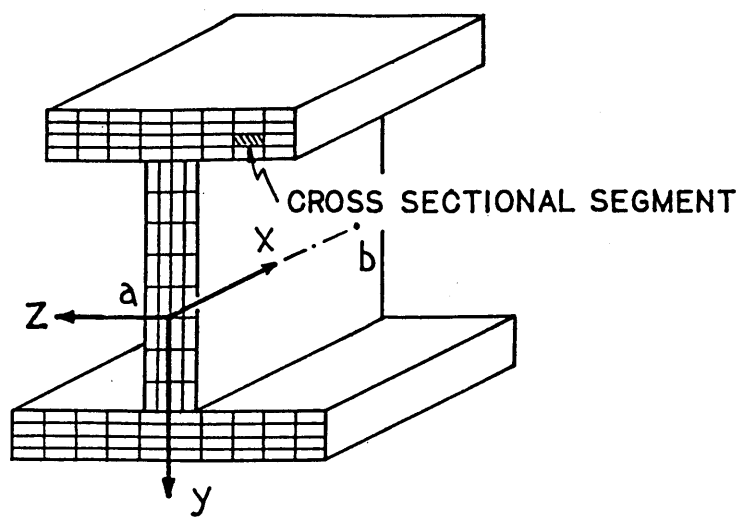


図2.7 断面の要素分割

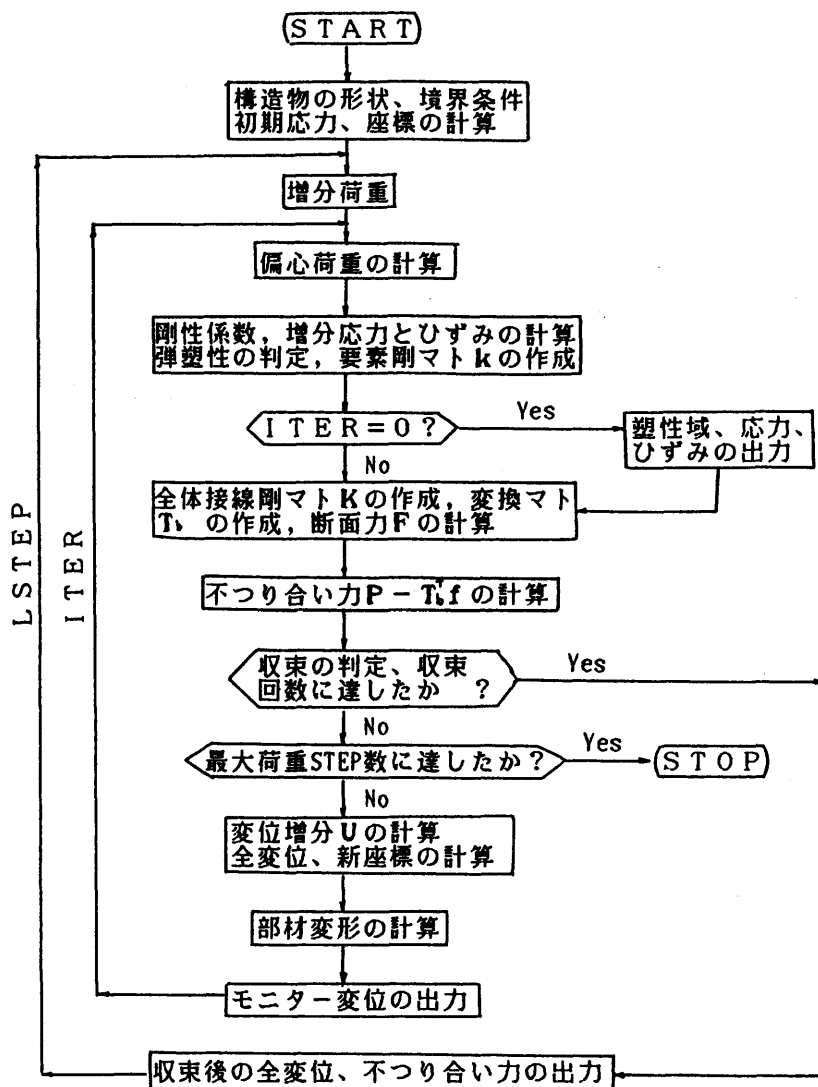


図2.8 フローチャート

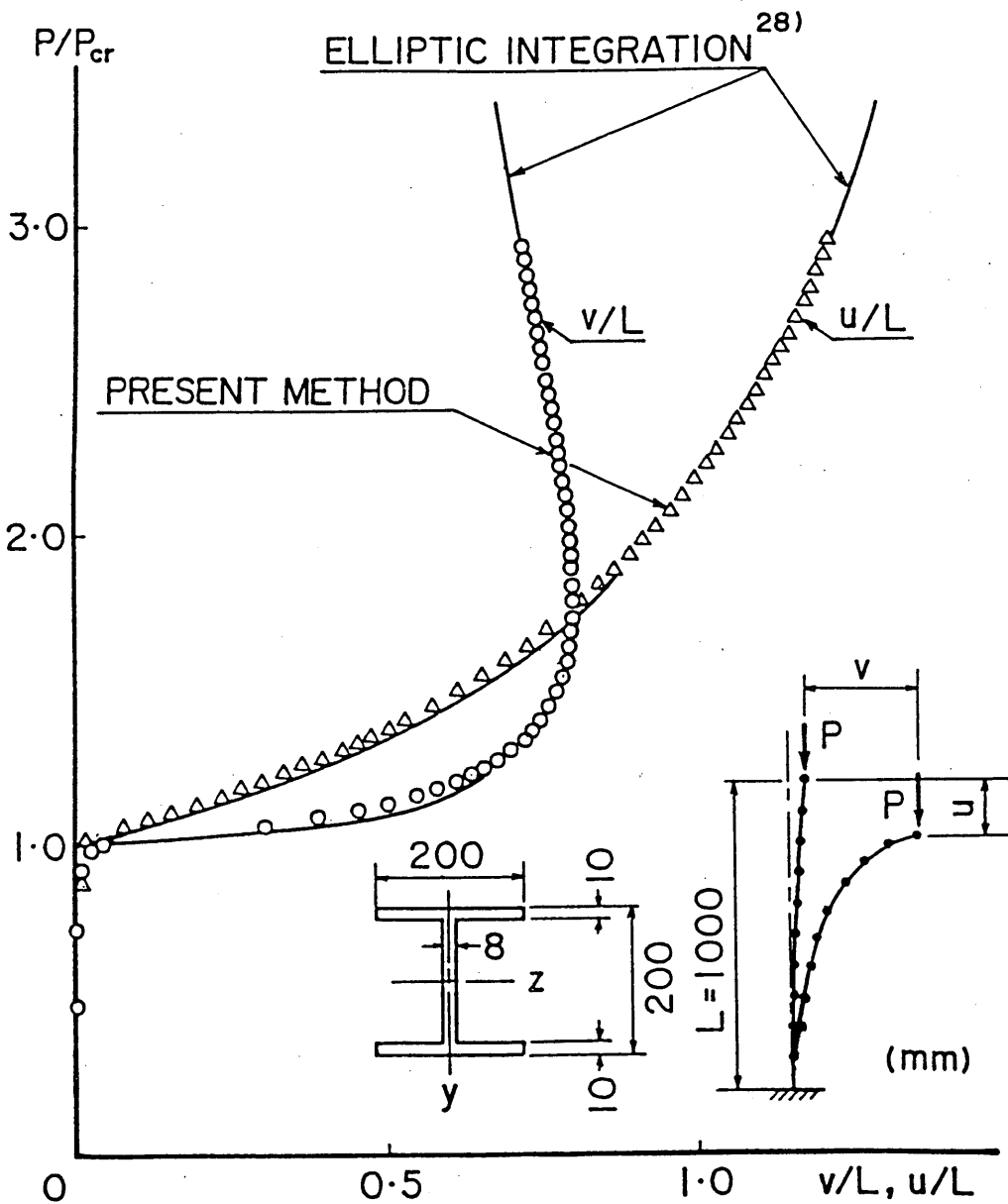


図2.9 柱のエラスティカ

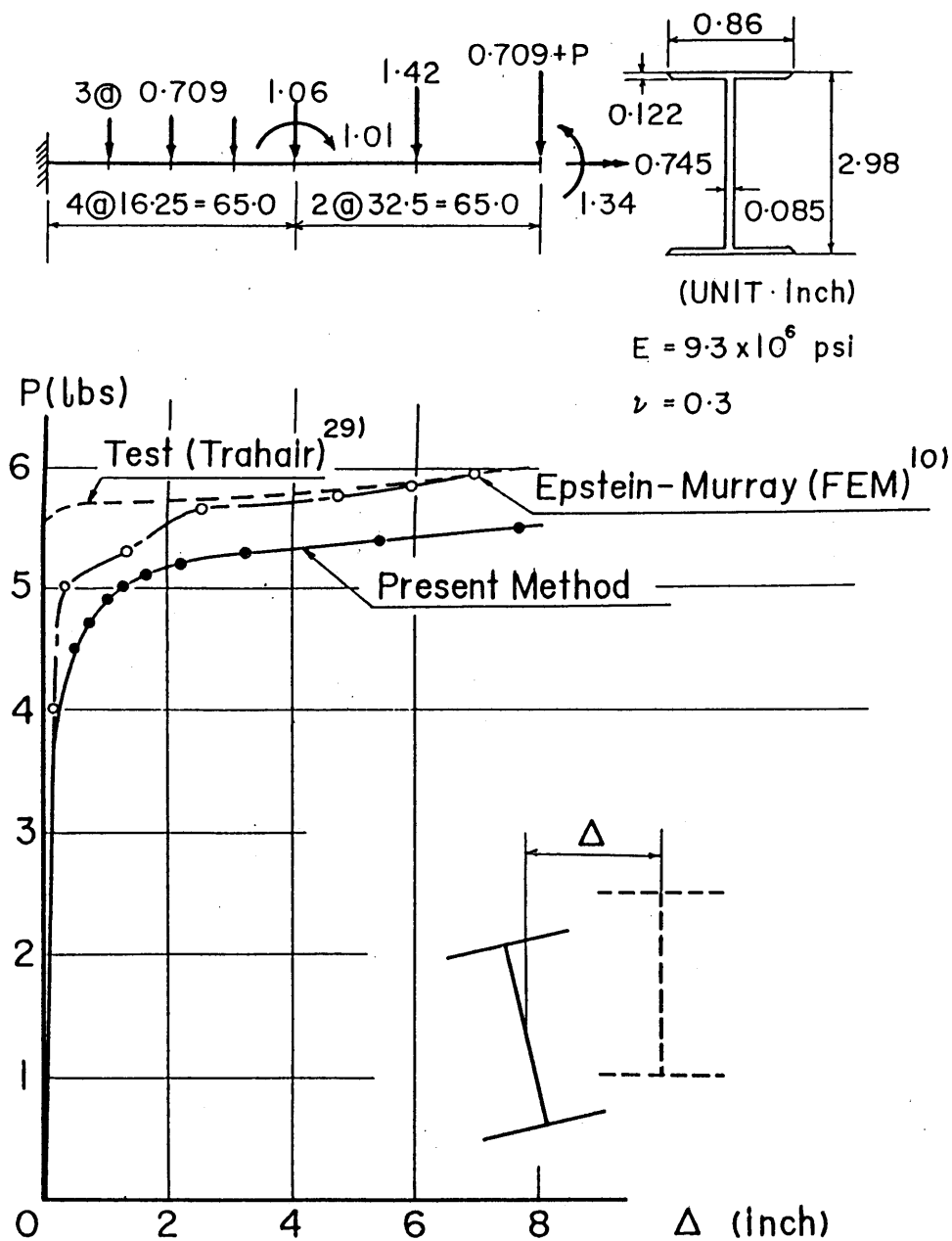
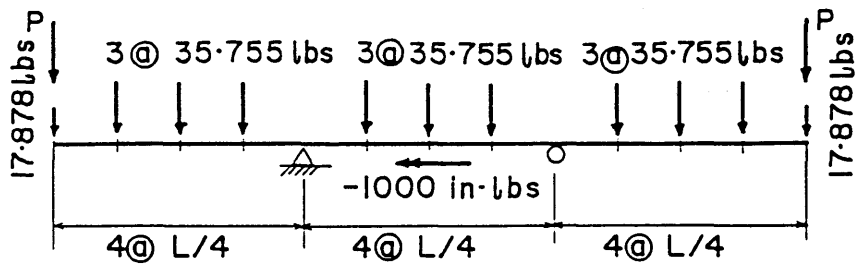
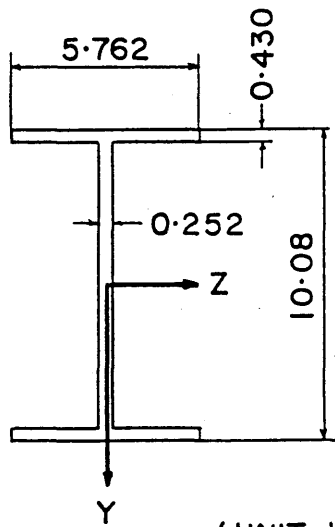


図2.10 片持ちはりの荷重－変位曲線



(a) Loading



(UNIT Inch)

(b) Cross sectional dimensions

W10 x 25

$L/r_y = 50$

$E = 30400 \text{ ksi}$

$\sigma_y = 34 \text{ ksi}$

$\sigma_{rc} = 0.3 \sigma_y$

$E_{st} = 760 \text{ ksi}$

$\epsilon_{st} = 0.01565$

$G = E/2.6$

図2.11 解析モデル

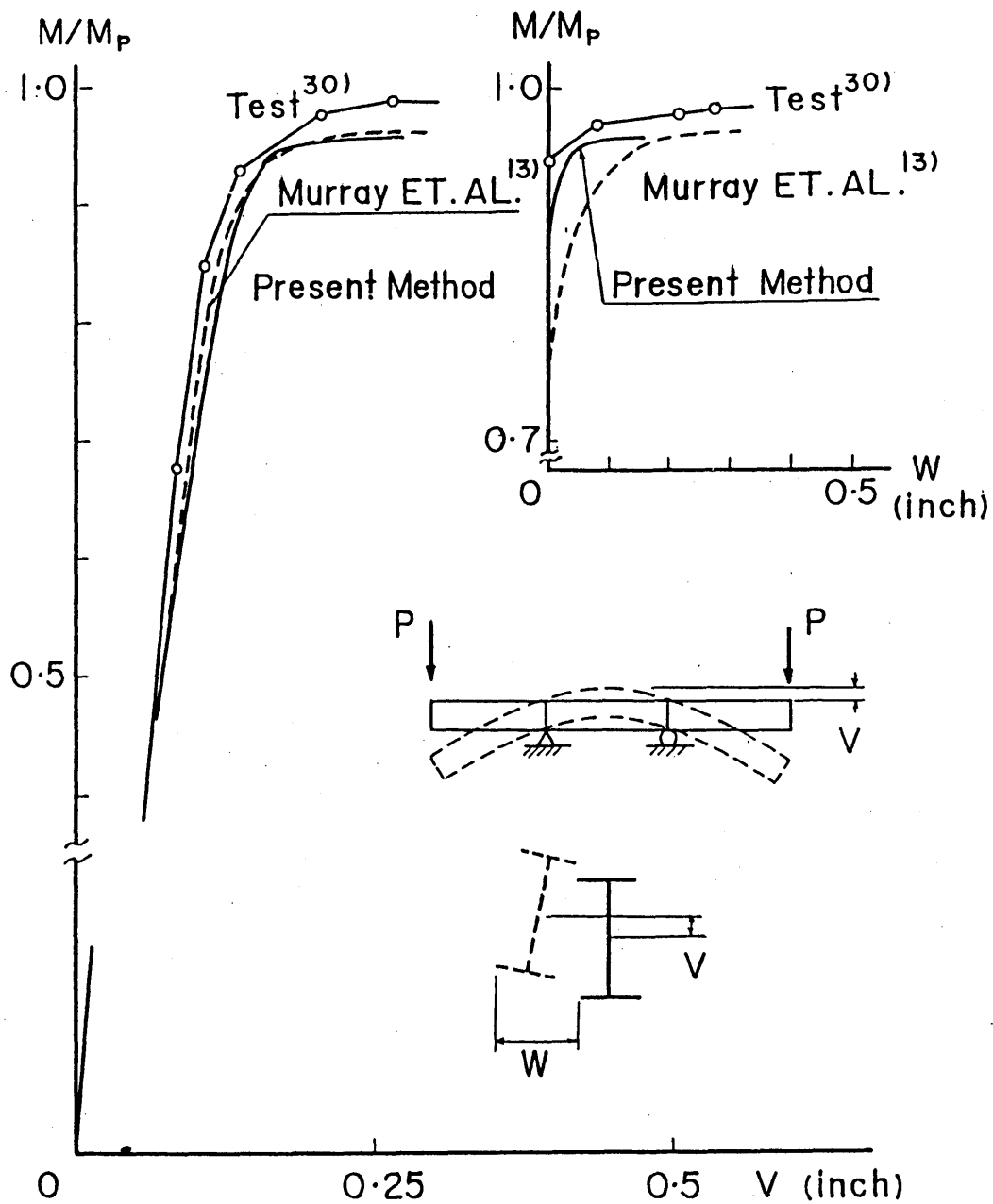


図2.12 中央断面の荷重－変位曲線

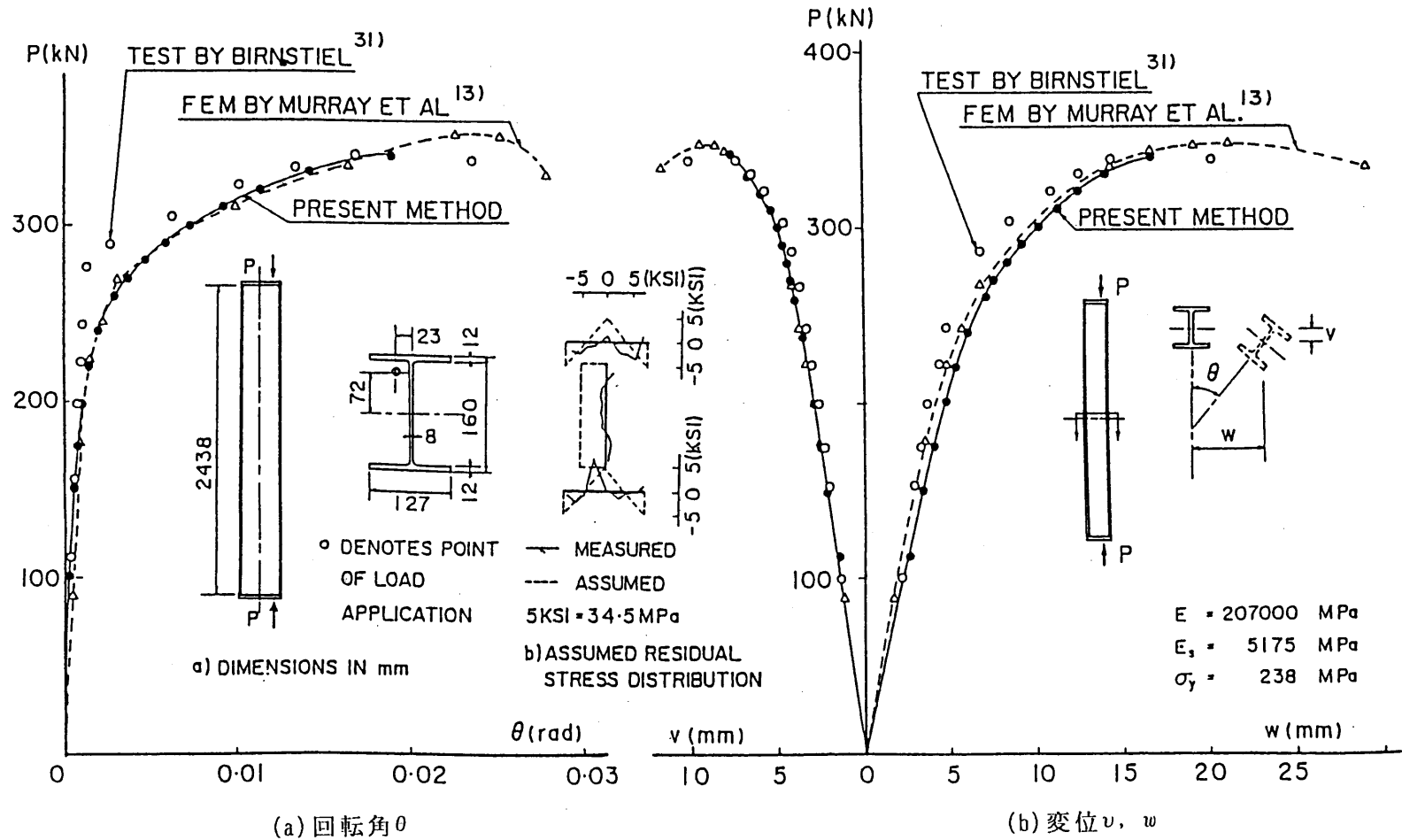
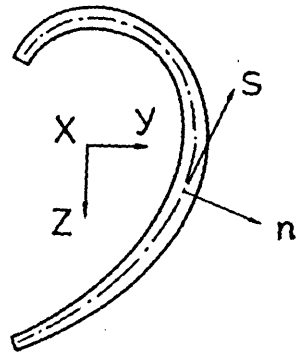
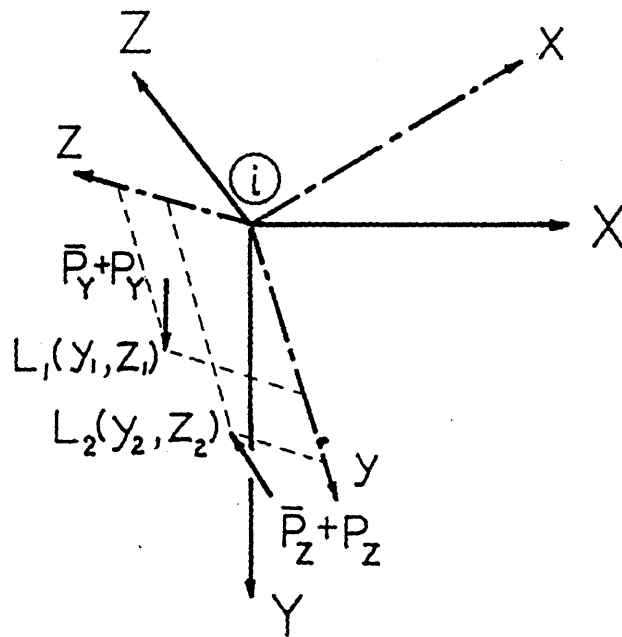


図2.13 偏心荷重を受ける柱の中央断面における回転角と変位曲線



図A2.1 座標系の設定



図A2.2 偏心荷重の載荷

第3章 板構造の弾塑性有限変位解析

3.1 概 説

従来より、板要素の座屈後挙動や後座屈強度に関する非線形問題の解析的研究は、数多くの研究者により行なわれてきた。たとえば、弾性有限たわみ問題を解析的に解いたLevy²⁾やCoan³⁾及び八巻⁴⁾の研究、初期たわみを有する圧縮板の弾塑性有限変位解析を行なった大坪⁹⁾、岡村・吉田¹⁰⁾、Needleman and Tvergaard¹¹⁾の研究、さらに、残留応力の影響も考慮して解析を行なった小松・北田・宮崎¹²⁾、上田・安川・矢尾・池上・大南¹³⁾、Crisfield¹⁴⁾、Harding¹⁵⁾らの研究がある。特に、有限要素法の発達と大型計算機の発達により各種の非線形問題の解析が可能となった。しかし、これらの研究の多くは単一部材に対する解析が主であり、板要素で立体構成した場合の耐荷力や構成板の幅厚比と変形挙動の関係及び変形挙動が耐荷力に及ぼす影響等についての研究が少ないのが現状である。

板要素の連成座屈挙動に関する解析的研究としては、たとえば、固有値問題としての局部座屈強度に関する研究^{16)~22)}、塑性解析法により局部座屈後の変形挙動を扱った研究^{23)~28)}等がある。しかし、固有値解析では板要素相互の連成作用は考慮できるが、要素の変形が耐荷力に及ぼす影響や座屈後の挙動は追跡できない。また、塑性解析では局部座屈モードを限定しているので、板要素の相互作用や変形挙動が十分解析できていないと思われる。

最近では、この連成局部座屈挙動を厳密に解析する有限要素法を使用して解析が行なわれるようになった。宇佐美・土屋・大谷・福本²⁹⁾、中井・北田・酒造³⁰⁾の研究は箱形断面を対象にしており、初期不整を考慮した耐荷力挙動の解析を行なっている。H形断面を対象にした解析は藤本・須藤・和田³¹⁾、吉田・増田・松田³²⁾、鈴木・金子^{33), 34)}の研究がある。いずれの解析法においても厳密に挙動を解析するには、大型計算機を用い、多くの記憶容量や演算時間を必要としているのが現状である。

また、通常用いられている要素内一定ひずみ、一定曲率の三角形平板要素（一節点5自由度）を使用して板要素を立体構成する際、平面応力問題における面内回転剛性が存在していないため、局所的な不安定を生じる可能性があることである。この面内回転剛性の取り扱いに関する研究としては、Zienkiewicz³⁵⁾の仮想回転剛性、Kanok-Nukulchai³⁶⁾の任意点の法線まわり振り剛性の付加、鈴木・金子³³⁾の一般の連続体力学理論のmicro変形に着

目した面内回転剛性の評価、吉田・雨宮・増田³⁷⁾の応力仮定のハイブリッド法を用いて要素周辺に仮定する変位分布に着目した面内回転剛性の評価等の研究がある。

本章では、局部変形を考慮した全体座屈挙動の解析を行なう上で必要な板要素の有限変位弾塑性解析法の定式化を中心に記述する。まず、はり要素と同様に板要素でも変位仮定の増分理論で定式化する必要から、ここでは通常のひずみ一定要素に、鈴木ら^{33), 34)}が採用しているmicropolar理論³⁸⁾によるmicro変形に対応した面内回転剛性を導入し、一節点6自由度を有する三角形平板要素とした。また、板要素の座屈後の大変形挙動のほとんどは剛体変位であるので、北田ら¹²⁾の方法に改良を加えて剛体変位を除去した。そして、剛体変位を除去して求めた真の変位より節点力を算定し、不つり合い力を計算している。増分つり合い方程式は、系の全ポテンシャルエネルギー増分の停留条件より誘導する。以上のように定式化した解析法について、数値解析例を通して板要素の分割数による精度や収束性等を他の解析結果と比較検討し、本解析法の妥当性、有効性について検討する。

3.2 つり合い方程式の誘導

3.2.1 仮定と座標系の設定

次に示す仮定に基づいて解析を行なう。

- (i) 材料は完全弾塑性体でかつ等方性である。
- (ii) von Misesの降伏条件式に従い、塑性域ではPrandtl-Reussの応力-ひずみ式が成立するものとする。
- (iii) 変形前、板の中央面に垂直であった任意の横断面は変形後も変形した中央面に垂直である。
- (iv) 初期たわみを有する板を、図3.1に示すように平面の三角形要素の集合体（折板構造）で近似モデル化し、この状態を無応力状態と考える。また、初期たわみにより生ずる曲げ応力度はないものとする。
- (v) 一つの要素断面内で板面方向の応力は一定である。

各有限要素の局所座標系 (x, y, z) を図3.2に示すように設定する。そして三角形要素1, 2, 3の頂点1を通り板の中央面に直角上向きに z 軸を取り、 z 軸と板の中央面との交点を原点を O とする。この原点 O を通り $\overline{12}$ に沿って x 軸をとり、 xz 平面に垂直に y 軸をとるものとする。

xy平面は節点3を含む。

さて、図3.2に示すように局所座標系で表わした節点変位、節点力をそれぞれ \bar{u}, \bar{f} と置き、その節点変位増分、節点力増分をそれぞれ u, f と置く。これらは、それぞれxy平面の面内成分と面外成分から成る。面内変位増分と面内回転変位増分(micro回転増分一次節で述べる)に対応する節点力増分を、 $u_n, f_n + f_\phi$ 面外変位増分およびそれに対応する節点力増分をそれぞれ u_b, f_b とする。以下の諸式においては記号の上に $\bar{}$ を付したものは、全変位、全外力を、付さないものはそれらの増分量を表わすものとする。

3.2.2 ひずみと変位の関係

変形状態*i*における局所座標系での要素中央面内の任意点の変位を $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ とする。更にこの点の状態*i*に至るまでに生じているひずみを $\bar{\epsilon}_i$ とし、*i*状態から*i+1*状態に変形する時の板の中央の*x, y, z*方向のそれぞれの変位増分を u, v および w とすると、変形後の板の任意点のひずみ $\bar{\epsilon}_{i+1}$ は高次項を考慮したひずみと変位の関係式は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{i+1} = \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_x \\ \bar{\epsilon}_y \\ \bar{\gamma}_{xy} \\ \bar{\gamma}_\phi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{u}_{i+1}}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{v}_{i+1}}{\partial y} \\ \frac{\partial \bar{u}_{i+1}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_{i+1}}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\frac{\partial \bar{w}_{i+1}}{\partial x})^2 \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial \bar{w}_{i+1}}{\partial y})^2 \\ \frac{\partial \bar{w}_{i+1}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{w}_{i+1}}{\partial y} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &- z \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \bar{w}_{i+1}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \bar{w}_{i+1}}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 \bar{w}_{i+1}}{\partial x \partial y} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{\gamma}_\phi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.1)$$

ここに、

$$\bar{u}_{i+1} = \bar{u}_i + u_i, \quad \bar{v}_{i+1} = \bar{v}_i + v_i, \quad \bar{w}_{i+1} = \bar{w}_i + w_i \quad (3.2)$$

式(3.1)の $\bar{\gamma}_\phi$ は、鈴木・金子³³⁾が採用している面内回転成分である。これは、通常の平面応力問題では存在しない面内回転変位を、一般化された連続体力学理論で考慮されているmicro変形により導入しようというものである。なお、ここではmicropolar理論³³⁾を採用している。この理論は伸び及びせん断変形が剛なmicro要素を考え、回転変形のみを考慮するという仮定に基づいており、ひずみ-変位関係式を次式で表わしている。

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_x &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{2}(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x})^2, \quad \bar{\epsilon}_y = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{1}{2}(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y})^2 \\ \bar{\gamma}_{xy}^* &= \bar{\gamma}_{xy} + \bar{\gamma}_\phi \\ &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + 2(\theta_z^* - \frac{1}{2}(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y})) \end{aligned} \quad (3.3)$$

ここに、 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ はmacro変位で、 θ_z^* がmicro回転、 $\frac{1}{2}(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y})$ がmacro回転をそれぞれ

表わし、その関係を図示すると、図3.3である。つまり、式(3.3)の γ_ϕ が通常の弾性論に付加された関係式である。そして、このmicro回転とmacro回転が一致した時、弾性論に対応するものと考えている。

また、この時のせん断応力度は次式で表わしている。

$$\bar{\tau}_{xy}^* = \bar{\tau}_{xy} + \bar{\tau}_\phi = G\bar{\gamma}_{xy} + G\bar{\gamma}_\phi \quad (3.4)$$

ここに G はせん断弾性係数である。次に、式(3.1)よりひずみ増分 ϵ は

$$\begin{aligned} \epsilon &= [\epsilon_x \ \epsilon_y \ \gamma_{xy} \ \gamma_\phi]^T = \bar{\epsilon}_{i+1} - \bar{\epsilon}_i \\ &= \begin{bmatrix} \partial u/\partial x \\ \partial v/\partial y \\ \partial u/\partial y + \partial v/\partial x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial \bar{w}/\partial x \cdot \partial w/\partial x \\ \partial \bar{w}/\partial y \cdot \partial w/\partial y \\ \partial \bar{w}/\partial y \cdot \partial w/\partial x + \partial \bar{w}/\partial x \cdot \partial w/\partial y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\partial w/\partial x)^2 \\ \frac{1}{2}(\partial w/\partial y)^2 \\ \partial w/\partial x \cdot \partial w/\partial y \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} \partial^2 w/\partial x^2 \\ \partial^2 w/\partial y^2 \\ 2\partial^2 w/\partial x \partial y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2\theta_z^* - (\partial v/\partial x - \partial u/\partial y) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.5)$$

と表わされる。又、中央面の線形ひずみ増分を ϵ_a 、曲率の増分を ϵ_b 、たわみ角増分を ϵ_θ およびmicro回転とmacro回転の差の増分を ϵ_ϕ とすれば、これらは節点変位増分 u_a, u_b を使って次式で表わせる。

$$\epsilon_a = \begin{bmatrix} \partial u/\partial x \\ \partial v/\partial y \\ \partial u/\partial y + \partial v/\partial x \\ 0 \end{bmatrix} = B_a u_a \quad (3.6a)$$

$$\epsilon_\phi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2\theta_z^* - (\partial v/\partial x - \partial u/\partial y) \end{bmatrix} = B_\phi u_a \quad (3.6b)$$

$$\epsilon_b = \begin{bmatrix} \partial^2 w/\partial x^2 \\ \partial^2 w/\partial y^2 \\ 2\partial^2 w/\partial x \partial y \\ 0 \end{bmatrix} = B_b u_b \quad (3.6c)$$

$$\epsilon_\theta = \begin{bmatrix} \partial w/\partial x \\ \partial w/\partial y \end{bmatrix} = B_\theta u_b \quad (3.6d)$$

ここに、

$$\begin{aligned} u_a &= [u_{a1} \ u_{a2} \ u_{a3}]^T, \quad u_{ak} = [u \ v \ \theta_z]^T_k \\ u_b &= [u_{b1} \ u_{b2} \ u_{b3}]^T, \quad u_{bk} = [w \ \theta_z \ \theta_y]^T_k \quad k=1 \sim 3 \end{aligned} \quad (3.7)$$

T は転置を表わす。また、係数マトリックス $B_u, B_\phi, B_b, B_\theta$ の誘導については付録3.1に示す。ここで用いる変位関数は、要素面内の変位 u, v 及び回転角 θ_z は、 x, y の一次式で、面外変位 w は面積座標による多項式を用いている。式(3.6a~d)を用いると要素内の任意点の非線形性を考慮したひずみ増分 ϵ は次式で表わせる。

$$\epsilon = B_u u_n + B_\phi u_n + \frac{1}{2} C_\theta B_\theta u_b + \bar{C}_\theta B_\theta u_b - z B_b u_b \quad (3.8)$$

ここに、

$$\bar{C}_\theta = \begin{bmatrix} \partial \bar{w} / \partial x & 0 \\ 0 & \partial \bar{w} / \partial y \\ \partial \bar{w} / \partial y & \partial \bar{w} / \partial x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_\theta = \begin{bmatrix} \partial w / \partial x & 0 \\ 0 & \partial w / \partial y \\ \partial w / \partial y & \partial w / \partial x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

ところで、変形状態 i を xy 平面上にのる平面三角形要素で近似することにより $\partial \bar{w} / \partial x, \partial \bar{w} / \partial y$ が0となるので、 $\bar{C}_\theta = 0$ が成立する。これより式(3.8)は、

$$\epsilon = B_u u_n + B_\phi u_n + \frac{1}{2} C_\theta B_\theta u_b - z B_b u_b \quad (3.10)$$

と表わされる。なお、 $[\quad]$ はマトリックスまたはベクトルを表わす。

3.2.3 応力増分とひずみ増分の関係

弾性域ではHookeの法則が、塑性域ではPrandtl-Reussの応力-ひずみ式が成立し、von Misesの降伏条件式が成立するものとする。

まず、弾性域ではHookeの法則より

$$\sigma = D_e \epsilon \quad (3.11)$$

ここに、

$$\sigma = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy} \quad \tau_\phi]^T \quad (3.12a)$$

$$D_e = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (3.12b)$$

この D_e は板の弾性剛性マトリックスである。ただし、 E はヤング率であり、 ν はポアソン比である。

次に塑性域ではPrandtl-Reussの仮定より、塑性ひずみ増分 ϵ_p は次式で与えられる。

$$\epsilon_p = \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad (3.13)$$

ここに、 λ は正値の比例係数、 F は降伏条件式で、von Misesの降伏条件式に従うものとなれば、その条件式は

$$\begin{aligned}
F(\bar{\sigma}) &= \bar{\sigma}_e = \sigma_Y \\
&= (\bar{\sigma}_x^2 - \bar{\sigma}_x \bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_y^2 + 3\bar{\tau}_{xy}^2)^{1/2}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

ここに、 $\bar{\sigma}_e$ は相当応力度、 σ_Y は引張試験による降伏点応力度である。式(3.11)、式(3.12)および式(3.13)より

$$\sigma = D_e [\epsilon - \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}}] \tag{3.15}$$

となる。また塑性状態では、応力 σ が降伏曲線上を流れるから

$$dF = (\frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}})^T \sigma = 0 \tag{3.16}$$

となる。そこで式(3.15)を式(3.16)に代入すると次式となる。

$$dF = (\frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}})^T D_e [\epsilon - \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}}] = 0 \tag{3.17}$$

これより

$$\lambda = \frac{\{(\frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}})^T D_e \epsilon\}}{\{(\frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}})^T D_e (\frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}})\}} \tag{3.18}$$

となる。さらに、上式を式(3.15)に代入すると

$$\sigma = D_{ep} \epsilon \tag{3.19}$$

ここに、 D_{ep} は弾塑性剛性マトリックスで次式で表わされる。

$$D_{ep} = D_e - \frac{\{D_e (\frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}}) (\frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}})^T D_e\}}{\{H' (\frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}})^T D_e (\frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}})\}} \tag{3.20}$$

$$H' = EE_{st}/(E-E_{st})$$

なお、 E_{st} はひずみ硬化係数である。

具体的に表わすと式(3.20)は

$$D_{ep} = D_e - \frac{1}{S} \begin{bmatrix} S_x^2 & S_x S_y & S_x S_{xy} & 0 \\ S_x S_y & S_y^2 & S_y S_{xy} & 0 \\ S_x S_{xy} & S_y S_{xy} & S_{xy}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{xy}^2 \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

ここに、

$$\begin{aligned}
S_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\sigma'_x + \nu \sigma'_y), & S_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\sigma'_y + \nu \sigma'_x) \\
S_{xy} &= 2G\tau_{xy}, & S &= \frac{4}{9} \bar{\sigma}_e^2 H' + S_x \sigma'_x + S_y \sigma'_y + 2S_{xy} \tau_{xy}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

ただし、 σ'_x, σ'_y は偏差応力である。なおここでは、塑性域における τ_ϕ と ϵ_ϕ の関係の剛性低下は、対応する剛性を有する平面応力場の τ_{xy} と γ_{xy} の関係に準ずるとし、他の応力度とひずみ関係に連成しないものと仮定する。

3.2.4 接線剛性マトリックスの誘導

今、変形状態*i*での節点力を \bar{p} 、節点変位を \bar{u} 、変形状態*i+1*での節点力を $\bar{p}+p$ 、節点変位を $\bar{u}+u$ とすれば外力ポテンシャルの増分 V は

$$\begin{aligned} V &= -\{(\bar{u}+u)^T(\bar{p}+p) - u^T p\} \\ &= -u^T(\bar{p}+p) - \bar{u}^T p \end{aligned} \quad (3.23)$$

又、この間のひずみエネルギーの増分 U は

$$\begin{aligned} U &= \int_V (\epsilon^T \bar{\sigma} + 1/2 \epsilon^T \sigma) dV \\ &= \int_V (\epsilon^T \bar{\sigma} + 1/2 \epsilon^T D \epsilon) dV \end{aligned} \quad (3.24)$$

となり、上式に式(3.10)を代入すると

$$\begin{aligned} U &= \int_V (u_a^T B^T + u_\phi^T B_\phi^T + \frac{1}{2} u_b^T B_b^T C_b^T - z u_b^T B_b^T) \bar{\sigma} dV + \frac{1}{2} \int_V (u_a^T B^T + u_\phi^T B_\phi^T + \frac{1}{2} u_b^T B_b^T C_b^T - z u_b^T B_b^T) D (B_a u_a \\ &\quad + B_\phi u_\phi + \frac{1}{2} C_b B_b u_b - z B_b u_b) dV \end{aligned} \quad (3.25)$$

となる。よって全ポテンシャルエネルギー増分 $\Pi = U + V$ は、節点変位増分で表わすことができる。よって、 Π の停留条件 $\delta \Pi = 0$ により、次のつり合い方程式が得られる。

$$p + (\bar{p} - \bar{f}) = \begin{bmatrix} k_{aa} + k_{\phi\phi} & k_{ab} \\ k_{ba} & k_{bb} + k_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \end{bmatrix} = k \cdot u \quad (3.26)$$

ここに、

$$\bar{f} = \begin{bmatrix} \bar{f}_a + \bar{f}_\phi \\ \bar{f}_b \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$\bar{f}_a = \int_V B_a^T \bar{\sigma} dV, \quad \bar{f}_\phi = \int_V B_\phi^T \bar{\sigma} dV, \quad \bar{f}_b = - \int_V z B_b^T \bar{\sigma} dV$$

$$k_{aa} = \int_V B_a^T D B_a dV, \quad k_{\phi\phi} = \int_V B_\phi^T D B_\phi dV$$

$$k_{ab} = k_{ba}^T = - \int_V z B_a^T D B_b dV, \quad k_{bb} = \int_V z^2 B_b^T D B_b dV$$

$$k_g = \int_V B_b^T \bar{\sigma}^* B_b dV \quad (3.28a-e)$$

ただし、

$$\bar{\sigma}^* = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_x & \bar{\tau}_{xy} \\ \bar{\tau}_{xy} & \bar{\sigma}_y \end{bmatrix}$$

k が要素の接線剛性マトリックスであり、 k 中の k_g が幾何学的剛性マトリックスで、 k_{ab}, k_{ba} は弾性範囲内であれば、 z について奇関数であるから、 $k_{ab} = k_{ba} = 0$ となる。しかし、

塑性域に入ると各層における D が一定でなくなるので0とはならない。また、 $(\bar{p}-\bar{f})$ は不
つり合い力で、定式化の際の線形化や荷重増分途上で塑性化及び剛性変位が含まれること
により生じる。この不つり合い力の計算法については、3.2.6節で述べる。 $k_{\phi\phi}$ は面内回転
剛性で通常剛性マトリックスに付加された項である。なお、式(3.28)の誘導については付
録3.2に示す。

式(3.26)を全体座標系に変換し、全要素について集成すると次式で表わされる。

$$KU = P + (\bar{P}-\bar{F}) \quad (3.29)$$

ここに、 K は系全体の接線剛性マトリックスで、座標変換マトリックス T_p により次式とな
る。

$$K = T_p^T k T_p \quad (3.30)$$

板要素に関する座標変換マトリックス T_p については付録3.3にその誘導を示す。

しかしながら、式(3.29)で求まる変位 U は、剛体変位が含まれており、真の変位を表わ
していない。そこで次節では剛体変位除去の方法について述べる。

3.2.5 剛体変位の除去¹²⁾

全体座標系 (X, Y, Z) における単位ベクトルを E_1, E_2, E_3 、変形前の局所座標系 (x^*, y^*, z^*) に
おける単位ベクトルを e_1^*, e_2^*, e_3^* とし、変形後の局所座標系 (x, y, z) における単位ベクトルを
 e_1, e_2, e_3 とする。そして

$$E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}, \quad e^* = \begin{bmatrix} e_1^* \\ e_2^* \\ e_3^* \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

とおくと

$$e = \lambda E, \quad e^* = \lambda^* E \quad (3.32a, b)$$

ここに λ, λ^* は変形後、ならびに変形前の局所座標系と全体座標系の間の座標変換マトリ
ックスであり、それぞれ

$$\lambda = \begin{bmatrix} a_{xX} & a_{xY} & a_{xZ} \\ a_{yX} & a_{yY} & a_{yZ} \\ a_{zX} & a_{zY} & a_{zZ} \end{bmatrix}, \quad \lambda^* = \begin{bmatrix} a_{x^*X} & a_{x^*Y} & a_{x^*Z} \\ a_{y^*X} & a_{y^*Y} & a_{y^*Z} \\ a_{z^*X} & a_{z^*Y} & a_{z^*Z} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

ここに、 a_{xX}, \dots は x 軸と X 軸の方向余弦で、他も同様である。 λ, λ^* の誘導につ
いては付録3.3に示す。

図3.4(a)に示すように、変形前の要素内の中央面上の任意点 R と、その点の変形後の位

置を R' とする。また、変形後の要素の節点 $1'2'3'$ を含む平面内に変形後の要素を、1点と $1'$ 点が等しく、辺 $\overline{12}$ が直線 $\overline{1'2'}$ に一致するようにのせた時の R 点の位置を R'' とする。全変位 $\overline{RR'}$ のうち、 $\overline{RR''}$ が要素の剛体変位を意味し、 $\overline{R''R'}$ が要素の変形による正味の変位を意味する。

更に、点 R から点 R' へ変形するときの変位を全体座標系で表わして $\bar{U}(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$ と置き、点 R'' から点 R' への変位を全体及び局所座標系でそれぞれ $\tilde{U}(\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W}), \tilde{u}(u, v, w)$ とおく。又、1から $1'$ への変位を全体座標系で $\bar{U}_1(\bar{U}_1, \bar{V}_1, \bar{W}_1)$ とする。さて $r = \overline{1R}$, $r'' = \overline{1'R''}$ を局所座標系で表わすと

$$r = r'' \quad (3.34)$$

となり、図3.4(a)よりベクトル $\overline{1R'}$ は次のように表わされる。

$$\overline{1R'} = \overline{1R} + \overline{RR'} = \overline{11'} + \overline{1R''} + \overline{R''R'} \quad (3.35)$$

$R = \overline{1R'}$ とすると、式(3.31)より

$$\begin{aligned} R &= r^T e^* + \bar{U}^T E = r \lambda^* E + \bar{U}^T E \\ &= \bar{U} [E + r'' \lambda E + \tilde{u}^T \lambda E] \end{aligned} \quad (3.36)$$

上式の第2,3項より \tilde{u} について求めると

$$\tilde{u}^T \lambda = r^T \lambda^* - r'' \lambda + \bar{U}^T - \bar{U}^T \quad (3.37)$$

ゆえに

$$\tilde{u} = \lambda \bar{U} \quad (3.38)$$

ここに、

$$\bar{U} = \lambda^* r - \lambda^T r + \bar{U} - \bar{U}_1 \quad (3.39)$$

となる。つまり式(3.39)を式(3.38)に代入すれば、局所座標系で表わした \tilde{u} が剛体変位を除去した正味の変位である。

次に、図3.4(b)に示すように x 軸まわり、 z 軸まわりのたわみ角 θ_x, θ_z を求める。全体座標系でのたわみ角を $\bar{\theta}_x, \bar{\theta}_z$ とすると、

$$\bar{\theta}_x \approx \tan \bar{\theta}_x = -\partial(V_0 + \bar{V})/\partial Z = \theta_{x0} - \partial \bar{V}/\partial Z \quad (3.40a)$$

$$\bar{\theta}_z \approx \tan \bar{\theta}_z = -\partial(V_0 + \bar{V})/\partial X = \theta_{z0} - \partial \bar{V}/\partial X \quad (3.40b)$$

ここに、 V_0 は要素内の初期たわみ、 $\bar{\theta}_{x0}, \bar{\theta}_{z0}$ は要素内の初期たわみ角で要素内で一定である。また変形後の局所座標系におけるたわみ角をそれぞれ θ_x, θ_z とすれば

$$\theta_x = -\tan^{-1} \partial v / \partial z \approx -\partial v / \partial z \quad (3.41a)$$

$$\theta_z = -\tan^{-1} \partial v / \partial x = -\partial v / \partial x \quad (3.41b)$$

今、局所座標系における要素内の任意点の変位(u, v, w)は、微小変形理論に基づく平面応力、平板曲げ問題として取り扱う。図3.4(a)に示す x^*, z^* で表わすと

$$u = u(x^*, z^*), \quad v = v(x^*, z^*), \quad w = w(x^*, z^*) \quad (3.42)$$

ここで、面内の変位関数に次の1次関数を用いる。

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x^* + \alpha_3 z^* \quad (3.43a)$$

$$w = \alpha_4 + \alpha_5 x^* + \alpha_6 z^* \quad (3.43b)$$

一方、式(3.38)において v のみ考えるとベクトル r'' は xz 平面上にあるので

$$\begin{bmatrix} a_{yx} & a_{yY} & a_{yZ} \end{bmatrix} \lambda^T r'' = 0 \quad (3.44)$$

となる。これより v は

$$v = \begin{bmatrix} a_{yx} & a_{yY} & a_{yZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X - X_1 - \bar{U}_1 \\ a_{x^*Y}x^* + a_{z^*Y}z^* + \bar{V} - \bar{V}_1 \\ Z - Z_1 - \bar{W}_1 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

とかける。又、たわみ角には次式の関係があり、

$$\begin{bmatrix} \partial v / \partial x \\ \partial v / \partial z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial X / \partial x & \partial Z / \partial x \\ \partial X / \partial z & \partial Z / \partial z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial v / \partial X \\ \partial v / \partial Z \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

この式に式(3.45)を代入すると

$$\begin{aligned} \partial v / \partial x &= (a_{yx} + a_{yY} \partial \bar{V} / \partial X) \partial X / \partial x + (a_{yZ} + a_{yY} \partial \bar{V} / \partial Z) \partial Z / \partial x \\ &\quad + a_{x^*Y} a_{yY} \partial x^* / \partial x + a_{z^*Y} a_{yY} \partial z^* / \partial x \end{aligned} \quad (3.47a)$$

$$\begin{aligned} \partial v / \partial z &= (a_{yx} + a_{yY} \partial \bar{V} / \partial X) \partial X / \partial z + (a_{yZ} + a_{yY} \partial \bar{V} / \partial Z) \partial Z / \partial z \\ &\quad + a_{x^*Y} a_{yY} \partial x^* / \partial z + a_{z^*Y} a_{yY} \partial z^* / \partial z \end{aligned} \quad (3.47b)$$

となる。また、

$$\overline{OR}' = \overline{O1} + \overline{11}' + \overline{1R''} + \overline{R''R}' \quad (3.48)$$

関係があるから、

$$X = X_1 + \bar{U}_1 + a_{xX}(x^* + u) + a_{yX}v + a_{zX}(z^* + w) \quad (3.49a)$$

$$Z = Z_1 + \bar{W}_1 + a_{zZ}(x^* + u) + a_{yZ}v + a_{zZ}(z^* + w) \quad (3.49b)$$

$$\begin{bmatrix} \partial X / \partial x \\ \partial X / \partial z \\ \partial Z / \partial x \\ \partial Z / \partial z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 \\ b_3 & 0 & b_4 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_x^* \\ x_z^* \\ v_x \\ v_z \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

ここに、

$$\begin{aligned}
 b_1 &= [a_{xX} \ a_{zX}]^T, \quad b_2 = [a_{xX} \ a_{yX} \ a_{zX}]^T \\
 b_3 &= [a_{xZ} \ a_{zZ}]^T, \quad b_4 = [a_{xZ} \ a_{yZ} \ a_{zZ}]^T \\
 x_x^* &= [\partial x^*/\partial x \ \partial z^*/\partial x]^T, \quad x_z^* = [\partial x^*/\partial z \ \partial z^*/\partial z]^T \\
 v_x &= [\partial u/\partial x \ \partial v/\partial x \ \partial w/\partial x]^T \\
 v_z &= [\partial u/\partial z \ \partial v/\partial z \ \partial w/\partial z]^T
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

更に、

$$\begin{bmatrix} \partial u/\partial x \\ \partial w/\partial x \\ \partial u/\partial z \\ \partial w/\partial z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x^*/\partial x & 0 & \partial z^*/\partial x & 0 \\ 0 & \partial x^*/\partial x & 0 & \partial z^*/\partial x \\ \partial x^*/\partial z & 0 & \partial z^*/\partial z & 0 \\ 0 & \partial x^*/\partial z & 0 & \partial z^*/\partial z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial u/\partial x^* \\ \partial w/\partial x^* \\ \partial u/\partial z^* \\ \partial w/\partial z^* \end{bmatrix} \tag{3.52}$$

の関係があるので、式(3.47)に式(3.50)と式(3.52)を代入して $\partial v/\partial x$, $\partial v/\partial z$ について解くと、次の関係が得られる。

$$\partial v/\partial x = 1/V_{XZ} \{V_X(b_1x_x^* + b_1u_x) + V_Z(b_3x_z^* + b_3u_z) + a_{xY}b_5x_x^*\} \tag{3.53a}$$

$$\partial v/\partial z = 1/V_{XZ} \{V_X(b_1x_z^* + b_1u_z) + V_Z(b_3x_z^* + b_3u_z) + a_{xY}b_5x_z^*\} \tag{3.53b}$$

ここに、

$$\begin{aligned}
 u_x &= [\partial u/\partial x \ \partial w/\partial x]^T, \quad u_z = [\partial u/\partial z \ \partial w/\partial z]^T \\
 V_X &= a_{yX} + a_{yY}\partial\bar{V}/\partial X, \quad V_Z = a_{yZ} + a_{yY}\partial\bar{V}/\partial Z \\
 V_{XZ} &= 1 - a_{yX}V_X - a_{yZ}V_Z, \quad b_5 = [a_{xY} \ a_{zY}]^T
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

である。ところで R 点の座標 (x^*, z^*) と R' 点の座標 (x, z) の間には次の関係がある。

$$x = x^* + u, \quad z = z^* + w \tag{3.55}$$

よって上式より

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \partial x/\partial x & \partial x/\partial z \\ \partial z/\partial x & \partial z/\partial z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 + \partial u/\partial x^* & \partial u/\partial z^* \\ \partial w/\partial x^* & 1 + \partial w/\partial z^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial x^*/\partial x & \partial x^*/\partial z \\ \partial z^*/\partial x & \partial z^*/\partial z \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

となり、これより

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \partial x^*/\partial x & \partial x^*/\partial z \\ \partial z^*/\partial x & \partial z^*/\partial z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1+\partial u/\partial x^* & \partial u/\partial z^* \\ \partial w/\partial x^* & 1+\partial w/\partial z^* \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{S^*} \begin{bmatrix} 1+\partial w/\partial z^* & -\partial u/\partial z^* \\ -\partial w/\partial x^* & 1+\partial u/\partial x^* \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.57)$$

ここに、

$$S^* = (1+\partial u/\partial x^*)(1+\partial w/\partial z^*) - \partial u/\partial z^* \partial w/\partial x^* \quad (3.58)$$

よって

$$x_1^* = \frac{1}{S^*} \begin{bmatrix} 1+\partial w/\partial z^* \\ -\partial w/\partial x^* \end{bmatrix}, \quad x_2^* = \frac{1}{S^*} \begin{bmatrix} -\partial u/\partial z^* \\ 1+\partial u/\partial x^* \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

また、式(3.43)より次の関係がある。

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x^*} \frac{\partial u}{\partial z^*} \frac{\partial w}{\partial x^*} \frac{\partial w}{\partial z^*} \right]^T = [\alpha_2 \alpha_3 \alpha_5 \alpha_6]^T \quad (3.60)$$

式(3.60)を式(3.52), 式(3.57)に代入して x_1^*, x_2^*, u, w を求め、これらを式(3.53)に代入すれば、 $\partial v/\partial x, \partial v/\partial z$ が求まる。

次に図3.4(c)に示すように y 軸回りの回転角 θ_y を求める。全体座標系での回転角を $\bar{\theta}_Y$ とすると

$$\bar{\theta}_Y = \tan \bar{\theta}_Y = -\partial \bar{W}/\partial X \quad (3.61)$$

また、変形後の局所座標系における回転角を θ_y とすれば

$$\theta_y = -\tan^{-1} \partial w/\partial x = -\partial w/\partial x \quad (3.62)$$

となる。 θ_x, θ_z を求めたのと同様に考えると、局所座標系における変位 w は次式となる。

$$w = [\alpha_{xX} \alpha_{zY} \alpha_{zZ}] \begin{bmatrix} X - X_1 - \bar{U}_1 \\ \alpha_{x^*Y} \cdot x^* + \alpha_{z^*Y} \cdot z^* + Y - Y_1 - \bar{V}_1 \\ \bar{W} - \bar{W}_1 \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

ここで $\partial w/\partial x$ は次式の関係があり

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial X} \quad (3.64)$$

この式に式(3.63)を代入すると

$$\frac{\partial w}{\partial x} = (\alpha_{xX} + \alpha_{zZ} \frac{\partial W}{\partial x}) \frac{\partial X}{\partial x} + \alpha_{zY} (\alpha_{x^*Y} \frac{\partial x^*}{\partial x} + \alpha_{z^*Y} \frac{\partial z^*}{\partial x}) \quad (3.65)$$

さらに、上式に式(3.50), 式(3.52)を代入して、 $\partial w/\partial x$ について解くと

$$\partial w/\partial x = 1/W_{XZ} \{W_X(b_1 x_1^* + \alpha_{xX} \partial u/\partial x + \alpha_{yX} \partial v/\partial x) + \alpha_{zY} b_5 x_2^*\} \quad (3.66)$$

ここに、

$$\begin{aligned} W_{XZ} &= 1 - \alpha_{zX} W_X, \quad W_X = \alpha_{xX} + \alpha_{zZ} \partial \bar{W}/\partial X \\ b_1 &= [\alpha_{xX} \alpha_{zX}]^T, \quad b_5 = [\alpha_{x^*Y} \alpha_{z^*Y}]^T \end{aligned} \quad (3.67)$$

となる。式(3.60), 式(3.57)を式(3.66)に代入すれば $\partial w / \partial x$ が求まる。すなわち、式(3.29)を解き、 U が求まると $\bar{U}_{i+1}(= \bar{U}_i + U)$ が求まり更に任意の要素の全体座標系における変位ベクトルが計算できる。この変位を式(3.38), 式(3.53)および式(3.65)に代入すれば、剛体変位を除去した局所座標系における変位ベクトル \tilde{u} が求まる。 \sim は真変位を表わす。

$$\tilde{u} = [u_1 \ w_1 \ \theta_{y1} \ u_2 \ w_2 \ \theta_{y2} \ u_3 \ w_3 \ \theta_{y3} \ v_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{z1} \ v_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{z2} \ v_3 \ \theta_{x3} \ \theta_{z3}]^T \quad (3.68)$$

ここに、

$$u_1 = v_1 = u_2 = v_2 = u_3 = v_3 = w_1 = w_2 = w_3 = 0 \quad (3.69)$$

さらに式(3.43)の $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ \alpha_5 \ \alpha_6]^T$ は以下のよう \bullet に求まる。

$$\alpha = C^{-1} \tilde{u}_n \quad (3.70)$$

ここに、

$$\tilde{u}_n = [u_1 \ w_1 \ u_2 \ w_2 \ u_3 \ w_3]^T \quad (3.71a)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & x_1^* & z_1^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1^* & z_1^* \\ 1 & x_2^* & z_2^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2^* & z_2^* \\ 1 & x_3^* & z_3^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3^* & z_3^* \end{bmatrix} \quad (3.71b)$$

さらに

$$C^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2^* z_3^* - x_3^* z_2^* & 0 & x_3^* z_1^* - x_1^* z_3^* & 0 & x_1^* z_2^* - x_2^* z_1^* & 0 \\ z_2^* - z_3^* & 0 & z_3^* - z_1^* & 0 & z_1^* - z_2^* & 0 \\ x_3^* - x_2^* & 0 & x_1^* - x_3^* & 0 & x_2^* - x_1^* & 0 \\ 0 & x_2^* z_3^* - x_3^* z_2^* & 0 & x_3^* z_1^* - x_1^* z_3^* & 0 & x_1^* z_2^* - x_2^* z_1^* \\ 0 & z_2^* - z_3^* & 0 & z_3^* - z_1^* & 0 & z_1^* - z_2^* \\ 0 & x_3^* - x_2^* & 0 & x_1^* - x_3^* & 0 & x_2^* - x_1^* \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

という関係がある。なお A は三角形要素の面積である。

3.2.6 不つり合い力の算定¹²⁾

図3.5は荷重と変位の関係を示したものである。今、 N 番目の平衡状態から次の平衡状態 $N+1$ を求める。状態 N における i 回反復後の変形状態 i から変形状態 $i+1$ を推定するには次式を用いる。

$$P_{ri} = K_i U_i \quad (3.73)$$

次に変形状態 i における任意要素の応力度ベクトル、ひずみベクトル及び平衡状態 N からの応力増分及びひずみ増分ベクトルをそれぞれ $\bar{\sigma}_i, \bar{\epsilon}_i, \sigma_H, \epsilon_H$ とすると、

$$\bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}_H + \sigma_H \quad (3.74a)$$

$$\bar{\epsilon}_i = \bar{\epsilon}_H + \epsilon_H \quad (3.74b)$$

となり、さらに、式(3.11)より

$$\bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}_H + D_H \epsilon_H \quad (3.75)$$

ここに、

$$D_H = \begin{cases} D_e & (\text{elastic, strain reversal}) \\ \alpha D_e + (1-\alpha) D_{ep} & (\text{elastic} \rightarrow \text{plastic}) \\ D_{ep} & (\text{plastic}) \end{cases} \quad (3.76)$$

変形状態*H*では弾性状態であったが、変形状態*i*では塑性状態になる要素は、その間のひずみ増分を弾性部分と塑性部分に分けて取り扱う。そうすると α は、

$$\alpha = \frac{\text{降伏に至るひずみ増分}}{\text{全ひずみ増分}} \quad (3.77)$$

つまり α は次式を満足する。

$$(\bar{\sigma}_x + \alpha \sigma_x)^2 - (\bar{\sigma}_x + \alpha \sigma_x)(\bar{\sigma}_y + \alpha \sigma_y) + (\bar{\sigma}_y + \alpha \sigma_y)^2 + 3(\bar{\tau}_{xy} + \alpha \tau_{xy})^2 = \sigma_Y^2 \quad (3.78)$$

$$\alpha = \frac{B + \sqrt{B^2 + 4C(\sigma_Y^2 - \bar{\sigma}_e^{*2})}}{2C} \quad (3.79)$$

ここに、

$$B = -2\bar{\sigma}_x \sigma_x + \bar{\sigma}_x \sigma_y + \sigma_x \bar{\sigma}_y - 2\bar{\sigma}_y \sigma_y - 6\bar{\tau}_{xy} \tau_{xy}$$

$$C = \sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2$$

$$\bar{\sigma}_e^* = \{ \bar{\sigma}_x^2 - \bar{\sigma}_x \bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_y^2 + 3\bar{\tau}_{xy}^2 \}^{1/2} < \bar{\sigma}_{eq} = \sigma_Y \quad (3.80)$$

なお、 σ_Y は降伏点応力度で、 $\bar{\sigma}_e^*$ は相当応力度 $\bar{\sigma}_e$ (式3.14)とは異なる量で、 $\bar{\sigma}_e$ より常に小さい。

式(3.68)より与えられる変位ベクトルを $\tilde{u}_H (= \tilde{u}_i - \tilde{u}_H)$ とすると、この変位に対しては微小変形理論が適用できるので次式となる。

$$\epsilon_H = \bar{\epsilon}_i - \bar{\epsilon}_H = A \tilde{u}_H \quad (3.81)$$

ここに、

$$A = [B_a \quad -zB_b] \quad (3.82)$$

この時の断面力は

$$\bar{f}_i = \bar{f}_H + f_H = \bar{f}_H + k_H \tilde{u}_H \quad (3.83)$$

ここに、

$$\bar{f}_H = \int_V A^T \bar{\sigma}_H dV \quad (3.84a)$$

$$k_H = \int_V A^T D_H A dV = \begin{bmatrix} \int_V B_s^T D_H B_s dV & -\int_V z B_s^T D_H B_b dV \\ -\int_V z B_b^T D_H B_s dV & \int_V z^2 B_b^T D_H B_b dV \end{bmatrix} \quad (3.84b)$$

つまり、各要素の節点力の増分量 f_H を平衡状態 M での真の節点力 \bar{f}_H に加え、変形状態 i における節点力 \bar{f}_i を求める。そして、これを全体座標系へ変換し、全要素について集成することにより変形状態 i における真の節点力 \bar{F}_i を得る。よって $\bar{P}_{H+1} - \bar{F}_i$ が不釣り合い力となる。

3.2.7 数値計算手順

仮定 (iv) で示したように、初期たわみを有する板を平面三角形要素の集合体で近似するが、残留応力も同時に存在する時は次に述べる方法により、初期たわみに変化を与えないよう導入する¹²⁾。

図3.1に示すような、初期たわみ w_0 、残留応力 $\bar{\sigma}_r$ を有する板を考える。この板は、この状態で自己平衡状態にある。今この板を図3.6に示すような三角形要素からなる折板要素で近似する。変形後の状態 M における任意要素の応力度ベクトル $\bar{\sigma}_H$ を残留応力ベクトル $\bar{\sigma}_r$ と変形による応力度ベクトル $\bar{\sigma}_{UH}$ とに分ける。

$$\bar{\sigma}_H = \bar{\sigma}_r + \bar{\sigma}_{UH} \quad (3.85)$$

すると式(3.83)は

$$\bar{f}_i = \bar{f}_r + \bar{f}_{UH} + k_H \tilde{u}_H \quad (3.86)$$

ここに、

$$\bar{f}_r = \int_V A^T \bar{\sigma}_r dV, \quad \bar{f}_{UH} = \int_V A^T \bar{\sigma}_{UH} dV \quad (3.87)$$

式(3.86)を全体座標系へ変換し全要素について集成すると、真の節点力 \bar{F}_i は

$$\bar{F}_i = \bar{F}_{r,i} + \bar{F}_{UH,i} + K_H U_H \quad (3.88)$$

ここに、

$$\bar{F}_{r,i} = \Sigma T_p^T \bar{f}_r, \quad \bar{F}_{UH,i} = \Sigma T_p^T \bar{f}_{UH}, \quad K_H = \Sigma T_p^T k_H T_p \quad (3.89)$$

T_p : 座標変換マトリックス

外力を作用させる前の状態において、式(3.88)の \bar{F}_i は

$$\bar{F}_i = \bar{F}_{r,0} = \Sigma T_p^T \bar{f}_r \quad (3.90)$$

となり、これより不釣り合い力 $P_{r,0}$ は、外力 \bar{P}_{H+1} が0より次式となる。

$$P_{r,0} = -\bar{F}_{r,0} \quad (3.91)$$

残留応力による不釣り合い力ベクトル $P_{r,0}$ は0でなければならないが、図3.6のような解析

モデルでは P_{r0} は0とならない。それは、曲面板を平面三角形要素の折板で近似したためであり、また、初期たわみと残留応力が共存する板では、残留応力が板厚方向に変化し曲げモーメントとせん断力が必ず存在するからである。ここでは簡単のため、解析において板厚方向の残留応力分布が一定と仮定すると残留応力による曲げモーメントとせん断力が消え、解析モデルには不釣り合い力が残る。そこで、この不釣り合い力を消すために逆方向の外力ベクトル $-\bar{F}_{r,0}$ を作用させることにした。従って残留応力が存在する場合の不釣り合い力ベクトルは、

$$P_{ri} = \bar{P}_{N+1} + \bar{F}_{r,0} - \bar{F}_i \quad (3.92)$$

となり、初期状態において不釣り合い力が0となり、自己平衡条件を満足する。

また、板要素は、三角形要素に分割して解析するが分割方法により精度が変化する。そこで荷重載荷状態に関係なく一様な精度を得るため、ここでは図3.7に示すように三角形要素4つの剛性を平均した四辺形要素を使用している。さらに、図3.8に示すように板厚方向への塑性域の拡がりを考慮できるように層割りし、各層では応力度 σ 、剛度マトリックス D は直線分布するものとする。

計算は、与えられた荷重増分に対して、Newton-Raphson法を用いてつり合い式を解いていく。図3.9は反復収束の計算手順のフローチャートを示したものである。その流れを簡単に説明すれば次のようである。

- i) 全体座標系での外力増分 P に対する変位増分 U の計算
- ii) 全変位及び新座標の計算をする。平衡状態 N から i 回反復後の状態 i における剛体変位を除去し、真の変位増分の計算
- iii) 真の変位増分より真の応力増分及び真の節点力を計算し、不釣り合い力 $(\bar{P}-\bar{F}_i)$ を求める。
- iv) 不釣り合い力による変位増分の計算
- v) 収束条件が満足するまで i) ~ iv) をくり返す。
- vi) 収束条件が満足すれば次の荷重増分を与える。

なお、各荷重段階における収束の判定は増分変位と全変位との比及び不釣り合い力と節点力の比について検討しており、その収束条件は比が $10^{-3} \sim 10^{-5}$ 以下になれば収束したものと判定した。また、つり合い式を解く際には問題により荷重制御あるいは変位制御の計算が可能である。

3.3 数値解析結果

(1) 平面応力問題

板要素の剛性マトリックス誘導では、通常の平面応力問題において存在しない面内回転剛性を導入した。そこでまず、図3.10に示すような、一端を固定された片持ちはりの二次元モデルを用いて、自由端に荷重が作用する場合の分割方法とその精度について検討した。なお、材料定数は図中に示すものを使用した。

図3.11は、解析モデルの端部Aに集中荷重 P が載荷した場合の分割数と精度の関係について調べたもので、図心軸の変位モードを表わしている。なお、以下の解析例で NH は高さ方向の分割数を、 NX は部材軸方向の分割数をそれぞれ表わす。分割数を多くすればはり理論値に近づいているが、吉田ら³⁷⁾の方法による結果(△印)に比べるとかなり分割数は多いことがわかる。これは、吉田らが誘導した応力仮定の板要素は、要素内で応力を線形仮定しているのに対し、ここで用いる要素はひずみ一定、つまり応力度が要素内で一定と仮定してからであり、ある程度の分割数は必要で有と考えられる。

そこで、板要素の分割数及び分割方法と精度の関係について検討を行なった。解析対象は図3.10と同じ片持ちはりの二次元モデルで、はり高 H を一定($=10\text{cm}$)にし、部材長 L を変化させている。図3.12は、はりの自由端に集中荷重が載荷する場合のその点のたわみ量について、高さ方向及び軸方向の分割数を変化させたときの精度を示したものである。縦軸にはたわみ v をはり理論値 v_t で無次元化し、横軸には図3.12の挿入図に示すような細要素の辺長 l_e と高さ H の比を表わしている。パラメータ解析の結果より l_e/H が精度に大きく影響していることが明らかになった。この図からわかるように、高さ方向の分割数は6分割以上あれば精度にほとんど差がないが、軸方向の分割数により精度に大きな差が生じていることがわかる。つまり、解析精度をよくするには、高さ方向の分割数を6~8で、 l_e/H を小さくすればよいと思われる。しかし、 l_e/H を小さくすることは解析モデルの軸方向の分割数を多くすることになる。特に、板要素で立体構成する場合には節点数が増え、計算機の計算時間や記憶容量が増大すると考えられるので、要素分割には十分注意する必要がある。

図3.13は図3.10と同じ形状モデルを用い、自由端部Aに面内曲げモーメントを作用させ、ここで導入した面内回転について調べたものである。なお、要素分割数は $NH=6, NX=10$ である。面内曲げモーメントは図3.13の挿入図に示す θ_0 が $0.1(\text{rad})\theta_0$ となる大きさで、端部節点の軸方向に集中荷重または変位を作用させることにより与えた。図3.13は軸方向の面内

回転角のモードを表わしている。面内回転変位は他の変位 u, v の変位量に伴って計算されるので、端部に回転変位を作用させる時は、はり理論とよく対応していることがわかる。この結果より、通常用いられているひずみ一定要素に、この面内回転剛性を導入する本法の有効性が示された。

(2) はり、柱のエラスティカ

はり、柱の弾性たわみ問題としてエラスティカを解析した。図3.14は片持ちはりのエラスティカを解析対象として選び、板要素の分割数を変化させて検討したものである。また、材料定数は図中に示すが、板要素を用いているのはり部材に対応するようポアソン比 ν は0とした。図3.14は、はりの自由端に横荷重が作用した場合の荷重-たわみ曲線である。縦軸には横荷重、横軸にはその点のたわみ v を部材長 L で無次元化して示した。図中の実線は楕円積分解⁴³⁾であり、一点鎖線は線形解である。分割方法は同図の挿入図に示すように、幅方向に2分割、軸方向に3分割と5分割の2種類について解析した。面外曲げを受ける場合には、5分割程度で楕円積分解とよく一致している。

次に、柱のエラスティカについて解析した。図3.15の挿入図に示すような自由端に圧縮を受ける片持ちはりで、幅方向に2分割、軸方向に5分割して行なった。初期たわみ v_0 は部材長 L の1/100を与えている。図3.15は荷重-たわみ曲線であり、縦軸は自由端に作用する軸方向荷重 P を座屈荷重 P_{cr} で無次元化し、横軸にはたわみ v を部材長 L で無次元化して示してある。また、実線は楕円積分解⁴⁴⁾を表わす。本解析法が初期たわみを考慮していることを考えれば、楕円積分解とよく対応している。

(3) 一様引張を受ける有孔帯板の弾塑性解析

弾塑性問題の解析例として、図3.16(a)に示す有孔帯板が一様引張を受ける場合を解析した。対象構造物が二軸対称であるので、同図(b)に示すように右上1/4を112節点、91の矩形要素に分割した。同図(c)は応力集中部の弾性限界における応力状態を示したものである。なお、平均応力は全引張荷重を最小断面積で除したものである。要素分割の方法が違う北田ら⁴⁵⁾の解析結果に比べるとよく一致している。また、ここには示していないが、応力集中により帯板は円孔付近より塑性化し始め、応力度の増加と共にその塑性域は帯板の側辺方向に広がっていった。図3.17は円孔付近の最初に降伏した要素(85)の軸方向引張りひずみ ϵ_z と平均応力度 $\bar{\sigma}$ の関係を示したものである。これも北田らの解析結果と非常によく対応しており、弾塑性剛性の評価の有効性が示された。

(4) 面内圧縮を受ける正方形板の弾塑性大たわみ解析

板要素の幾何学的及び材料学的非線形性の両方が問題となる解析例として、初期たわみ及び残留応力を有する周辺単純支持の正方形板が、一様方向の面内圧縮を受ける場合についての解析を行なった。非載荷辺の面内変位に対する境界条件は自由とし、板厚 t の $1/10$ の初期たわみ w_0 を与えた。また、残留応力は図3.18の挿入図に示すように自己平衡の分布形で与え、 $\sigma_{rc} = -\sigma_y/3$, $\sigma_{rt} = -2\sigma_{rc}$ としている。ただし、 σ_y は降伏点応力度である。解析モデルは同図の挿入図に示すように板の $1/4$ 対称部分を解析対象とし、長さ方向及び幅方向とも6分割である。また、板厚方向の層分割は6分割である。なお、圧縮外力は一様変位の変位制御により与えた。図3.18は平均圧縮応力-たわみ曲線で、縦軸は平均圧縮応力を座屈応力度 σ_{cr} で無次元化し、横軸は板の中央点の全たわみ（初期たわみ w_0 + 付加たわみ w ）を板厚 t で無次元化したものである。図中の実線はCoan³⁾ の弾性問題としての厳密解で、破線は北田ら¹²⁾ の弾塑性解析の結果である。残留応力のない場合、弾性域ではCoanの解とよく一致し、塑性域に入ると北田らの解析結果とよく対応していることがわかる。また、残留応力が存在する場合でも、最大強度及び変形挙動とも北田らの解析結果とよく対応しており、本解析法の妥当性が示されていると思う。また、解析では繰り返し回数が5~6回程度で十分収束した。

3.4 結 論

本章では板構造の弾塑性有限変位解析法を、ポテンシャルエネルギー増分の停留原理に基づいて誘導し、数値解析例により解析法の妥当性および有効性について検討した。そして以下のことが明らかになった。

- (1) 通常のひずみ一定三角形要素に、平面応力問題において存在しない面内回転剛性を導入して、一節点6自由度の三角形平板要素を導いた。また、面内回転変位は線形変位関数を仮定しているので定式化が簡略された。
- (2) 板の面内曲げを受ける場合の、幅方向及び軸方向の分割方法と精度の関係が明らかになった。特に、軸方向の分割数が大きく影響することが判明したので、解析する際には分割数に十分注意する必要がある。また、面内回転角も適切に計算されておりその妥当性が示された。

- (3) 剛体変位の除去の手法を用いたのでひずみ－変位関係が線形化され、大変形挙動を解析する場合でも収束性および精度が改善された。
- (4) 一様圧縮を受ける残留応力や初期たわみが存在する板の解析結果、変形挙動や最大強度も他の解析結果とよく対応しており、弾塑性剛性の評価方法の妥当性が示された。

なお、板要素を立体構成した場合の解析結果の妥当性については、第5章のH形短柱の解析で示す。

付録3.1 係数マトリックス B_u, B_v, B_θ の誘導

(a) 係数マトリックス B_u

変位仮定の手法により面内ひずみは通常の変位関数を用いる。(右手座標系)

今、有限要素内の任意点における変位は次式の関数で表わされると考える。

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \quad (A3.1)$$

ここに、 $\alpha_1 \sim \alpha_6$ は未定係数である。上式の x, y に節点1~3の座標値を代入してマトリックス表示すると次式となる。

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} \quad (A3.2a)$$

または、

$$u_s^* = C^* \alpha \quad (A3.2b)$$

式(A3.2)の $\alpha_1 \sim \alpha_6$ について解くと α は

$$\alpha = (C^*)^{-1} u_s^* \quad (A3.3)$$

ここに、

$$(C^*)^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & 0 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & 0 & x_1 y_2 - x_2 y_1 & 0 \\ y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 & 0 \\ 0 & x_2 y_3 - x_3 y_2 & 0 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & 0 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ 0 & y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \quad (A3.4)$$

なお、 A は三角形の面積である。次に、面内ひずみは次式で表わされる。

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (A3.5)$$

上式に式(A3.1)を代入すると次式となる。

$$\varepsilon_x = \alpha_2, \quad \varepsilon_y = \alpha_6, \quad \gamma_{xy} = \alpha_3 + \alpha_5 \quad (A3.6)$$

さらにマトリックス表示すると

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} \quad (\text{A3.7a})$$

または、

$$\varepsilon_s = B\alpha \quad (\text{A3.7b})$$

とおける。これより、 ε_s は式 (A3.4) より次式で求まる。

$$\varepsilon_s = B(C^*)^{-1}u_s^* = B_s^*u_s^* \quad (\text{A3.8})$$

ここに、

$$B^* = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 \\ 0 & g_1 & 0 & g_2 & 0 & g_3 \\ g_1 & h_1 & g_2 & h_2 & g_3 & h_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A3.9a})$$

$$g_i = x_k - x_j, \quad h_i = y_j - y_k$$

$$(i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \quad (\text{A3.9b})$$

さらに、式 (A3.9a) に 0 を入れて 4×9 マトリックスに拡張すれば

$$\varepsilon_s = B_s u_s \quad (\text{A3.10})$$

となる。

(b) 係数マトリックス B_ϕ

回転変位 θ_z は次式で表わされる。

$$\theta_z = \alpha_7 + \alpha_8 x + \alpha_9 y \quad (\text{A3.11})$$

ここに、 $\alpha_7 \sim \alpha_9$ は未定係数。今、ここでは次の式で表わされる面積座標を用いる。

$$\zeta_1 = z_1/h_1, \quad \zeta_2 = z_2/h_2, \quad \zeta_3 = z_3/h_3 \quad (\text{A3.12})$$

よって回転ひずみ γ_ϕ は次式で与えられる。

$$\gamma_\phi = 2\theta_z^* - (\partial v / \partial x - \partial u / \partial y) \quad (\text{A3.13})$$

面内ひずみの場合と同様に表わすと次式となる。

$$\gamma_\phi = B_\phi u_s \quad (\text{A3.14})$$

ここに、

$$B_\phi = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_1 & -h_1 & 2A\zeta_1 & g_2 & -h_2 & 2A\zeta_2 & g_3 & -h_3 & 2A\zeta_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A3.15})$$

(c) 係数マトリックス B_b

曲げひずみは、面外たわみ w を面積座標を用いた次の多項式で仮定する。

$$w = \alpha_{b1} + \zeta_1 \alpha_{b2} + \zeta_2 \alpha_{b3} + \zeta_1 \zeta_2 \alpha_{b4} + \zeta_2 \zeta_3 \alpha_{b5} + \zeta_3 \zeta_1 \alpha_{b6} + (\zeta_1 \zeta_2^2 - \zeta_2 \zeta_1^2) \alpha_{b7} + (\zeta_2 \zeta_3^2 - \zeta_3 \zeta_2^2) \alpha_{b8} + (\zeta_3 \zeta_1^2 - \zeta_1 \zeta_3^2) \alpha_{b9} \quad (A3.16)$$

ここに、 $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ は面積座標であり、 $\alpha_{b1} \sim \alpha_{b9}$ は未定係数である。また、面積座標と直交座標には次の関係がある。

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} h_1 & g_1 & x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ h_2 & g_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ h_3 & g_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (A3.17)$$

ここに、

$$h_i = y_j - y_k, \quad g_i = x_k - x_j \\ (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \quad (A3.18)$$

である。また、偏微分式は次式で表わされ、

$$\begin{bmatrix} \partial / \partial x \\ \partial / \partial y \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \partial / \partial \zeta_1 \\ \partial / \partial \zeta_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ g_1 & g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial / \partial \zeta_1 \\ \partial / \partial \zeta_2 \end{bmatrix} \quad (A3.19)$$

さらにもう 1 回偏微分すると

$$\begin{bmatrix} \partial^2 / \partial x^2 \\ \partial^2 / \partial y^2 \\ \partial^2 / \partial x \partial y \end{bmatrix} = T_\zeta \begin{bmatrix} \partial^2 / \partial \zeta_1^2 \\ \partial^2 / \partial \zeta_2^2 \\ \partial^2 / \partial \zeta_1 \partial \zeta_2 \end{bmatrix} \quad (A3.20)$$

ここに、

$$T_\zeta = \frac{1}{4A^2} \begin{bmatrix} h_1^2 & h_2^2 & 2h_1 h_2 \\ g_1^2 & g_2^2 & 2g_1 g_2 \\ 2h_1 g_1 & 2h_2 g_2 & 2(h_1 g_2 + h_2 g_1) \end{bmatrix} \quad (A3.21)$$

となる。さらに式 (A3.19) より

$$\begin{bmatrix} \partial / \partial \zeta_1 \\ \partial / \partial \zeta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_2 & -h_2 \\ -g_1 & h_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial / \partial x \\ \partial / \partial y \end{bmatrix} \quad (A3.22)$$

となるので、これを次のように並び変える。

$$\begin{bmatrix} \partial / \partial \zeta_2 \\ -\partial / \partial \zeta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & g_1 \\ h_2 & g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial / \partial y \\ -\partial / \partial x \end{bmatrix} = J_1 \begin{bmatrix} \partial / \partial y \\ -\partial / \partial x \end{bmatrix} \quad (A3.23)$$

さて、要素の節点変位 u_b は次式で表わされる。

$$u_b = [u_{b1} \ u_{b2} \ u_{b3}]^T \quad (A3.24)$$

ここに、

$$u_{bi} = [w \ \theta_x \ \theta_y]^T_i = [v \ \partial w / \partial y \ -\partial w / \partial x]^T_i \quad (A3.25)$$

上式を面積座標を用いて表わすと、式(A3.23)より

$$u_{b\zeta i} = \begin{bmatrix} w \\ \partial w / \partial \zeta_2 \\ -\partial w / \partial \zeta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & g_1 \\ 0 & h_2 & g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \partial w / \partial y \\ -\partial w / \partial x \end{bmatrix} \quad (A3.26)$$

となる。よって、全節点変位 $u_{b\zeta}$ は次式となる。

$$u_{b\zeta} = L_b \ u_b = \begin{bmatrix} J_b & 0 & 0 \\ 0 & J_b & 0 \\ 0 & 0 & J_b \end{bmatrix} u_b \quad (A3.27)$$

ここに、

$$J_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & J_1 \end{bmatrix}, \quad u_{b\zeta} = [u_{b\zeta 1} \ u_{b\zeta 2} \ u_{b\zeta 3}]^T \quad (A3.28)$$

また、式(A3.16)より

$$\begin{bmatrix} \partial v / \partial \zeta_1 \\ \partial v / \partial \zeta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{\zeta 1}^T \\ G_{\zeta 2}^T \end{bmatrix} \alpha_b = G_{\zeta} \alpha_b \quad (A3.29)$$

ここに、

$$\alpha_b = [\alpha_{b1} \ \alpha_{b2} \ \alpha_{b3} \ \alpha_{b4} \ \alpha_{b5} \ \alpha_{b6} \ \alpha_{b7} \ \alpha_{b8} \ \alpha_{b9}]^T \quad (A3.30a)$$

$$G_{\zeta 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \zeta_2 \\ -\zeta_2 \\ 1-2\zeta_1-\zeta_2 \\ \zeta_2^2-2\zeta_1\zeta_2 \\ -2\zeta_2+2\zeta_1\zeta_2+3\zeta_2^2 \\ -1+6\zeta_1+2\zeta_2-6\zeta_1^2-6\zeta_1\zeta_2-\zeta_2^2 \end{bmatrix} \quad (A3.30b)$$

$$G_{\zeta 2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \zeta_1 \\ 1-\zeta_1-2\zeta_2 \\ -\zeta_1 \\ -\zeta_1^2+2\zeta_1\zeta_2 \\ 1-2\zeta_1-6\zeta_2+\zeta_1^2+6\zeta_1\zeta_2+6\zeta_2^2 \\ 2\zeta_1-3\zeta_1^2-2\zeta_1\zeta_2 \end{bmatrix} \quad (A3.30c)$$

と表わされるので、これより $u_{b\zeta i}$ は次式となる。

$$u_{b\zeta_i} = \begin{bmatrix} w \\ \partial w / \partial \zeta_2 \\ -\partial w / \partial \zeta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^T \\ G_{\zeta_2}^T \\ G_{\zeta_1}^T \end{bmatrix} \alpha_b \quad (\text{A3.31})$$

ここに G は式(A3.16)の α_b の係数ベクトルである。そこで、式(A3.31)に各々の節点の座標1
(1, 0, 0), 2(0, 1, 0), 3(0, 0, 1)を代入すると、

$$u_{b\zeta} = A_\zeta \alpha_b \quad (\text{A3.32})$$

ここに、

$$A_\zeta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A3.33})$$

となり、さらに式(A3.32)より

$$\alpha_b = A_\zeta^{-1} u_{b\zeta} \quad (\text{A3.34})$$

ここに、

$$A_\zeta^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 \\ -1 & -0.5 & -0.5 & 1 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0.5 & 0 & 1 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (\text{A3.35})$$

となる。そこで式(A3.34)に式(A3.27)を代入すると係数ベクトルは次式で求められる。

$$\alpha_b = A_\zeta^{-1} L_b u_b \quad (\text{A3.36})$$

次に曲げひずみ ϵ_b は、面積座標を用いると次式となる。

$$\epsilon_b = T_\zeta \epsilon_{b\zeta} \quad (\text{A3.37})$$

ここに、

$$\epsilon_b = \begin{bmatrix} \partial^2 w / \partial x^2 & \partial^2 w / \partial y^2 & \partial^2 w / \partial x \partial y \end{bmatrix}^T \quad (\text{A3.38a})$$

$$\epsilon_{b\zeta} = \begin{bmatrix} \partial^2 w / \partial \zeta_1^2 & \partial^2 w / \partial \zeta_2^2 & \partial^2 w / \partial \zeta_1 \partial \zeta_2 \end{bmatrix}^T \quad (\text{A3.38b})$$

ここで式(A3.16)を用いると $\epsilon_{b\zeta}$ は

$$\varepsilon_{b\zeta} = P_{\zeta} \alpha_b \quad (\text{A3.39})$$

ここに、

$$P_{\zeta} = \begin{bmatrix} P_{\zeta 1}^T \\ P_{\zeta 2}^T \\ P_{\zeta 3}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2\zeta_2 & 2\zeta_2 & -6(\zeta_1 - \zeta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2\zeta_1 & 6(\zeta_2 - \zeta_3) & -2\zeta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -2(\zeta_1 - \zeta_2) & 2(2\zeta_2 - \zeta_3) & -2(2\zeta_1 - \zeta_3) \end{bmatrix} \quad (\text{A3.40})$$

となる。式(A3.36), 式(A3.37)および式(A3.39)より

$$\varepsilon_b = B_b u_b \quad (\text{A3.41})$$

ここに、

$$B_b = T_{\zeta} P_{\zeta} A_{\zeta}^{-1} L_b \quad (\text{A3.42})$$

となり、曲げひずみ増分 ε_b と変位増分 u_b の関係が求まる。なお、式(3.6C)の B_b はさらに、式(A3.41)の B_b に0を入れて 4×9 マトリックスに拡張している。また、 B_0 は付録3.2(d)に示す。

付録3.2 剛性マトリックス $k_{nn}, k_{\phi\phi}, k_{nb}, k_g, k_{bb}$ の誘導

(a) k_{nn} マトリックス

面内挙動に関する剛性マトリックスで次式で表わされる。

$$k_{nn} = \int_V B_n^T D B_n dV = B_n^T \int_{-t/2}^{t/2} D dz B_n A \quad (\text{A3.43})$$

$\int_V D dz$ の積分については以下のように考える。図A3.4に示すように各層での応力分布、剛性マトリックス分布は直線変化する。第 k 層内の剛性マトリックスと応力をそれぞれ $D_{(k)}, \bar{\sigma}_{(k)}$ とする。さらに第 k 層の上、下境界線上の $D_{(k)}$ の値をそれぞれ $D_{(k+1)}, D_{(k)}$ とし、同様に $\bar{\sigma}_{(k)}$ の値をそれぞれ $\bar{\sigma}_{(k+1)}, \bar{\sigma}_{(k)}$ とすると、

$$\begin{aligned} D_{(k)} &= (D_{k+1} - D_k) \zeta / t_k + (D_{k+1} + D_k) / 2 \\ \bar{\sigma}_{(k)} &= (\bar{\sigma}_{k+1} - \bar{\sigma}_k) \zeta / t_k + (\bar{\sigma}_{k+1} + \bar{\sigma}_k) / 2 \end{aligned} \quad (\text{A3.44})$$

ただし、 t_k は k 層の層厚、 ζ は k 層内の中央面に原点をもち、 z 方向が正である座標。よって、上式(A3.44)より

$$\begin{aligned} \int_{-t/2}^{t/2} D dz &= \sum_{k=1}^N (D_{k+1} + D_k) t_k / 2 \\ \int_{-t/2}^{t/2} \bar{\sigma} dz &= \sum_{k=1}^N (\bar{\sigma}_{k+1} + \bar{\sigma}_k) t_k / 2 \\ \int_{-t/2}^{t/2} z D dz &= \sum_{k=1}^N \{ \bar{z}_k t_k (D_{k+1} + D_k) / 2 + (D_{k+1} - D_k) t_k^2 / 12 \} \end{aligned}$$

$$\int_{-t/2}^{t/2} z^2 D dz = \sum_{k=1}^N \{ (D_{k+1} + D_k)/2 \cdot t_k (\bar{z}_k^2 + t_k^2/12) + (D_{k+1} - D_k) \bar{z}_k t_k^2/6 \} \quad (A3.45)$$

ここに、 N は層数で、 $\bar{z}_k = z - \zeta$ はである。

(b) $k_{\phi\phi}$ マトリックス

式(3.28b)に式(A3.15)を代入する。

$$k_{\phi\phi} = \int_V B_\phi^T D B_\phi dV = \int_A B_\phi^T \int_{-t/2}^{t/2} D dz B_\phi dA \quad (A3.46)$$

ここで、上式の $\int_V D dz$ は、式(A3.15)より D の最後の項のみで定数となるので次式となる。

$$k_{\phi\phi} = \int_{-t/2}^{t/2} D dz \int_A B_\phi^T B_\phi dA \quad (A3.47)$$

ここで積分を実行すると

$$\int_A B_\phi^T B_\phi dA = \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} g_1^2 & -g_1 h_1 & A g_1/3 & g_1 g_2 & -g_1 h_2 & A g_1/3 & g_3 g_1 & -h_3 g_1 & A g_1/3 \\ & h_1^2 & -A h_1/3 & -h_1 g_2 & h_1 h_2 & -A h_1 & -g_3 h_1 & h_3 h_1 & -A h_1/3 \\ & & 2A^2/3 & A g_2/3 & -A h_2/3 & 2A^2/3 & A g_3/3 & -A h_3/3 & 2A^2/3 \\ & & & g_2^2 & -h_2 g_2 & A g_2/3 & g_2 g_3 & -g_2 h_3 & A g_2/3 \\ & & & & h_2^2 & -A h_2/3 & -h_2 g_3 & h_2 h_3 & -A h_2/3 \\ & & & & & 2A^2/3 & A g_3/3 & -A h_3/3 & 2A^2/3 \\ & & & & & & g_3^2 & -g_3 h_3 & A g_3/3 \\ & & & & & & & h_3^2 & -A h_3/3 \\ & & & & & & & & 2A^2/3 \end{bmatrix} \quad (A3.48)$$

Sym.

(c) $k_{\sigma b}$ マトリックス

式(3.28C)に式(A3.41)を代入すると

$$k_{\sigma b} = -B_\sigma^T \int_{-t/2}^{t/2} z D dz T_\zeta \int_A P_\zeta dA A \zeta^T L_b \quad (A3.49)$$

となる。ここで $\int_A P_\zeta dA$ の積分は次式で表わされる。

$$\int_A P_\zeta dA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2/3 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 2/3 & -2/3 \end{bmatrix} A \quad (A3.50)$$

また、 $A_{\zeta}^{-1}L_b$ は次式となる。

$$A_{\zeta}^{-1}L_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & H & G & 0 & -H & -G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -h_1/2 & -g_2/2 & 0 & h_1/2 & g_1/2 \\ 0 & h_2/2 & g_2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -h_2/2 & -g_2/2 \\ -1 & -H & -G & 1 & -H & -G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & h_1/2 & g_1/2 & -1 & h_1/2 & g_1/2 \\ 1 & h_2/2 & g_2/2 & 0 & 0 & 0 & -1 & h_2/2 & g_2/2 \end{bmatrix} \quad (\text{A3.51})$$

ここに、

$$H = 1/2(h_1 + h_2), \quad G = 1/2(g_1 + g_2)$$

(d) k_g マトリックス

面積座標を用いたときのたわみ角増分ベクトル $\theta_{\zeta i}$ を次式で表わす。

$$\theta_{\zeta i} = \begin{bmatrix} \partial v / \partial \zeta_1 \\ \partial v / \partial \zeta_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A3.52})$$

また、式(A3.19)より

$$\theta_{\zeta} = J^{-1}\theta_{\zeta i} \quad (\text{A3.53})$$

よって、式(A3.52)に式(A3.29)と式(A3.36)を代入すると、係数マトリックス B_{θ} が得られる。

$$B_{\theta} = J^{-1}G_{\zeta}A_{\zeta}^{-1}L_b \quad (\text{A3.54})$$

式(3.28e)に上式を代入するとマトリックス k_g は次式となる。

$$\begin{aligned} k_g &= L_b^T (A_{\zeta}^{-1})^T \left\{ \int_{\Lambda} G^T (J^{-1})^T \int_{-t/2}^{t/2} \bar{\sigma}^* dz J^{-1} G_{\zeta} dA \right\} A_{\zeta}^{-1} L_b \\ &= Q^T \left\{ \int_{\Lambda} G_{\zeta}^T M G_{\zeta} dA \right\} Q \end{aligned} \quad (\text{A3.55})$$

ここに、

$$Q = A_{\zeta}^{-1}L_b \quad (\text{A3.56a})$$

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = (J^{-1})^T \int_{-t/2}^{t/2} \bar{\sigma}^* dz J^{-1} \quad (\text{A3.56b})$$

また、式(A3.29)より

$$\int_A G_{\zeta}^T M G_{\zeta} dA = M_{11} \int_A G_{\zeta 1} G_{\zeta 1}^T dA + M_{12} \left[\int_A G_{\zeta 1} G_{\zeta 2}^T dA + \int_A G_{\zeta 2} G_{\zeta 1}^T dA \right] + M_{22} \int_A G_{\zeta 2} G_{\zeta 2}^T dA \quad (A3.57)$$

ここで、

$$\int_A G_{\zeta 1} G_{\zeta 1}^T dA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1/6 & -1/6 & 0 & 1/30 & 1/30 & 0 \\ & & & & 1/6 & 0 & -1/30 & -1/30 & 0 \\ & & & & & 1/6 & 1/30 & -1/30 & 0 \\ & & & & & & 2/45 & 1/45 & 0 \\ & & & & & & & 2/45 & 0 \\ & & & & & & & & 1/15 \end{bmatrix} A \quad (A3.58a)$$

Sym.

$$\int_A G_{\zeta 1} G_{\zeta 2}^T dA + \int_A G_{\zeta 2} G_{\zeta 1}^T dA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 1/3 & 0 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1/6 & -1/6 & -1/6 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1/6 & 1/6 & -1/15 & -1/15 & 0 \\ & & & & & 1/6 & 1/15 & 0 & 1/15 \\ & & & & & & 1/45 & 1/45 & 1/45 \\ & & & & & & & 1/15 & -1/45 \\ & & & & & & & & 1/15 \end{bmatrix} A \quad (A3.58b)$$

Sym.

$$\int_A G_{\zeta 2} G_{\zeta 2}^T dA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 1/3 & 0 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1/6 & 0 & -1/6 & -1/30 & 0 & -1/30 \\ & & & & 1/6 & 0 & -1/30 & 0 & 1/30 \\ & & & & & 1/6 & 1/30 & 0 & 1/30 \\ & & & & & & 2/45 & 0 & 1/45 \\ & & & & & & & 1/15 & 0 \\ & & & & & & & & 2/45 \end{bmatrix} A \quad (A3.58c)$$

Sym.

以上より $\int_A G^T M G_\zeta dA$ は次式で表わされる。

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 M_{11} & M_{12} & \frac{M_{11}+M_{12}}{3} & -\frac{M_{11}}{3} & -\frac{M_{12}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & M_{22} & \frac{M_{12}+M_{22}}{3} & -\frac{M_{12}}{3} & -\frac{M_{22}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & \frac{M_{11}+M_{12}+M_{22}}{6} & -\frac{M_{11}+M_{12}}{6} & -\frac{M_{12}+M_{22}}{6} & \frac{M_{11}-M_{22}}{30} & \frac{M_{11}}{30} & -\frac{M_{22}}{30} \\
 & & & \frac{M_{11}+M_{12}+M_{22}}{6} & \frac{M_{12}}{6} & -\frac{M_{11}+2M_{12}+M_{22}}{30} & -\frac{M_{11}+2M_{12}}{30} & \frac{M_{22}}{30} \\
 & & & & \frac{M_{11}+M_{12}+M_{22}}{6} & \frac{M_{11}+2M_{12}+M_{22}}{30} & -\frac{M_{11}}{30} & \frac{2M_{12}+M_{22}}{30} \\
 & & & & & \frac{2M_{11}+M_{12}+2M_{22}}{45} & \frac{M_{11}+M_{12}}{45} & \frac{M_{12}+M_{22}}{45} \\
 & & & & & & \frac{2M_{11}+3M_{12}+3M_{22}}{45} & -\frac{M_{12}}{45} \\
 & & & & & & & \frac{3M_{11}+3M_{12}+2M_{22}}{45}
 \end{bmatrix} A$$

(A3.59)

(e) k_{bb} マトリックス

式(3.28d)に式(A3.41)を代入すると

$$k_{bb} = L_b^T (A \zeta^{-1})^T \left[\int_A P_\zeta^T T_\zeta \left\{ \int_{-t/2}^{t/2} z^2 D dz \right\} T_\zeta P_\zeta dA \right] A \zeta^{-1} L_b \quad (A3.60)$$

となる。上式において

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} = T_\zeta^T \int_{-t/2}^{t/2} z^2 D dz T_\zeta \quad (A3.61)$$

とおき、式(A3.56a)の Q を使えばマトリックスは

$$k_{bb} = Q^T \left[\int_A P_\zeta^T H P_\zeta dA \right] Q \quad (A3.62)$$

となる。ここで、上式に式(A3.40)と(A3.61)を代入すれば

$$\begin{aligned}
 \int_A P_\zeta^T H P_\zeta dA &= H_{11} \int_A P_{\zeta 1} P_{\zeta 1}^T dA + H_{12} \left[\int_A P_{\zeta 1} P_{\zeta 2}^T dA + \int_A P_{\zeta 2} P_{\zeta 1}^T dA \right] + H_{13} \left[\int_A P_{\zeta 1} P_{\zeta 3}^T dA \right. \\
 &\quad \left. + \int_A P_{\zeta 3} P_{\zeta 1}^T dA \right] + H_{22} \int_A P_{\zeta 2} P_{\zeta 2}^T dA + H_{23} \left[\int_A P_{\zeta 2} P_{\zeta 3}^T dA + \int_A P_{\zeta 3} P_{\zeta 2}^T dA \right] + H_{33} \int_A P_{\zeta 3} P_{\zeta 3}^T dA
 \end{aligned}$$

(A3.63)

となる。なお、各々の積分を求めると次式で求まる。

[illegible]

$$\int_A P_{\zeta 1} P_{\zeta 2}^T dA + \int_A P_{\zeta 2} P_{\zeta 1}^T dA =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 4 & 4/3 & -4/3 & 0 \\ & & & & & 0 & -4/3 & 0 & 4/3 \\ & & & & & & -2/3 & -2/3 & -2/3 \\ & & & & & & & 2 & -10/3 \\ & & & & & & & & 2 \end{bmatrix} A$$

(A3.64b)

$$\int_A P_{\zeta 1} P_{\zeta 3}^T dA + \int_A P_{\zeta 1} P_{\zeta 3} dA =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & -2 & -2/3 & -2/3 & 0 \\ & & & & 0 & -2 & 2/3 & -2/3 & 0 \\ & & & & & 4 & 2/3 & -2 & 4/3 \\ & & & & & & -2/3 & -2/3 & 4/3 \\ & & & & & & & 2 & -4/3 \\ & & & & & & & & 6 \end{bmatrix} A$$

(A3.64c)

$$\int_A P_{\zeta 2} P_{\zeta 2}^T dA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 4 & 0 & -4/3 & 0 & 4/3 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 2/3 & 0 & -2/3 \\ & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 2/3 \end{bmatrix} A \quad (A3.64d)$$

$$\int_A P_{\zeta 2} P_{\zeta 3}^T dA + \int_A P_{\zeta 3} P_{\zeta 2}^T dA =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & -2 & 0 & 2/3 & 0 & -2/3 \\ & & & 4 & 2 & -2/3 & -4/3 & 2 \\ & & & & 0 & -2/3 & 0 & 2/3 \\ & & & & & -2/3 & 4/3 & -2/3 \\ & & & & & & 6 & -4/3 \\ & & & & & & & 2 \end{bmatrix} A$$

(A3.64e)

$$\int_A P_{\zeta 3} P_{\zeta 3}^T dA =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & -1 & -1 & 0 & -2/3 & -2/3 \\ & & & 1 & 1 & 0 & -2/3 & 2/3 \\ & & & & 1 & 0 & -2/3 & 2/3 \\ & & & & & 2/3 & 2/3 & 2/3 \\ & & & & & & 2 & -2/3 \\ & & & & & & & 2 \end{bmatrix} A$$

(A3.64f)

付録3.3 板の座標変換マトリックス T_p の誘導¹²⁾

板要素の場合は、図A3.5に示すように三角形要素の i 点を座標の原点に、 j が x 軸上に、 k 点が xz 平面上に来るように要素座標系 (x, y, z) を定める。全体座標系 (X, Y, Z) で表わした三角形要素の各節点の座標を $i(X_i, Y_i, Z_i)$, $j(X_j, Y_j, Z_j)$, $k(X_k, Y_k, Z_k)$ とする。

以下、 (X, Y, Z) 座標を4段階に分けて座標変換を行ない、 (x, y, z) 座標に一致させることにより座標変換マトリックス λ_p を導入する。

(1) 第1段階

まず、図A3.6に示すように、全体座標系を平行して、座標の原点が i 点と一致するように $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ 座標系を定義する。すると

$$\begin{aligned} \bar{X}_i &= \bar{Y}_i = \bar{Z}_i = 0 \\ \bar{X}_j &= X_j - X_i, \quad \bar{Y}_j = Y_j - Y_i, \quad \bar{Z}_j = Z_j - Z_i \\ \bar{X}_k &= X_k - X_i, \quad \bar{Y}_k = Y_k - Y_i, \quad \bar{Z}_k = Z_k - Z_i \end{aligned}$$

(A3.65)

移動後の全体座標系 $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ と要素座標系 (x, y, z) の関係は次のようになる。

$$x = \lambda_p \bar{X}$$

(A3.66)

(2) 第2段階

\bar{Z} 軸まわりに α だけ回転し $(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$ 座標系を定める。

$$\begin{bmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \\ z_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} \quad (\text{A3.67})$$

ここに、

$$\cos\alpha = a_{xX}/A_\alpha, \quad \sin\alpha = a_{xY}/A_\alpha$$

$$A_\alpha = \sqrt{a_{xX}^2 + a_{xY}^2}, \quad L = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2}$$

$$a_{xX} = (X_j - X_i)/L, \quad a_{xY} = (Y_j - Y_i)/L, \quad a_{xZ} = (Z_j - Z_i)/L \quad (\text{A3.68})$$

(3) 第3段階

次に図A3.8に示すように y_β 軸まわりに $-\beta$ だけ回転し $(x_\beta, y_\beta, z_\beta)$ 座標系を定める。

$$\begin{bmatrix} x_\beta \\ y_\beta \\ z_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \\ z_\alpha \end{bmatrix} \quad (\text{A3.69})$$

ここに、

$$\cos\beta = \sqrt{a_{xX}^2 + a_{xY}^2} = A_\alpha, \quad \sin\beta = -a_{xZ} \quad (\text{A3.70})$$

(4) 第4段階

x_β 軸まわりに $-\psi$ だけ回転して $(x_\beta, y_\beta, z_\beta)$ 座標系を (x, y, z) 座標系に一致させる。

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\beta \\ y_\beta \\ z_\beta \end{bmatrix} \quad (\text{A3.71})$$

ここで、式(A3.67), 式(A3.69)より

$$\begin{bmatrix} x_\beta \\ y_\beta \\ z_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{xX} & a_{xY} & a_{xZ} \\ -a_{xY}/A_\alpha & a_{xX}/A_\alpha & 0 \\ -a_{xZ}a_{xX}/A_\alpha & -a_{xZ}a_{xY}/A_\alpha & A_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} \quad (\text{A3.72})$$

となる。上式に k 点の座標を代入すると

$$x_{\beta k} = a_{xX}\bar{X}_k + a_{xY}\bar{Y}_k + a_{xZ}\bar{Z}_k \quad (\text{A3.73a})$$

$$y_{\beta k} = -a_{xY}/A_\alpha \cdot \bar{X}_k + a_{xX}/A_\alpha \cdot \bar{Y}_k \quad (\text{A3.73b})$$

$$z_{\beta k} = -a_{xX}a_{xZ}/A_\alpha \cdot \bar{X}_k - a_{xY}a_{xZ}/A_\alpha \cdot \bar{Y}_k + A_\alpha\bar{Z}_k \quad (\text{A3.73c})$$

ψ は式(A3.72)の係数に無関係より式(A3.71)に k 点の座標を代入すれば $y_k = 0$ より

$$\sin\psi = y_{\beta k}/L_\psi, \quad \cos\psi = z_{\beta k}/L_\psi, \quad L_\psi = \sqrt{y_{\beta k}^2 + z_{\beta k}^2} \quad (\text{A3.74})$$

式(A3.71)を式(A3.72)を代入すれば、座標変換マトリックスが次式で求まる。

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{xX} & a_{xY} & a_{xZ} \\ (-a_{xY}z_{\beta k} + a_{xX}a_{xZ}y_{\beta k})/A_\alpha L_\psi & (a_{xX}z_{\beta k} + a_{xY}a_{xZ}y_{\beta k})/A_\alpha L_\psi & -y_{\beta k}A_\alpha/L_\psi \\ (-a_{xY}y_{\beta k} - a_{xX}a_{xZ}z_{\beta k})/A_\alpha L_\psi & (a_{xX}y_{\beta k} - a_{xY}a_{xZ}z_{\beta k})/A_\alpha L_\psi & z_{\beta k}A_\alpha/L_\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} \quad (\text{A3.75a})$$

または、

$$x = \lambda_p \bar{X} \quad (\text{A3.75b})$$

ここに、

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \sqrt{a_{xX}^2 + a_{xY}^2}, \quad L_\psi = \sqrt{y_{\beta k}^2 + z_{\beta k}^2} \\ A_\alpha &= 0 : a_{xX}/A_\alpha = 1, \quad a_{xY}/A_\alpha = 0 \\ L_\psi &= 0 : z_{\beta k}/L_\psi = 1, \quad y_{\beta k}/L_\psi = 0 \end{aligned} \quad (\text{A3.76})$$

なお、三角形要素の k 点が x, y 平面にある場合には、第3段階まで同様で、第4段階において、式(A3.71)の $z_x=0$ より

$$\cos\psi = y_{\beta k}/L_\psi, \quad \sin\psi = -z_{\beta k}/L_\psi, \quad L_\psi = \sqrt{y_{\beta k}^2 + z_{\beta k}^2} \quad (\text{A3.77})$$

となるので、式(A3.75a)の $y_{\beta k}$ を $-z_{\beta k}$ に、 $z_{\beta k}$ を $y_{\beta k}$ に変更すれば良いので、 λ_p は次式となる。

$$\lambda_p' = \begin{bmatrix} a_{xX} & a_{xY} & a_{xZ} \\ (-a_{xY}y_{\beta k} - a_{xX}a_{xZ}z_{\beta k})/A_\alpha L_\psi & (a_{xX}y_{\beta k} - a_{xY}a_{xZ}z_{\beta k})/A_\alpha L_\psi & z_{\beta k}A_\alpha/L_\psi \\ (a_{xY}z_{\beta k} - a_{xX}a_{xZ}y_{\beta k})/A_\alpha L_\psi & (-a_{xX}z_{\beta k} - a_{xY}a_{xZ}y_{\beta k})/A_\alpha L_\psi & y_{\beta k}A_\alpha/L_\psi \end{bmatrix} \quad (\text{A3.78})$$

したがって、全体座標系で表わした節点変位増分 U と局所座標系で表わした u の間には、次の関係式が成り立つ。

$$u = T_p U \quad (\text{A3.79})$$

ここに、

$$T_p = \begin{bmatrix} \lambda_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda_p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda_p & 0 & 0 & 0 \\ & & & \lambda_p & 0 & 0 \\ & Sym. & & & \lambda_p & 0 \\ & & & & & \lambda_p \end{bmatrix} \quad (\text{A3.80})$$

この T_p が板要素の求める座標変換マトリックスである。

用いた記号

- A : 三角形要素の断面積
- A : ϵ と \tilde{u} を関係づける係数マトリックス
- B_n : ϵ_n と u_n を関係づける係数マトリックス
- B_ϕ : ϵ_ϕ と u_n を関係づける係数マトリックス
- B_b : ϵ_b と u_b を関係づける係数マトリックス
- B_θ : ϵ_θ と u_b を関係づける係数マトリックス
- C : u と u_n を関係づける係数マトリックス
- C_θ : たわみ角マトリックス
- D_e : 板の弾性剛度マトリックス
- D_p : 板の弾塑性剛度マトリックス
- e : $e_1 \sim e_3$ からなるマトリックス
- $e_1 \sim e_3$: 変形後の局所座標系における単位マトリックス
- e^* : $e_1^* \sim e_3^*$ からなるマトリックス
- $e_1^* \sim e_3^*$: 変形前の局所座標系における単位マトリックス
- E : ヤング率
- E_{st} : ひずみ硬化係数
- E : $E_1 \sim E_3$ からなるマトリックス
- $E_1 \sim E_3$: 変形後の局所座標系における単位マトリックス
- f : 要素の節点力ベクトル
- f_n : 要素の面内（変位）節点力ベクトル
- f_ϕ : 要素の面内（回転）節点力ベクトル
- f_b : 要素の面外節点力ベクトル
- f_r : 残留応力による要素の節点力ベクトル
- F : 降伏関数
- F : 全体座標系での真の節点力ベクトル
- G : せん断弾性係数
- h_e : 矩形要素の高さ（幅）方向の長さ
- H : 解析モデルの高さ
- H' : $EE_{st}/(E-E_{st})$

- k : 要素の接線剛性マトリックス
 k_{nn} : 面内剛性マトリックス
 k_{nb} : 面内と面外の連成を表わす剛性マトリックス
 k_{bb} : 面外曲げ剛性マトリックス
 k_g : 幾何学的剛性マトリックス
 $k_{\phi\phi}$: 面内回転剛性マトリックス
 K : 全体座標系での接線剛性マトリックス
 l_e : 矩形要素の軸方向の長さ
 L : 解析モデルの長さ
 NH : 解析モデルの高さ（幅）方向の分割数
 NX : 解析モデルの軸方向の分割数
 p : 要素の節点外力ベクトル
 P : 全体座標系での節点外力ベクトル
 P_{ro} : 残留応力を導入するための仮想外力
 r : 要素内の任意点を表わすベクトル
 S_x : $E/(1-\nu^2)(\sigma'_x + \nu\sigma'_y)$
 S_y : $E/(1-\nu^2)(\sigma'_y + \nu\sigma'_x)$
 S_{xy} : $2G\tau$
 S : $4\sigma_e^2 H' / 9 + S_x \sigma'_x + S_y \sigma'_y + 2S_{xy} \tau_{xy}$
 T_p : 板要素の座標変換マトリックス
 u, v, w : 要素の任意点における x, y, z 軸方向の変位
 u : 要素の節点変位ベクトル
 u_n : 要素の面内節点変位ベクトル
 u_b : 要素の面外節点変位ベクトル
 \tilde{u} : 要素の真の節点変位ベクトル
 U : 全体座標系での節点変位ベクトル
 \tilde{U} : 全体座標系での節点変位ベクトル
 U : ひずみエネルギー増分
 V : 外力のポテンシャルエネルギー増分
 U_o, V_o : 全体座標系での Y, Z 軸方向の初期変位
 x, y, z : 変形前の要素の局所座標系

- x^*, y^*, z^* : 変形後の要素の局所座標系
 X, Y, Z : 全体座標系
 α : (降伏に至るひずみ増分) / (全ひずみ増分)
 α : $\alpha_1 \sim \alpha_3$ からなる列ベクトル
 $\alpha_1 \sim \alpha_3$: 面内変位関数の係数
 α_b : $\alpha_{b1} \sim \alpha_{b9}$ からなる列ベクトル
 $\alpha_{b1} \sim \alpha_{b9}$: 面外変位関数の係数
 γ_{xy} : せん断ひずみ増分
 γ_ϕ : micro変形とmacro変形の差によるひずみ
 ϵ_x, ϵ_y : x, y 軸方向の軸ひずみ成分
 ϵ_Y : 降伏ひずみ
 ϵ : 要素のひずみベクトル
 ϵ_m : 板の中央点面における線形ひずみベクトル
 ϵ_ϕ : 面内回転ベクトル
 ϵ_b : 曲率ベクトル
 ϵ_θ : たわみ角ベクトル
 $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$: 面積座標
 $\theta_x, \theta_y, \theta_z$: 局所座標系での x, y, z 軸回りのたわみ角
 $\Theta_X, \Theta_Y, \Theta_Z$: 全体座標系での X, Y, Z 軸回りのたわみ角
 $\Theta_{X_0}, \Theta_{Y_0}, \Theta_{Z_0}$: 全体座標系での X, Y, Z 軸回りの初期たわみ角
 θ_z^* : micro回転
 λ : 塑性ひずみ増分の正值の比例係数
 λ : 変形後の局所座標系と全体座標系との間の座標変換マトリックス
 λ^* : 変形前の局所座標系と全体座標系との間の座標変換マトリックス
 ν : ポアソン比
 Π : 全ポテンシャルエネルギー増分 ($U + V$)
 σ_y : 引張試験による降伏点応力度
 $\bar{\sigma}_e$: 相当応力度
 σ_x, σ_y : x, y 軸方向の応力度
 σ'_x, σ'_y : x, y 軸方向の偏差応力
 σ : 応力度ベクトル

σ_r : 残留応力ベクトル
 $(\quad)' : d/dx$

参考文献

- 1) 日本道路協会:道路橋示方書・同解説, 1980年2月.
- 2) Levy, S. : Bending of Rectangular Plates with Large Deflection , NACA, No. 737, 1942.
- 3) Coan, K. M. : Large Deflection Theory for Plates with Small Initial Curvature Loaded in Edge Compression, J. Applied Mech., Vol. 18, No. 2, June, 1951, pp. 143-151.
- 4) Yamaki, N. : Postbuckling Behavior of Rectangular Plates with Initial Curvature Loaded in Edge Compression, J. Applied. Mech., Vol. 26, No. 3, Sep., 1959, pp. 407-414, June, 1960, pp. 335-342.
- 5) Turner, M. J., Dill, E. H., Martin, H. C. and Melosh, R. J. : Large Deflection of Structures Subjected to Heating and External Loads, J. Aero/Space Sciences, No. 27, Feb., 1960, pp. 99-106.
- 6) 川井忠彦・吉村信敏:有限要素法による平板の大たわみ問題の解析, 生産研究, 第20巻, 第8号, 1968年, pp. 383-387.
- 7) Murray, D. W. and Wilson, E. L. : Finite Element Postbuckling Analysis of Thin Elastic Plates, AIAA J., Vol. 7, No. 10, Oct., 1969, pp. 1915-1920.
- 8) Murray, D. W. and Wilson, E. L. : Finite Element Large Deflection Analysis of Plates, Proc. of ASCE, Vol. 99, No. EM1, Feb., 1969, pp. 143-165.
- 9) 大坪英臣:平板の大たわみ問題の一解析法 - 特に平板の圧縮最終強度について-, 日本造船学会論文集, 第130号, 1971年12月, pp. 173-182.
- 10) 岡村宏一・吉田公憲:圧縮を受ける長方形鋼板の終局強度, 土木学会論文報告集, 第206号, 1972年12月, pp. 1-11.
- 11) Needleman, A. and Tvergaard, V. : An Analysis of the Imperfection Sensitivity of Square Elastic-Plastic Plate under Axial Compression, Int. J. Solids Struct., Vol. 12, No. 3, 1976, pp. 185-201.
- 12) 小松定夫・北田俊行・宮崎清司:残留応力および初期たわみを有する圧縮板の弾塑性解析, 土木学会論文報告集, 第244号, 1975年12月, pp. 1-14.
- 13) 上田幸雄・安川 渡・矢尾哲也・池上 博・大南亮一:圧縮を受ける正方形板の最終強度に関する研究(第1報), 日本造船学会論文報告集, 第137号, 1975年6月, pp. 210-

221(第2報), 第140号, 1976年12月, pp.205-209.

- 14) Crisfield, M. A. : Full-range Analysis of Steel Plates and Stiffened Plating under Uniaxial Compression, Proc. Instn. Civ. Eng., Part 259, Dec., 1975, pp. 595-624.
- 15) Harding, J. E., Hobbs, R. F. and Neal, B. G. : The Elasto-Plastic Analysis of Imperfect Square Plates under In-plane Loading, Proc. Instn. Civ. Eng., Part 2, Vol. 63, Mar., 1977, pp. 137-158.
- 16) Haaijer, G. : Plate Buckling in the Strain-Hardening Range, Proc. of ASCE, Vol. 83, No. EM2, April, 1957, pp. 1212-1-1212-47.
- 17) Rajasekaran, S. and Murray, D. W. : Coupled Local Buckling in Wide-Flange Beam-Columns, Proc. of ASCE, Vol. 99, No. ST6, 1973, PP. 1003-1023.
- 18) 吉田 博: H型鋼柱の局部座屈と曲げ座屈の連成座屈強度, 土木学会論文報告集, 第243号, 1975年11月, pp. 19-32.
- 19) Akay, H. U., Johnson, C. P. and Will, K. M. : Local and Lateral Buckling of Beams and Frames, Proc. of ASCE, Vol. 103, No. ST9, Sep., 1977, pp. 1821-1832.
- 20) Hancock, G. J. : Local Distortional and Lateral Buckling of I-Beams, Proc. of ASCE, Vol. 104, No. ST11, Nov., 1978, pp. 1787-1798.
- 21) Tien, S. T. and Wang, S. T. : Local Buckling of Beams under Stress Gradient, Proc. of ASCE, Vol. 105, No. ST8, Aug. 1979, pp. 1571-1588.
- 22) Hancock, G. J. : Interaction Buckling I-Section Columns, Proc. of ASCE, Vol. 107, No. ST1, Jan., 1981, pp. 165-179.
- 23) Lay, M. G. : Flange Local Buckling in Wide-Flange Shapes, Proc. of ASCE, Vol. 91, No. ST6, Dec., 1965, pp. 95-116.
- 24) 加藤 勉: 面内圧縮を受ける板の塑性破壊について, 日本建築学会論文報告集, 第107号, 1965年1月, pp. 37-42.
- 25) 田中 尚・高梨晃一: プラスチックヒンジにおけるウェブ幅、フランジ幅の制限に関する研究(3), 日本建築学会論文報告集, 第107号, 1965年1月, pp. 31-36.
- 26) Climenhaga, J. J. and Johnson, R. P. : Moment-Rotation Curves for Locally Buckling Beams, Proc. of ASCE, Vol. 98, No. ST6, 1972, pp. 1239-1254.
- 27) 福地保長: フランジ局部座屈の実験, カラム, No. 59, 1976年1月, pp. 5-8.
- 28) 三谷勲・牧野稔・松井千秋: H形鋼柱の局部座屈後の変形性状に関する解析的研究,

日本建築学会論文報告集, 第296号, 1980年10月, pp. 37-47.

- 29) 宇佐美勉・土屋信洋・大谷恭弘・福本嘯士: 薄板集成短柱の弾塑性有限変位解析, 土木学会論文集, 第362号/(1-4), 1985年10月, pp. 293-302.
- 30) 中井 博・北田俊行・酒造敏廣: 圧縮を受ける薄肉箱形短柱の終局強度特性と終局強度算定法に関する研究, 構造工学論文集, Vol. 31A, 1985年3月, pp. 65-77.
- 31) 藤本盛久・須藤福三・和田 章: 繰返し荷重を受ける鋼構造骨組の3次元弾塑性有限変位解析に関する研究, JSSC第13回マトリックス解析法研究発表論文集, 1979年6月, pp. 129-134.
- 32) 吉田 裕・増田陳紀・松田 隆: 薄板で構成される立体構造の弾塑性・大変位離散化要素解析法, 土木学会論文報告集, 第288号, 1979年8月, pp. 41-45.
- 33) 鈴木敏郎・金子洋文: 有限要素法による部材構成板要素の座屈及び座屈後挙動の大変形解析, 日本建築学会論文報告集, 第316号, 1982年6月, pp. 9-17.
- 34) 鈴木敏郎・金子洋文: 鋼構造部材構成板要素相互の弾塑性連成局部座屈挙動の解析法, 日本建築学会論文報告集, 第323号, 1983年1月, pp. 23-31.
- 35) Zienkiewicz, O. C. : The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, 1971, (邦訳: 基礎工学におけるマトリックス有限要素法, 培風館, 1974年).
- 36) Kanok-Nukulchai, W. : A Simple and Efficient Finite Element for General Shell Analysis, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 14, No. 2, 1979, pp. 179-200.
- 37) 吉田 裕・雨宮栄一郎・増田陳紀: 立体構造解析のための薄板有限要素, 土木学会論文報告集, 第211号, 1973年3月, pp. 19-28.
- 38) Eringen, A. C. : Linear Theory of Micropolar Elasticity, J. Math. Mech., Vol. 15, No. 6, 1966, pp. 909-923.
- 39) 上田幸雄・山川武人: 有限要素法による平板の弾性大撓みの解析, JSSC第3回マトリックス解析法研究発表論文集, 1969年5月, pp. 339-345.
- 40) 三本木茂夫: 梁および板の非線形解析, JSSC第5回マトリックス解析法研究発表論文集, 1971年6月, pp. 186-193.
- 41) 上田幸雄・山川武人・藤原昭文: 有限要素法によるはり、柱、平板の熱弾塑性大たわみ解析, JSSC第7回マトリックス解析法研究発表論文集, 1973年6月, pp. 411-418.
- 42) Bleich, F. : Buckling Strength of Metal Structures, McGraw-Hill, 1952.
- 43) Bisshopp, K. E. and Drucker, D. C. : Large Deflection of Cantilever Beams, Quart. Appl. Math., Vol. III, No. 3, 1945, pp. 272-276.

- 44) Timoshenko, S. P. and Gere, J. M. : Theory of Elastic Stability, 2nd ed., McGraw-Hill, 1961.
- 45) Komatsu, S. and Kitada, T. : Refined Finite Element Analysis of Plane Elasto-Plastic Problems, Technology Reports of the Osaka University, Vol.25, No.1269, 1975, pp.415-437.
- 46) 山田嘉昭:塑性・粘弾性, コンピュータによる構造工学講座 II-2-A, 培風館, 1972年.
- 47) 山田嘉昭:塑性力学, 日刊工業新聞社, 1960年.
- 48) 上田幸雄:残留応力と座屈(局部座屈), JSSC, Vol.3, No.16, 1967年.
- 49) 三本木茂夫・吉村信敏:有限要素法による構造解析プログラム, コンピュータによる構造工学講座 I-3-A, 培風館, 1972年.
- 50) 山尾敏孝・堀田守男・小畑克己・崎元達郎:板要素と棒要素の結合による薄肉構造解析, 第38回土木学会年次学術講演会講演概要集, 第I部, 1983年9月.
- 51) 山尾敏孝・岩上憲一・宮田英樹・崎元達郎:結合解析による鋼薄肉梁の非線形解析, 第39回土木学会年次学術講演会講演概要集, 第I部, 1984年10月.
- 52) 山尾敏孝・崎元達郎:板要素とはり要素の結合による薄肉鋼構造物の有限変位弾塑性解析, 構造工学論文集, Vol.32A, 1986年3月, pp.291-302.
- 53) Yamao, T. and Sakimoto, T. : Nonlinear Analysis of Thin-Walled Structures by a Coupled Finite Element Method, Proc. of JSCE, No.374/(I-6), Oct., 1986.

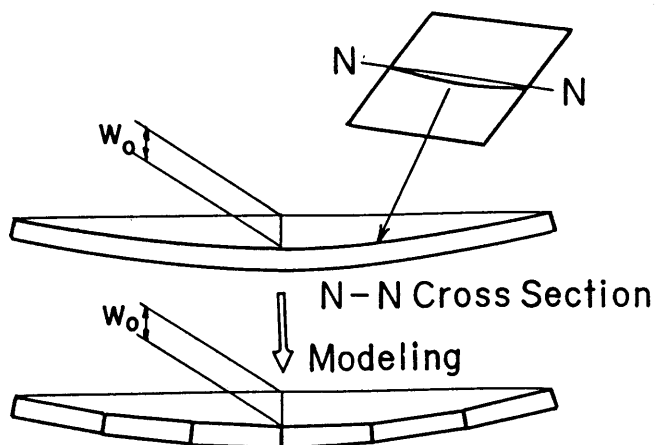


図3.1 折板構造

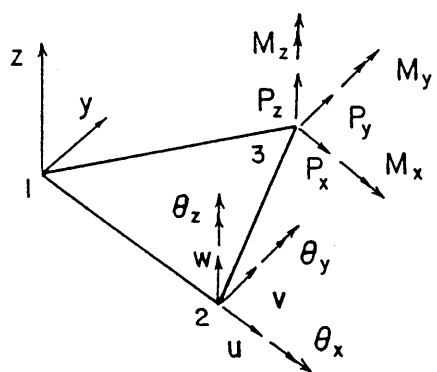


図3.2 節点力増分と節点変位増分

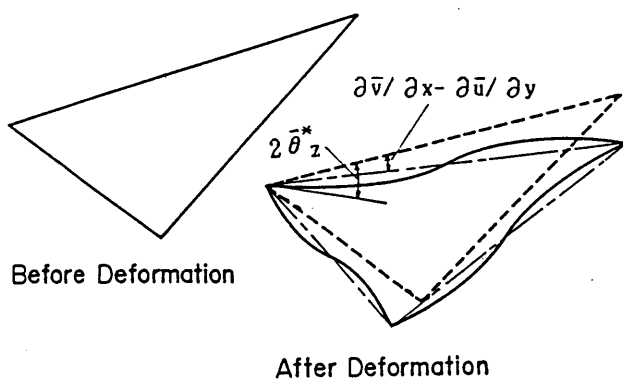
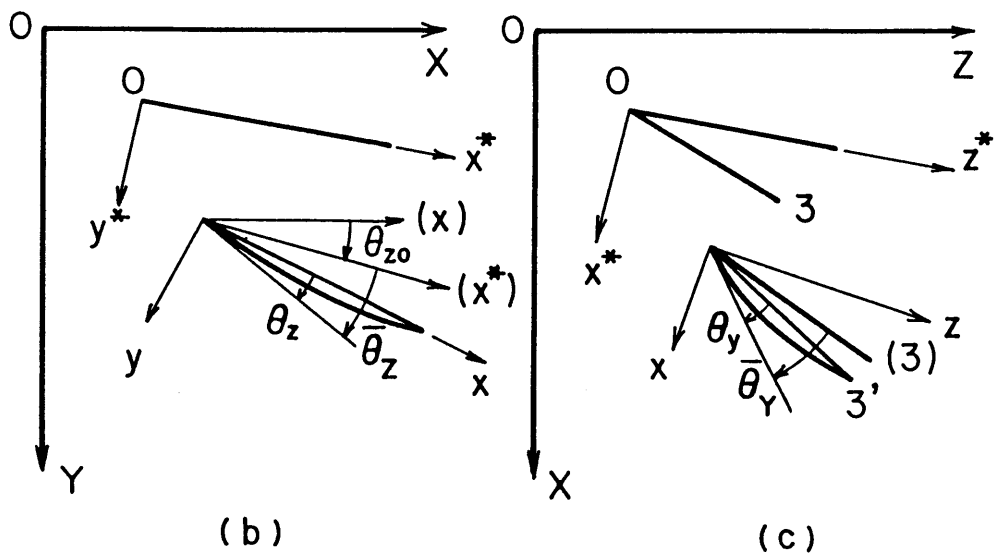
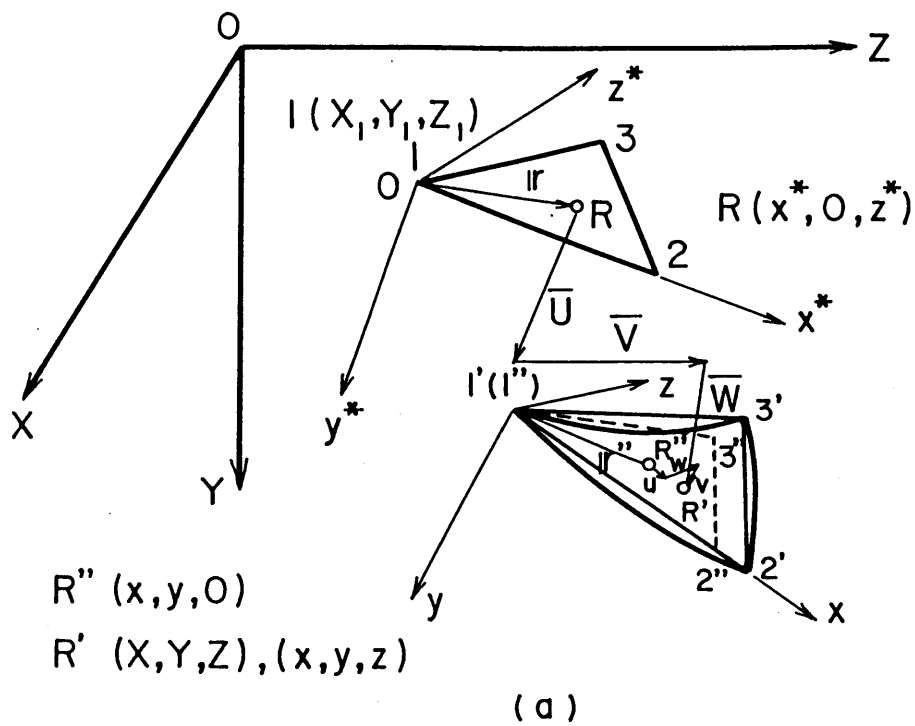


図3.3 面内回転変位



(c)

図3.4 剛体変位の除去

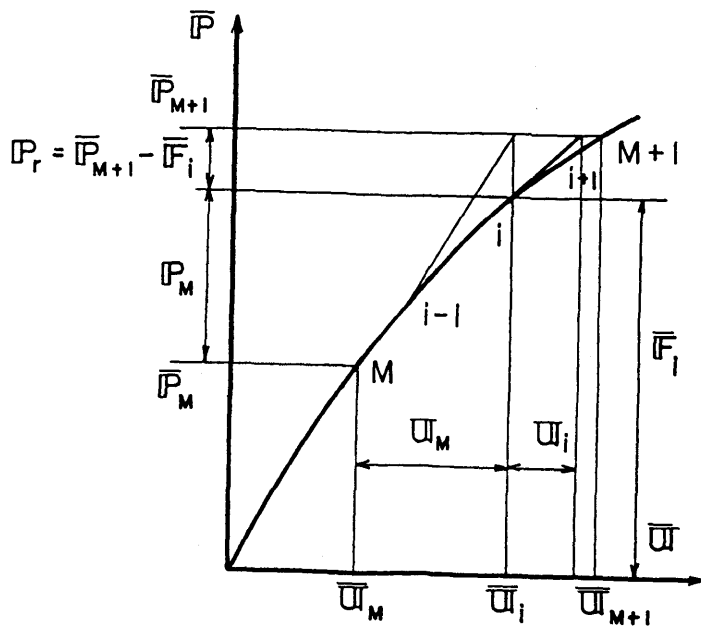


図3.5 荷重－変位曲線

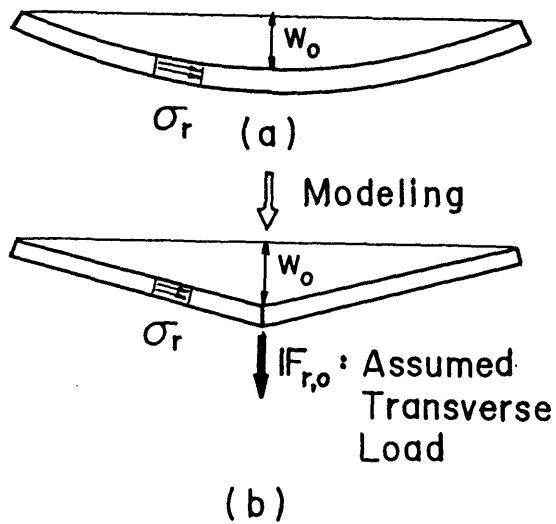


図3.6 残留応力の取り扱い

$$\square_{\text{dashed}} = \frac{1}{2} \left(\square_{\text{diag1}} + \square_{\text{diag2}} \right)$$

図3.7 四辺形板要素

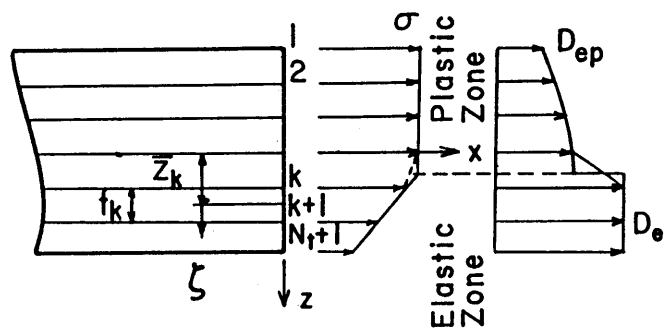


図3.8 板厚方向の層割り

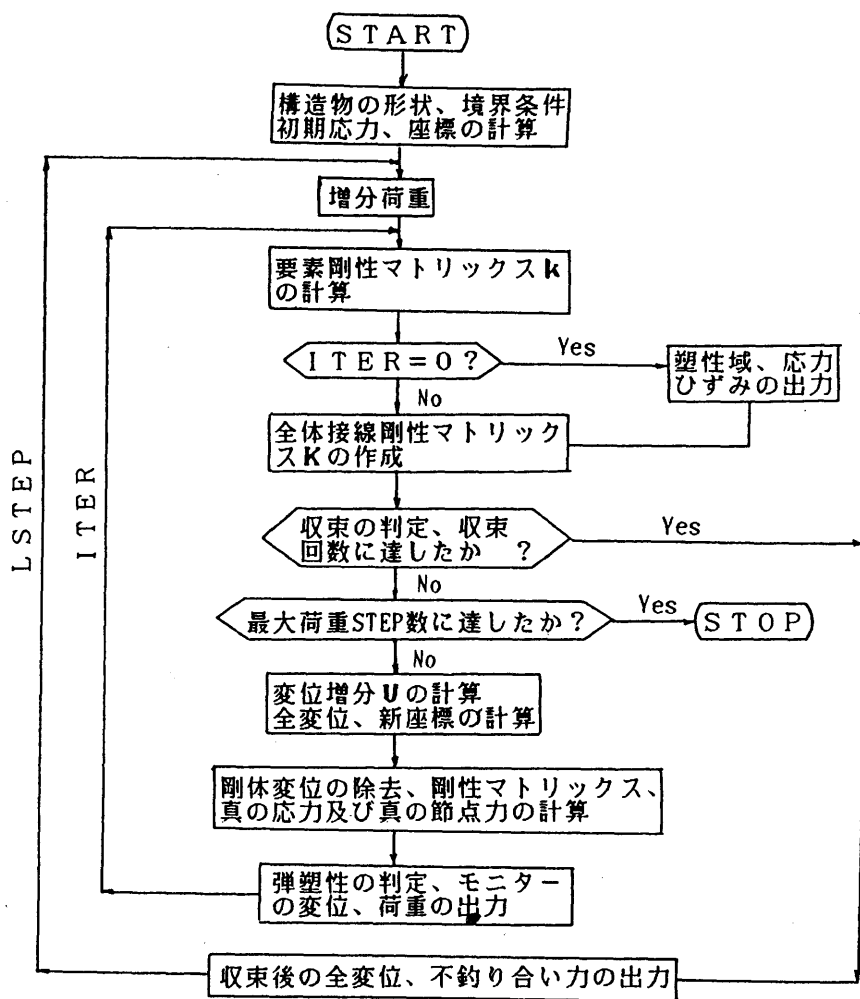


図3.9 フローチャート

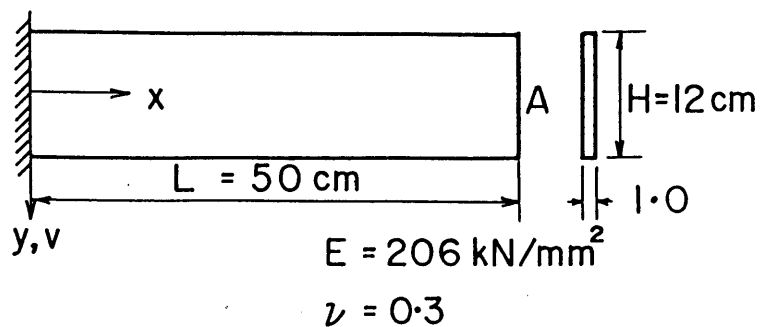


図3.10 片持ちはりモデル

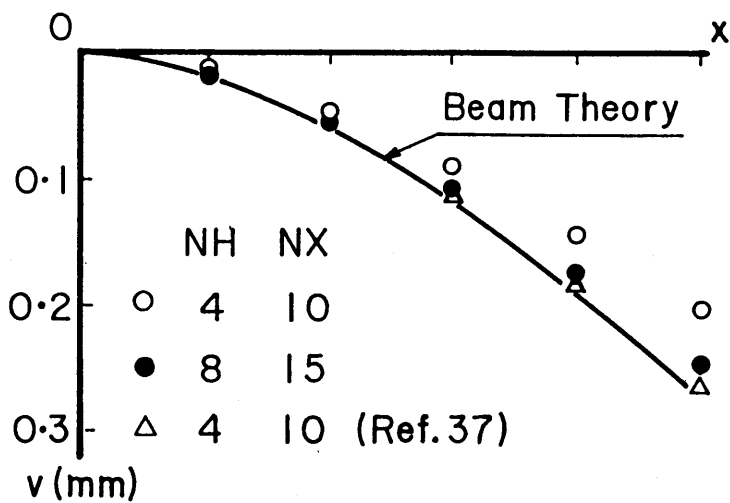


図3.11 変位モード ($P_a = 1.96 \text{ kN}$)

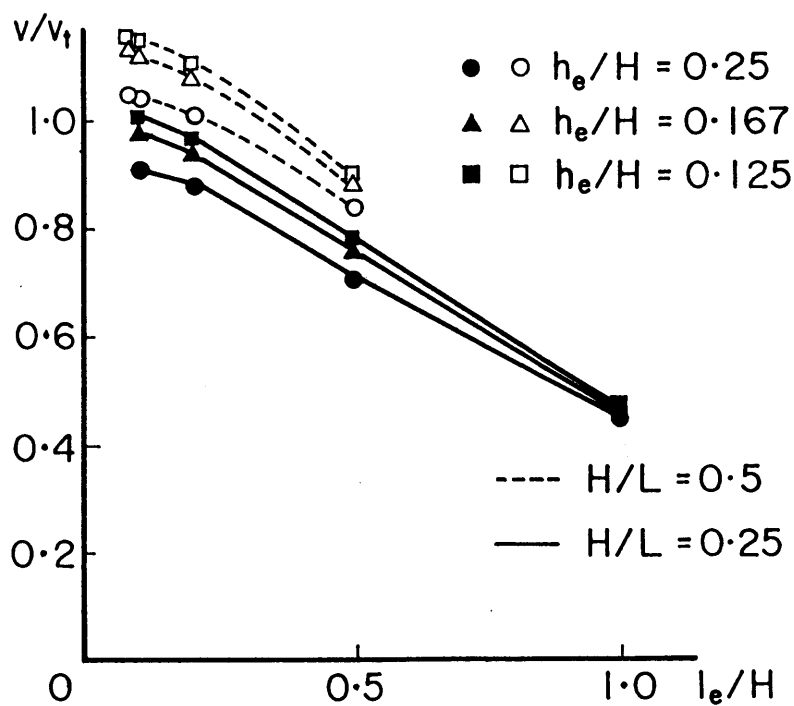
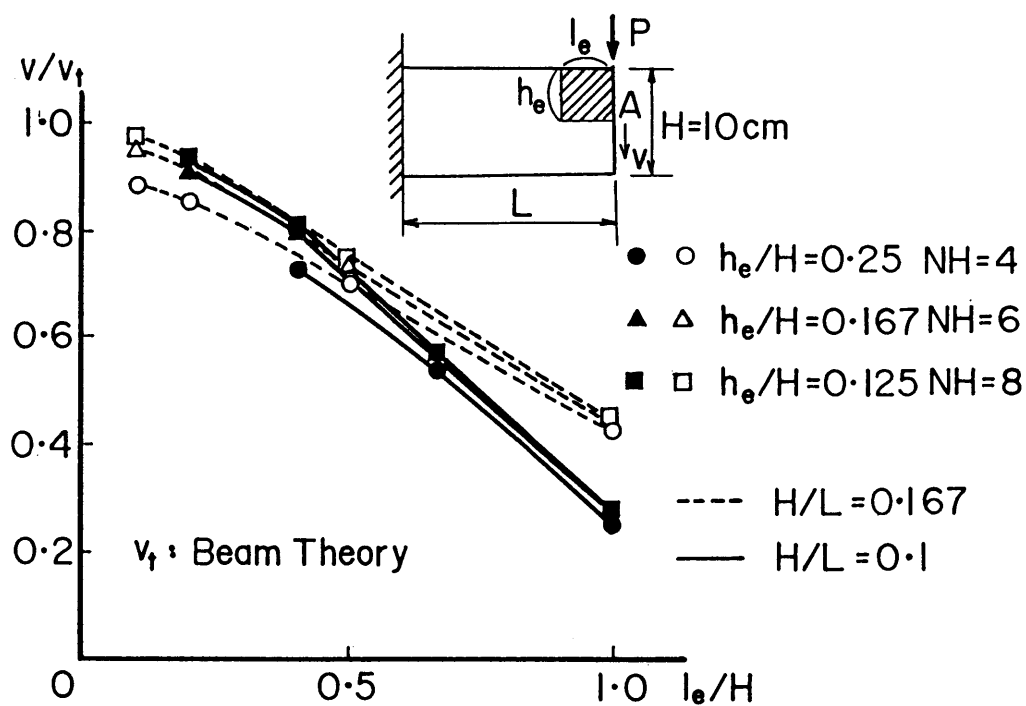


図3.12 要素分割と精度

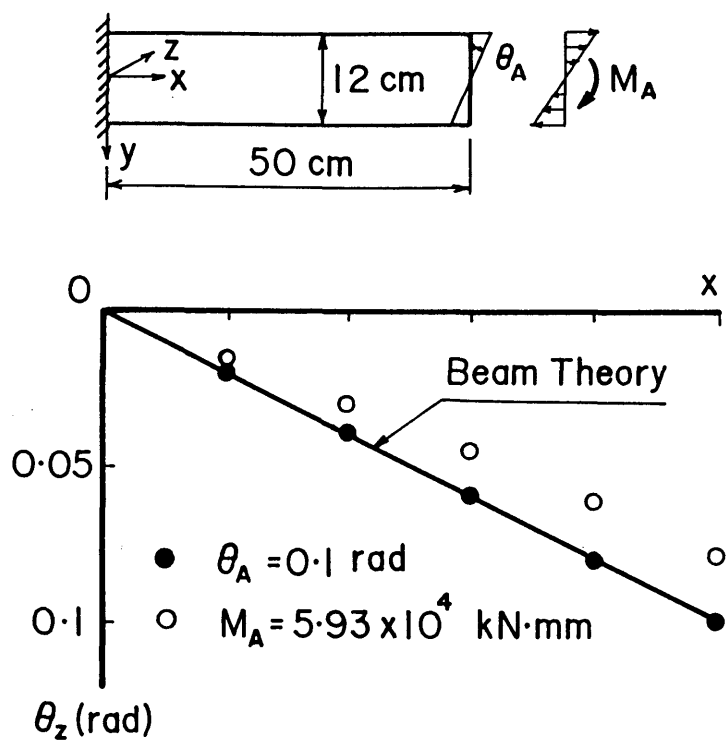


図2.13 面内たわみ角の変化 (NH=6 , NX=10)

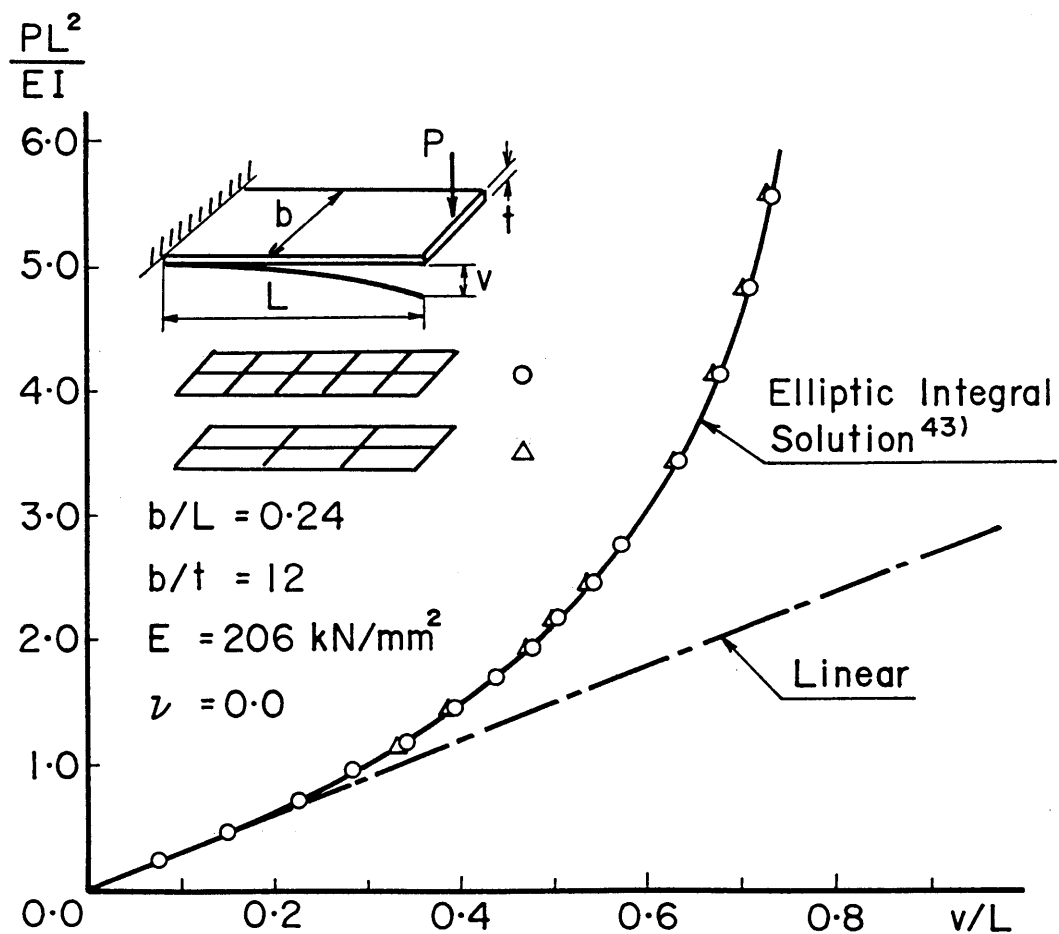


図3.14 片持ちはりのエラスティカ

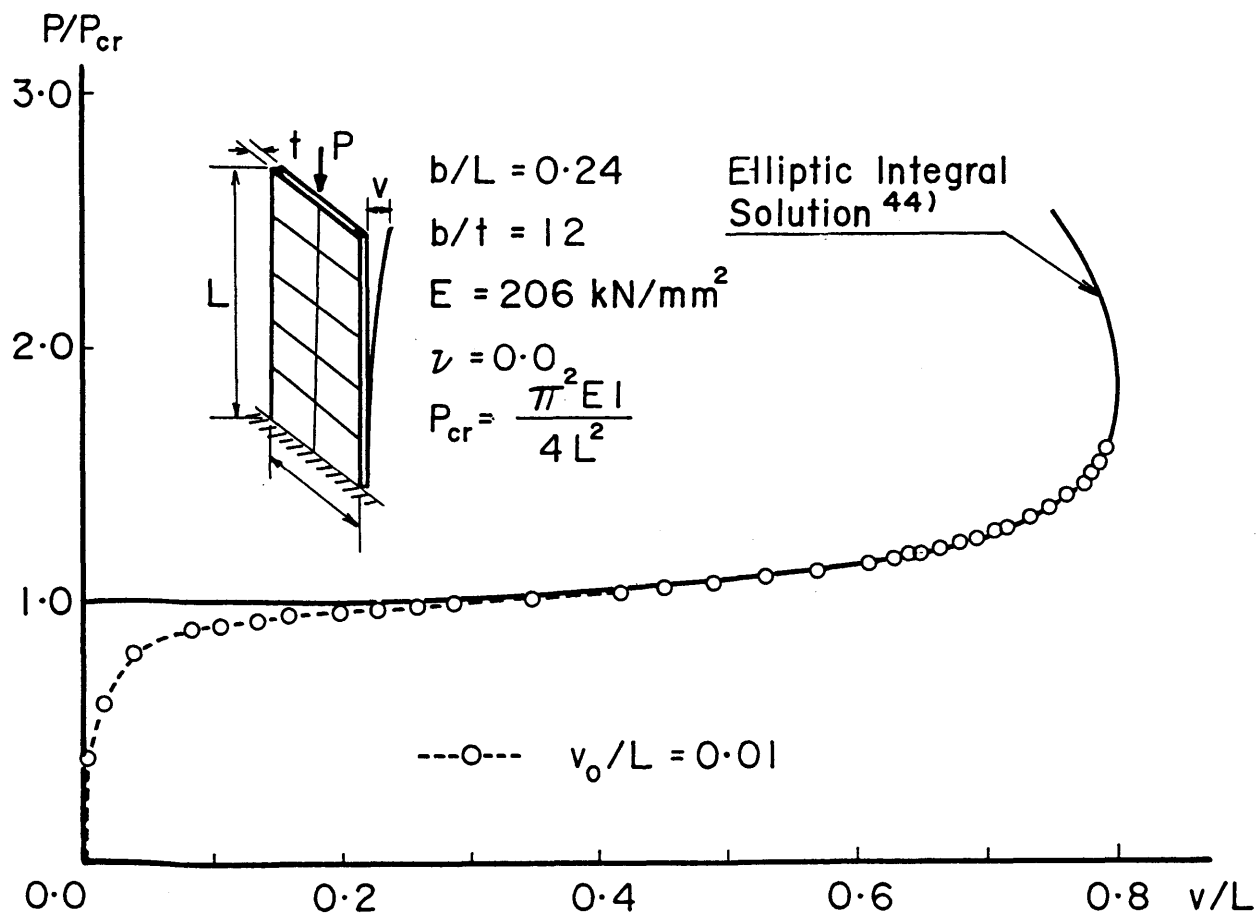
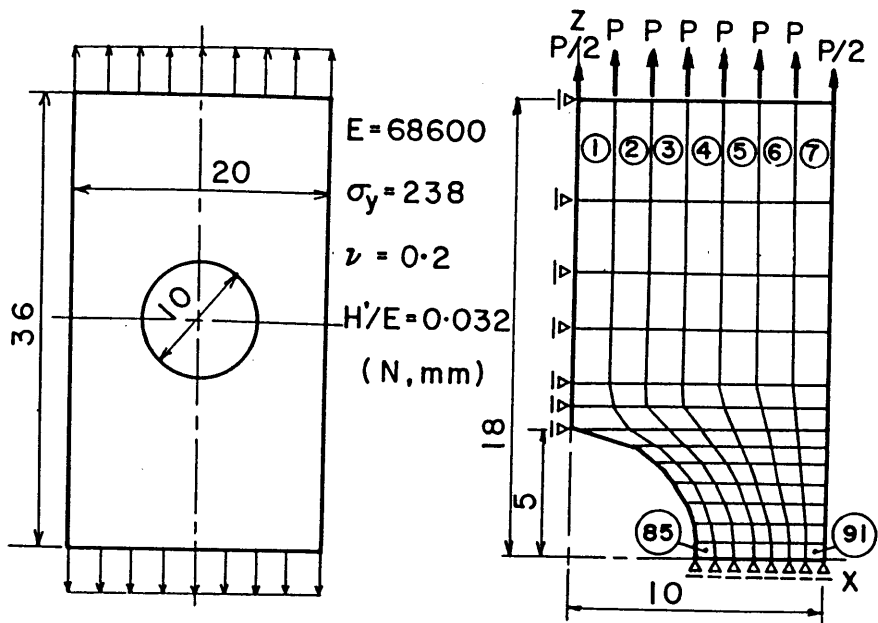
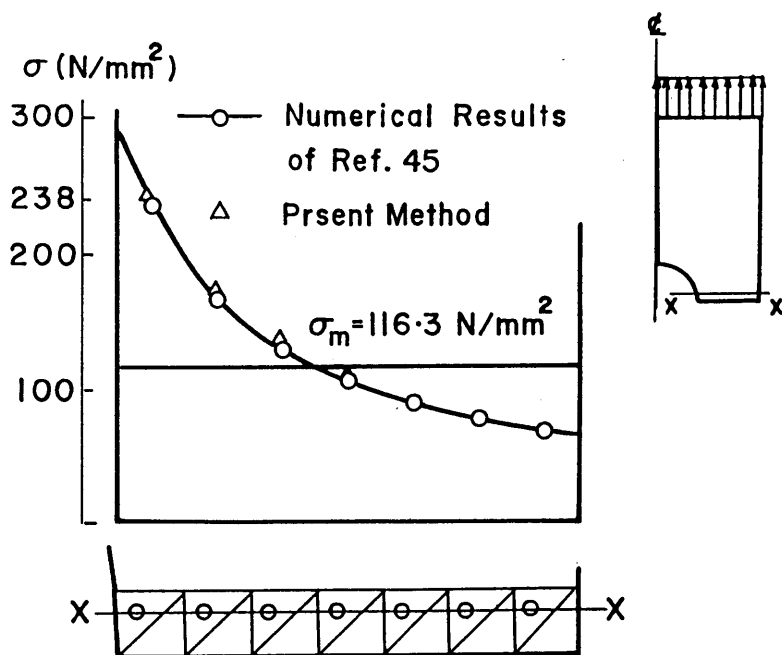


図3.15 柱のエラスティカ



(a) 解析モデル

(b) メッシュ分割



(c) 断面X-Xでの応力分布

図3.16 有孔帯板の一様引張

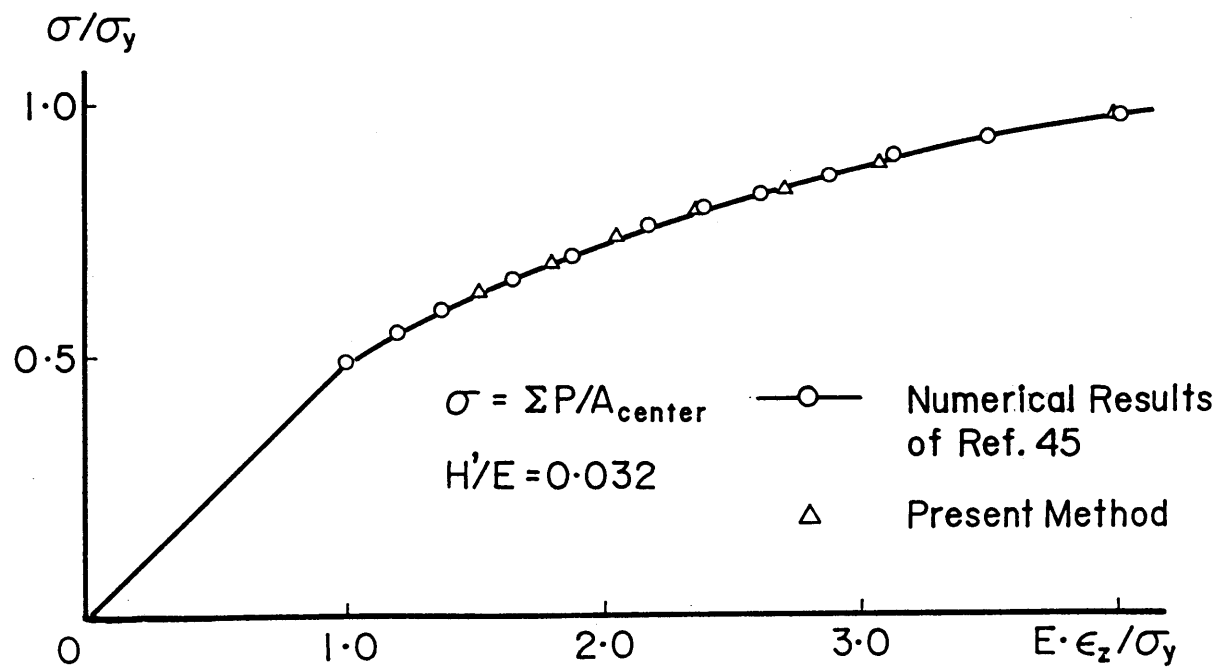


図3.17 要素(85)の平均応力と軸方向引張ひずみ ϵ_z の関係

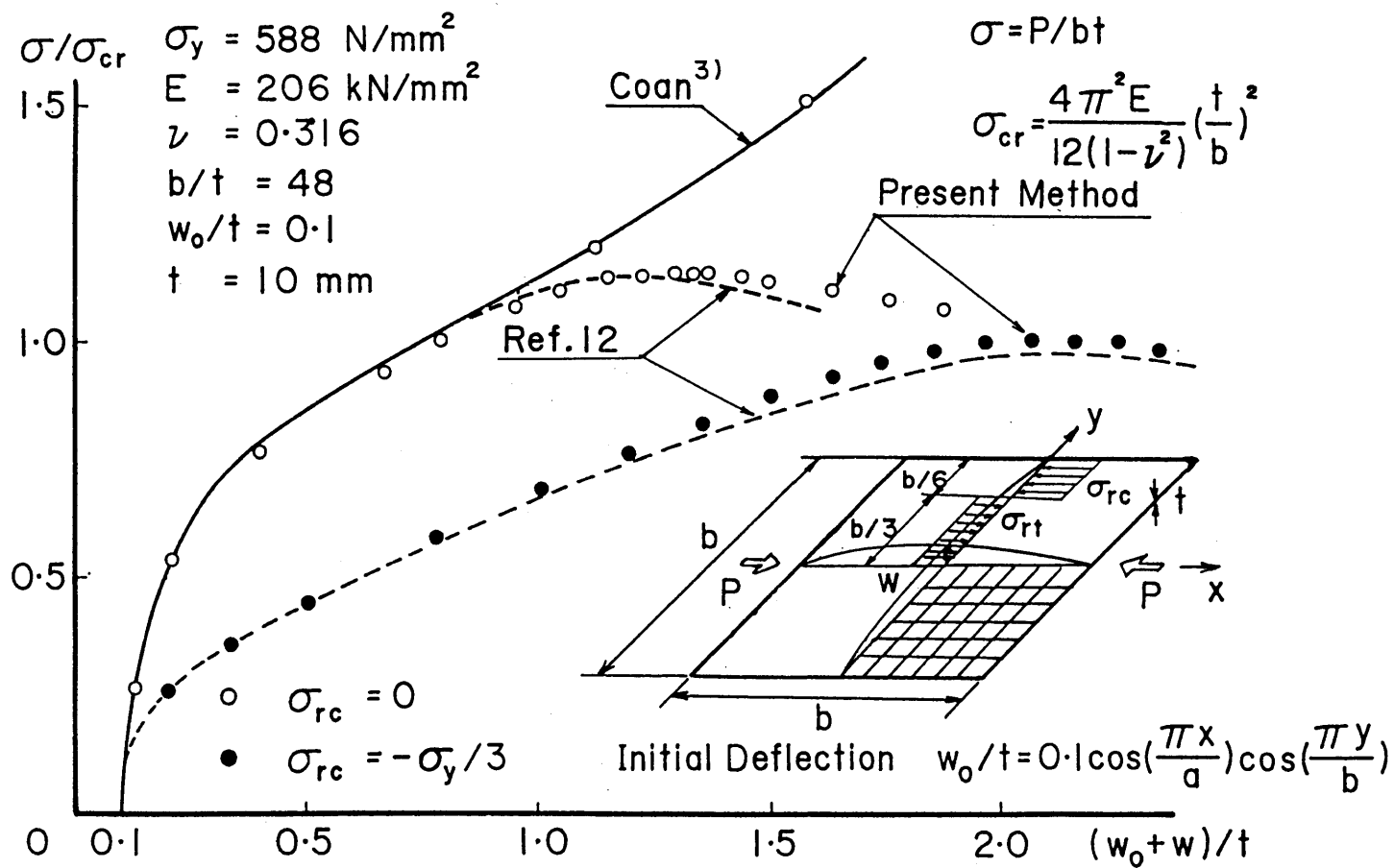
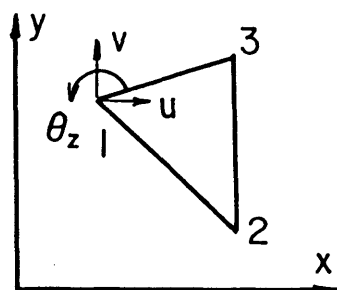
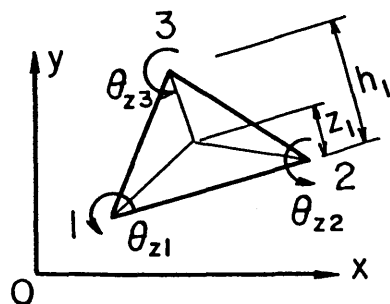


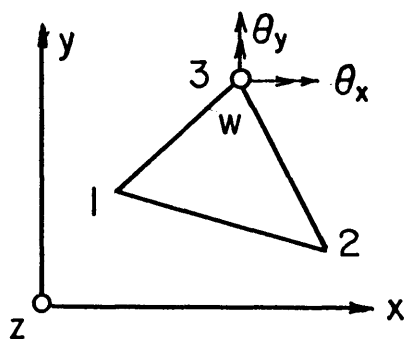
図3.18 平均圧縮応力－たわみ曲線



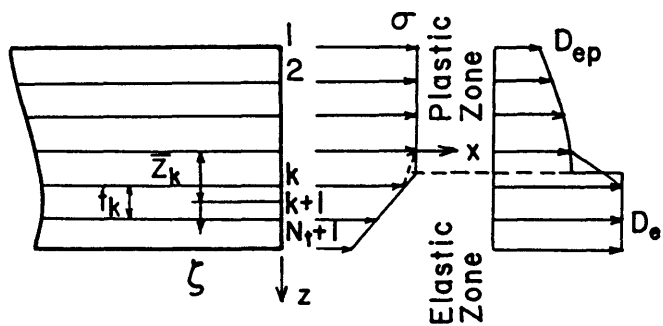
図A3.1 面内変位



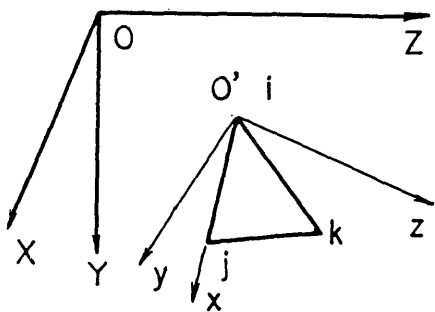
図A3.2 面内回転変位



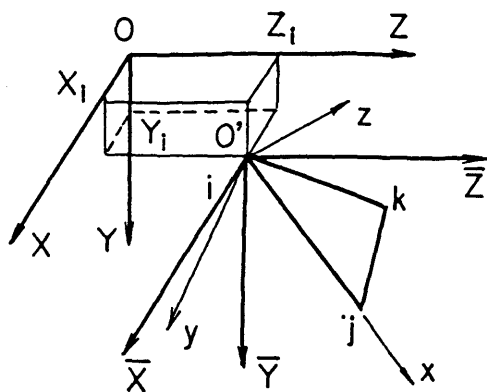
図A3.3 面外変位



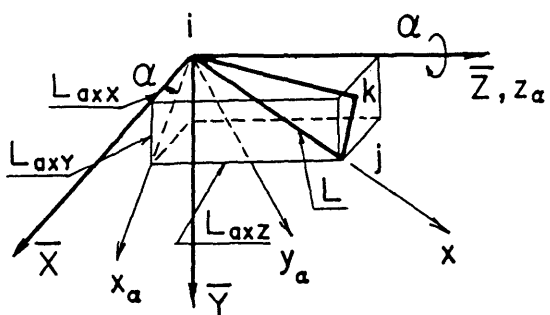
図A3.4 層割り



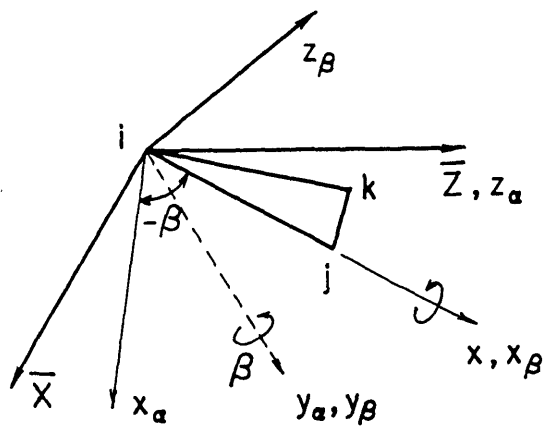
図A3.5 板要素座標系



図A3.6 (X, Y, Z) 座標



図A3.7 Z軸回りの回転



図A3.8 X軸回りの回転

第4章 はり要素と板要素の結合解析

4.1 概 説

圧縮部材の最終強度やその挙動は、幾何学的非線形性と材料学的非線形性の両方を考慮した解析法が必要である。従来より、圧縮や圧縮と曲げを受ける部材の全体座屈解析にははり要素による弾塑性有限変位解析法が用いられ、部材全体の非弾性挙動や耐荷力が解明されてきた。また、構成板要素の局部座屈解析には単一板要素による弾塑性有限変位解析法が用いられ、種々の境界条件のもとで最大強度やその挙動が求められており、それぞれ独立に取り扱われてきた。しかしながら、圧縮部材の全体座屈と構成板の局部座屈の連成座屈挙動は複雑であり、連成座屈強度や連成座屈後の挙動等未解決な問題点も多い。現道橋示方書¹⁾でも、降伏点応力度以下で局部座屈の発生を考慮した許容応力度式が採用されており、比較的幅厚比の大きい板要素の使用が認められている。特に、初期たわみや残留応力等の初期不整が存在する場合を考慮して、連成座屈挙動を厳密に解析することは容易なことではなく、連成座屈強度に関する厳密な評価式はまだ確立されていない²⁾。

幅厚比が大きい板要素からなる薄肉開断面部材の連成座屈に関する理論的研究としては、弾性固有値問題としての解析が多く、有限要素法あるいは有限帯板法を用いてI形ばりの横ねじれ座屈及びねじれ座屈と局部座屈の連成を解析した研究^{3)~8)}等がある。さらに、この手法を弾塑性域まで拡張して、柱の曲げ座屈との連成あるいはI形ばりの横ねじれ座屈との連成座屈を解析した研究もある^{9), 10)}。また、溝形の柱を対象として弾性連成座屈を解析した研究^{11), 12)}もある。

しかしながら、初期不整を考慮して部材の連成座屈強度や挙動を弾塑性有限変位解析で求めることは容易でなく、現在までに種々の近似解法が提案されている。まず、板要素の後座屈強度を近似的に求めるためvon Kármánにより導入された有効幅理論を用いた解析法で、箱形やH形断面の冷間加工鋼部材の連成座屈強度を解析したWang¹³⁾、Skaloud¹⁴⁾、

Winterら¹⁵⁾、Hancock¹⁶⁾等の研究がある。ところが、この方法では計算は簡単であるが最大荷重後の変形挙動は求められない。つぎに、Little¹⁷⁾によって提案された手法で、圧縮板要素の非弾性解析より断面の曲げモーメント-軸力-曲率曲線を求め、さらにそれを部材方向に積分して解析する方法で、伊藤¹⁸⁾や宇佐美ら¹⁹⁾の研究がある。この場合ウェブ板の取り扱いに問題が残る。この手法を用いて、最近宇佐美ら^{20), 21)}は箱形短柱の弾塑性有

限変位解析を行ない、局部座屈が生じる場合の短柱の曲げモーメントー軸力ー曲率曲線を正確に求めることにより、箱形鋼柱の連成座屈挙動を解析する方法を提案している。また、同様な解析手法としては中井ら²²⁾の箱形鋼柱の連成座屈の研究がある。さらに、吉田ら²³⁾は、立体構造を板要素のみで解析するため応力仮定の板要素を誘導して、柱の弾塑性座屈やアーチの座屈問題を解析している。しかし、複雑な構造物全体を対象に板要素のみで解析することは、現在の計算機事情では演算時間や記憶容量が膨大なものとなり、経済的にも困難であるのが現状である。このように箱形断面部材に比べ、薄肉開断面部材の連成座屈強度や弾塑性挙動を解析している研究は少なく、本研究と同様な解析手法を用いている和田ら^{24), 25)}の研究があるのみである。しかし、解析対象が繰り返し荷重を受ける鋼構造物であり、また、はり要素部分の弾塑性の判定方法及び結合方法も異なっている。

本章では、局部座屈等による断面の変形を考慮して全体構造を解析する手法について述べる。まず、構造物を応力度や初期変形が大きく、局部座屈が生じそうな部分は板要素として細かく分割し、その他の部分ははり要素としてモデル化する。こうすることにより、板要素のみの有限要素解析に比べ、自由度をあまり増やすことなく全体構造の解析が可能となる。そして、はり要素と板要素の結合部は変位の適合条件を満足するように、多点拘束処理(Multi-Point Constraint)の手法²⁶⁾を用いることにより結合部での自由度を一致させる。なお、ここで用いるはり要素は第2章で誘導した1節点7自由度の薄肉はり要素であり、板要素は第3章で求めた1節点6自由度の三角形平板要素である。以上のように両要素を結合して解析を行なうが、以下この解析方法を結合解析法とよぶことにする。そして、薄肉H形部材を数値解析例に選んで、板要素部分の要素の分割方法や結合位置と精度の関係等について理論解や他の解析結果と比較検討し、この結合解析法の妥当性について検討する。

4.2 はり要素と板要素の結合解析法

4.2.1 結合解析のモデル化

概説でも述べたように、構造物の座屈強度や耐荷力解析には有限要素法が最も有力な解析手法の1つである。有限要素法で骨組構造物を解析する場合について、図4.1(a)に示すH形断面の柱を例にとると、まず、図4.1(b)に示すように有限個のはり要素部材に分割してモデル化する。このはり要素は、はり理論によりその力学的挙動が記述されるのでよく

使用され、特に三次元的に構成された構造及び任意の方向の荷重や境界条件等を比較的簡単に扱うことができる。また、部材断面の変形は考慮していないので局部座屈は解析できない。部材の変形、応力度およびひずみはすべて部材軸方向の関数で表わすことができる。

断面の構成板の局部変形が問題となる局部座屈現象を解析するには、二次元応力問題として有限要素法を適用する必要がある。そして、板構造全体を有限個の有限要素の集合体として近似化して表わすことになる。特に、精度をあげようと思えば要素を細かく分割することになるので、必然的に要素数が増えることになる。この場合使用する有限要素は種々なものがあるが、普通ひずみ一定の三角形平板要素がよく用いられている。さらに面内力のみでなく、板の曲げも考慮することにより、三次元的挙動が解析できるようになる。板要素を用いて柱の三次元構造物を解析しようとする、図4.1(c)に示すようなモデル化が考えられるが、はり要素に比べて板要素のみの解析では節点数が多くなり、自由度が大幅に増えることはどうしても避けられないことになる。つまり、構造物全体を解析するのに局部変形を生じない不必要な部分まで板要素に分割したためである。

そこで本研究では図4.1(d)に示すように、構造物の中で局部座屈が生じるだろうと予想される部分に板要素を適用し、その他の部分ははり要素として全体をモデル化しようとするものである。この手法を用いれば、図4.1(c)のような板要素のみの解析法に比べて大幅に自由度を減らすことができ、構造物の全体耐荷力挙動を局部座屈の影響を考慮して解析することが可能となる。しかしながら、局部座屈が生じるであろう位置は、外荷重の条件や境界条件により変化すると考えられるので、結合解析の際には板要素部分の長さや要素の分割方法等を十分考慮する必要がある。また、あらかじめはり要素のみを用いて構造物を解析しておけば、部材の応力度や変形状況を知ることができ、結合解析のモデル化がしやすくなる。ここではH形断面の例を取り上げているが、この解析手法は箱形断面部材にも十分適用できる。

図4.2はH形断面のはり部材を例に取り、結合解析をする場合のモデル化を示したものである。簡単な構造で変形が対称になる場合には、図4.2(a), (b)に示すようなモデル化ができる。しかしながら、複雑な実構造物では図4.2(c)に示すようなモデル化にしても解析が可能である。なお、以下では板要素部分とはり要素部分を結合した節点を結合点(Coupled Nodal Point)とよぶことにする。

4.2.2 多点拘束処理の手法

はり要素部分と板要素部分を結合し、両者を一体化して解析する手法として多点拘束処理の手法²⁶⁾を用いる。これは次に述べるように、剛性マトリックスの分割とマトリックス演算のみで拘束処理が可能となる。

構造物のつり合い方程式は一般に次式で表わされる。

$$P = KU \quad (4.1)$$

ここに、 P, U はそれぞれの節点外力ベクトル、節点変位ベクトルである。今、多点拘束式は次式で表わされ、

$$RU = 0 \quad (4.2)$$

となる。 R は任意の拘束係数マトリックスである。また、節点変位ベクトル U はそれぞれの拘束式により独立節点変位 U_n と従属節点変位 U_s に分けることができる。また同様に、拘束係数マトリックス R も R_n と R_s に分けることができるので、これらを式(4.2)に代入すると、

$$R_n U_n + R_s U_s = 0 \quad (4.3)$$

R_s を非特異マトリックスとすると、 U_s は

$$U_s = -R_s^{-1} R_n U_n = G_s U_n \quad (4.4)$$

と表わされる。ここに、 G_s を結合マトリックスとよぶことにし、次節で誘導する。

さて、式(4.1)は U_n と U_s より次式となる。

$$\begin{bmatrix} \tilde{P}_n \\ P_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{nn} & K_{ns} \\ K_{ns}^T & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_n \\ U_s \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

\sim は剛性マトリックスの縮小により置き換えられることを意味する。構造物に拘束を加えるということは、つり合い方程式(4.5)に拘束を加えることである。この拘束力を q_s とすると、 q_s を加えた時の仕事量は式(4.4)より

$$q_s^T U_s = q_s^T G_s U_n = (G_s^T q_s^T) U_n \quad (4.6)$$

となり、 U_n に加える力は $-G_s^T q_s$ となる。この結果をマトリックス表示すると次式となる。

$$\begin{bmatrix} \tilde{P}_n - G_s^T q_s \\ P_s + q_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{nn} & K_{ns} \\ K_{ns}^T & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_n \\ U_s \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

よって、式(4.4)と式(4.7)より次のように表わせる。

$$\begin{bmatrix} \tilde{P}_n \\ P_s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{nn} & K_{ns} & G_s^T \\ K_{ns}^T & K_{ss} & -\mathbb{I} \\ G_s & \mathbb{I} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_n \\ U_s \\ q_s \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

ここに、 \mathbb{I} は単位マトリックスであり、 T は転置を表わす。

式(4.8)より U_n, q_n を消去すると、 U_n を未知数とする次のつり合い式が求まる。

$$\{\tilde{P}_n + G_n^T P_n\} = \{\tilde{K}_{nn} + K_{nn} G_n + G_n^T G_{nn}^T + G_n^T K_{nn} G_n\} U_n \quad (4.9a)$$

または、

$$P_n = K_{nn} U_n \quad (4.9b)$$

ただし、

$$K_{nn} = \tilde{K}_{nn} + K_{nn} G_n + G_n^T G_{nn}^T + G_n^T K_{nn} G_n \quad (4.10a)$$

$$P_n = \tilde{P}_n + G_n^T P_n \quad (4.10b)$$

以上のように、剛性マトリックス K の分割と式(4.4)、式(4.10)の演算で拘束処理が可能となる。

4.2.3 結合マトリックスと不つり合い力の計算

はり要素は第2章に、板要素は第3章に述べたものを用いる。ここでは図4.3に示すように、板要素からなる板構造部分とはり要素部分を結合した場合について、結合マトリックス G_n を誘導する。なお、座標系及び節点力は図4.3に示すように設定している。はり要素の1節点の自由度は7であるのに対し、結合する部分の板構造の自由度は非常に多いことになる。そこで結合して解析を行なうには、板構造とはり要素部材の結合部分で変位の適合条件が満足されねばならない。今、図4.3では k 点が結合点であるが、この点の変位は $u_k, v_k, w_k, \theta_{zk}, \theta_{yk}, \theta_{xk}, \theta_{xk}'$ の計7つである。また、板構造部分の節点1から節点 N までのうち k 点のみが独立節点であり他の節点は従属節点になる。これらの従属節点変位は次のようにして求める。薄肉弾性はり理論を用いると、曲げの平面保持およびねじりに対するそり変位等の適合条件より、結合節点 k の変位を使って次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} u_i &= u_k - Y_i \theta_{zk} + Z_i \theta_{yk} - Y_i Z_i \theta_{xk}' \\ v_i &= v_k - Z_i \theta_{xk} \\ w_i &= w_k + Y_i \theta_{xk} \\ \theta_{xi} &= \theta_{xk} \\ \theta_{yi} &= \theta_{yk} - Y_i \theta_{xk}' \\ \theta_{zi} &= \theta_{zk} - Z_i \theta_{xk}' \end{aligned} \quad (4.11)$$

ここに、 $i = 1 \sim N$ (k 点は除く)

Y_i, Z_i は結合点より各節点までの距離

以上をマトリックス表示すると、次に示すように結合マトリックス G_n が求まる。

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \theta_{z1} \\ \vdots \\ u_8 \\ v_8 \\ w_8 \\ \theta_{x8} \\ \theta_{y8} \\ \theta_{z8} \\ \vdots \\ u_N \\ v_N \\ w_N \\ \theta_{xN} \\ \theta_{yN} \\ \theta_{zN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & Z_1 & -Y_1 & -Y_1 Z_1 \\ 0 & 1 & 0 & -Z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & Y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -Y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -Z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Y_8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & Y_8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & Z_N & -Y_N & -Y_N Z_N \\ 0 & 1 & 0 & -Z_N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & Y_N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -Y_N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -Z_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ u_k \\ v_k \\ w_k \\ \theta_{xk} \\ \theta_{yk} \\ \theta_{zk} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.12a)$$

または

$$U_n = G_n U_n \quad (4.12b)$$

となる。よってこの結合マトリックスを用いることにより、板要素部分とはり要素が結合でき解析できることになる。

次に結合部での不つり合い力の算定法について述べる。はり要素および板要素それぞれの解析法で不つり合い力の算定法については述べてきた。しかし、結合部では図4.3に示す例の場合、板構造部分の各板要素の節点に節点力があるのに対し、はり要素では結合点 k で断面全体での各方向の断面力が計算されることになる。はり要素の節点 k の節点力ベクトルを \bar{F}_b とし、はり要素に対応する板要素側 k 点での節点力を \bar{F}_p とすると、 \bar{F}_p は結合マトリックス G_n を用いて次式で計算される。

$$\bar{F}_p = \bar{F}_{pk} + G_n \bar{F}_{pn} \quad (4.13)$$

ここに、

\bar{F}_{pk} : 節点 k の板要素の断面力ベクトル

\bar{F}_{pn} : 節点 k を除く板要素の断面力ベクトル

ゆえに、結合部での不つり合い力は、結合点での節点力 $(\bar{F}_b + \bar{F}_p)$ と外荷重の差で表わされる。

4.3 数値解析結果

(1) 片持ちはりの解析

まず鋼H形断面の片持ちはりを例にとり、はりの自由度端に荷重を載荷して板要素の分割数や結合位置と精度について調べた。図4.4挿入図に示すように、固定端側部分を板要素で、残りの部分をはり要素でモデル化し、形状寸法や材料定数は図中に示す通りである。板要素部分の分割方法は、ウェブ幅方向の分割数を4と一定にし、フランジ幅方向の分割数 NF を4～6、軸方向の分割数 NX は3～10と変化させた。はり要素は軸方向に9分割し、断面内はフランジ、ウェブとも幅方向に8分割、板厚方向に8分割の計192分割している。また、 l_e/B は1つの板要素の軸方向長さ l_e とフランジの幅 B の比である。板要素部分の長さつまり結合点の位置は、文献31)等の結果より $0.3L$ とした。

図4.4(a)は自由端にねじり荷重を載荷した場合の支間方向のねじり角について、分割数と精度の関係を示したものである。板要素の分割数が増えるにつれて実線のはり要素を用いた解析値に近づいていることがわかる。特に、 $NX=10$ ($l_e/B=0.15$) の場合は解析値とよく一致している。これは、第3章の解析結果の図3.12よりわかるように、比 l_e/B が小さいほど精度がよいという結果に対応している。図4.4(b)は $l_e/B=0.15$ として、自由端に鉛直と横荷重を載荷した時のたわみ図である。両者ともはり要素を用いた解析値とよく対応している。

図4.5は $l_e/B=0.15$ とした場合の板要素部分の応力度分布を示したものである。図4.5(a)、(b)は曲げによる直応力度とせん断応力度を示したもので、 $x=28.5\text{cm}$ は結合部分を表わしている。また、(c)はねじり荷重を受ける場合の固定端部分及び結合部分の上フランジのそり応力度分布を示している。なお、一点鎖線のはり理論値である。結果からわかるように、解析値ははり理論値とよく一致しており、結合部分での応力度もうまく計算されている。

これらの結果より、結合部でのたわみやねじり角等の変位の連続性をよく満足しており、応力度もはり理論値とよく対応している。また、板要素を組み合わせで立体構造にした場合でも、単一板と同様に軸方向の分割数に関係があり、この程度の l_e/B にすれば十分であることが示された。

(2) 片持ちはりの弾性大たわみ解析

次に、H形断面を有する片持ちはりの弾性大たわみ問題について解析を行なった。図4.

6に示すように、前の例と同様に固定端側部分を板要素で、残りの部分をはり要素にしてモデル化した。また、 DL は固定端から結合点までの距離を表わし、部材長 L の0.2および0.3について解析した。板要素部分は、フランジの幅方向に6分割、ウェブの幅方向に4分割した。軸方向の分割については、1つの板要素の軸方向長さ l_e とフランジの幅 B の比 l_e/B が0.2になるように、 $DL=0.2L$ では5分割し、 $DL=0.3L$ では8分割した。また、はり要素部分は軸方向に9分割し、断面要素は192分割（フランジ、ウェブを8分割、板厚方向に8分割）してある。なお、はり部材の大たわみ挙動を解析するため挿入図に示すような材料定数を用いている。図4.6は自由端に横荷重を載荷した時の荷重－変位曲線で、変位 v は部材長 L で無次元化してある。図中の実線は楕円積分解²⁸⁾で、破線は線形解である。結合位置を表わす DL の変化により解析結果に多少の差が生じているが、楕円積分解とよく対応している。このように非線形問題でも本法により、よく解析できることがわかる。なお、載荷は自由端部の荷重点の荷重方向変位を制御して行なった。

(3) H形鋼柱の弾塑性座屈解析

弾塑性問題として軸圧縮を受けるH形鋼柱の弾塑性座屈解析を行なった。図4.7の挿入図に示すようにモデル化し、板要素部分の分割はウェブの幅方向に4分割、フランジの幅方向に6分割、軸方向に5分割($l_e/B=0.2$)した。はり要素は軸方向に9分割、断面要素は前の解析と同様に192分割とした。また、結合位置は中央点断面から10cm($0.2L$)で部材の1/2を解析対象とした。材料定数は藤田ら²⁹⁾の実験結果より得られた値を使用し図中に示した。さらに解析では図中に示すような正弦波形の初期変位を与え、2種類の最大初期変位 δ について解析している。

図4.7は荷重－変位曲線で縦軸に軸力 P を、横軸には中央断面のウェブとフランジの交点の断面強軸方向の変位 v である。図中には藤田らの実験結果及び吉田ら²³⁾の解析結果も示してある。なお、吉田らは応力仮定の三角形板要素のみを用いて、H形鋼柱の1/4をフランジを8分割、ウェブを2分割して解析している。本法による結果は、吉田らの解析結果及び実験結果と比較してよく一致している。部材の半分を板要素のみで解析するとすれば、本モデルの場合の分割方法では約9倍の節点数が必要となり、本法の有効性が示されている。なお、載荷は部材端部の荷重点の軸方向圧縮変位を制御して行なった。

4.4 結 論

本章では、局部座屈等による断面の変形を考慮して全体構造を解析する手法として、はり要素の有限変位弾塑性解析法と板要素の有限変位弾塑性解析法を結合して解析する方法を提示した。本解析結果と他の理論解析結果及び実験結果と比較検討し、解析法の妥当性について検討した結果次のことが明らかになった。

- (1) 板要素により立体構成した板要素部分とはり要素の結合は、多点拘束処理の手法によりうまく処理ができ、変位の連続性も満足している。また、結合部での応力度もはり理論値とよく対応している。
- (2) 結合解析をするモデル化において、両要素の結合位置つまり板要素部分の長さは、部材長 L の0.2～0.3程度でよいと判断される。
- (3) 解析精度は、単一板と同様に板面内曲げを受ける板要素の長さ方向の分割数に関係がある。この分割数は、板面内曲げを受ける板要素の幅 B と一板要素の軸方向の長さ l_e の比 l_e/B が0.1～0.2になる程度であれば十分である。
- (4) 以上の結果より本解析法の妥当性が示された。

なお、この章の解析例では板要素が降伏点応力度に至るまで局部座屈を生じない断面であったが、局部変形を考慮した解析結果については第7章にて、実験結果との比較及びパラメータ解析結果等と比較検討して示すことにする。

用いた記号

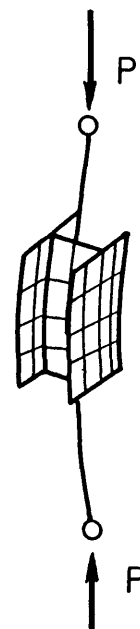
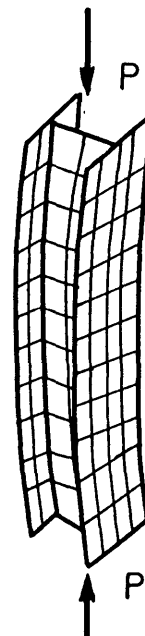
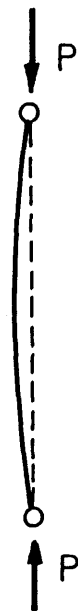
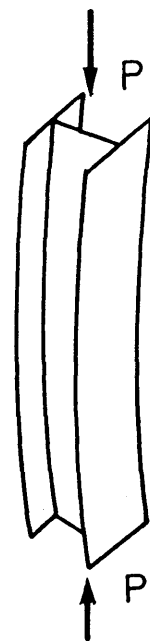
- F_b : はり要素の節点 k での節点力ベクトル
- F_p : はり要素に対応する板要素側の節点 k での節点力ベクトル
- F_{pk} : 節点 k の板要素の断面力ベクトル
- F_{pm} : 節点 k を除く板要素の断面力ベクトル($m=1\sim N$)
- G : 結合マトリックス
- k : 結合点
- K : 全体剛性マトリックス
- K_{nn}, K_{na}, K_{aa} : 独立節点と従属節点に分割した剛性マトリックス
- n : 結合部分での板要素の節点数
- P : 節点外力ベクトル
- P_n : 独立節点変位に対応する節点外力ベクトル
- P_a : 従属節点変位に対応する節点外力ベクトル
- q_a : 結合するための拘束力
- u_k, v_k, w_k : 結合点 k における x, y, z 軸方向の変位
- U : 節点変位ベクトル
- U_n : 独立節点変位に対応する節点変位ベクトル
- U_a : 従属節点変位に対応する節点変位ベクトル
- Y_i, Z_i : 結合点 k から板要素側の各節点までの距離
- θ_{yk}, θ_{zk} : 結合点 k における y, z 軸回りのたわみ角
- $\theta_{xk}, \theta'_{zk}$: 結合点 k における x 軸でのねじり角及びねじり率
- Π : 単位マトリックス
- $()^T$: 転置マトリックス
- $()^{-1}$: 逆マトリックス
- (\sim) : 拘束処理により変化するマトリックス

参考文献

- 1) 日本道路協会:道路橋示方書・同解説, 1980年2月.
- 2) 佐伯彰一・金井道夫:道路橋示方書 II 鋼橋編改訂の背景と運用, 橋梁と基礎,
Vol.15, No.2, 1981年2月, pp.11-15, No.3, 1981年3月, pp.6-13.
- 3) Rajasekaran, S. and Murray, D.W. : Coupled Local Buckling in Wide-Flange Beam-Columns, Proc. of ASCE, Vol.99, No.ST6, June, 1973, pp.1003-1023.
- 4) Johnson, C.P. and Will, K.M. : Beam Buckling by Finite Element Procedure, Proc. of ASCE, Vol.100, No.ST3, March, 1974, pp.669-685.
- 5) Akay, H.U., Johnson, C.P. and Will, K.M. : Lateral and Local Buckling of Beams and Frames, Proc. of ASCE, Vol.103, No.ST9, Sep., 1977, pp.1821-1832.
- 6) Hancock, G.J. : Local, Distorsional, and Lateral Buckling of I - Beams, Proc. of ASCE, Vol.104, No.ST11, Nov., 1978, pp.1781-1798.
- 7) Wang, S.T., Yost, M.I. and Tien, Y.L. : Lateral Buckling of Locally Buckled Beams using Finite Element Techniques, Computer & Structures, Vol.7, No.3, 1977, pp.469-475.
- 8) Wang, S.T. and Pao, H.Y. : Torsional-Flexural Buckling of Locally Buckled Columns, Computer & Structures, Vol.11, No.1-2, 1980, pp.127-136.
- 9) 吉田 博:H型鋼柱の局部座屈と曲げ座屈の連成座屈強度, 土木学会論文報告集, 第243号, 1975年11月, pp19-32.
- 10) Maeda, Y., Hayashi, M. and Arioka, K. : Elasto-Plastic Analysis of Thin-Walled Structures by Finite Strip Method, Technology Reports of the Osaka Univ., Vol.26, No.1334, 1976, pp.605-615.
- 11) Ghobarah, A.A. and Tso, W.K. : Overall and Local Buckling of Channel Columns, Proc. of ASCE, Vol.95, No.BM2, April, 1969, pp.447-462.
- 12) Rhodes, J. and Harvey, J.M. : Interaction Behaviour of Plain Channel Columns under Concentric or Eccentric Loading, Preliminary Report of Inter. Collo. on Stability of Steel Structures, Liege, Belgium, April, 1977, pp.439-444.
- 13) Wang, S.T. : Nonlinear Analysis of Locally Buckled Thin-Walled Structures, Proc. Int. Conf. on Comput. Meth. in Nonlinear Mechanics, Austin, Texas,

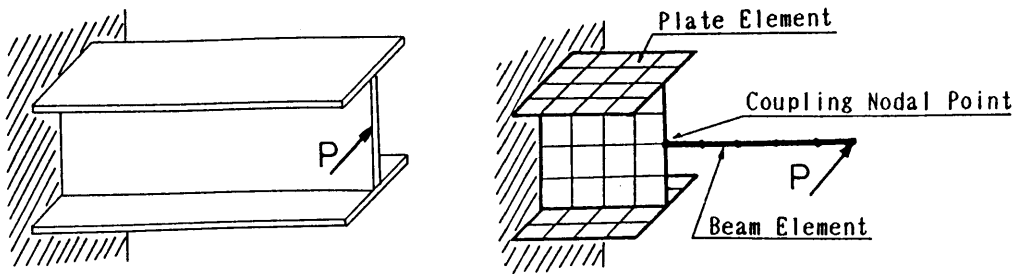
- 1974, pp.809-818.
- 14) Skaloud, M. and Naprstek, J. : Limit State of Compressed Thin-Walled Steel Columns with regard to the Interaction between Column and Plate Buckling, Preliminary Report of Inter. Collo. on Stability of Steel Structures, Liege, Belgium, April, 1977, pp.405-417.
 - 15) Kalyanaraman, V., Pekoz, T. and Winter, G. : Unstiffened Compression Elements, Proc. of ASCE, Vol.103, No.ST9, Sep., 1977, pp.1833-1848.
 - 16) Hancock, G. J. : Interaction Buckling in I-Section Columns, Proc. of ASCE, Vol.107, No.ST1, Jan., 1981, pp.165-179.
 - 17) Little, G. H. : The Strength of Square Steel Box Columns - Design Curves and their Theoretical Basis, The Structural Engineer, Vol.57A, No.2, Feb., 1979, pp.49-61.
 - 18) 伊藤文人: 局部座屈と全体座屈の連成問題, 橋梁と基礎, Vol.15, No.2, 1981年2月, pp.16-18.
 - 19) 宇佐美勉・福本嘯士: 鋼圧縮部材の連成座屈強度実験と有効幅理論による解析, 土木学会論文報告集, 第326号, 1982年10月, pp.41-50.
 - 20) 宇佐美勉・土屋信洋・大谷恭弘・福本嘯士: 薄板集成短柱の弾塑性有限変位解析, 土木学会論文集, 第362号/(I-4), 1985年10月, pp.293-302.
 - 21) 宇佐美勉・土屋信洋・福本嘯士: 鋼圧縮部材の連成座屈挙動の理論的研究, 土木学会論文集, 第362号/(I-4), 1985年10月, pp.303-312.
 - 22) Nakai, H., Kitada, T. and Miki, T. : Interaction Curve of Thin-Walled Box Stub-Column subjected to Compression and Bending for Applying to Overall Buckling Analysis of Columns, Proc. of JSCE, No.362/(I-4), Oct., 1985, pp.65-73.
 - 23) 吉田 裕・増田陳紀・松田 隆: 薄板で構成される立体構造の弾塑性・大変位離散化要素解析法, 土木学会論文報告集, 第288号, 1979年8月, pp.41-45.
 - 24) 藤本盛久・須藤福三・和田 章: 局部座屈を考慮したH形鋼部材の座屈解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 1977年10月.
 - 25) 和田 章: 繰返し荷重を受ける鋼構造骨組の3次元弾塑性大変形解析に関する研究, 東京工業大学学位論文, 1981年5月.
 - 26) Macneal, R. H. : The Nastran Theory of Manual, N. A. S. A., April, 1972.

- 27) Timoshenko, S. P. and Gere, J. M. : Theory of Elastic Stability, 2nd ed., McGraw-Hill, 1961.
- 28) Bisshopp, K. E. and Drucker, D. C. : Large Deflection of Cantilever Beams, Quart. Appl. Math., Vol. III , No. 3, 1945, pp. 272-276.
- 29) 藤田 譲・吉田宏一郎・高沢 誠:不整量を有する構造物の強度について -初期撓みを有する柱の圧縮強度-, 日本造船学会論文集, 第132号, 1973年, pp. 299-306.
- 30) 松田 隆・吉田 裕・増田陳紀:薄肉立体構造の弾塑性大変形解析, 第32回土木学会年次学術講演会講演概要集, 第I部, 1977年10月.
- 31) 山尾敏孝・堀田守男・小畑克己・崎元達郎:板要素と棒要素の結合による薄肉構造解析, 第38回土木学会年次学術講演会講演概要集, 第I部, 1983年9月.
- 32) 山尾敏孝・坂田 力・堀田守男・崎元達郎:結合解析法を用いた薄肉ばりの有限変位弾塑性解析, 第40回土木学会年次学術講演会講演概要集, 第I部, 1985年9月.
- 33) Sakimoto, T., Yamao, T., Kikuchi, R. and Sakata, T. : Nonlinear Analysis of Thin-Walled Frames and Members with Arbitrary Open Cross Sections, Proc. of JSCE, No. 362/(I-4), Oct., 1985, pp. 139-147..
- 34) 崎元達郎・山尾敏孝・坂田 力:薄肉開断面部材の非線形解析, 構造工学論文集, Vol. 32A, 1986年3月, pp. 255-264.
- 35) 山尾敏孝・崎元達郎:板要素とはり要素の結合による薄肉鋼構造物の有限変位弾塑性解析, 構造工学論文集, Vol. 32A, 1986年3月, pp. 291-302.
- 36) Yamao, T. and Sakimoto, T. : Nonlinear Analysis of Thin-Walled Structures by a Coupled Finite Element Method, Proc. of JSCE, No. 374/(I-6), Oct., 1986.

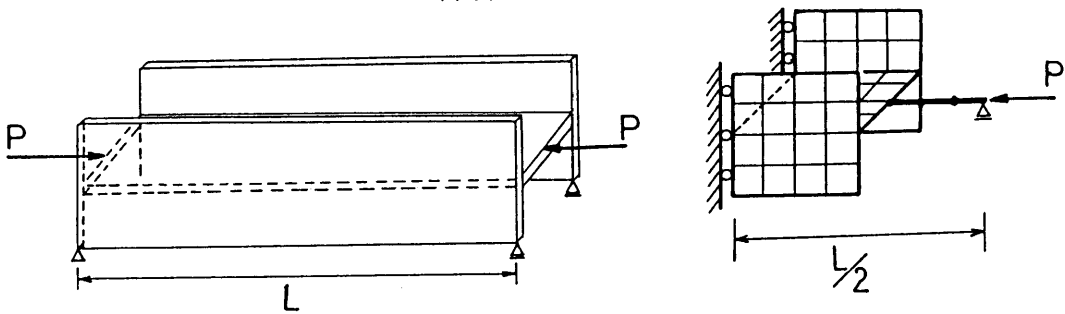


(a) 圧縮を受ける H 形鋼柱 (b) はり要素解析 (c) 板要素解析 (d) 結合解析

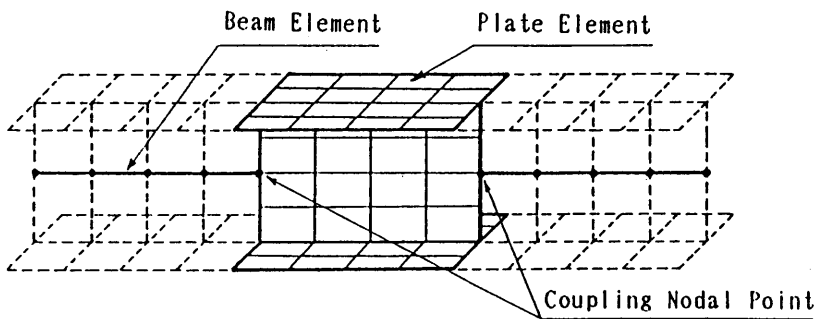
図4.1 H 形鋼柱の解析モデル



(a) 片持ちはり



(b) 単純はり



(c) 単純はり

図4.2 結合解析モデル

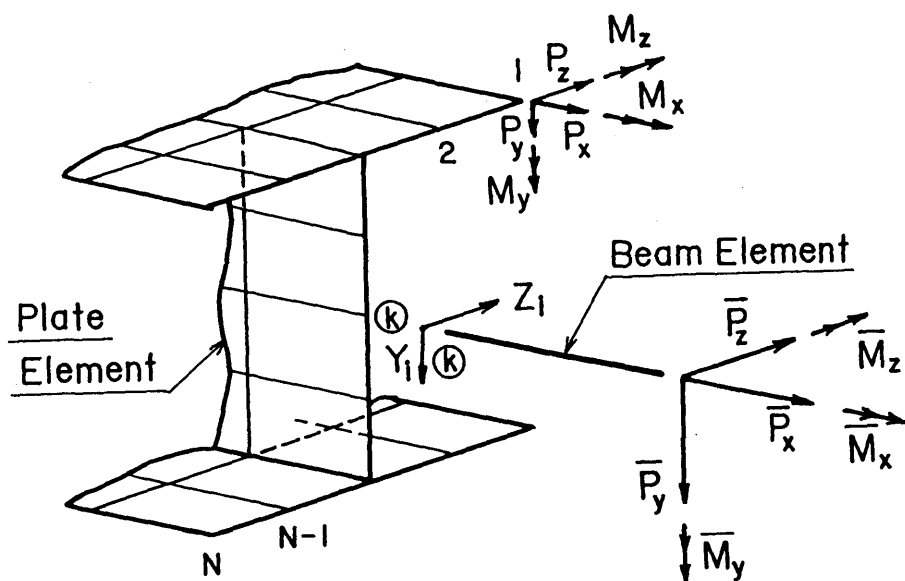


図4.3 板要素とはり要素の結合部

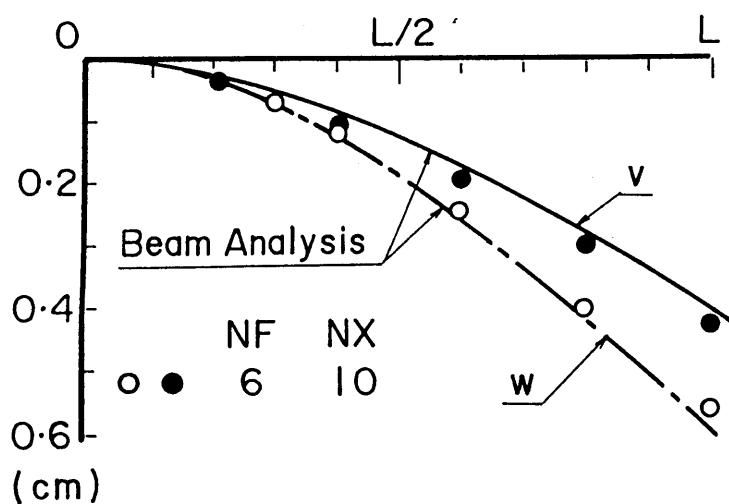
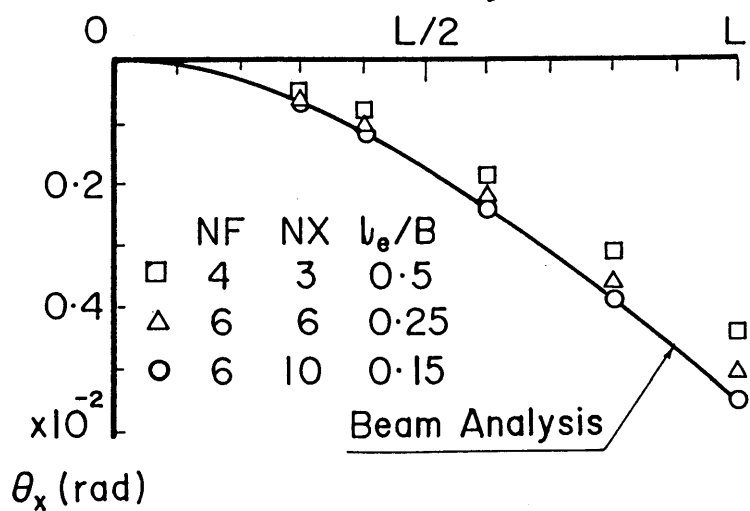
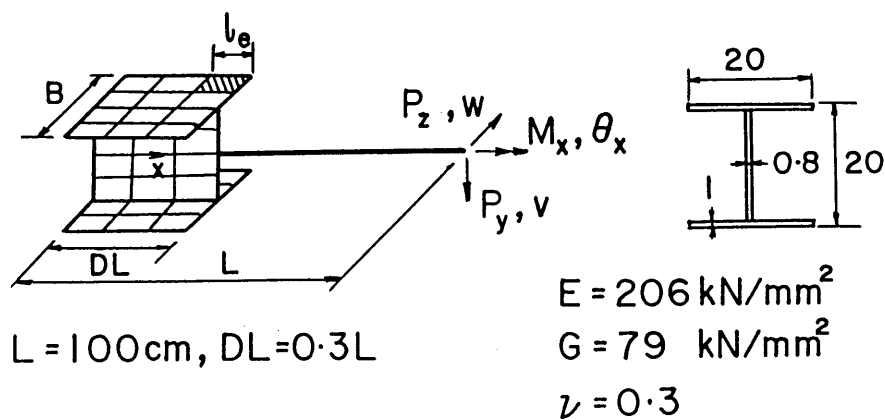
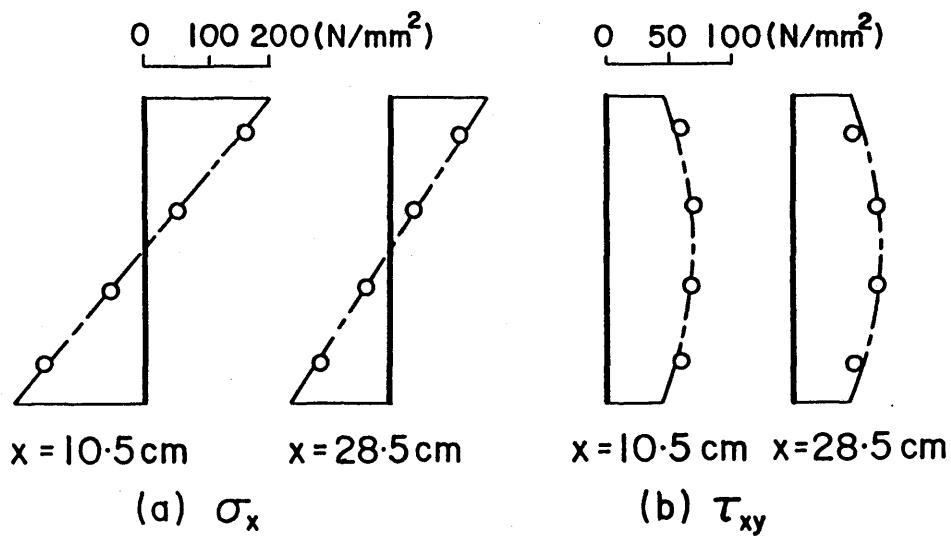


図4.4 支間方向のねじり角，たわみの分布（ウェブ4分割）



○ Present Method
 --- Beam Theory

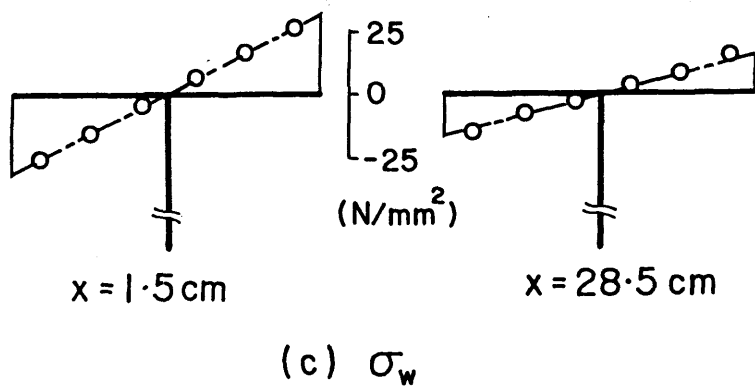


图4.5 应力度分布

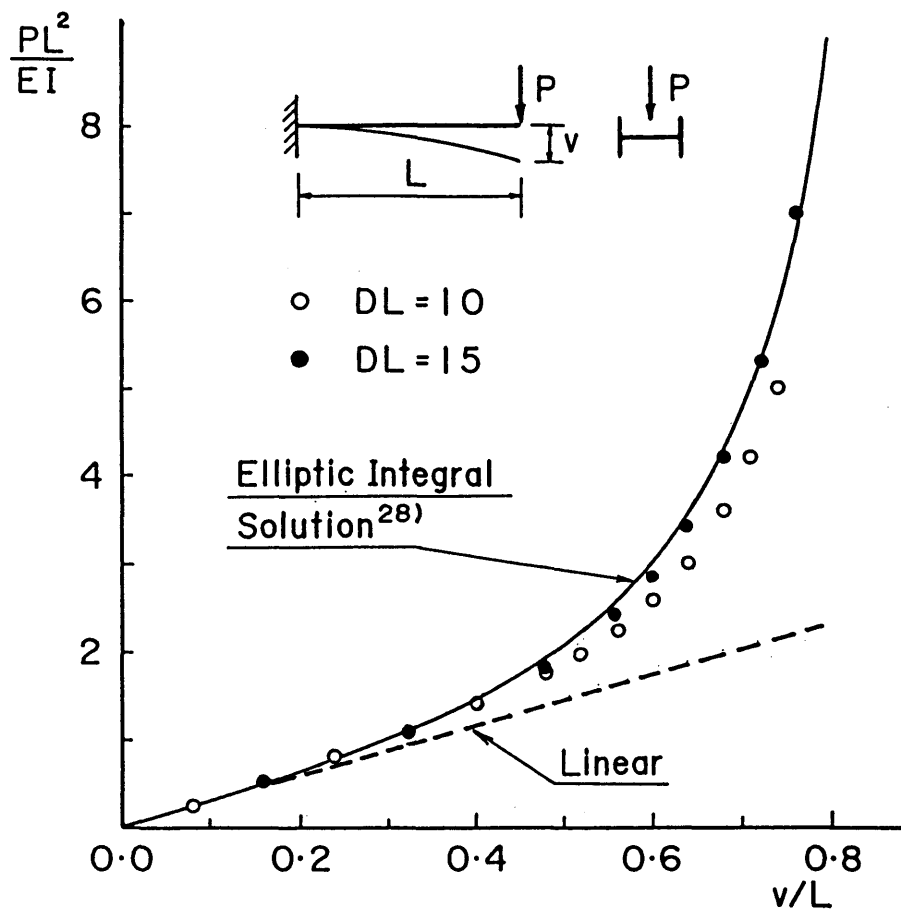
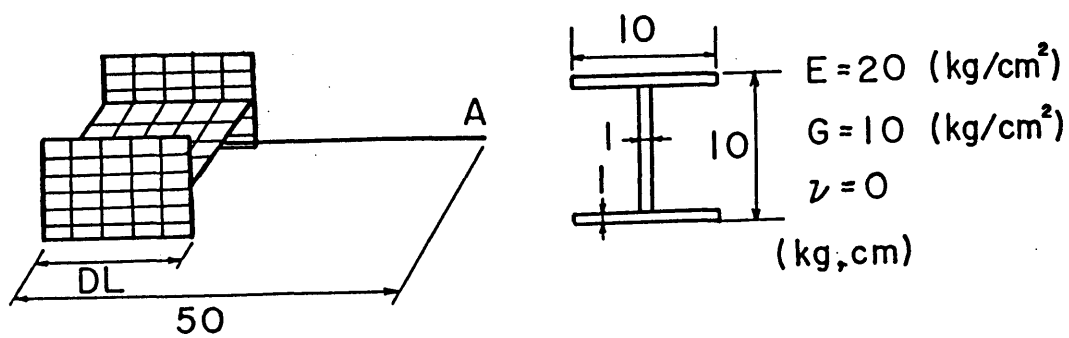


図4.6 片持ちはりの荷重－変位曲線

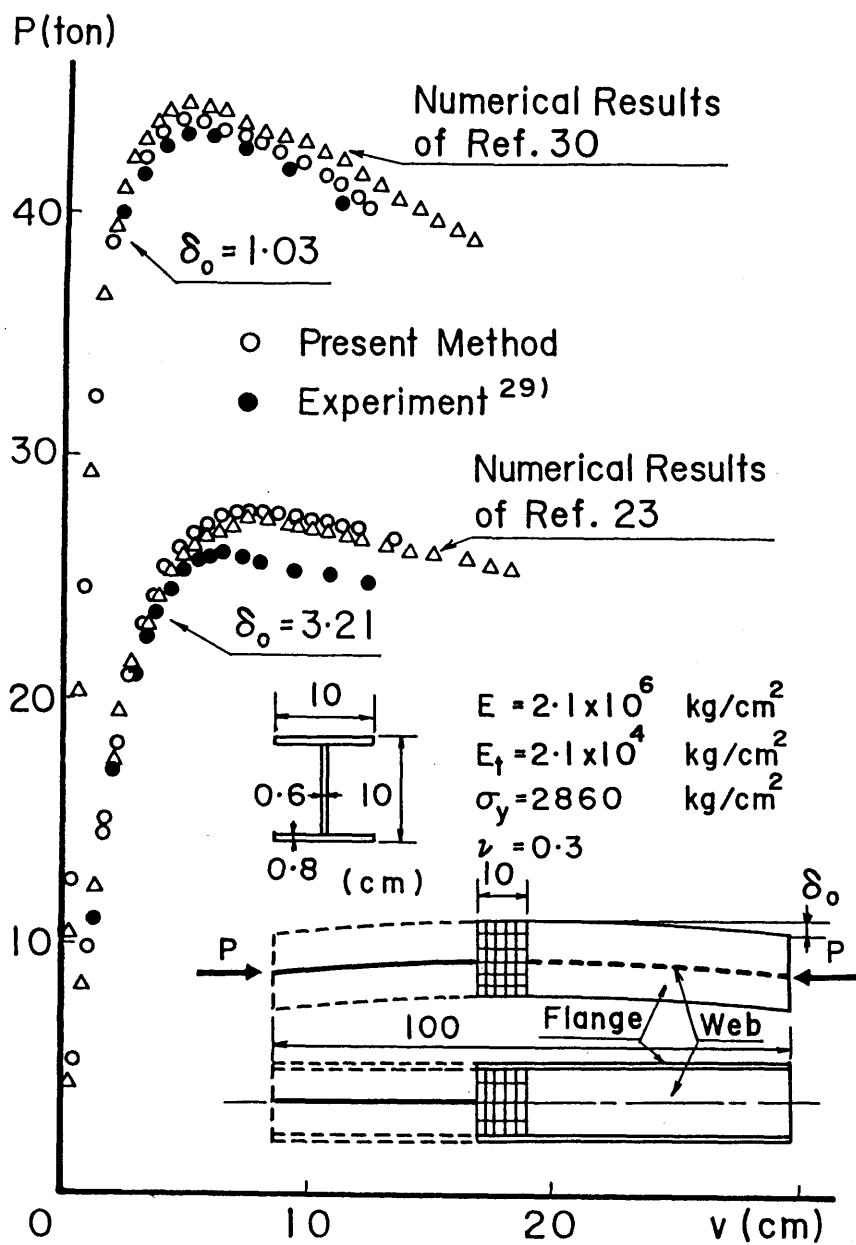


図4.7 H形鋼柱の荷重－変位曲線

第5章 薄肉H形短柱の局部座屈に関する実験

5.1 概 説

幅厚比の大きい薄板要素で構成される薄肉構造物が、圧縮や圧縮と曲げを受ける場合の板要素の局部座屈と部材の全体座屈の連成座屈挙動の一解析法として、板要素とはり要素を結合一体化して解析する手法を第4章で述べた。特に、耐荷力解析では必要な板要素の初期たわみや部材としての初期曲がり、および溶接集成による残留応力が存在する場合を考慮して解析することが可能である。しかしながら、H形断面の連成座屈強度や連成挙動に関しての解析および実験的研究は非常に少なく、特に実験は冷間加工鋼部材について行なわれている程度であり^{3), 4)}、溶接集成の薄肉鋼柱に関してはほとんど見当たらないのが現状である。そこで、次章で述べるような種々の幅厚比を有する溶接集成のH形断面鋼柱が、一様圧縮を受ける場合の連成座屈実験を行なってその耐荷力特性や座屈挙動を調べ、連成座屈強度を合理的に算定する方法について検討することが必要である。

しかしながら、比較的幅厚比が大きい板要素からなる部材の連成座屈強度を合理的に算定するには、局部座屈強度を求めておく必要があるが、板要素で構成された部材の構成板相互の連成挙動や初期不整を考慮した局部座屈強度を求める方法は少なく、短柱実験による場合が多いようである。板要素の連成座屈挙動に関する解析的研究としては、たとえば、固有値問題としての局部座屈強度に関する研究^{5)~12)}、塑性解析法により局部座屈後の変形挙動を扱った研究^{13)~18)}等がある。しかし、固有値解析では板要素相互の連成作用は考慮できるが、要素の変形が耐荷力に及ぼす影響や座屈後の挙動は追跡できない。また、塑性解析では局部座屈モードを限定しているので、板要素の相互作用や変形挙動が十分解析できてない。最近では有限要素法を用いた理論的・実験的研究として、宇佐美ら^{19), 20)}及び中井ら²¹⁾が箱形断面を対象に行なった研究、H形断面については、吉田ら²²⁾及び鈴木ら^{23), 24)}の研究、また、Hancockら²⁵⁾は高張力鋼を用いての実験及び有限帯板法による解析を行なっている。しかしながら、構成板要素の幅厚比や溶接による残留応力および初期たわみ等の初期不整が、局部座屈強度や板要素相互の変形挙動に及ぼす影響についてはまだ十分に明らかにされていない。

本章では、板要素相互の連成挙動や最大強度特性を明らかにするため、H形断面短柱の一様圧縮の耐荷力実験を行なった。供試体は鋼H形断面でウェブとフランジの幅厚比を変

化させた7体である。また、溶接集成による残留応力や初期たわみも測定し、最大強度や連成挙動に及ぼす影響も調べた。そして、第3章で誘導した面内回転剛性^{23), 24)}を考慮した、一節点6自由度を有する三角形平板要素による有限変位弾塑性解析法を用いて、H形短柱全体を板要素に分割して解析し、板要素で立体構成した場合の解析法の妥当性について実験結果との比較検討を行なった。また、H形短柱の最大強度をウェブとフランジの連成作用を考慮した等価幅厚比を用いて推定する方法について検討したものである。

5.2 短柱実験の概要

5.2.1 供試体の設計

供試体の設計においては特に次の点を考慮した。

- 1) 溶接集成による残留応力が切断法により測定可能な程度に十分大きい寸法のH形断面である。
- 2) 部材の最高圧縮荷重は試験機の載荷能力(100ton)以内である。
- 3) 部材の全体座屈と板要素の局部座屈の連成座屈を生じるような鋼柱（長さは利用できる試験機の関係上3.5m以内）と同じ断面を有する短柱である。

以上の設計条件を満たすために、細長比 L/r は16～19とし、ウェブの幅厚比 h_w/t は40, 50, 60の3種類を、フランジの幅厚比 b_f/t は12, 16, 20の3種類で、板厚は3.2mmと4.5 mmを使用した。以上により製作した供試体は7体でSH-1～SH-7とし、その寸法諸元を表5.1に示す。等価細長比 $\bar{\lambda}$ および表中の等価幅厚比 R はそれぞれ次式で表わされる。なお、 $\bar{\lambda}$ は全供試体とも0.09～0.1であり、 R 、断面積 A および板厚 t の添字 w, f は、それぞれウェブ、フランジを表わす。

$$\bar{\lambda} = \frac{L}{2r} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_y^*}{E}} \quad (5.1)$$

$$R_w = \frac{h_w}{t} \sqrt{\frac{\sigma_y^* 12(1-\nu^2)}{E \pi^2 k}} \quad (k=4.0) \quad (5.2)$$

$$R_f = \frac{b_f}{t} \sqrt{\frac{\sigma_y^* 12(1-\nu^2)}{E \pi^2 k}} \quad (k=0.425) \quad (5.3)$$

$$R_{fw} = \frac{h_w}{t_w} \sqrt{\frac{\sigma_y^* 12(1-\nu^2)}{E \pi^2 k_{w\zeta}}} \quad (h_w t_f / b_f t_w > 3.07) \quad (5.4a)$$

$$= \frac{b_f}{t_f} \sqrt{\frac{\sigma_y^* 12(1-\nu^2)}{E \pi^2 k_{f\zeta}}} \quad (h_w t_f / b_f t_w \leq 3.07) \quad (5.4b)$$

$$\sigma_y^* = \sigma_{yf}(2A_f/A) + \sigma_{yw}(A_w/A) \quad (5.5)$$

なお、 σ_{yw} 及び σ_{yf} はそれぞれウェブ及びフランジの降伏点応力度で、今回の実験では $\sigma_{yw} = \sigma_{yf} = \sigma_y^*$ であり、 $t_w = t_f = t$ である。 E はヤング率、 ν はポアソン比で、それぞれ図5.1に示す引張試験の結果を用いた。また、 k は座屈係数でウェブの場合は両縁単純支持とし、フランジの場合は3辺単純支持、1辺は自由の圧縮板と考えて用いたものである。また、 R_{fw} は等価幅厚比が R_w, R_f とパラメータが二つ存在して複雑になると考えられるので、ここでは板要素が弾性座屈する場合、フランジとウェブは連成作用により変形すると考え、その影響を考慮したパラメータである。式(5.4)の誘導と式(5.4)の中の $k_{w\zeta}, k_{f\zeta}$ については付録5.1に示す。

5.2.2 予備試験

実験供試体を製作した鋼材3.2mmと4.5mmについてJIS 5号試験片を各6本作り引張試験を行なった。図5.1はその代表的な応力-ひずみ曲線を示したものである。また、図中の表は引張試験の平均値を示したものである。材質はSS41相当と考えられたが、板厚が3.2mmの場合ヤング率 E 、降伏点応力度 σ_y とも規格値よりも少し小さく測定された。また、引張強さ σ_m は板厚3.2mm、4.5mmとも規格値よりかなり小さかった。なお、今回の解析には実験で得られた応力-ひずみ関係を用いた。

溶接残留応力の測定には、実験供試体と同一断面、同一溶接条件の残留応力測定用供試体を7体製作して行なった。なお、残留応力測定用供試体の長さは後に行なった鋼柱実験で使用する関係上すべて900mmとした。測定は機械切断による応力解放法により、フランジは7～17、ウェブで11～15分割して行なった。図5.2に示すように、供試体の中央部分の2断面において標点距離100mmで鋼球を打ち込み、切断前後の標点間をコンタクトゲージにより測定した。測定は板面表裏について実施し、表裏の値を平均しさらに2断面の値を平均して求めた。写真5.1(a), (b)は切断前後の供試体の様子を示す。測定値は自己平衡条件及び数値解析に使用できるように二軸対称補正により修正した。修正後の残留応力分布を図5.3に示すが、RSH-1～7はSH-1～7に対応する残留応力供試体名である。全供試体ともフランジ両端部およびウェブ中央部分が圧縮となり、フランジとウェブの溶接部に引張が生じた。表5.2には修正後のフランジ部の最大圧縮残留応力とウェブ中央部分の平均圧縮残留応力を示すが、ウェブの中央部分で約0.3～0.6 σ_y^* 、フランジでは約0.4～0.7 σ_y^* とばらついている。なお、短柱の供試体SH-4, 5は部材長が残留応力測定用供試体の長さに比べ

半分以下になっており、表5.2に示す値より小さめの残留応力が存在したと考えられる。

初期たわみは写真5.2に示すように定盤上に供試体を載せ、電気抵抗式変位計(1/100 mm 精度)をスライドさせて、上、下フランジ、ウェブとも幅方向に6等分の7点、部材の長さ方向には5 cm間隔で測定した。表5.2にはウェブとフランジのたわみの測定結果であり、その最大値を示す。表中の δ_w, δ_f はそれぞれウェブの板としての初期曲がり及びフランジの直角度を表わしている。板としての初期曲がりは、上下フランジとウェブとの接合線を基準としたときのたわみ量である。各供試体ともウェブ板は道路橋示方書の製作精度の制限値($h_w/150$)に入っているが、フランジ部では制限値($b/200$)より大きな値が測定された。なお、供試体SH-4のフランジ部は測定値が欠損しているので示していない。図5.4は、供試体SH-1, 3の初期たわみの分布形状を立体的に表わしたものである。

5.2.3 短柱実験装置と測定方法

載荷は図5.5、写真5.3に示すように油圧式100ton試験機による中心軸圧縮の平押しで、供試体端部には11mm厚の鋼板を溶接し、載荷辺が固定の条件となるようにした。供試体の下部には荷重が均一に載荷できるように斜円板を用いた。

ひずみとたわみの測定は図5.6、写真5.3に示す。ひずみは中央断面のフランジ4隅とウェブの中央点及び裏・表及び上下端部付近のフランジ4隅に一軸ゲージを配して測定した。たわみは、中央点断面のフランジ外側4隅とウェブ中央点及び中央点の上下10cmの位置の変形状態と軸方向の縮み量を上端部にて、それぞれ電気抵抗式変位計(1/100mm精度)を使用して測定を行なった。本載荷は供試体をセットした後、予想座屈荷重の1/5程度の荷重を載荷し、両端部付近のフランジ4隅にはったひずみゲージの読みのばらつきが、4枚の平均値の5%以内に収まるよう斜円板により十分調整した後行なった。荷重増分は変位状態をみながら徐々に小さくしていった。

5.3 実験及び解析結果と考察

5.3.1 解析方法

解析対象はH形断面短柱の全体とし、初期たわみの測定点と有限要素分割節点が対応するよう、フランジ、ウェブとも幅方向に6分割、軸方向には10～14分割した。また、板の厚さ方向には6分割した。図5.7はその解析モデルの要素分割の一例を示したものである。

解析方法は第3章で誘導した板要素の有限変位弾塑性解析法を使用した。材料特性は図5.1に示す引張試験の結果を用いたが、応力－ひずみ関係はbi-linear形とし、降伏後の接線係数 E_{st} として図5.8に示すように考えた。この結果3.2mm材で 0.765KN/mm^2 、4.5mm材で 0.967KN/mm^2 が得られたのでこの値を使用した。また残留応力は図5.3に示すような修正した測定値を用いた。なお、圧縮荷重は荷重点において一様変位の変位制御により与えた。

5.3.2 荷重－変形特性

図5.9～5.11に示すのは、供試体SH-1、3及びSH-6の応力－変位関係であり、縦軸に平均圧縮応力 $\sigma=P/A$ 、横軸に変位 w を板厚 t で無次元化したものである。変位は両供試体とも部材中央断面のウェブ中央点及びフランジ両端点について示したもので、実線が解析値であり点線が実験値を示している。また、変位 w には初期たわみを含んでなく、変位の符号は図中に示す矢印の方向に変位する場合が正であり、逆を負とした。

図5.9～5.11のSH-1、3及びSH-6の実験結果と解析結果を比較すると、実験値の場合荷重の初期の段階から変位に多少乱れを生じており、変位量も大きくなっているが、荷重の増加につれて残留応力の存在により変形が大きくなっていることがわかる。また、変位の進行に伴って変形方向が逆転する様子や、フランジが一端は外側へ他端は内側へ変形する様子などは両者がよく対応している。最大強度は供試体SH-6の場合多少大きく計算されているが、SH-1、3はよく一致していると思われる。また、実験ではウェブ中央点の変位 w/t が0.5を過ぎたあたりから急に強度が低下しているのに対し、解析では低下が緩やかである。

図5.12は、供試体SH-1及びSH-3の平均圧縮応力－平均軸ひずみ関係であり、縦軸に平均圧縮応力 σ を降伏点応力度 σ_y で無次元化し、横軸には軸縮み量 ΔL を長さ L で無次元化したものである。実験値は解析値に比べ多少大きな縮み量を示しているが、両者は非常によく対応している。また、両者の最大強度に差が生じているが、これは初期たわみや残留応力の初期不整は両供試体とも同程度であることから、この相違はウェブの幅厚比 b_w/t によるものと考えられる。

図5.13、14は、供試体SH-1、6の中央断面のウェブ中央点とフランジ端における表・裏の応力－ひずみ曲線である。図中の矢印は降伏開始点で、残留ひずみと荷重の付加ひずみの和が降伏ひずみに達したと判断される応力状態である。SH-1のウェブ及びフランジとも、降伏開始まで表・裏面のひずみが同じ様に増加しており軸圧縮力がうまく載荷されていることがわかる。ウェブ中央点部分が塑性化し始めると徐々に板が変形して曲げが生じ、これに伴ってフランジ端部にも局部変形が発生している。SH-6は、ほぼ降伏開始点でウェブ

中央点でひずみの乱れが発生しており、またフランジ部でも変形により曲げが生じている。これは初期たわみの影響ではないかと考えられる。しかしながら、局部変形が生じて最大強度に達するまでにかなりの余剰耐力がある。

図5.15は、供試体SH-3, 6の中央断面でのフランジとウェブの変形性状を示したものである。荷重は実験値、解析値ともそれぞれの最大荷重で無次元化してある。実験では、ウェブの中央点及び両フランジの両端部の計5点しか測定していないので図では記号（○、△、□等）で示した。変位量に差が多少あるものの、解析結果は実験結果とよく対応しており、フランジ、ウェブの変形性状をこの程度の分割でよく追跡できている。実験においては、フランジとウェブの接合辺はほぼ直角を保持しながら変形するのが観察されたが、解析結果はこのこともよく説明している。写真5-4は供試体SH-1およびSH-6を載荷後切断し、H形断面の変形状態を示したものである。

図5.16は、供試体SH-3の変形後の形状を示したもので、実験は、最大荷重を過ぎかなり変形が進んだ状態のものであり、解析は最大荷重時における変形状態を示したものである。実験では局部変形の位置が中央より多少ずれておりかつ変形量も大きい、解析結果は実験結果とよく対応している。なお、写真5-5は供試体SH-1, 2, 6, 7の載荷後の変形状態であり、局部変形の状況がよく示されている。

このように、解析結果は実験結果とよく対応しており、短柱の最大強度や弾塑性状態での変形挙動をよく追跡できることがわかった。また、短柱全体の解析結果の変形状態をみると面内回転剛性を考慮した本法の妥当性が示されている。解析において断面幅方向の分割数は、実験のたわみ測定値に対応させて6分割で行なったが、分割数をふやせばもっと精度はよくなると考えられる。

5.3.3 最大強度の検討

表5.3は実験で得られた最大荷重 P_{max} 、最大平均圧縮応力度 σ_{max} 、 σ_{max}/σ_y^* をまとめて示したものである。図5.17～5.19は、表5.1に示す等価幅厚比 R_w, R_f, R_{fw} に対応して σ_{max}/σ_y^* を示したもので、道路橋示方書¹⁾の基準耐荷力曲線も図示してある。

図5.17は、ウェブの等価幅厚比 R_w で整理した結果であるが、ウェブの幅厚比が一定でフランジの幅厚比が変化する場合、フランジの幅厚比の変化がウェブに及ぼす影響が考慮できていないので、最大強度にかなりのばらつきが生じている。また、図5.18はフランジの等価幅厚比 R_f で整理した結果であるが、この場合は逆にウェブの要素の幅厚比の変化の影響が考慮できていない。そこで、フランジとウェブのそれぞれの拘束の影響を考慮した等

価幅厚比 R_{fw} で整理した結果が図5.19である。この結果をみると、最大強度は R_w, R_f に比べて R_{fw} に関係が深いことがわかる。また、同程度の R_{fw} でありながら板厚が3.2mm供試体の最大強度は多少大きく、特にSH-4, 5は σ_{max}/σ_y^* が1を超えている。これは、引張試験により得られた降伏点応力度に多少ばらつきがあった。また、供試体の長さが短いためフランジ部の変形が多少拘束され、その影響が現われたと考えられる。

次に短柱の最大強度を文献26)の考え方に基づいて検討してみる。これは、最大強度を等価幅厚比 R を使って次式で推定する方法である。

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_y^*} = \frac{C}{R} \leq 1.0 \quad (5.6)$$

この定数 C を実験結果より R_w, R_f および R_{fw} について求めると、図5.17～5.19に示すような関係が得られ、 R_{fw} については $C=0.77$ となった。これらの式は、全供試体の下限値つまり安全側の値となっている。この $C=0.77$ は文献26)の両縁支持板に対する既存の全データから求められた値 $C=0.7$ より多少大きくなっている。また、式(5.6)で $C=0.77$ として近似式を用いた最大強度の推定値 $(\sigma_{max}/\sigma_y^*)_{approx.}$ を表5.3に示す。実験より得られた各定数 C を用いて、AISCの考え方²⁾を基本にした方法により鋼柱の連成座屈強度を整理した結果、次章に示すように式(5.6)で $C=0.77$ 用いた結果が強度を一番よく推定できることが明らかになった。

5.4 結 論

本章では、一様圧縮を受ける溶接H形断面短柱の耐荷力及びウェブとフランジの連成局部座屈挙動の実験、及び有限変位弾塑性解析を行なった。得られた結果の主なものを挙げると次のようである。

- (1) 幅厚比が大きい板要素からなる短柱では、局部変形が発生してから最大強度に達するまでにかなりの余剰耐荷力がある。
- (2) H形断面短柱のフランジとウェブは互いに連成しながら変形し、フランジとウェブの接合辺はほぼ直角を保持していた。
- (3) 幅厚比が比較的大きいH形断面の、構成板要素相互の影響を考慮した等価幅厚比 R_{fw} と短柱の最大強度との相関が大きいことが明らかにされた。
- (4) 今回の実験での短柱の最大強度は、 R_{fw} を使った式(5.6)の形で表わされ、定数は $C=0.77$ となった。これは両縁支持板に対する既存のデータの値 $C=0.7$ よりも多少大きくなった。

- (5) 面内回転剛性を導入した一節点 6 自由度を有する板要素の有限変位弾塑性解析法は、薄板要素で立体構成した H 形短柱のフランジ及びウェブの変形挙動をよく解析できた。
- (6) 板要素の解析法より得られた最大強度は実験結果とよく対応し、板要素の有限変位弾塑性解析法の妥当性が確認された。

付録5.1 H形短柱の弾性座屈解析

本節では、計算を簡単化するためにウェブ、フランジの連成作用を、各板要素が単独に局部座屈する場合、他の板要素の影響をその板の周辺の拘束条件に考慮して取り扱う²⁷⁾。また、フランジとウェブとは接合辺で直角を保持するという条件を用いてエネルギー法を適用している。なお、図A5.1に示す断面寸法の記号で表わす。まず、ウェブが局部座屈する場合、図A5.2に示すように載荷辺を単純支持とし、 $Y=\pm h_w/2$ で弾性拘束されているとすれば、この拘束度 ζ_w ²⁸⁾を用いてたわみ分布は次のように表わされる。

$$w = \left[\pi \left\{ \left(\frac{y}{h_w} \right)^2 - \frac{1}{4} \right\} + (1+\zeta_w) \cos \frac{\pi y}{h_w} \right] \sin \frac{\pi x}{a} \quad (\text{A5.1})$$

ここに、

$$\zeta_w = \left(\frac{t_w}{t_f} \right)^3 \frac{0.16 + 0.056 (h_w/b_f)^2}{1 - 9.4 (t_w/t_f)^2 (b_f/h_w)^2} \quad (h_w/b_f > 3.07) \quad (\text{A5.2})$$

いま、板要素が面内外力を受けて座屈するときの全ポテンシャルエネルギー Π は、

$$\Pi = \Sigma U_1 + \Sigma U_2 - \Sigma P \quad (\text{A5.3})$$

ここに、 U_1 : 板の曲げによるひずみエネルギー

U_2 : 周辺の弾性固着によるひずみエネルギー

P : 外力による仕事

次式の全ポテンシャルエネルギーの停留条件より板要素の座屈荷重が求まる。

$$\delta \Pi = 0 \quad (\text{A5.4})$$

さて、各々のエネルギーは次式で表わされる。

$$U_1 = \iint \frac{D}{2} \{ (\partial^2 w / \partial x^2)^2 + 2(1-\nu) (\partial^2 w / \partial x \partial y)^2 + 2\nu (\partial^2 w / \partial x^2) (\partial^2 w / \partial y^2) + (\partial^2 w / \partial y^2)^2 \} dx dy \quad (\text{A5.5})$$

$$U_2 = \Sigma \int \frac{D}{b\zeta} [\partial w / \partial y]_s^2 dx \quad (\text{A5.6})$$

$$P = \iint \frac{t}{2} \{ \sigma_x (\partial w / \partial x)^2 + 2\tau (\partial w / \partial x) (\partial w / \partial y) + \sigma_y (\partial w / \partial y)^2 \} dx dy \quad (\text{A5.7})$$

ただし

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

式(A5.1)を式(A5.5)～(A5.7)に代入すると、全ポテンシャルエネルギー Π は次式となる。

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{D\pi^4}{4} \left\{ \frac{h_w}{a^3} \left(\frac{\pi^2}{30} - \frac{8}{\pi^2} (1+\zeta_w) + \frac{(1+\zeta_w)^2}{2} \right) + \frac{2}{ah_w} \left(\frac{1}{3} - \frac{8}{\pi^2} (1+\zeta_w) + \frac{(1+\zeta_w)^2}{2} \right) + \frac{a}{h_w^3} \frac{4}{\pi^2} \zeta_w \right. \\ & \left. + \frac{h_w}{a^3} \left(\frac{4}{\pi^2} - \frac{8}{\pi^2} (1+\zeta_w) + \frac{(1+\zeta_w)^2}{2} \right) \right\} - \frac{\sigma_{cr} t_w \pi^2 h_w}{4a} \left\{ \frac{\pi^2}{30} - \frac{8}{\pi^2} (1+\zeta_w) + \frac{(1+\zeta_w)^2}{2} \right\} \end{aligned} \quad (A5.8)$$

この時の座屈応力度 σ_{cr} は次式で求まる。

$$\sigma_{cr} = \frac{E\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t_w}{h_w} \right)^2 k_{w\zeta} \quad (A5.9)$$

ここに、 $k_{w\zeta}$ はウェブ板を基準とした座屈係数であり

$$k_{w\zeta} = \frac{1}{\alpha_w^2} + \alpha_w^2 \left(\frac{-4\beta_w/\pi^2 + \beta_w^2/2}{\pi^2/30 - 8\beta_w/\pi^2 + \beta_w^2/2} \right) + 2 \left(\frac{1/3 - 8\beta_w/\pi^2 + \beta_w^2/2}{\pi^2/30 - 8\beta_w/\pi^2 + \beta_w^2/2} \right) \quad (A5.10)$$

ただし、 $\alpha_w = a/h_w$ 、 $\beta_w = 1 + \zeta_w$ である。また、 a は σ_{cr} を最小にする座屈たわみモードの半波形長であり、次式で求められる。

$$\frac{a}{h_w} = \alpha_w = \sqrt[4]{\frac{(\pi^2/30 - 8\beta_w/\pi^2 + \beta_w^2/2)}{(-4\beta_w/\pi^2 - 4\beta_w/\pi^2 + \beta_w^2/2)}} \quad (A5.11)$$

この結果より等価幅厚比 $R_{w\zeta}$ は次式で表わせる。

$$R_{w\zeta} = \sqrt{\frac{\sigma_y^*}{\sigma_{cr}}} = \frac{h_w}{t_w} \sqrt{\frac{\sigma^* 12(1-\nu^2)}{E \pi^2 k_{w\zeta}}} \quad (A5.12)$$

ここに、

$$\sigma_y^* = \sigma_{yf}(2A_f/A) + \sigma_{yw}(A_w/A) \quad (A5.13)$$

ただし、 A_f, A_w はそれぞれフランジ及びウェブの断面積であり $A = 2A_f + A_w$ 。また、 σ_{yf}, σ_{yw} はフランジ及びウェブの降伏点応力度である。

次にフランジは、図A5.3に示すように非載荷辺は一辺が自由で、一辺が弾性拘束されているとすれば、拘束度 ζ_f を使ってたわみ形を次式で仮定する²⁸⁾。

$$w = \left\{ \zeta_f \left(\frac{y}{b_f} \right) + \left(\frac{y}{b_f} \right) - 1.0076 \left(\frac{y}{b_f} \right)^3 + 0.5076 \left(\frac{y}{b_f} \right)^4 - 0.10227 \left(\frac{y}{b_f} \right)^5 \right\} \sin \frac{\pi x}{a} \quad (A5.14)$$

ここに、

$$\zeta_f = 2 \left(\frac{t_w^3}{t_f^3} \right) \left(\frac{h_w}{b_f} \right) \frac{1}{1 - 0.106 (t_w/t_f)^2 (h_w/b_f)^2} \quad (h_w t_f / b_f t_w \leq 30.7) \quad (A5.15)$$

この時の座屈応力度 σ_{cr} は

$$\sigma_{cr} = \frac{E\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t_f}{b_f} \right)^2 k_{f\zeta} \quad (A5.16)$$

ここに $k_{f\zeta}$ はフランジを基準とした座屈係数であり

$$k_{f\zeta} = \frac{1}{\alpha_f^2} + \frac{2}{\pi^2 C_1} \{C_2 - (C_2 + C_3)\nu\} + \frac{\alpha_f^2}{C_1 \pi^4} (2.5821 + \frac{8\zeta_f}{\pi}) \quad (\text{A5.17})$$

ただし、 $\alpha_f = \frac{a}{b_f}$, $C_1 = \frac{\zeta_f^2}{3} + 0.4036\zeta_f + 0.1295$
 $C_2 = \zeta_f^2 - 0.4091\zeta_f + 1.5817$, $C_3 = -0.9015\zeta_f - 0.5775$ (A5.18)

また、 a は座屈応力度 σ_{cr} を最小にする座屈たわみモードの半波形長であり、次式で求められる。

$$\frac{a}{b_f} = \pi \sqrt[4]{\frac{C_1}{2.5821 + 8\zeta_f/\pi}} \quad (\text{A5.19})$$

同様に等価幅厚比 $R_{f\zeta}$ は次式で表わされる。

$$R_{f\zeta} = \frac{b_f}{t_f} \sqrt{\frac{\sigma_y^* 12(1-\nu^2)}{E \pi^2 k_{f\zeta}}} \quad (\text{A5.20})$$

ただし、 σ_y^* は式 (A5.13) と同じである。以上の結果より $h_w t_f / b_f t_w$ が3.07より大きい時はウェブの方が先に座屈し、逆に小さくなればフランジが先に座屈すると考えられるので、フランジとウェブが連成する場合の等価幅厚比 R_{fw} として $h_w t_f / b_f t_w > 3.07$ では $R_{fw} = R_w$ を、 $h_w t_f / b_f t_w \leq 3.07$ では $R_{fw} = R_f$ を用いると5.2.1節の式(5.4)となる。

用いた記号

- α : 座屈荷重を最小にする座屈たわみモード
 A : 断面積
 A_f : フランジの断面積
 A_w : ウェブの断面積
 b : H形断面のフランジ幅
 b_f : H形断面のフランジ半幅
 b_f/t_f : フランジの幅厚比
 C : 定数
 C_1, C_2, C_3 : 座屈係数を決定する係数
 D : $Et^3/12(1-\nu^2)$
 E : ヤング率
 E_{st} : ひずみ硬化係数
 h : H形断面のウェブ高
 h_w : H形断面のウェブ内側高
 h_w/b_f : H形断面のウェブ高とフランジ半幅の比
 h_w/t_w : ウェブの幅厚比
 k : 座屈係数
 $k_{f\zeta}$: フランジ板を基準とした座屈係数
 $k_{w\zeta}$: ウェブ板を基準とした座屈係数
 L : 部材長
 L/r : 部材の細長比
 P_{max} : 実験短柱の最大荷重
 r : 弱軸回りの断面二次半径
 R_f : フランジ板の等価幅厚比 ($k=0.425$)
 $R_{f\zeta}$: 弾性拘束がある場合のフランジ板の等価幅厚比 ($k=k_{f\zeta}$)
 R_{fw} : ウェブとフランジの連成を考慮した等価幅厚比
 R_w : ウェブ板の等価幅厚比 ($k=4.0$)
 $R_{w\zeta}$: 弾性拘束がある場合のウェブ板の等価幅厚比 ($k=k_{w\zeta}$)
 t : 板厚

t_f : フランジの板厚
 t_w : ウェブの板厚
 w : ウェブ、フランジのモデルのたわみ
 x, y : 弾性座屈解析のモデルの x, y 座標
 α : 比 a/h_f
 α_w : 比 a/h_w
 β_w : $1 + \zeta_w$
 δ_f : フランジ部の板としての最大初期たわみ
 δ_w : ウェブ部の板としての最大初期たわみ
 ζ_f : フランジの拘束度係数
 ζ_w : ウェブの拘束度係数
 $\bar{\lambda}$: 等価細長比
 ν : ポアソン比
 π : 円周率
 Π : 全ポテンシャルエネルギー
 σ_m : 最大引張応力度
 σ_{max} : 実験短柱の最大平均圧縮応力度
 σ_{rc} : 圧縮残留応力
 σ_{cr} : 座屈応力度
 σ_y : 公称降伏点応力度
 σ_y^* : 降伏点応力度 (式 (5.5))
 σ_{yf} : フランジ板の降伏点応力度
 σ_{yw} : ウェブ板の降伏点応力度

参考文献

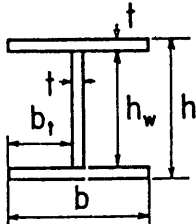
- 1) 日本道路協会:道路橋示方書・同解説, 1980年2月.
- 2) AISC : Specifications for the Design, Fabrication and Erection of Structural Steel for Buildings, 1969.
- 3) DeWolf, J. T., Pekoz, T. and Winter, G. : Local and Overall Buckling of Cold-Formed Members, Proc. of ASCE, Vol. 100, No. ST10, Oct., 1974, pp. 2017-2036.
- 4) Kalyanaraman, V., Pekoz, T. and Winter, G. : Unstiffened Compression Elements, Proc. of ASCE, Vol. 103, No. ST9, Sep., 1977, pp. 1833-1848.
- 5) Haaijer, G. : Plate Buckling in the Strain-Hardening Range, Proc. of ASCE, Vol. 83, No. EM2, April, 1957, pp. 1212-1-1212-47.
- 6) Rajasekaran, S. and Murray, D. W. : Coupled Local Buckling in Wide-Flange Beam-Columns, Proc. of ASCE, Vol. 99, No. ST6, 1973, pp. 1003-1023.
- 7) 吉田 博:H型鋼柱の局部座屈と曲げ座屈の連成座屈強度, 土木学会論文報告集, 第243号, 1975年11月, pp. 19-32.
- 8) Akay, H. U., Johnson, C. P. and Will, K. M. : Local and Lateral Buckling of Beams and Frames, Proc. of ASCE, Vol. 103, No. ST9, Sep., 1977, pp. 1821-1832.
- 10) Hancock, G. J. : Local, Distortional, and Lateral Buckling of I-Beams, Proc. of ASCE, Vol. 104, No. ST11, Nov., 1978, pp. 1787-1798.
- 11) Tien, S. T. and Wang, S. T. : Local Buckling of Beams under Stress Gradient, Proc. of ASCE, Vol. 105, No. ST8, Aug. 1979, pp. 1571-1588.
- 12) Hancock, G. J. : Interaction Buckling I-Section Columns, Proc. of ASCE, Vol. 107, No. ST1, Jan., 1981, pp. 165-179.
- 13) Lay, M. G. : Flange Local Buckling in Wide-Flange Shapes, Proc. of ASCE, Vol. 91, No. ST6, Dec., 1965, pp. 95-116.
- 14) 加藤 勉:面内圧縮を受ける板の塑性破壊について, 日本建築学会論文報告集, 第107号, 1965年1月, pp. 37-42.
- 15) 田中 尚・高梨晃一:プラスチックヒンジにおけるウェブ幅、フランジ幅の制限に関する研究(3), 日本建築学会論文報告集, 第107号, 1965年1月, pp. 31-36.
- 16) Climenhaga, J. J. and Johnson, R. P. : Moment-Rotation Curves for Locally Buckling Beams, Proc. of ASCE, Vol. 98, No. ST6, 1972, pp. 1239-1254.

- 17) 福地保長: フランジ局部座屈の実験, カラム, No. 59, 1976年1月, pp. 5-8.
- 18) 三谷勲・牧野稔・松井千秋: H形鋼柱の局部座屈後の変形性状に関する解析的研究,
日本建築学会論文報告集, 第296号, 1980年10月, pp. 37-47.
- 19) 宇佐美勉・福本嘔士・青木徹彦: 溶接箱形断面柱の局部座屈と全体座屈の連成強度に
関する実験的研究, 土木学会論文報告集, 第308号, 1981年4月, pp. 47-58.
- 20) 宇佐美勉・土屋信洋・大谷恭弘・福本嘔士: 薄板集成短柱の弾塑性有限変位解析, 土木
学会論文集, 第362号/(I-4), 1985年10月, pp. 293-302.
- 21) 中井博・北田俊行・酒造敏廣: 圧縮を受ける薄肉箱形短柱の終局強度特性と終局強度
算定法に関する研究, 構造工学論文集, Vol. 31A, 1985年3月, pp. 65-77.
- 22) 吉田 裕・増田陳紀・松田 隆: 薄板で構成される立体構造の弾塑性・大変位離散化要素
解析法, 土木学会論文報告集, 第288号, 1979年8月, pp. 41-45.
- 23) 鈴木敏郎・金子洋文: 有限要素法による部材構成板要素の座屈及び座屈後挙動の大変形
解析, 日本建築学会論文報告集, 第316号, 1982年6月, pp. 9-17.
- 24) 鈴木敏郎・金子洋文: 鋼構造部材構成板要素相互の弾塑性連成局部座屈挙動の解析法,
日本建築学会論文報告集, 第323号, 1983年1月, pp. 23-31.
- 25) Davids, A. J. and Hancock, G. J. : Compression Tests of Short Welded-Sections,
Proc. of ASCE, Vol. 112, No. 5, May, 1985, pp. 960-976.
- 26) 宇佐美勉: 板要素の抵抗強度の評価と信頼性, 土木学会第35回年次学術講演会概要集,
第I部, 1980年9月.
- 27) 上田幸雄: 残留応力と座屈(局部座屈), JSSC, Vol. 3, No. 16, 1967.
- 28) Bleich, F. : Buckling Strength of Metal Structures, McGraw-Hill, 1952.
- 29) Johnston, B. G. (ed.) : Guide to Stability Design Criteria for Metal Struc-
tures, 3rd. ed., John Wiley & Sons, 1976.
- 30) 福本嘔士・伊藤義則: フランジの局部座屈強度とフランジ幅厚比制限, 土木学会論文
報告集, 第160号, 1968年12月, pp. 27-38.
- 31) 奥村敏恵・西野文雄・長谷川彰夫: 箱形断面柱の局部座屈強度, 土木学会論文報告集,
第205号, 1972年9月, pp. 19-30.
- 32) 奥村敏恵・西野文雄・鈴木康弘: H形鋼に関する実験-主としてフランジの寸法効果に
ついて-, 製鉄研究第267~268号別冊, 東京大学工学部土木工学科.
- 33) 小松定夫・牛尾正之・北田俊行: 補剛板の溶接残留応力および初期たわみに関する研究,
土木学会論文報告集, 第265号, 1977年9月, pp. 25-35.

- 34) 山尾敏孝・崎元達郎:板要素とはり要素の結合による薄肉鋼構造物の有限変位弾塑性解析, 構造工学論文集, Vol. 32A, 1986年3月, pp. 291-302.
- 35) Yamao, T. and Sakimoto, T. : Nonlinear Analysis of Thin-Walled Structures by a Coupled Finite Element Method, Proc. of JSCE, No. 374/(I-6), Oct., 1986.
- 36) 山尾敏孝・荒木栄次・荒牧浩・崎元達郎:H形短柱の耐荷力について, 土木学会第41回年次学術講演会概要集, 第I部, 1986年11月.
- 37) 山尾敏孝・崎元達郎:薄肉H形短柱の耐荷力挙動に関する実験的研究, 土木学会論文集, 第380号/(I-7), 1987年4月.

表5.1 供試体の寸法諸元

Specimens	b(mm)	h(mm)	t(mm)	A(cm ²)	L(cm)	r(mm)	h _w /t	b _f /t	R _w	R _f	R _{fw}
SH-1	180.0	189.4	4.37	23.6	70.0	42.40	41.4	20.6	0.761	1.143	0.975
SH-2	150.0	235.3	4.37	23.0	60.1	32.80	51.9	17.2	0.955	0.941	0.951
SH-3	185.2	233.9	4.39	26.1	70.0	42.17	51.3	21.2	0.944	1.163	1.031
SH-4	80.0	166.7	3.14	10.1	30.1	16.33	51.1	12.7	0.912	0.670	0.881
SH-5	105.1	166.3	3.12	11.6	42.0	22.87	51.3	16.8	0.916	0.895	0.910
SH-6	129.9	165.8	3.15	13.3	54.0	29.52	50.1	20.4	0.895	1.091	0.960
SH-7	130.8	198.1	3.11	14.1	53.0	28.69	61.7	21.0	1.101	1.124	1.057



A : cross sectional area
 L : member length
 r : weak axis radius of gyration
 R_w : see Eq. 5.2 , R_f : see Eq. 5.3
 R_{fw} : see Eq. 5.4

表5.2 最大初期たわみと圧縮残留応力

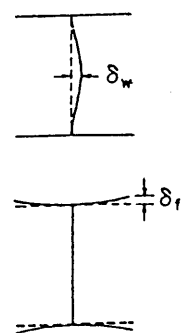
Specimens	Max. Initial Deflection		Residual Stress σ_{rc} / σ_y^*		Remarks
	δ_w / h_w	δ_f / b_f	web	flange	
SII-1	1/860	1/105	0.32	0.56	
SII-2	1/660	1/72	0.57	0.71	
SII-3	1/680	1/110	0.36	0.55	
SII-4	1/640	—	0.53	0.43	
SII-5	1/700	1/76	0.40	0.57	
SII-6	1/460	1/108	0.38	0.52	
SII-7	1/180	1/83	0.36	0.41	

表5.3 実験結果

Specimens	P_{max} (KN)	σ_{max} (N/mm ²)	$\left(\frac{\sigma_{max}}{\sigma_y^*}\right)_{exp.}$	$\left(\frac{\sigma_{max}}{\sigma_y^*}\right)_{approx.}$
SII-1	524	222	0.89	0.79
SII-2	480	209	0.84	0.81
SII-3	505	193	0.77	0.76
SII-4	235	233	1.06	0.88
SII-5	270	228	1.06	0.85
SII-6	270	203	0.92	0.80
SII-7	245	174	0.79	0.72

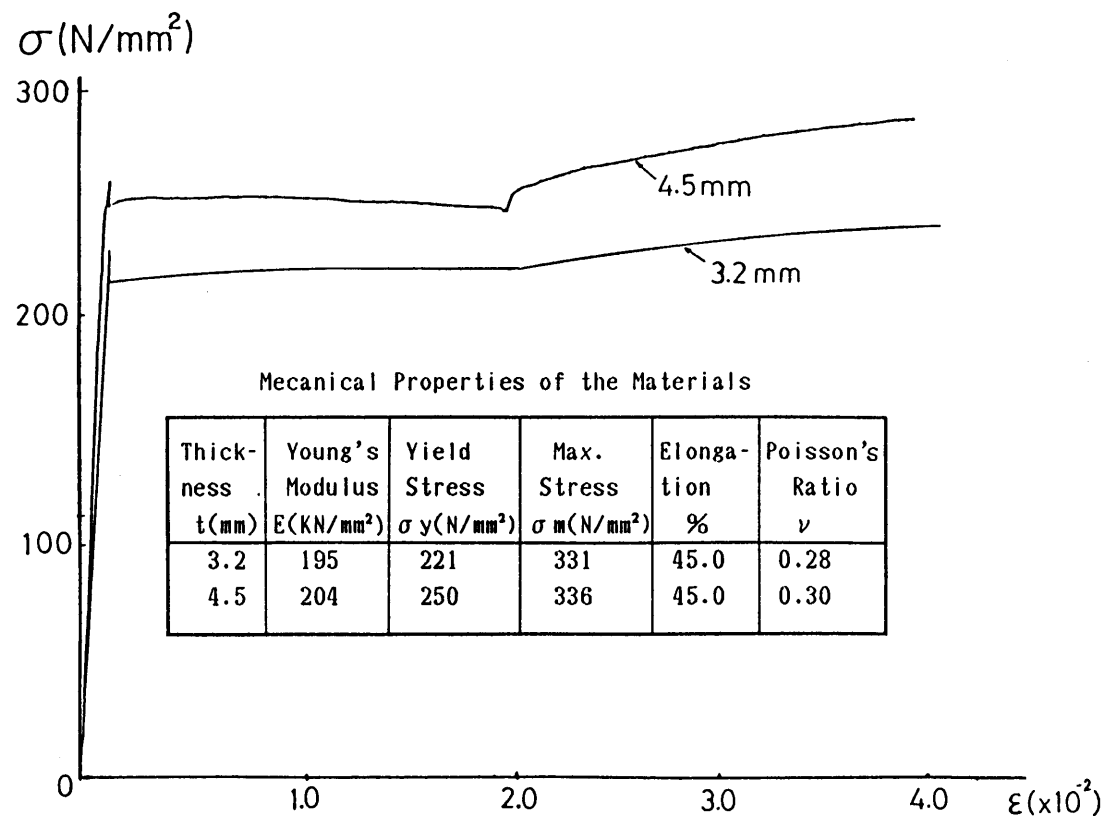


図5.1 引張試験の結果

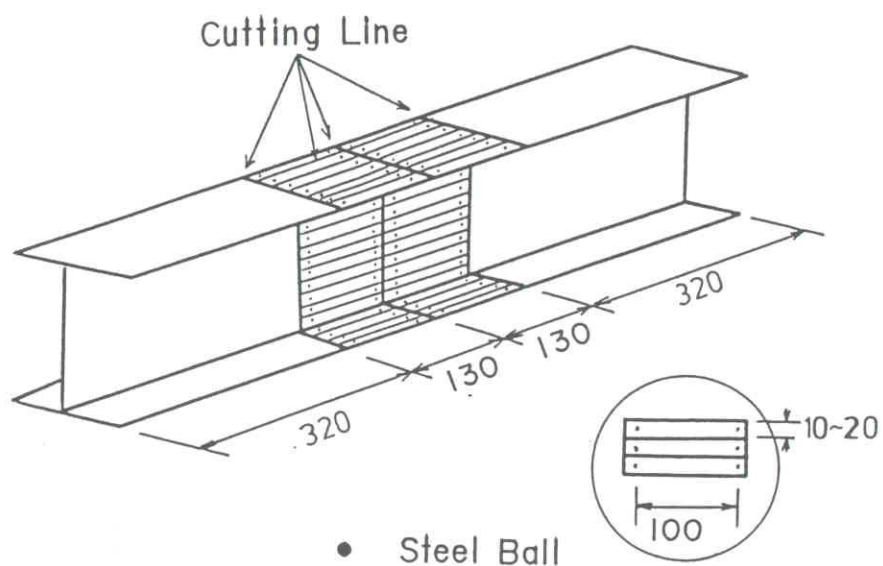
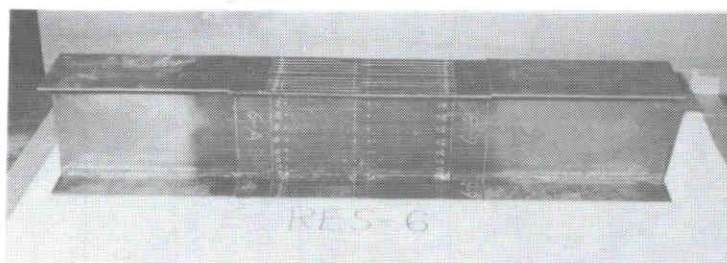
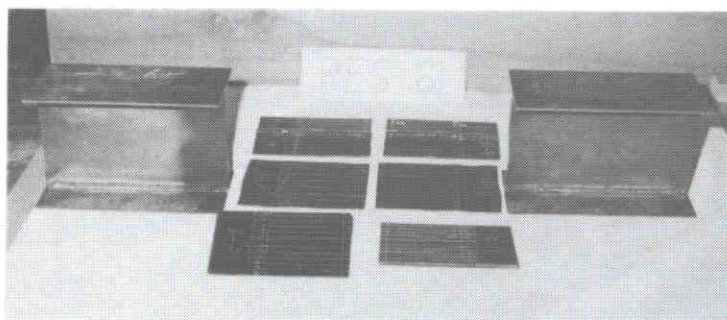


図5.2 残留応力測定供試体



(a) 切断前



(b) 切断後

写真5.1 残留応力測定用供試体の切断の様子

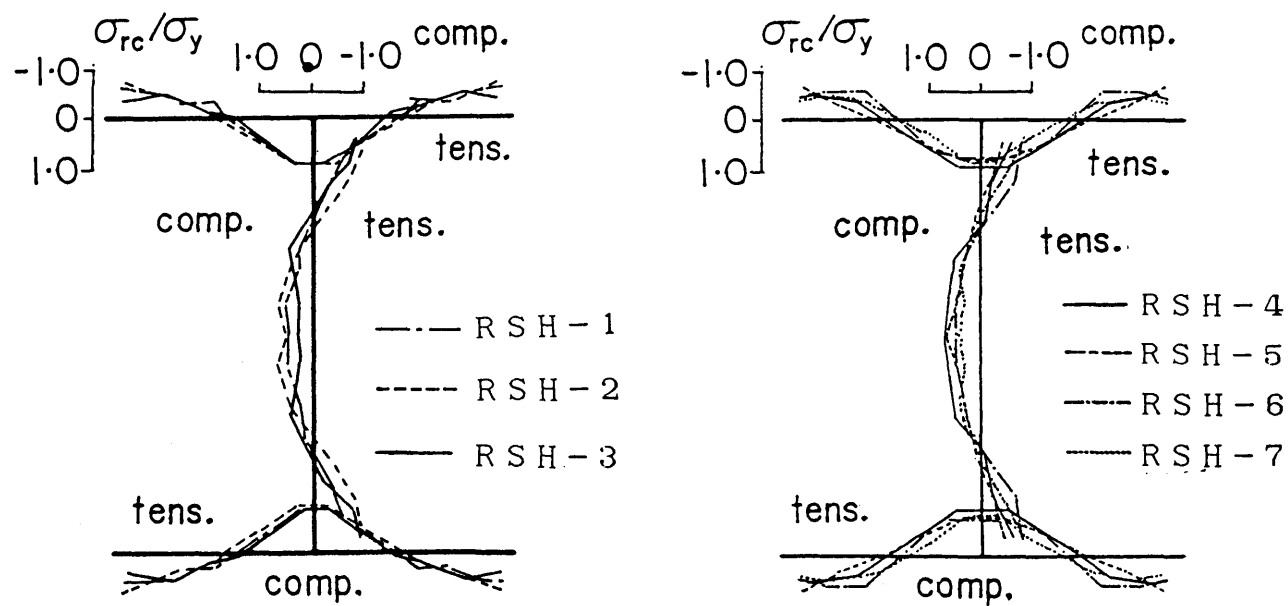


図5.3 修正後の残留応力分布図

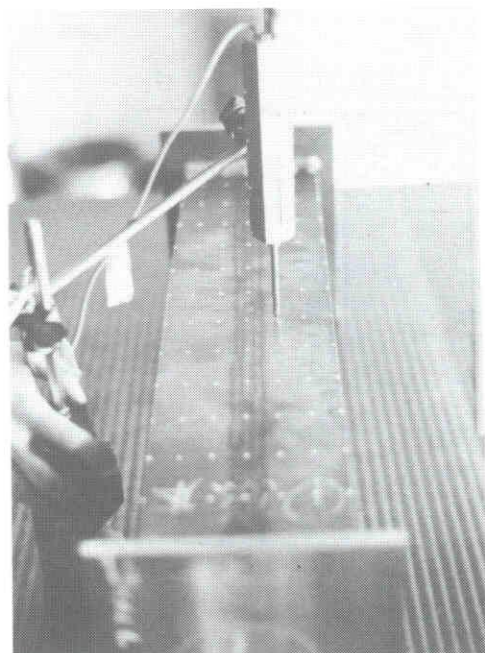
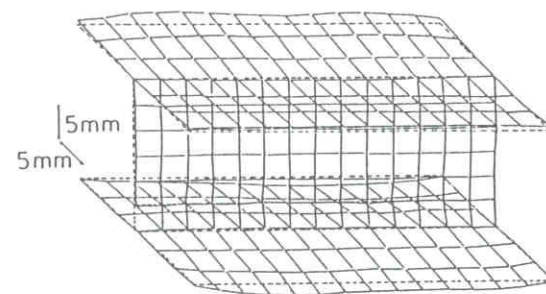
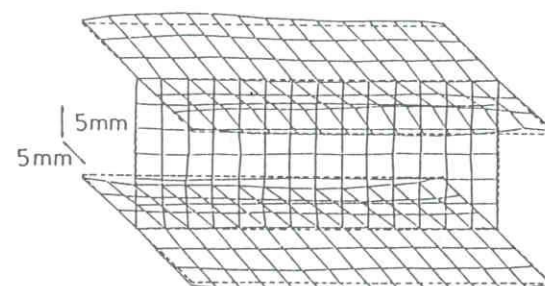


写真5.2 初期たわみの測定



(a) SH-1



(b) SH-3

図5.4 初期たわみ分布形状

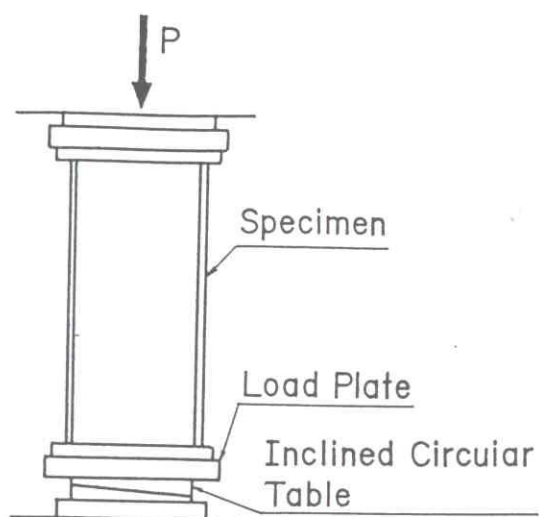


図5.5 載荷装置

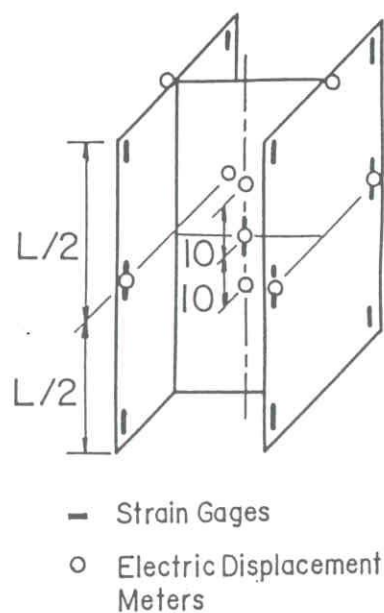


図5.6 ひずみと変位の測定位置

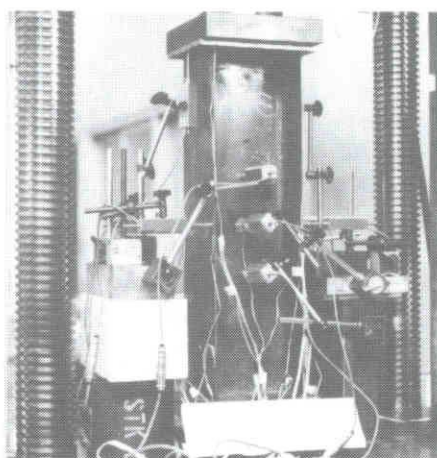


写真5.3 実験中の供試体

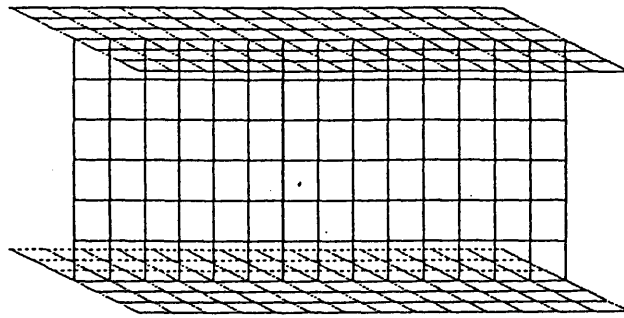


図5.7 解析モデルの要素分割例

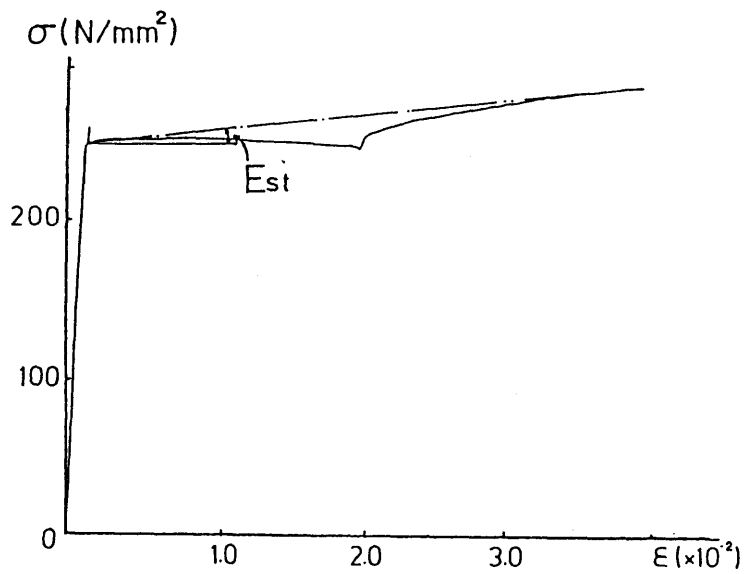
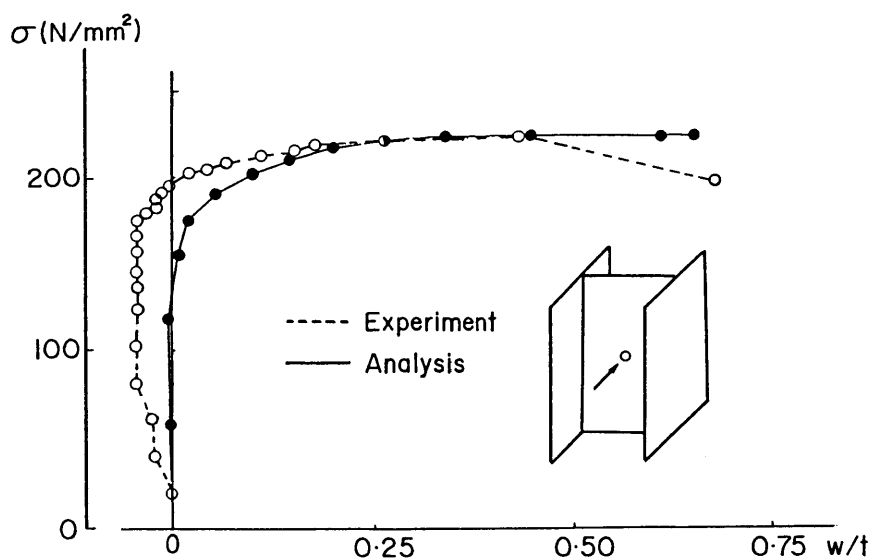
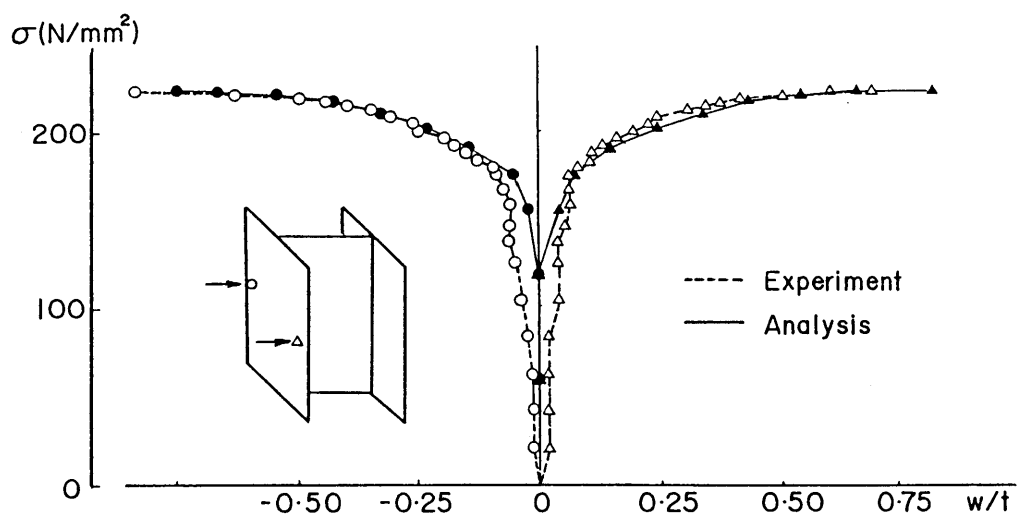


図5.8 ひずみ硬化係数 E_{st}



(a) Web



(b) Flange

图5.9 平均压缩应力-变位曲线 (SH-1)

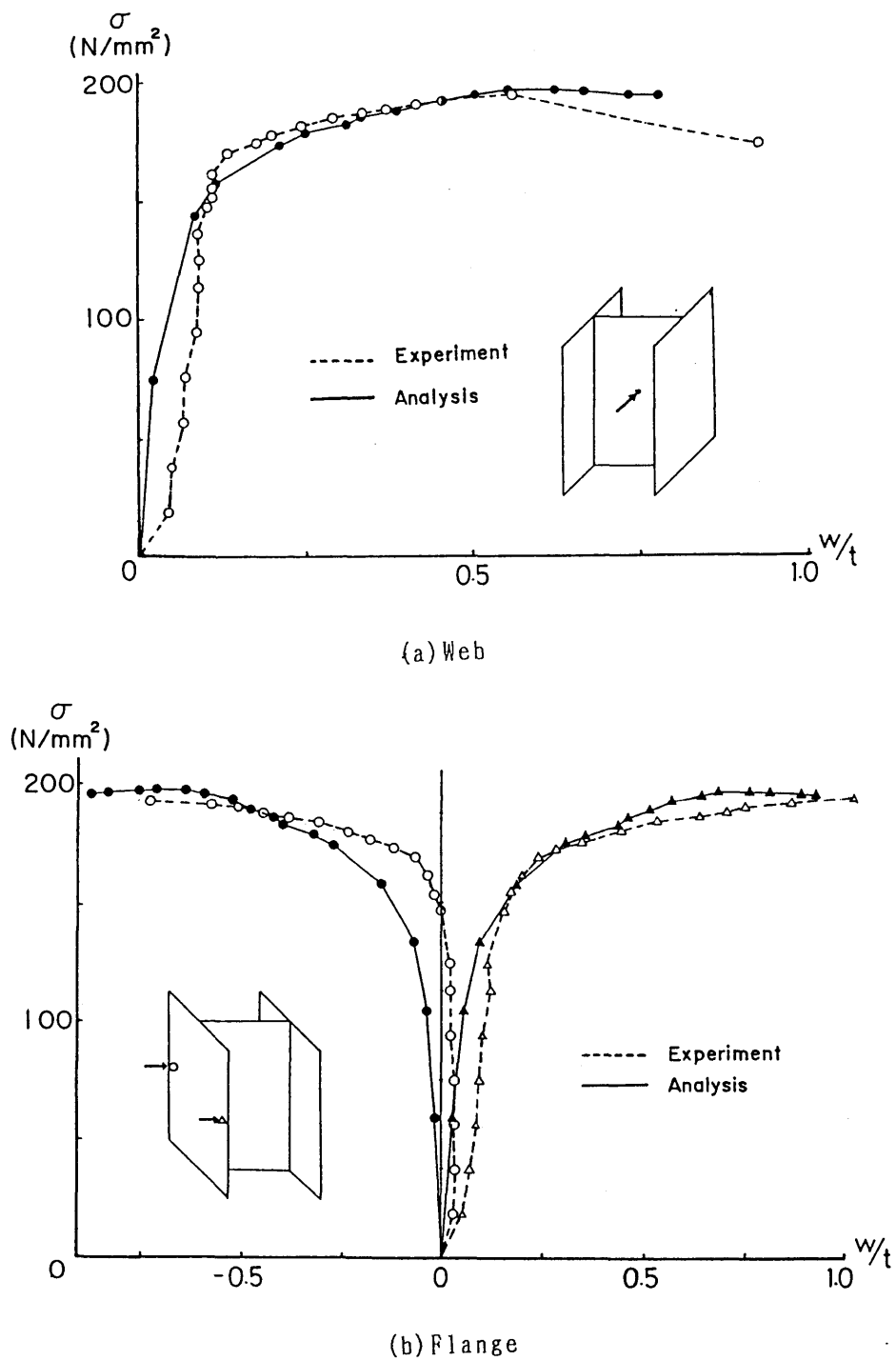
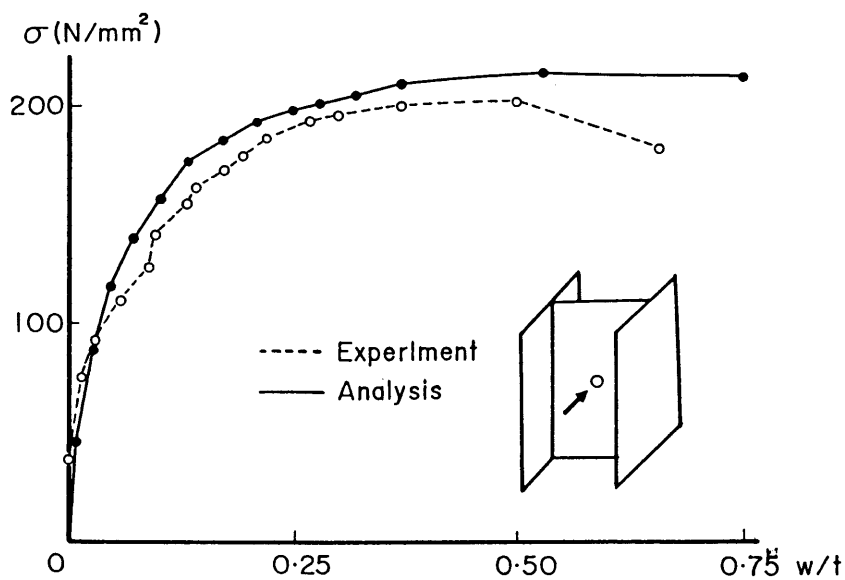
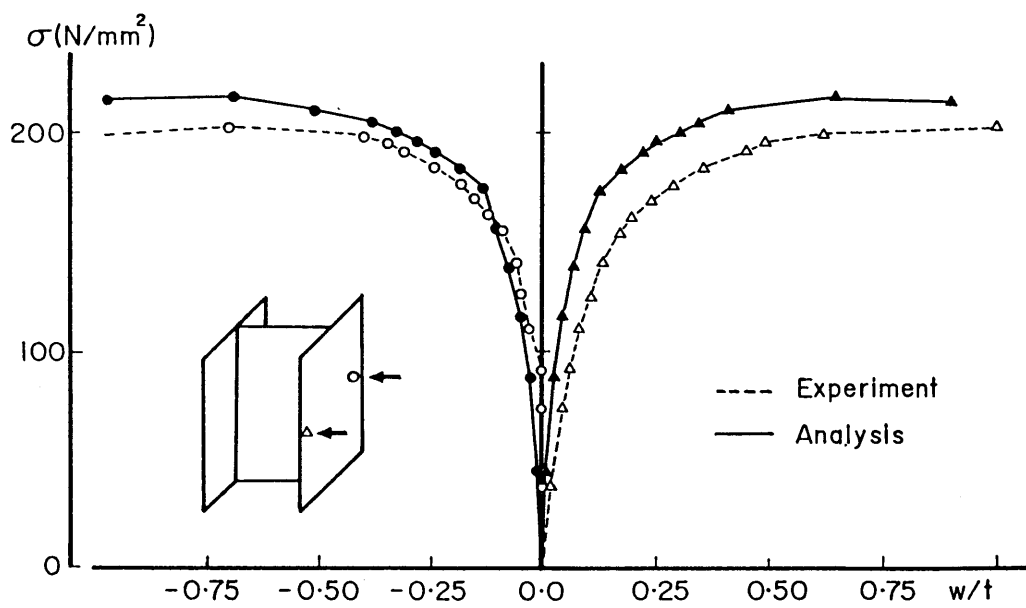


图5.10 平均压缩应力-变位曲线 (SH-3)



(a) Web



(b) Flange

图5.11 平均压缩应力-变位曲线 (SH-6)

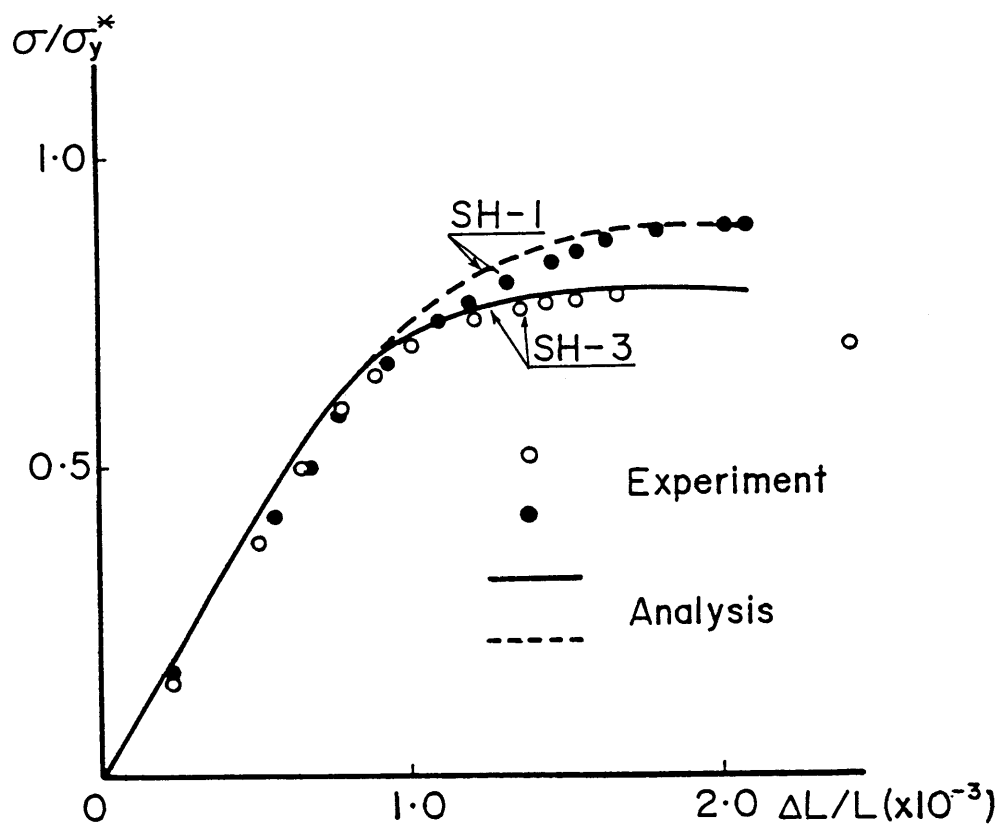


図5.12 平均圧縮応力－平均軸ひずみ曲線

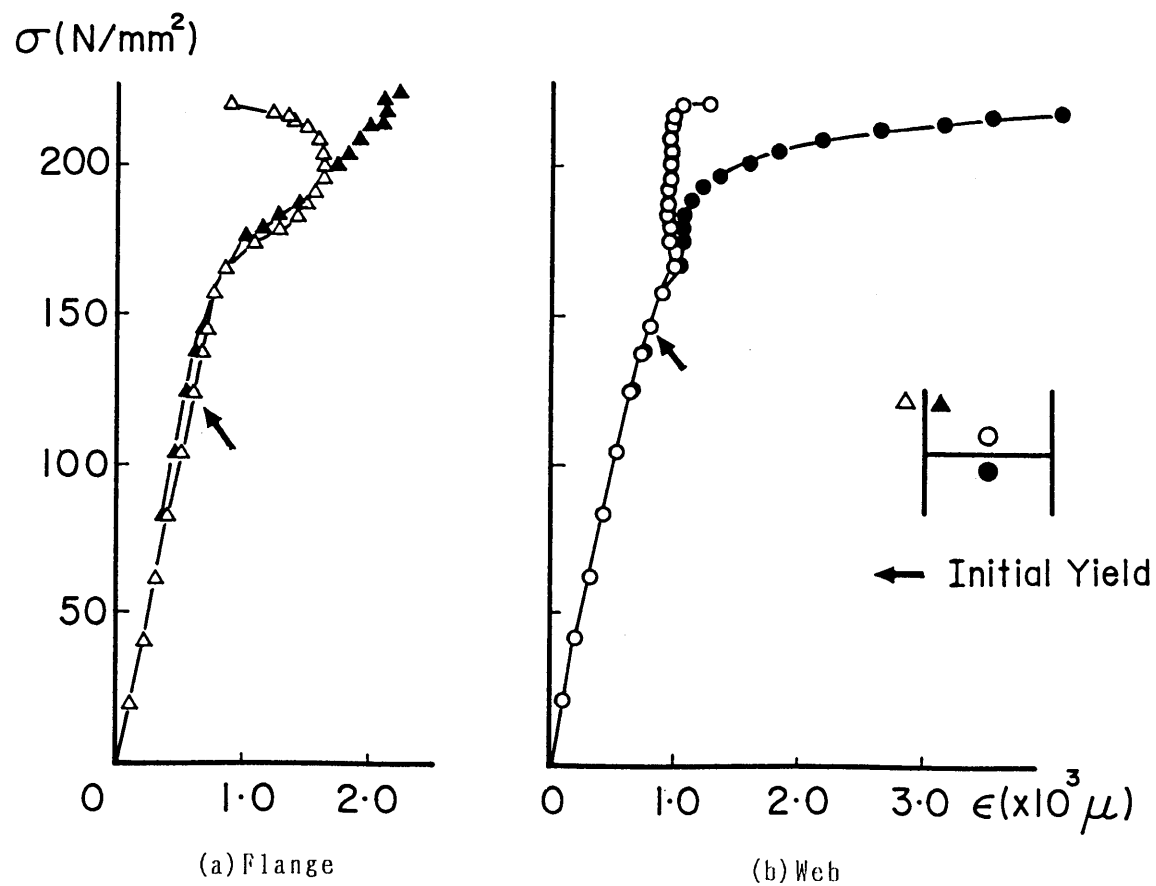


図5.13 平均圧縮応力－ひずみ曲線 (SH-1)

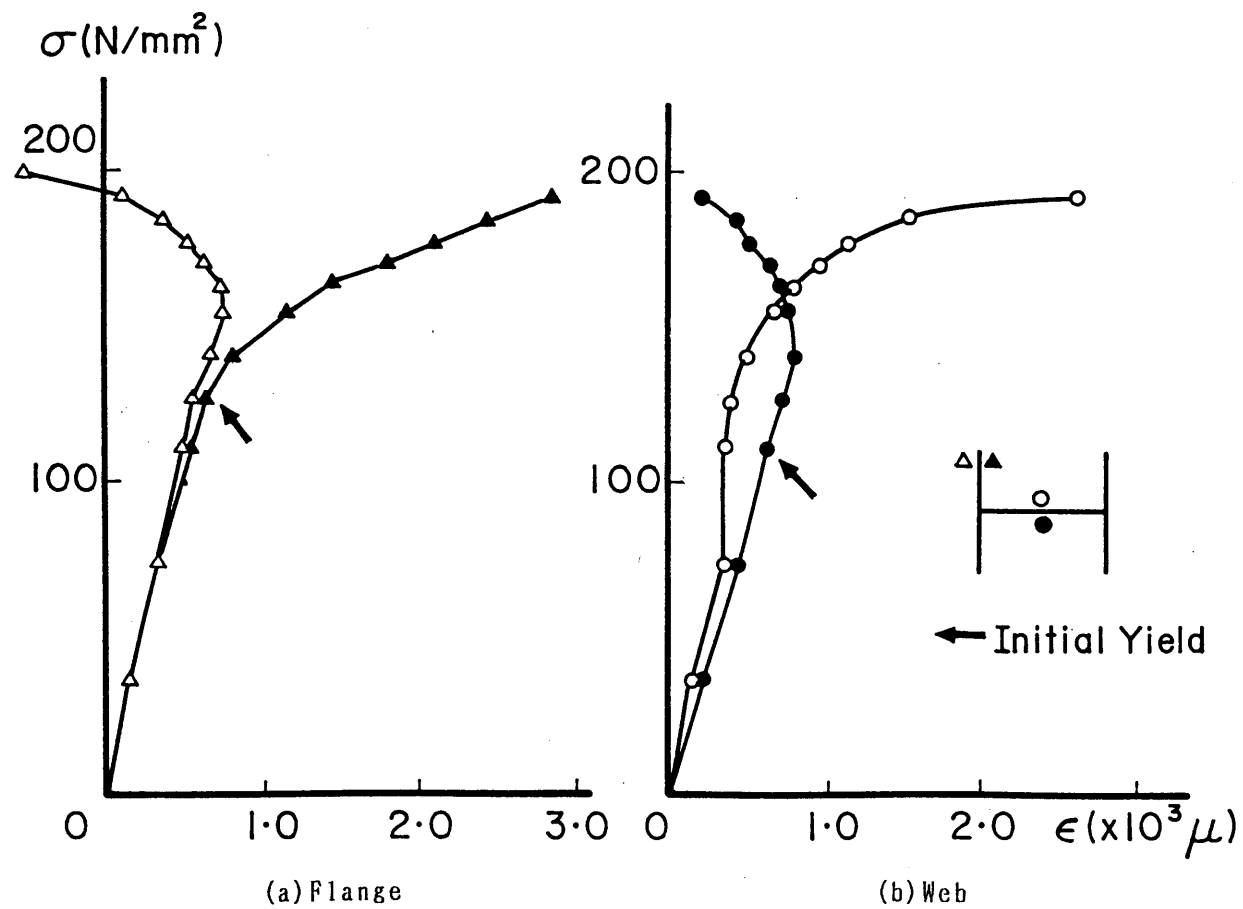
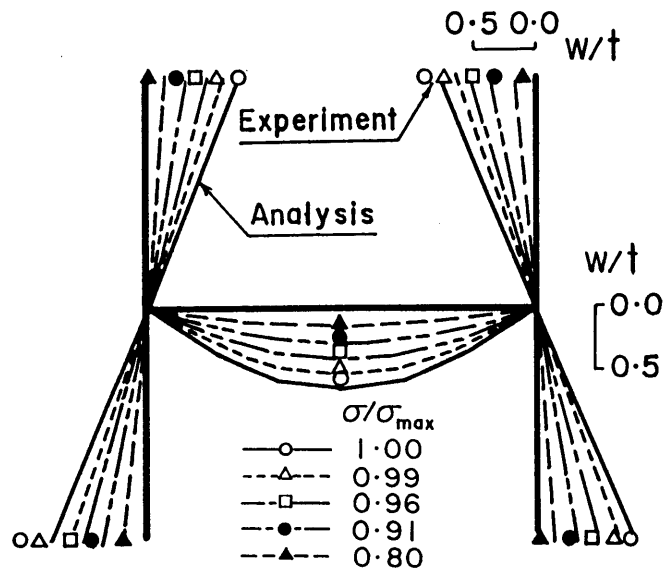
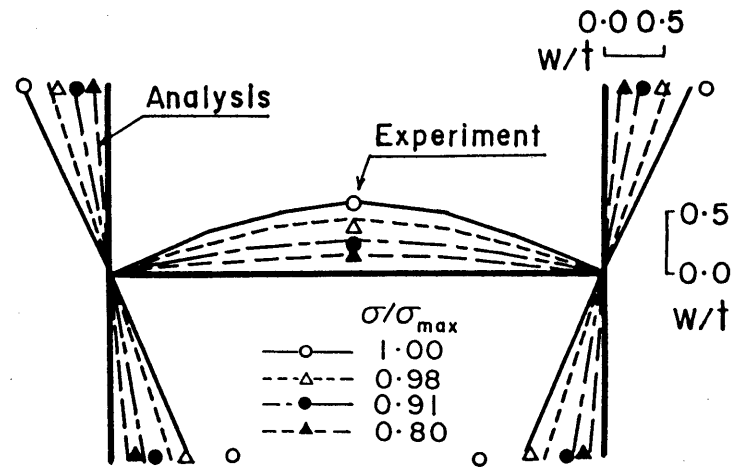


図5.14 平均圧縮応力-ひずみ曲線 (SH-6)

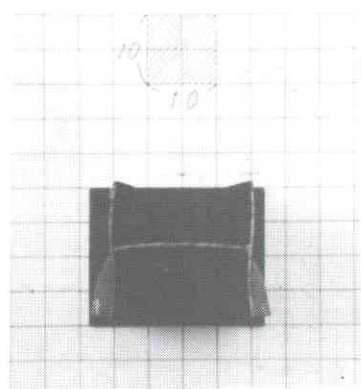


(a) SII-1

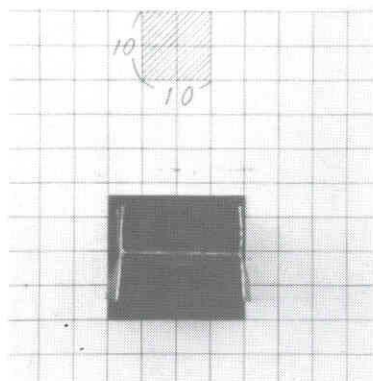


(b) SII-6

図5.15 中央断面の変形性状

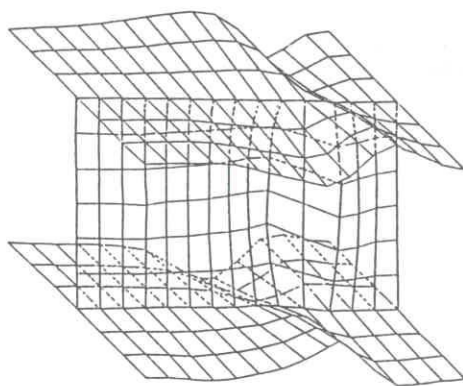


(a) SH-1

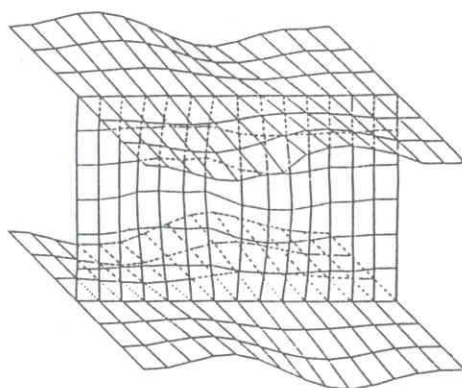


(b) SH-6

写真5.4 載荷後のH形断面の変形状態

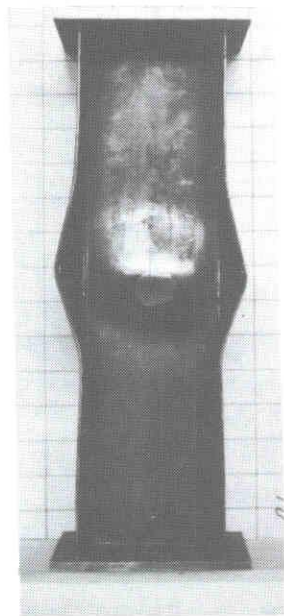


(a) Experiment

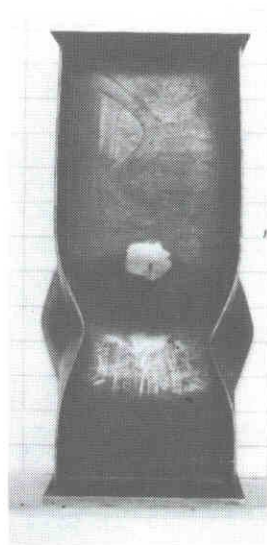


(b) Analysis

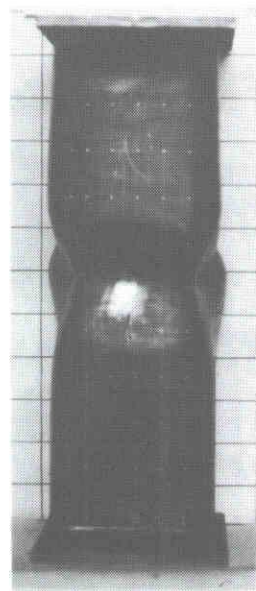
図5.16 変形状の比較 (SH-3)



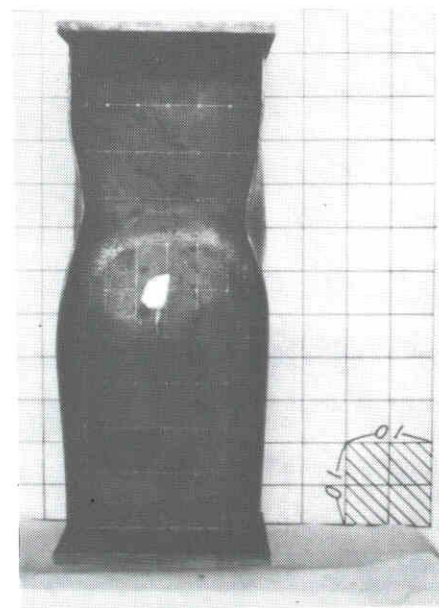
(a) SII-1



(b) SII-2



(c) SII-6



(d) SII-7

写真5.5 載荷後の変形状態

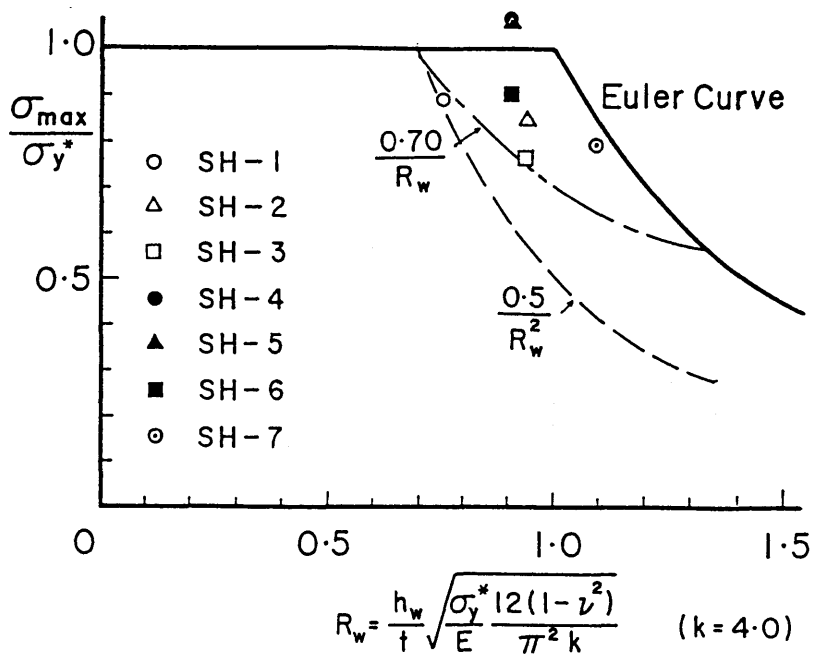


図5.17 R_w で整理した最大平均圧縮応力度

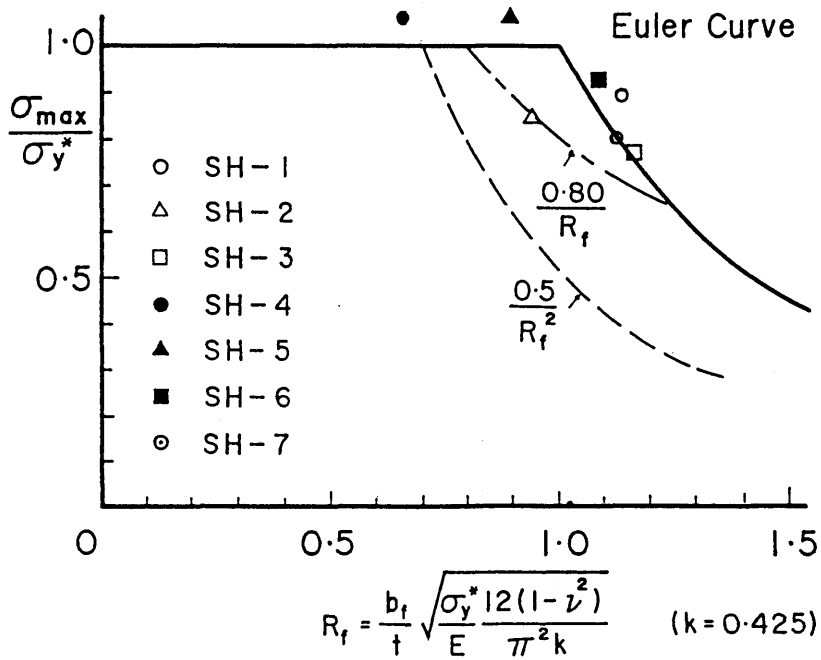


図5.18 R_f で整理した最大平均圧縮応力度

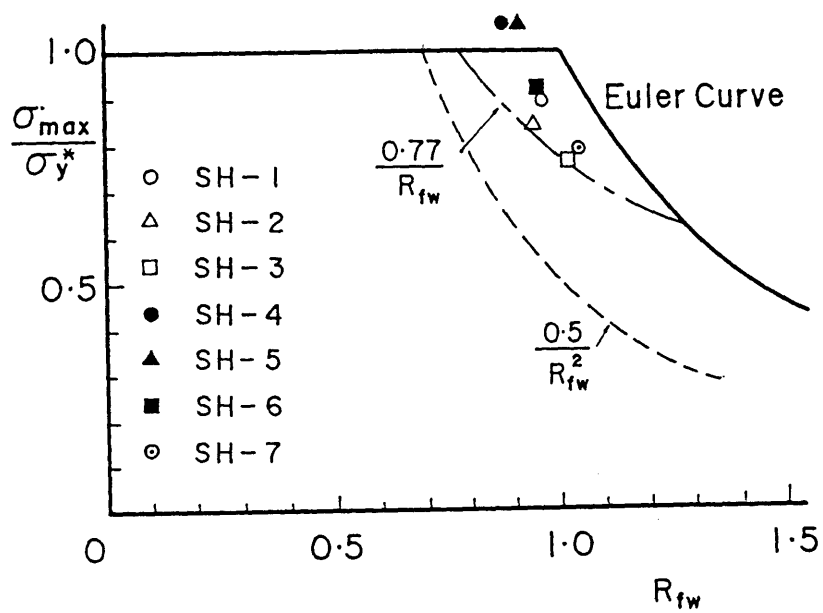
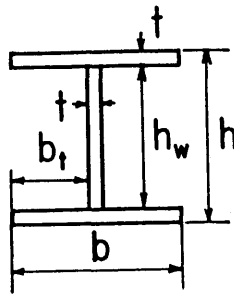
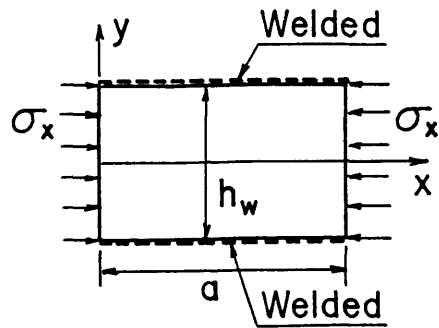


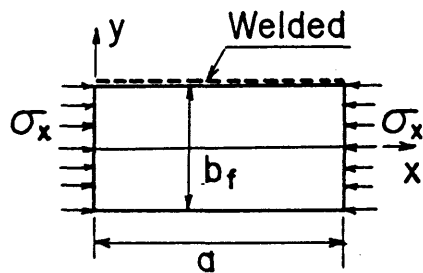
図5.19 R_{fw} で整理した最大平均圧縮応力度



図A5.1 モデルの断面



図A5.2 ウェブのモデル化



図A5.3 フランジのモデル化

第6章 薄肉H形鋼柱の連成座屈に関する実験

6.1 概 説

圧縮や圧縮と曲げを受ける薄肉断面部材の局部座屈と全体座屈の連成座屈問題は複雑なものであるが、その局部座屈や連成座屈挙動に関する理論的研究は、第4章の概説で述べたように箱形断面やH形断面部材に対して種々な解析方法によって行なわれている。一方、実験的研究としては、箱形断面や二つの溝形材を張り合わせたI形断面にした冷間加工鋼部材について実験が多く行なわれており、AISCの設計規定²⁾に取り入れられている。たとえば、Skaloud and Zörnerova⁴⁾、Graves Smith⁵⁾、DeWolf, Pekoz and Winter⁶⁾、Braham, Rondal and Massonnet⁷⁾等は箱形断面についての実験であり、Kalyanaraman, Pekoz and Winter⁸⁾は、二つの溝形材を張り合わせたI形断面の柱及びはりについての連成座屈の実験を行なっており、その解析には有効幅理論を用いている。また、溶接箱形断面部材に関しては、まず、Klöppel, Shmied and Schubert⁹⁾、Ingvarsson¹⁰⁾の中心および偏心圧縮を受ける柱の実験がある。宇佐美・福本ら^{11)~13)}は、溶接箱形断面柱が中心および偏心圧縮を受ける場合について材質を変化させて一連の多数の連成座屈実験を行なって、連成座屈が生じる部材の設計式を提案している。さらに、箱形断面短柱の強度を有限要素法により解析し、部材全体の連成挙動を求める解析手法も開発している¹⁴⁾。また、筆者ら¹⁵⁾も溶接長方形断面柱が中心軸圧縮を受ける場合について、幅厚比と細長比を変化させて連成座屈の実験を行なっている。

しかしながら、溶接H形断面の柱やはりの連成座屈に関しての解析および実験的研究は非常に少ない。特に実験は前述したように冷間加工部材について行なわれている程度であり、溶接集成の薄肉鋼柱に関してはほとんど見当たらないのが現状である。実験による連成座屈現象や挙動の把握は連成座屈を正しく評価するためにも不可欠であり、実験データの蓄積が必要であると思われる。

そこで、本章では溶接集成のH形断面を有する鋼柱を供試体を選び、連成座屈挙動や耐荷力特性を明らかにするため板要素の幅厚比および部材の細長比を変化させて耐荷力実験を行なった。そして部材及び板としての初期たわみや溶接残留応力等の初期不整が連成挙動や耐荷力に及ぼす影響を調べた。また、第5章で述べたように、本実験供試体と同一断面を有する短柱実験を行なって板要素相互の連成局部座屈挙動を調べ最大強度を求めた。

さらに、短柱の最大強度（耐荷力）を板要素の連成を考慮した等価幅厚比により容易に推定する方法を前章で求めたので、これを用いて鋼柱が連成座屈する場合の最大強度を合理的に推定する方法を検討した。さらに、現行の道路橋示方書¹⁾に規定されている連成座屈をする場合の部材の耐荷力評価式を用いて実験結果についての検討も行なっている。

6.2 連成座屈実験の概要

6.2.1 供試体の設計

供試体を設計するにあたり、次の点を考慮した。

- 1) 座屈軸はH形断面部材の弱軸回りとする。
- 2) 部材の全体座屈と板要素の局部座屈の連成座屈を生じるような部材の細長比と板要素の幅厚比を有する鋼柱とする。
- 3) 溶接集成による残留応力が切断法により測定可能な程度に十分大きい寸法のH形断面である。
- 4) 利用できる試験機の関係上、供試体の長さは3.5m以内とし、部材の最高圧縮荷重は試験機の載荷能力(100ton)以内である。

以上の設計条件を満たすために、細長比 L/r を51, 71, 91の3種類とし、ウェブの幅厚比 h_w/t は40, 50, 60およびフランジの幅厚比 b_f/t は12~20と変化させ、これらを組み合わせて供試体を設計した。板厚は3.2mmと4.5mmを使用した。製作した供試体は全部で13体あり、その寸法諸元を表6.1に示す。板厚4.5mmをHAシリーズ、3.2mmをHBシリーズとよぶことにし、表6.1の供試体名は左より順に、シリーズ名、細長比、ウェブの幅厚比及びフランジの幅厚比を表わす。また、表中の等価細長比 $\bar{\lambda}$ 及び等価幅厚比 R はそれぞれ次式で表わされる。なお、 R 、断面積 A および板厚 t の添字 w, f はそれぞれウェブおよびフランジを表わす。

$$\bar{\lambda} = \frac{L}{r} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_y^*}{E}} \quad (6.1)$$

$$R_w = \frac{h_w}{t} \sqrt{\frac{\sigma_y^*}{E} \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^2 k}} \quad (k=4.0) \quad (6.2)$$

$$R_f = \frac{b_f}{t} \sqrt{\frac{\sigma_y^*}{E} \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^2 k}} \quad (k=0.425) \quad (6.3)$$

$$R_{fw} = \frac{h_w}{t_w} \sqrt{\frac{\sigma_y^*}{E} \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^2 k_{wf}}} \quad (h_w t_f / b_f t_w \leq 3.07) \quad (6.4a)$$

$$= \frac{b_f}{t_f} \sqrt{\frac{\sigma_y^* 12(1-\nu^2)}{E \pi^2 k_{fs}}} \quad (h_w t_f / b_f t_w > 3.07) \quad (6.4b)$$

$$\sigma_y^* = \sigma_{yf}(2A_f/A) + \sigma_{yw}(A_w/A) \quad (6.5)$$

ここに、

なお、 σ_{yw} 及び σ_{yf} はそれぞれウェブ及びフランジの降伏点応力度（今回の実験では $\sigma_{yw} = \sigma_{yf} = \sigma_y^*$ 、 $t_f = t_w = t$ ）、 E はヤング率、 ν はポアソン比であり、図5.11に示す引張試験の結果を用いた。また、 A_w および A_f はそれぞれウェブ及びフランジの断面積である。式(6.4)の等価幅厚比 R_{fw} は、ウェブとフランジの連成作用を考慮したものであり、 k_{ws} 及び k_{fs} は第5章の付録5.1に示す方法により求めた座屈係数である。

6.2.2 予備試験

実験供試体を製作した鋼材については、第5章の5.2.2節予備試験で述べた引張試験の結果の鋼材と全く同じである。

溶接残留応力の測定用供試体や測定方法については第5章の5.2.2節予備試験の場合と全く同様である。図6.1は測定値を自己平衡条件と二軸対称補正により修正した後の残留応力分布を示したものである。RES-1～3は表6.1の供試体のうちHAシリーズのフランジの幅厚比が15以下の6体について、ウェブの幅厚比が順に40, 50, 60の供試体断面の応力分布であり、RES-4～10は表6.1のHAシリーズの残り3体とHBシリーズ供試体名の上から順の断面の残留応力分布を示したものである。全供試体ともフランジ両端部及びウェブ中央部分が圧縮となり、フランジとウェブの溶接部に引張が生じた。表6.2は修正後のフランジ部の最大圧縮残留応力とウェブ中央部分の平均圧縮残留応力を示すが、ウェブの中央部分で約0.3～0.6 σ_y^* フランジで約0.3～0.7 σ_y^* とばらついている。

初期たわみは写真6.1に示すように定盤上に供試体を載せ、電気抵抗式変位計(1/100 mm 精度)をスライドさせて、上、下フランジ、ウェブとも幅方向に4～6等分する5～7点、部材の長さ方向にはほぼ10cm間隔とし、一部の供試体では解析との比較のため中央部分をさらに半分の5cm間隔で測定した。表6.2はウェブ及びフランジのたわみの測定結果であり、その最大値を示す。表中の δ_1 は部材としてのたわみの最大値であり、両フランジとウェブの交線上の測定値の平均値を、 δ_2 はウェブの板としての初期たわみの最大値を表わす。各供試体とも道路橋示方書¹⁾の製作精度を満足している。図6.2(a)～(d)は部材及び板としての初期たわみの分布形状の例をウェブについて示したものである。

6.2.3 実験装置と測定方法

載荷は文献15)の載荷装置を多少改良し、写真6.3に示すオルゼン型長柱試験機による中心軸圧縮で行なった。この装置は図6.3および写真6.2に示すように座屈軸をウェブと平行な弱軸まわりに選び、この軸に関して両端単純支持の条件を満足するような端部構造である。すなわち、一方の軸に対して固定で、他の軸に対しては回転可能な円筒面を有するローラーと、荷重を一樣に伝える載荷板および微調節ネジのついた載荷装置を使用した。なお、円筒面の曲率半径 R の中心は図6.3に示すように供試体端部に一致させている。

たわみとひずみの測定位置の一例を図6.4、写真6.3および写真6.4に示す。たわみの測定は、電気抵抗式変位計（1/100mm精度）を取り付けた上下移動式のたわみ測定専用治具を製作し用いた。柱全体としての横たわみを、ウェブとフランジとの交線上において、また、ウェブの局部変形をウェブの幅方向に4等分点で、部材軸方向に10cm間隔で移動させながら同時に測定した（写真6.4(a)）。移動変位計で測定できない部分は、写真6.4(b)に示すように変位計を固定して測定した。また、フランジの幅厚比が大きい供試体では、中央断面から上、下5cmの位置の両フランジ面において局部変形を変位計で測定した（写真6.4(c)）。この変位計は供試体が曲げによる全体変位および断面の局部変形に伴って三次元的に移動できるようにしている。軸方向変位は供試体の上端部にて測定した（写真6.4(d)）。ひずみは中央断面のウェブとフランジ及び初期たわみの大きい断面に一軸ゲージを配して測定した。なお、ひずみと変位の測定は多点デジタルひずみ測定器により行なった。さらに、実験中の供試体の座屈挙動を動的に調べるため、ウェブ中央部の面外変位をXYレコーダを使用して記録した。

本載荷は供試体を載荷装置の中心に位置するよう十分調整した後行なった。載荷は初期には荷重制御、座屈荷重付近では変位制御で荷重増分を小さくし、柱の挙動に注意しながら行なった。いずれの載荷でも荷重増加後数分経った静的につり合っていると想定される状態で測定した。

6.3 実験結果と考察

6.3.1 荷重－変形挙動特性

図6.5、6.6は各供試体の平均圧縮応力 σ ($=P/A$)と、柱中央断面のウェブ中央点の横たわみ w を弱軸回りの断面二次半径 r により無次元化した値との関係を示したもので、各供試体ごとに開始点をずらしてある。図6.5(a)に示すようにフランジとウェブの幅厚比を一定

にして、部材の細長比を変化させた場合、細長比が大きくなるとその変形能も大きい。また、図6.5(b)は細長比を一定にしてウェブとフランジの幅厚比を変化させた場合を示している。ウェブとフランジの幅厚比が小さいときは、最大荷重に達した後もかなりの強度を保持しながら変形し、変形曲線の降下勾配も緩やかであり、しかもその変形能も大きい。しかし、フランジの幅厚比を大きくすると、図6.6に示すようにHAおよびHBシリーズとも最大荷重に達した後の変形能に差がみられる。特に、フランジの幅厚比が20ではその降下曲線の勾配が急であり変形能も小さい。これはウェブの幅厚比が変化しても同様な傾向となっている。

図6.7(a)、(b)はHBシリーズ供試体の柱としての変位モードを示したものである。柱としての変位モードはフランジとウェブの交線上の変位を測定している。実線は最大荷重までの変位状態を、点線はその後の変位状態を示している。また、●印はウェブ中央点の変位を表わしている。HB-71-50-16の供試体は、初期たわみが小さいにもかかわらず他の供試体に比べて変位が大きい。これは、載荷装置に供試体をのセットした時、中心軸線が多少ずれたのではないかと判断される。フランジの幅厚比が大きい供試体では、最大荷重に近づくと変位が急に増えていることがわかる。また、供試体HB-71-60-20では曲げによる全体の変位よりも、板の局部変形が進んで強度が低下している。なお、この供試体のみ中央断面付近のウェブ断面の変位を多く測定している。

図6.8は細長比を一定にした場合の中央断面における軸ひずみ分布の変化を示したものである。図6.8(a)のHAシリーズの場合、フランジとウェブの幅厚比を変化させているが、幅厚比が大きくなると最大強度 σ_{max} よりも低い荷重からひずみ分布が一様でなくなり、局部変形が生じていることがわかる。この分布の乱れを局部座屈が生じたと考ええると、これから最大強度に達するまでの余剰耐力はかなり大きいと思われる。また、このひずみ分布の乱れは、図6.2に示す初期たわみの影響も現われていると思われる。図6.8(b)はHBシリーズのウェブの幅厚比を一定(50)にして、フランジの幅厚比が変化する場合のひずみ分布を示している。また、フランジ端部4隅で測定したひずみもフランジの外、内側で区別してプロットしている。フランジの幅厚比が大きくなるとフランジ部の乱れが大きくなり、ウェブのひずみ分布に影響して乱れが同様に生じていることがわかる。ひずみ分布からも両板要素が連成して変形している挙動が推定される。

図6.9(a)、(b)は、HBシリーズ供試体の中央断面のウェブ中央点とフランジ端点における表・裏面の応力-ひずみ曲線である。なお、フランジ端点は柱の曲げが生じた場合の圧縮側をプロットしており、図は圧縮ひずみを正としている。供試体HB-71-50-12やHB-71-5

0-20ではウェブおよびフランジとも裏表のひずみがほぼ同じ値になっており、荷重がうまく載荷されている。そして、供試体HB-71-50-12ではウェブが先に局部変形を生じているのに対し、HB-71-50-20ではウェブとフランジがほとんど同時に局部変形を生じていることがわかる。また、供試体HB-71-60-20ではウェブが最大荷重の半分ほどで局部変形を生じていると思われるが、これから最大荷重に達するまでにかなりの余剰耐力があると思われる。

図6.10はHBシリーズ各供試体の中央より下5cmの位置の断面形状の変化を示したものである。図ではウェブ両端の初期状態からの変位量を w/r で示し、断面変形量は δ/t を単位として表わしている。ウェブの幅厚比を一定(50)にしてフランジの幅厚比を変化させた場合、最大荷重に達するまでは断面形状の変化に多少の差がみられるが、これは初期たわみの影響と考えられる。また、最大荷重に達した後は、幅厚比が大きいほどフランジ部の変形が大きく顕著であり、最大強度が早期に低下した原因となったと考えられる。そして、柱が曲げ変形を生じながら両板要素の局部変形も大きくなり、連成座屈挙動する様子が見えてくる。また、供試体HB-71-60-20はウェブ及びフランジの幅厚比が他の供試体より大きいいためか柱としての曲げ変形が大きくなならないうちに局部変形が現われていることがわかる。特に、供試体HB-71-50-16と比べるとその違いがよく現われている。

写真6.5(a)、(b)は各供試体の載荷後の変形状態で、右側の写真は部材中央部分の全体の曲げ変形とフランジ部の変形状況を示したものである。実験では、各供試体ともほぼ中央断面かあるいはその下側10cm前後の断面で一番大きな曲げを生じている。変形状態を見るとHAシリーズおよびHBシリーズとも、フランジの幅厚比が大きくなるにつれてフランジ部の局部変形が顕著に現われている。また、フランジの幅厚比が同じ20でも、ウェブの幅厚比40の供試体HB-71-40-20はフランジの局部変形が柱の高さ方向全体にわたって生じているのに対し、幅厚比50の供試体HB-71-50-20では一番大きな曲げを生じた部分に集中していた。このように、同じ細長比の柱でも板の幅厚比の大きさにより連成座屈挙動に多少の違いがみられた。

このように、フランジの幅厚比が大きくなると板要素の連成挙動が顕著となり、最大荷重に達した後の変形挙動に大きく影響することが明らかになった。

6.3.2 耐力の検討

表6.3は実験で得られた最大荷重 P_{max} 、最大圧縮平均応力度 $\sigma_{max}(=P_{max}/A)$ 、 σ_{max}/σ_y^* 等をまとめて示した。表6.3の $\sigma_{u,s}$ は、現行の道路橋示方書の許容応力規定で計算した許容軸方向

圧縮応力度 σ_{ca} を安全率倍して耐荷力表示したもので、次のようにして求めた。圧縮応力度 σ_{ca} は、示方書の式(2.2.1)より次式で表わせる。

$$\sigma_{ca} = \sigma_{cag} \cdot \sigma_{cal} / \sigma_{cao} \quad (6.6)$$

ここに、

σ_{ca} : 許容軸方向圧縮応力度

σ_{cag} : 示方書の表-2.2.2に示す局部座屈を考慮しない許容軸方向圧縮応力度

σ_{cal} : 示方書の表-3.2.1, 表-3.2.2および表-3.2.3に示す局部座屈に対する
許容応力度

σ_{cao} : 示方書の表-2.2.2に示す局部座屈を考慮しない許容軸方向圧縮
応力度の上限値

ここで、 σ_{cal} は、フランジとウェブの両方について計算した許容応力度のうち小さい方を採用することにした。また、 $b_f/t > 16$ 、 $h_w/t > 56$ の供試体もあるが、示方書の表の式をそのまま適用して求めた。よって、式(6.6)より σ_{ca} が求まるので、これを安全率(σ_y/σ_{cao})倍して $\sigma_{u,s}$ を計算した。ここに、 σ_y は公称降伏点応力度(245KN/mm²)であり、板厚4.5mm場合は $\sigma_y = \sigma_y^*$ とした。また、実験値との比較を $\sigma_{max}/\sigma_{u,s}$ で表6.3に示している。この表からわかるように、連成座屈の影響がなかったと考えられる供試体HA-71-40-10を除いた他の供試体では、実験値の方が耐荷力評価式により計算した耐荷力を35~110%も大きく上回っており、連成座屈する場合の示方書の耐荷力評価式は応力的には安全側過ぎることがわかる。この理由としては次のことが考えられる。

(a) 式(6.6)のように部材の耐荷力を全体座屈と局部座屈の積の形で表わし、安全側過ぎる評価式になっている。

(b) σ_{cal} の評価の規準にしている局部座屈の終局応力度 σ_{cr} を次式で算定している。

$$\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_y} = \frac{0.5}{R^2} \quad (6.7)$$

$$(0.7 < R, \quad b/t \leq 80)$$

式(6.7)は幅厚比 R が大きい場合、この実験でも示したように荷重-変位曲線にねばりがない、つまり降下曲線の勾配が急であることを考慮して、実際の強度よりもかなり安全側に終局強度を定めたことによるものである^{16), 17)}。

図6.11は縦軸に最大平均圧縮応力度 σ_{max}/σ_y^* を、横軸に等価細長比 $\bar{\lambda}$ をとったもので、道路橋示方書の局部座屈を考えない直柱の耐荷力曲線も図示してある。実験結果はすべてこの曲線上か曲線の下側にきており、連成座屈の影響で強度が低下したと推定される。しか

し、今回の実験では表6.2に示すようにかなり大きな圧縮残留応力が存在しており、また、供試体 HA-71-40-10のように連成座屈を生じないと考えられる場合でも、強度が小さくなっており、耐荷力曲線に比べて強度が低下した原因が必ずしも連成座屈の影響によるものと考えられない。この点については解析により検討する必要がある。

次に、中心軸圧縮を受ける鋼柱の耐荷力をAISC⁽²⁾ の考え方に基づいて検討してみる。鋼柱と同一断面の短柱の局部座屈強度を $Q=\sigma_{\text{max}}/\sigma_y^*$ で求め、局部座屈を生じた部材の強度を降伏点応力度 σ_y^* を仮定の降伏点応力度 $Q\sigma_y^*$ からなる部材と考えて推定する方法で、 Q を低減係数とよんでいる。この Q は第5章の短柱実験の結果より等価幅厚比 R_w, R_f および R_{fw} について求めると次式で表わされる。

$$Q = \frac{\sigma_{\text{max}}}{\sigma_y^*} = \frac{0.7}{R_w} \quad (6.8)$$

$$= \frac{0.8}{R_f} \quad (6.9)$$

$$= \frac{0.77}{R_{fw}} \quad (6.10)$$

図6.12(a)～(c)は、式(6.8)～式(6.10)の Q を用いて実験値を整理したもので、降伏点応力度 σ_y^* のかわりに $Q\sigma_y^*$ を使って無次元化してある。なお、道路橋示方書の局部座屈を考えない直柱の耐荷力曲線も図示してある。図6.12(a)の等価幅厚比 R_w で整理した場合、フランジの幅厚比が小さい供試体の値は全て耐荷力曲線より上側にきいているが、ウェブの幅厚比が小さく、フランジの幅厚比が大きい供試体では誤差が大きくなる。また、細長比が同じ供試体にもかかわらず、等価幅厚比 R_w で整理すると耐荷力にかなりのばらつきを生ずることがわかる。一方、図6.12(b)の等価幅厚比 R_f で整理した場合、フランジの幅厚比が小さい供試体では大部分の値が耐荷力曲線より下側にきいており、フランジの幅厚比が小さく、ウェブの幅厚比が大きい断面では局部座屈の影響が考慮できてないと思われる。図6.12(c)はウェブとフランジの連成を考慮した等価幅厚比 R_{fw} で整理した場合で、各実験値とも耐荷力曲線の上側またはその付近に近づいており、フランジの幅厚比が大きい場合を含めて、局部座屈の影響があるときの柱の耐荷力をよく推定できている。

6.4 結 論

本章では、中心軸圧縮を受ける薄肉H形鋼柱の弱軸回りの連成座屈挙動及び耐荷力に関して、幅厚比や細長比を変化させて実験を行なった。得られた結果の主なものを挙げると次のようである。

- (1) フランジ及びウェブの幅厚比が小さい断面を持つ鋼柱は、最大荷重に達した後の変形能が大きい。また、局部座屈後もかなりの余剰耐力を保持している。
- (2) しかし、フランジの幅厚比が大きくなると最大荷重に達した後の強度の低下が早い。つまり、変形にねばりがなくその変形能も小さい。
- (3) フランジの幅厚比が大きい断面は、ウェブとフランジが連成して局部変形を生じ、部材全体の耐荷力挙動に大きく影響する。
- (4) 部材に連成座屈を考慮した場合、実験結果に比較して現行の道路橋示方書の部材の耐荷力の評価式は応力的には相当安全側となる。
- (5) 短柱の強度($Q=\sigma_{max}/\sigma_y^*$)から求まる仮想の降伏点応力 $Q\sigma_y^*$ を用いると、H形鋼柱の連成座屈強度をよく推定できる。
- (6) 実験結果からもわかるように、H形断面の構成板要素の連成局部挙動および部材全体との連成座屈挙動は初期たわみや溶接残留応力等の初期不整を考慮して弾塑性解析する手法が必要である。

なお、この連成座屈実験結果と結合解析法を用いた解析結果の比較検討については次章で述べる。

用いた記号

A	: 断面積
A_f	: フランジの断面積
A_w	: ウェブの断面積
b	: H形断面のフランジ幅
b_f	: H形断面のフランジ半幅
b_f/t_f	: フランジの幅厚比
E	: ヤング率
E_{st}	: ひずみ硬化係数
h	: H形断面のウェブ高
h_w	: H形断面のウェブ内側高
h_w/t_w	: ウェブの幅厚比
h_w/b_f	: H形断面のウェブ高とフランジ半幅の比
k	: 座屈係数
$k_{f\zeta}$: フランジ板を基準とした座屈係数
$k_{w\zeta}$: ウェブ板を基準とした座屈係数
L	: 部材長
L/r	: 細長比
P_{max}	: 実験鋼柱の最大荷重
Q	: 低減係数
r	: 弱軸回りの断面二次半径
R_f	: フランジ板の等価幅厚比($k=0.425$)
$R_{f\zeta}$: 弾性拘束がある場合のフランジ板の等価幅厚比($k=k_{f\zeta}$)
R_{fw}	: ウェブとフランジの連成を考慮した等価幅厚比
R_w	: ウェブ板の等価幅厚比($k=4.0$)
$R_{w\zeta}$: 弾性拘束がある場合のウェブ板の等価幅厚比($k=k_{w\zeta}$)
t	: 板厚
t_f	: フランジの板厚
t_w	: ウェブの板厚
α_f	: 比 a/b_f

α_w : 比 a/h_w
 β_w : $1 + \beta_w$
 δ_1 : 柱の部材としての最大初期たわみ
 δ_2 : ウェブの板としての最大初期たわみ
 ζ_f : フランジの拘束度係数
 ζ_w : ウェブの拘束度係数
 $\bar{\lambda}$: 等価細長比
 ν : ポアソン比
 π : 円周率
 σ_u : 最大引張応力度
 σ_{max} : 実験鋼柱の最大圧縮応力度
 σ_{rc} : 圧縮残留応力
 σ_y : 公称降伏点応力度
 σ_y^* : 平均降伏点応力度 (式(6.5))
 σ_{yf} : フランジ板の降伏点応力度
 σ_{yw} : ウェブ板の降伏点応力度
 σ_{ca} : 許容軸方向圧縮応度
 σ_{cag} : 示方書の表-2.2.2に示す局部座屈を考慮しない許容軸方向
 圧縮応力度
 σ_{cal} : 示方書の表-3.2.1, 表-3.2.2および表-3.2.3に示す局部座屈
 に対する許容応力度
 σ_{cao} : 示方書の表-2.2.2に示す局部座屈を考慮しない許容軸方向
 圧縮応力度の上限値
 $\sigma_{u,s}$: 現行の道路橋示方書の許容応力規定で計算した許容軸方向
 圧縮応力度 σ_{ca} を安全率倍して耐荷力表示したもの
 σ_{cr} : 式(6.7)の局部座屈応力度

参考文献

- 1) 日本道路協会:道路橋示方書・同解説, 1980年2月.
- 2) AISI : Specifications for the Design, Fabrication and Erection of Structural Steel for Buildings, 1969.
- 3) AISI : Cold-Formed Steel Design Manual, Pt. I - Specification, 1968, Pt. V-Commentary, 1970.
- 4) Skaloud, M. and Zörnerova, M. : Experimental Investigation into the Interaction of the Buckling of Compressed Thin Walled Columns with the Buckling of their Plate Elements, ACTA TECHNICA CSAV, No. 4, 1970.
- 5) Graves Smith, T. R. : Local Buckling of Thin-Walled Columns Part II, The Ultimate Strength of Locally Buckled Columns of Various Slenderness Ratios, CIRIA Research Report, No. 12, May, 1968.
- 6) DeWolf, J. T., Pekoz, T. and Winter, G. : Local and Overall Buckling of Cold-Formed Members, Proc. of ASCE, Vol. 100, No. ST10, Oct., 1974, pp. 2017-2036.
- 7) Braham, M, Rondal, J. and Massonnet, C. : Large Size Buckling Tests on Steel Columns with Thin-Walled Rectangular Hollow Sections, International Conference on Thin-Walled Structures, Univ. of Strathclyde, April, 1979, pp. 3-13..
- 8) Kalyanaraman, V., Pekoz, T. and Winter, G. : Unstiffened Compression Elements, Proc. of ASCE, Vol. 103, No. ST9, Sep., 1977, pp. 1833-1848.
- 9) Klöppel, K., Schmied, R. and Schubert, J. : Die Traglast mittig und außermittig gedrückter dünnwandiger Stützen mit Kastenförmigem Querschnitt im überkritischen Bereich unter Verwendung der nichtlinearen Beultheorie, Teil II : Experimentelle Untersuchungen, Vergleich der experimentellen und theoretischen Ergebnisse, Der Stahlbau, 38, H. 1, H. 3, 1969.
- 10) Ingvarsson, L. : Welded Box Columns of High Strength Steel, Bulletin No. 120, Dept. of Building Statics and Structural Engineering, The Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 1977.
- 11) 宇佐美勉・福本啓士・青木徹彦:溶接箱形断面柱の局部座屈と全体座屈の連成強度に関する実験的研究, 土木学会論文報告集, 第308号, 1981年4月, pp. 47-58.

- 12) 宇佐美勉・福本嘯士:鋼圧縮部材の連成座屈強度実験と有効幅理論による解析, 土木学会論文報告集, 第326号, 1982年10月, pp. 41-50.
- 13) 宇佐美勉・福本嘯士・青木徹彦・松川昭夫:補剛箱形断面偏心圧縮柱の強度に関する実験的研究, 土木学会論文集, 第350号/(I-2), 1984年10月, pp. 197-205.
- 14) 宇佐美勉・土屋信洋・福本嘯士:鋼圧縮部材の連成座屈挙動の理論的研究, 土木学会論文集, 第362号/(I-4), 1985年10月, pp. 303-312.
- 15) 山尾敏孝・崎元達郎:溶接箱形断面柱の連成座屈強度実験, 土木学会論文報告集, 第335号, 1983年7月, pp. 195-198.
- 16) 北田俊行:圧縮板の設計耐力力曲線の統一化について, 土木学会第40回年次学術講演会概要集, 第I部, 1985年9月.
- 17) 金井道夫:道路橋示方書 II 鋼橋編改訂の背景と運用, 橋梁と基礎, Vol. 15, No. 2, 1981年2月, pp. 11-15, No. 3, 1981年3月, pp. 6-13.
- 18) 伊藤文人:局部座屈と全体座屈の連成問題, 橋梁と基礎, Vol. 15, No. 2, 1981年2月, pp. 16-18.
- 19) Beedle, L. S. and Tall, L. : Basic Column Strength, Proc. of ASCE, Vol. 86, No. ST7, July., 1960, pp. 139-173.
- 20) Nishino, F. and Tall, L. : Residual Stress and Local Buckling Strength of Steel Columns, Trans. of JSCE, Vol. 1, Part 2, 1969, pp. 461-472.
- 21) 青木徹彦・福本嘯士:鋼柱の座屈強度のばらつきにおよぼす残留応力分布について, 土木学会論文報告集, 第201号, 1972年5月, pp. 31-41.
- 22) 藤田・譲・吉田宏一郎・高沢 誠:不整量を有する構造物の強度について- 初期撓みを有する柱の圧縮強度 -, 日本造船学会論文集, 第132号, 1973年, pp. 299-306.
- 23) 青木徹彦・福本嘯士:溶接H形鋼柱の座屈強度分布について, 土木学会論文報告集, 第222号, 1974年2月, pp. 37-48.
- 24) 山尾敏孝・崎元達郎:薄肉H形短柱の耐力挙動に関する実験的研究, 土木学会論文集, 第380号/(I-7), 1987年4月.
- 25) 山尾敏孝・崎元達郎:板要素とはり要素の結合による薄肉鋼構造物の有限変位弾塑性解析, 構造工学論文集, Vol. 32A, 1986年3月, pp. 139-173.
- 26) Yamao, T. and Sakimoto, T. : Nonlinear Analysis of Thin-Walled Structures by a Coupled Finite Element Method, Proc. of JSCE, No. 374/(I-6), Oct., 1986.
- 27) 山尾敏孝・佐藤啓治・荒牧 浩・崎元達郎:H形鋼柱の連成座屈強度に関する実験的研究,

第40回土木学会全国大会講演概要集, 第I部, 1985年9月.

28) 山尾敏孝・崎元達郎・平井一男・植野幹博・川森晋治:H形鋼柱の連成座屈強度実験, 土木学会第41回年次学術講演会概要集, 第I部, 1986年11月.

29) 山尾敏孝・崎元達郎:薄肉H形鋼柱の連成座屈に関する実験的研究,
土木学会論文集, 第380号/(I-7), 1987年4月.

表6.1 供試体の寸法諸元

Specimens	b(mm)	h(mm)	t(mm)	A(cm ²)	L(cm)	r(mm)	L/r	$\bar{\lambda}$	hw/t	b _f /t	R _w	R _f	R _{fw}
HA-51-50-12	111.4	235.5	4.4	19.78	122.9	22.66	54.2	0.604	51.5	12.2	0.948	0.689	0.916
HA-71-50-12	111.5	235.5	4.4	19.79	171.2	22.68	75.6	0.843	51.5	12.2	0.948	0.689	0.916
HA-91-50-12	111.5	236.5	4.4	19.83	220.3	22.66	97.2	1.083	51.8	12.2	0.954	0.689	0.921
HA-71-40-10	90.6	191.0	4.4	15.99	138.9	18.49	75.1	0.837	41.4	9.8	0.762	0.554	0.736
HA-71-50-12	112.0	235.7	4.4	19.84	171.3	22.81	75.1	0.837	51.6	12.2	0.950	0.689	0.918
HA-71-60-15	135.5	281.5	4.4	23.92	203.9	27.63	73.8	0.823	62.0	14.9	1.142	0.842	1.103
HA-71-40-20	180.2	189.0	4.4	23.57	301.1	42.78	70.4	0.784	41.4	20.2	0.761	1.168	0.955
HA-71-50-16	149.5	235.4	4.4	23.18	233.1	32.56	71.7	0.799	51.4	16.4	0.946	0.958	0.941
HA-71-50-20	185.0	234.8	4.4	26.16	299.1	42.17	70.9	0.790	51.5	20.5	0.948	1.190	1.015
HB-71-50-12	79.6	166.9	3.1	9.95	116.1	16.22	71.7	0.767	51.7	12.3	0.922	0.701	0.892
HB-71-50-16	104.5	166.0	3.1	11.51	162.0	22.71	71.4	0.764	51.2	16.3	0.914	0.917	0.908
HB-71-50-20	129.6	166.2	3.1	13.04	210.1	29.42	71.5	0.765	51.5	20.3	0.918	1.141	0.980
HB-71-60-20	131.4	198.8	3.1	14.21	204.1	28.82	70.9	0.759	61.7	20.6	1.102	1.153	1.073

A : cross sectional area
 L : member length
 r : radius of gyration (weak axis)
 $\bar{\lambda}$: see Eq.6.1 , R_w : see Eq.6.2
 R_f : see Eq.6.3 , R_{fw} : see Eq.6.4

表6.2 最大初期たわみと圧縮残留応力

Specimens	Max. Initial Deflection		Residual Stress σ_{rc} / σ_y^*	
	δ_1 / L	δ_2 / hw	web	flange
HA-51-50-12	1/4240	1/1620	0.53	0.38
HA-71-50-12	1/1490	1/490	0.53	0.38
HA-91-50-12	1/8160	1/1420	0.53	0.38
HA-71-40-10	1/4480	1/760	0.64	0.37
HA-71-50-12	1/2140	1/1330	0.53	0.38
HA-71-60-15	1/2960	1/1240	0.45	0.33
HA-71-40-20	1/3140	1/375	0.32	0.56
HA-71-50-16	1/4570	1/600	0.57	0.71
HA-71-50-20	1/4920	1/365	0.36	0.55
HB-71-50-12	1/1130	1/670	0.53	0.43
HB-71-50-16	1/2700	1/550	0.40	0.57
HB-71-50-20	1/1570	1/550	0.38	0.52
HB-71-60-20	1/1790	1/440	0.36	0.41

表6.3 実験結果

Specimens	P_{max} (KN)	σ_{max} (N/mm ²)	$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_y^*}$	$\frac{\sigma_{u,s}}{\sigma_y^*}$	$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{u,s}}$
HA-51-50-12	382	193	0.773	0.471	1.64
HA-71-50-12	319	161	0.644	0.394	1.63
HA-91-50-12	265	133	0.534	0.311	1.72
HA-71-40-10	239	150	0.584	0.614	0.95
HA-71-50-12	284	143	0.573	0.395	1.45
HA-71-60-15	326	136	0.546	0.276	1.98
HA-71-40-20	333	141	0.567	0.293	1.94
HA-71-50-16	333	144	0.575	0.411	1.40
HA-71-50-20	387	148	0.592	0.283	2.09
HB-71-50-12	149	150	0.679	0.449	1.51
HB-71-50-16	147	128	0.579	0.428	1.35
HB-71-50-20	153	125	0.566	0.322	1.78
HB-71-60-20	176	124	0.563	0.310	1.82

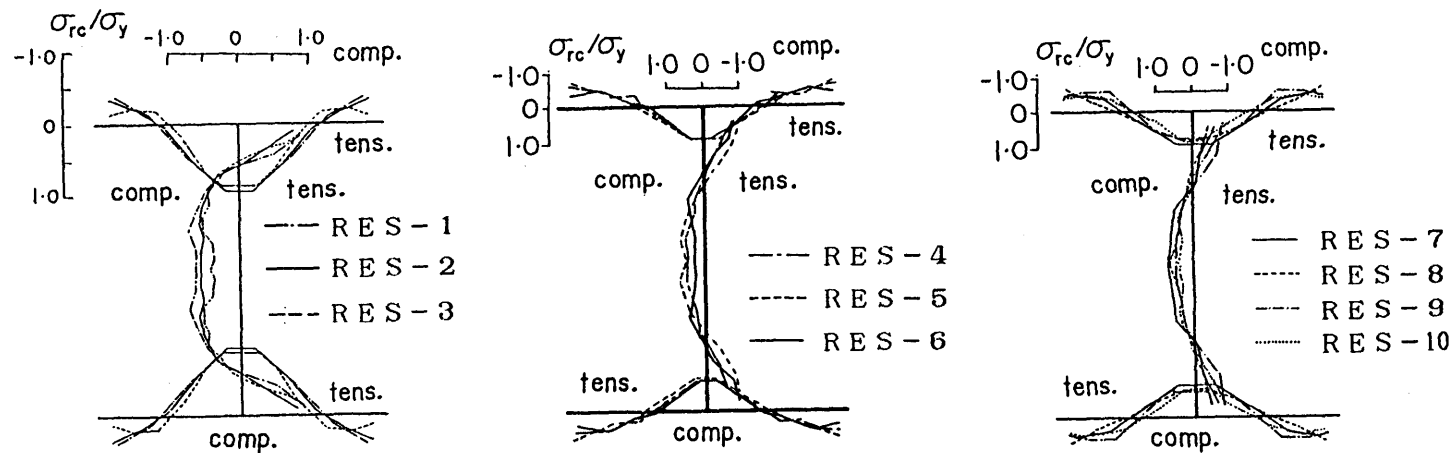


図6.1 修正後の残留応力分布図

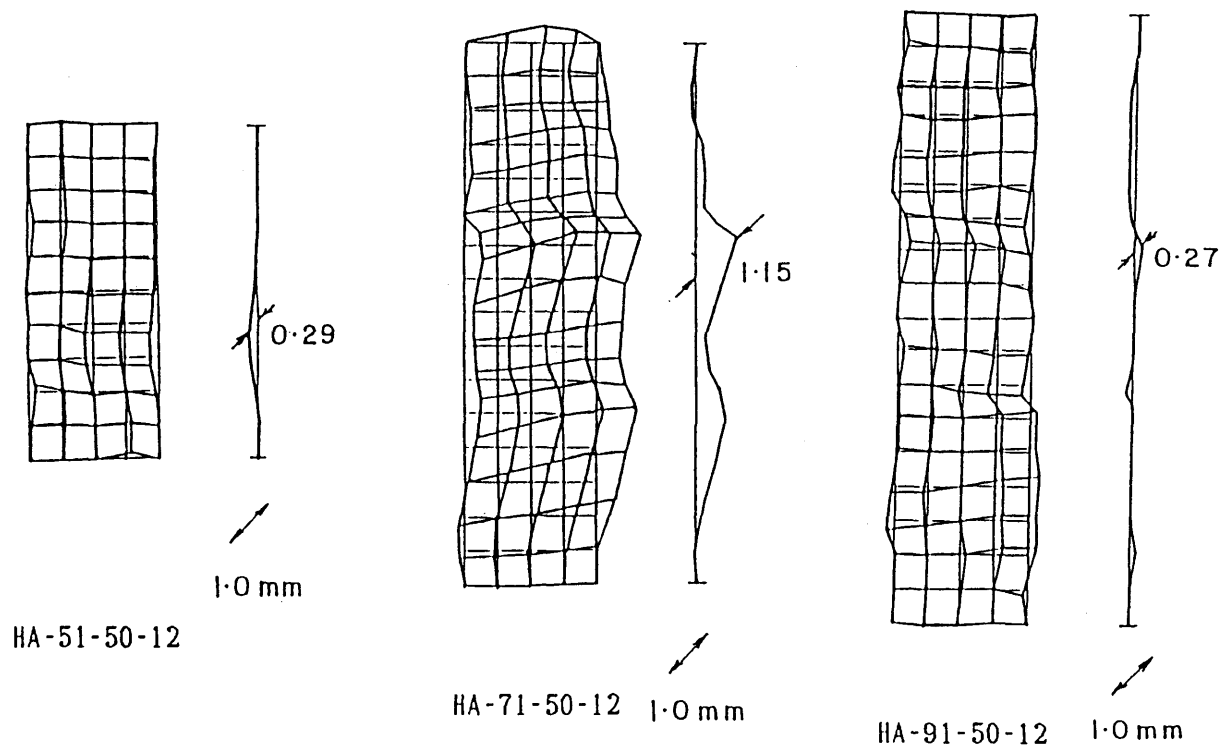


図6.2(a) 初期たわみ形状(HAシリーズ)

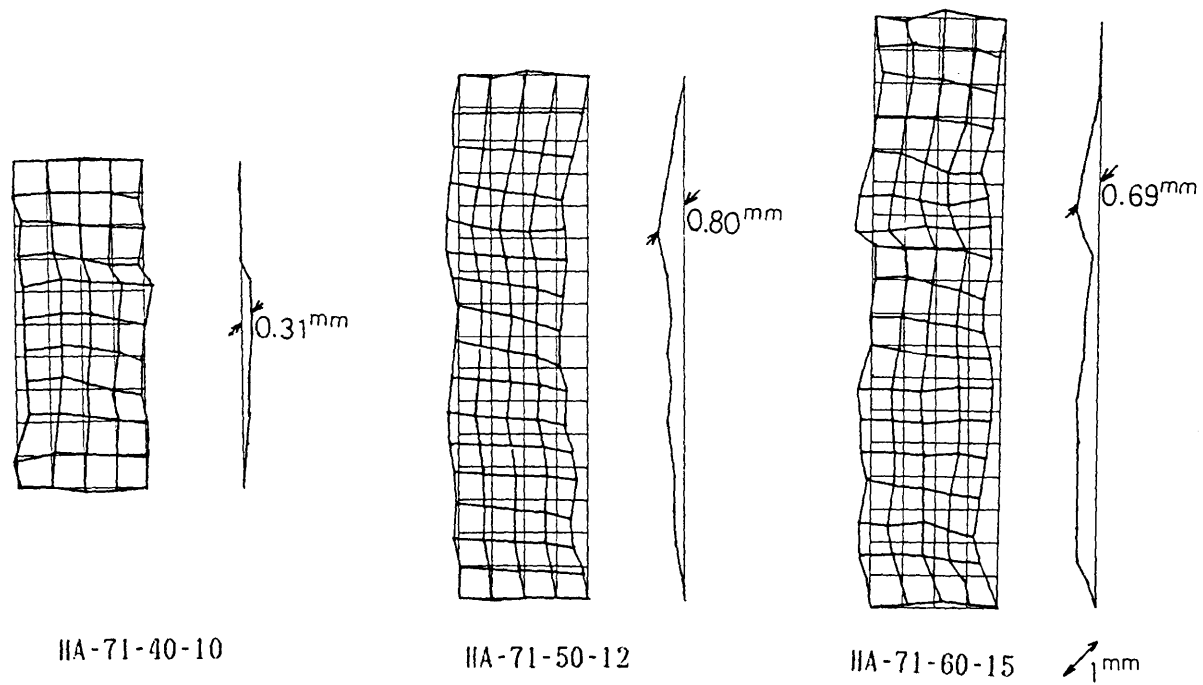


図6.2(b) 初期たわみ形状(HAシリーズ)

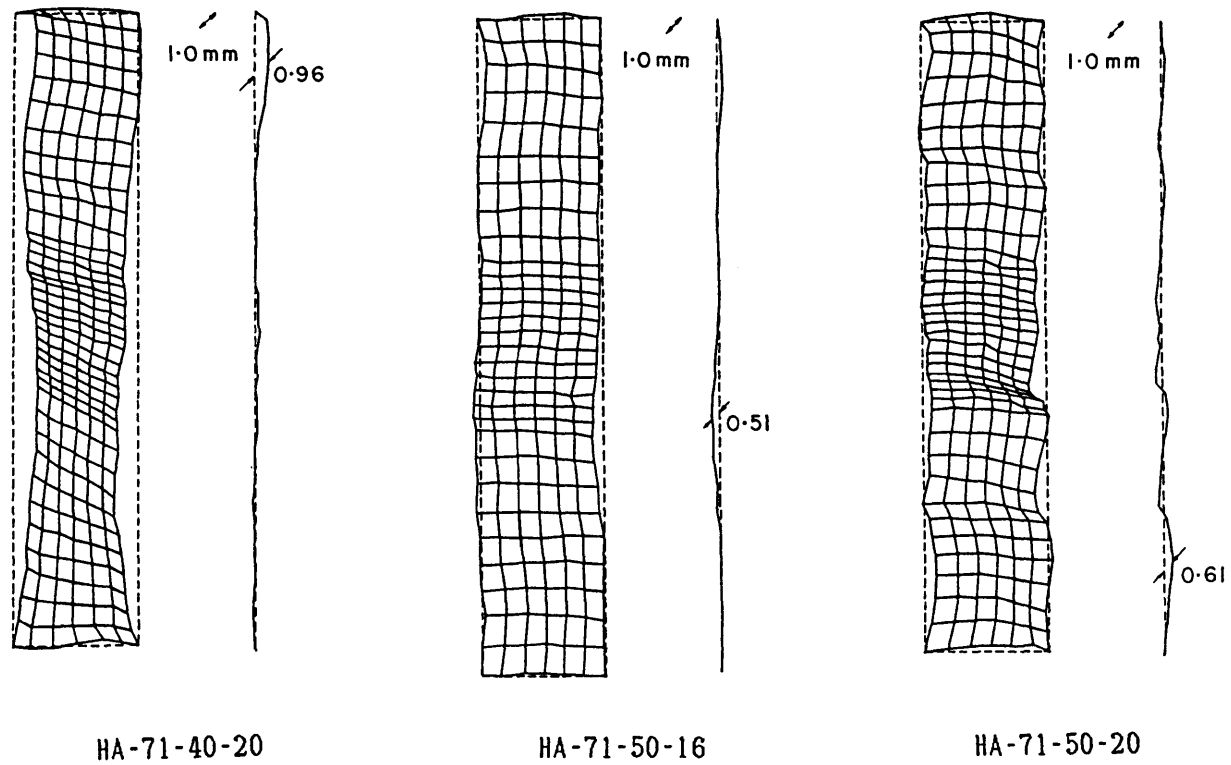


図6.2(c) 初期たわみ形状(HAシリーズ)

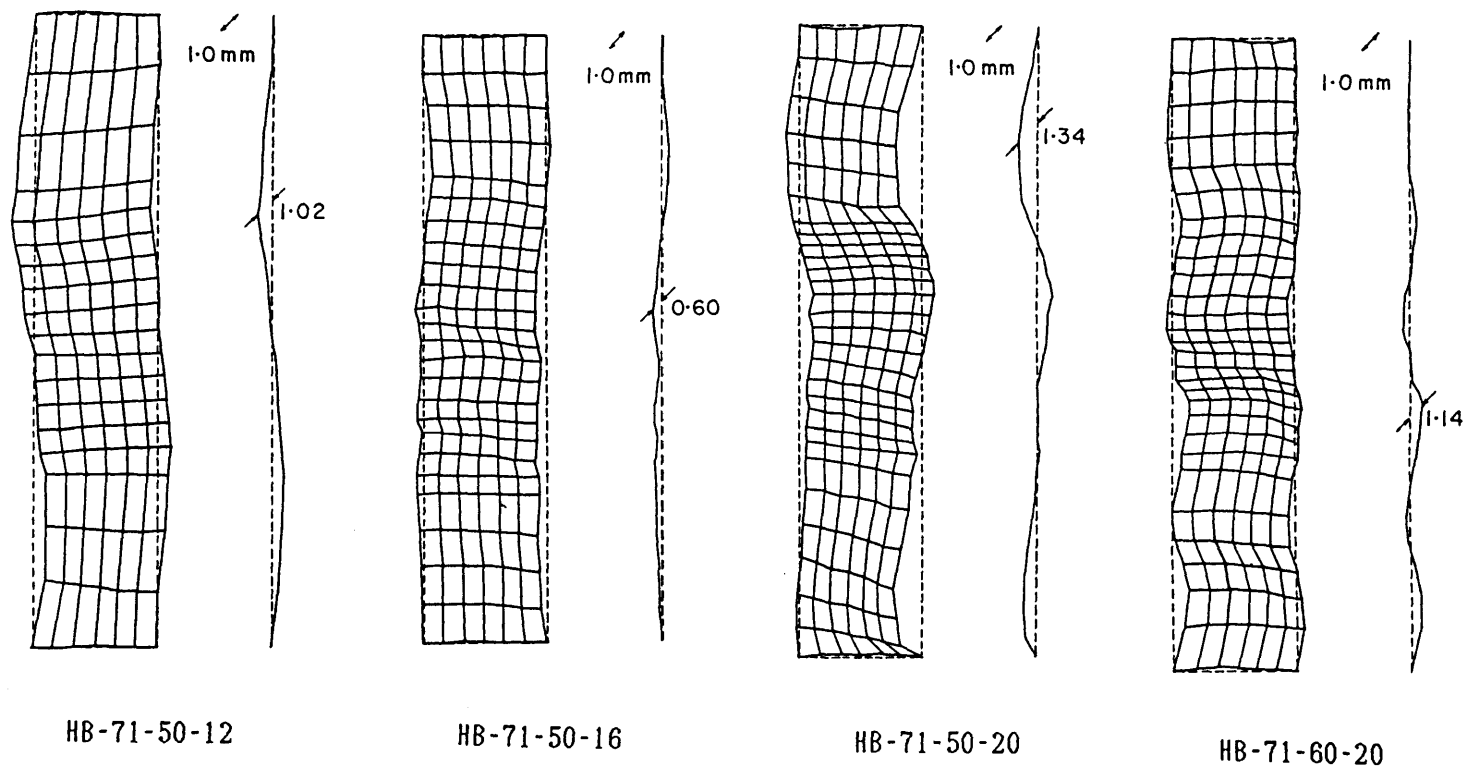


図6.2(d) 初期たわみ形状(HBシリーズ)

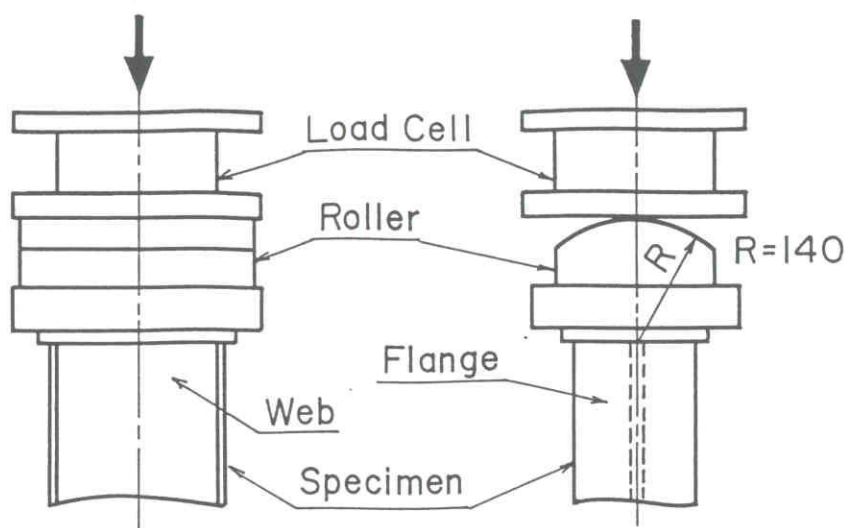


図6.3 載荷装置の端部構造

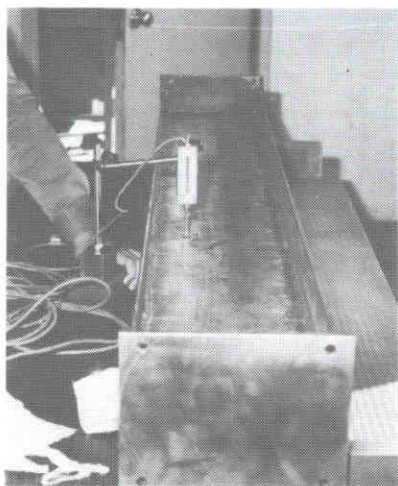


写真6.1 初期たわみの測定

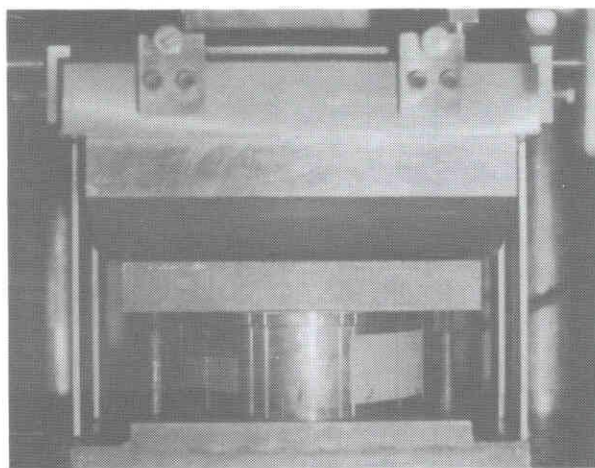
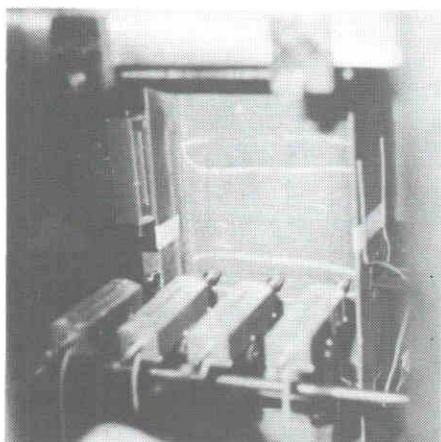
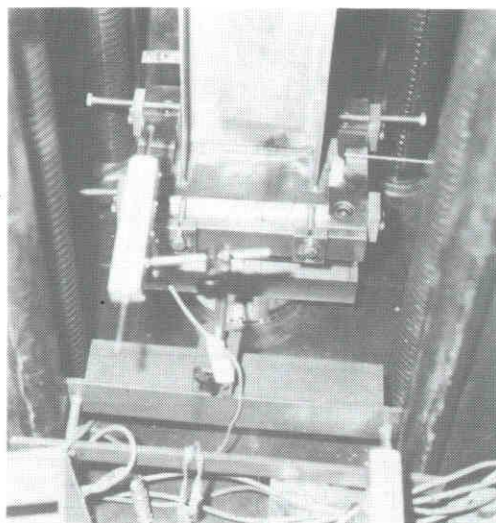


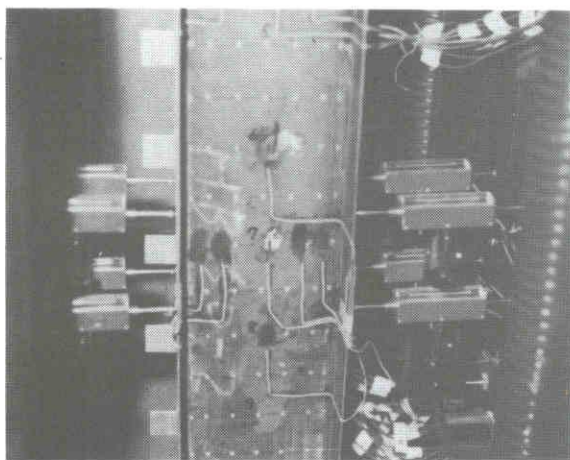
写真6.2 載荷装置（ローラー部）



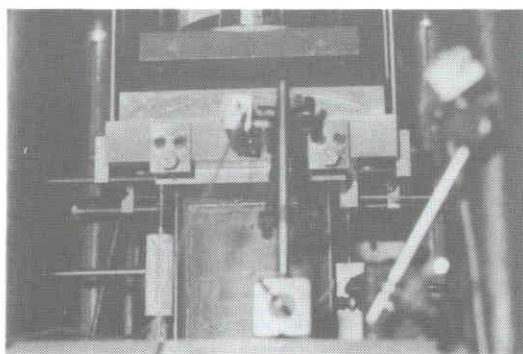
(a) 移動変位計



(b) 固定変位計



(c) フランジ部



(d) 軸方向

写真6.4 変位の測定

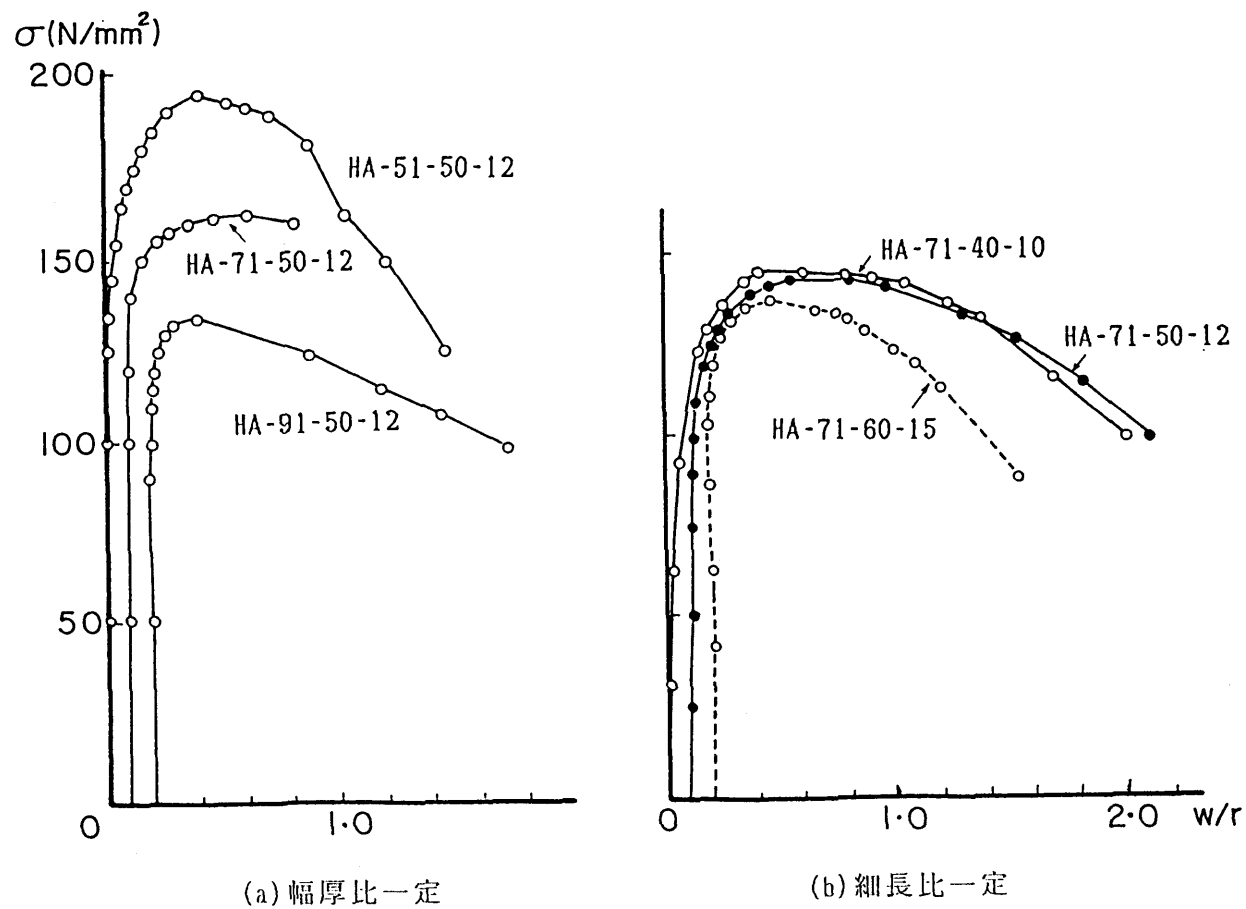


図6.5 平均圧縮応力－変位曲線

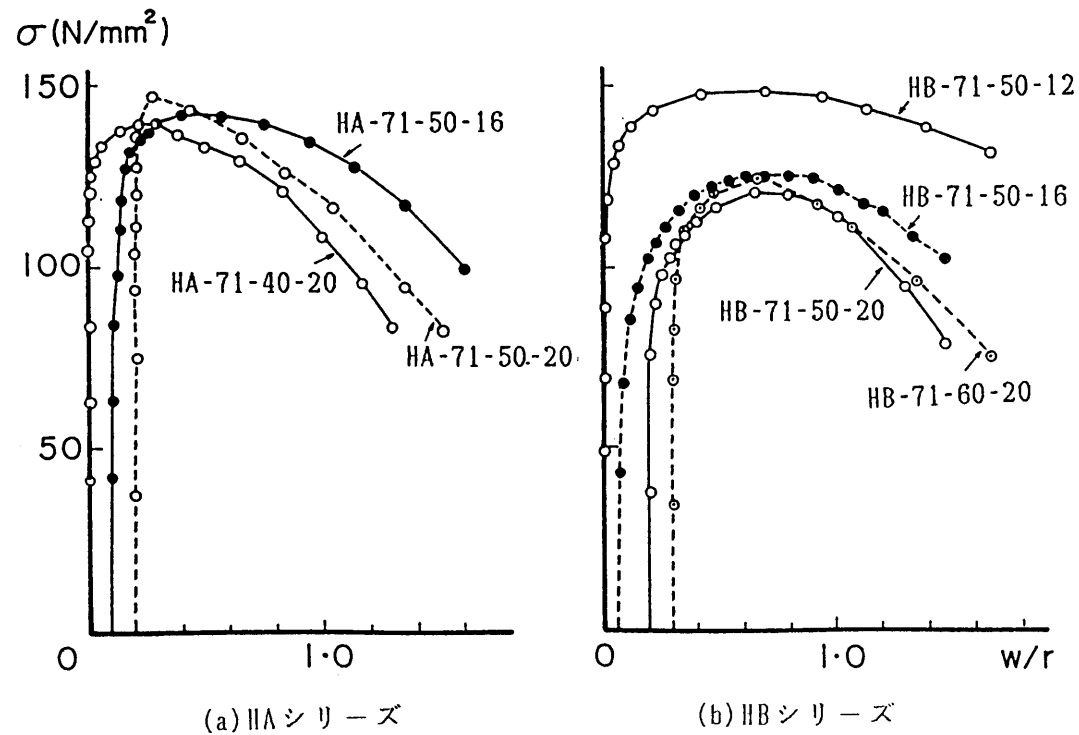


図6.6 平均圧縮応力-変位曲線 (細長比一定)

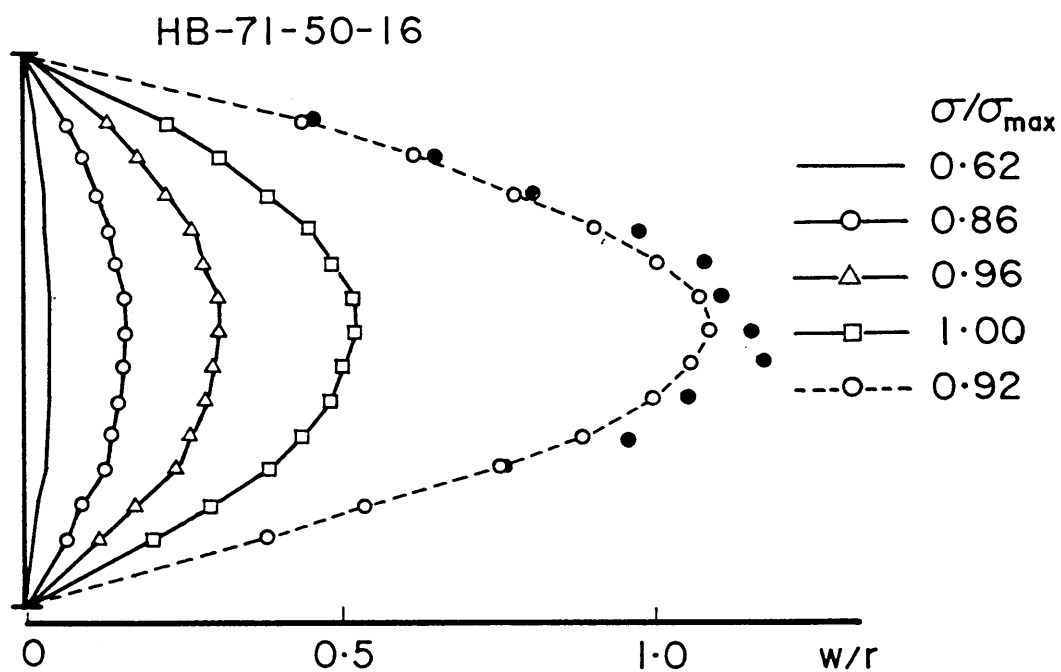
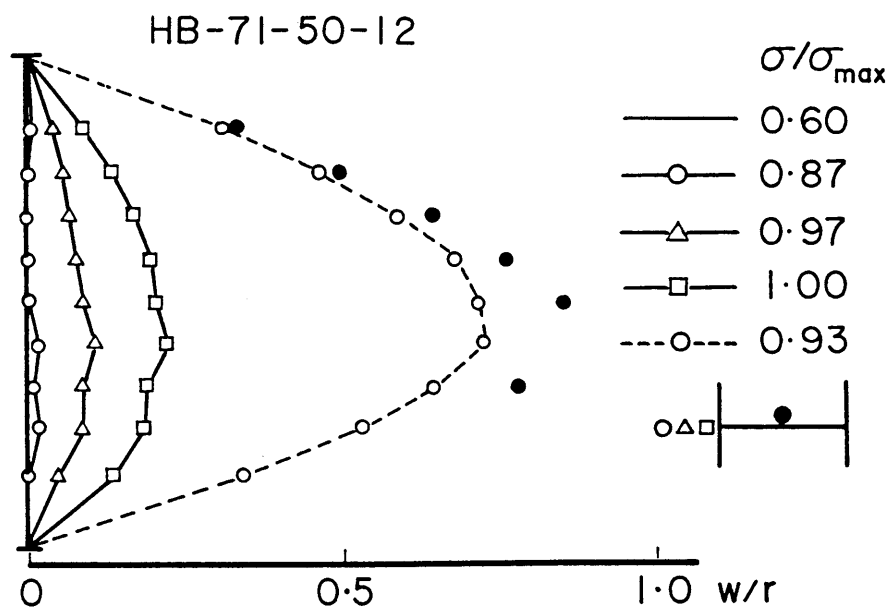


図6.7(a) 鋼柱の変位モード

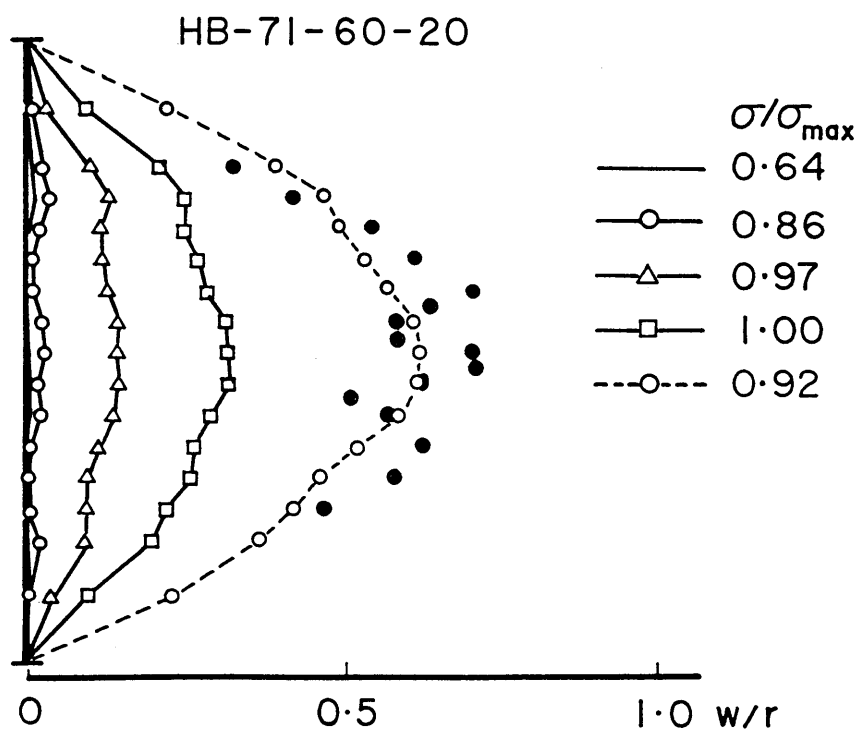
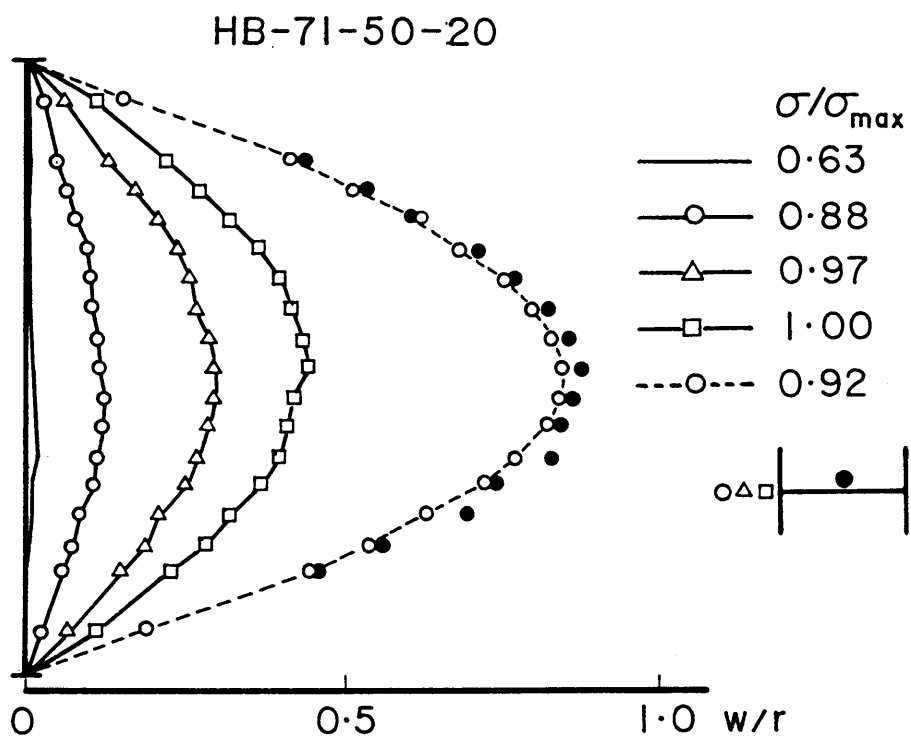
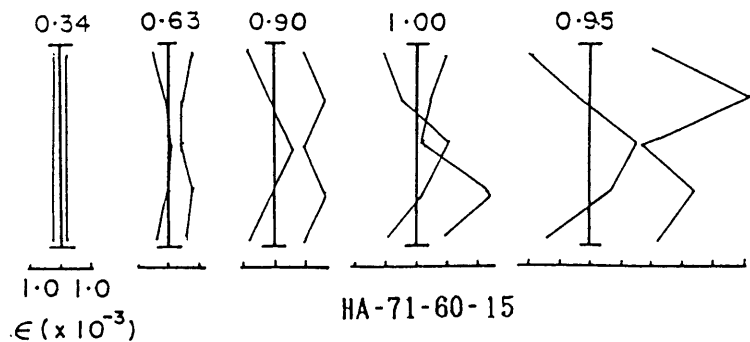
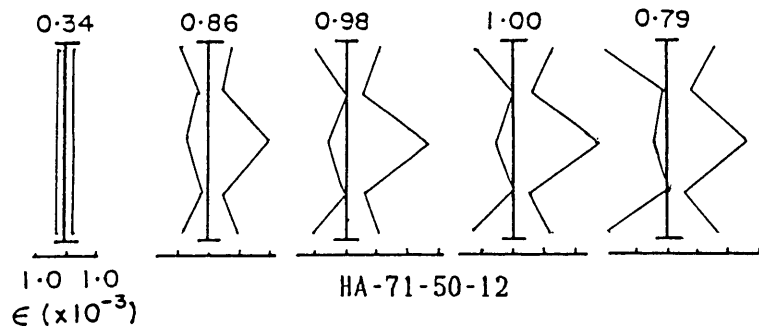
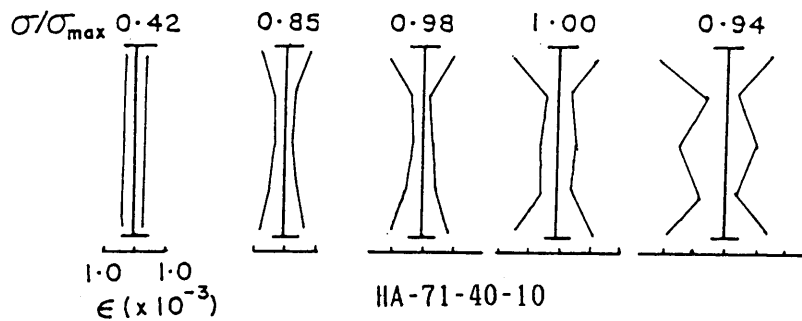
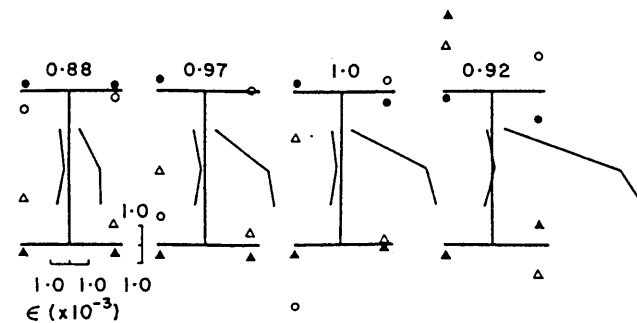
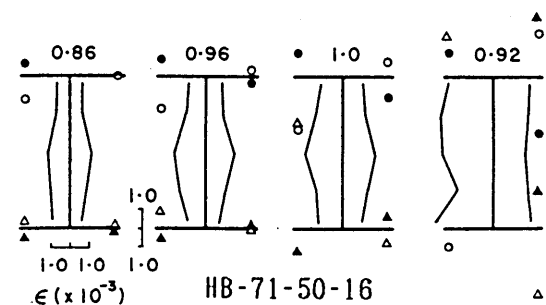
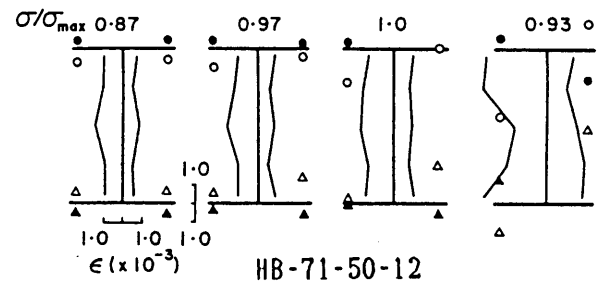


図6.7(b) 鋼柱の変位モード



(a) HA シリーズ



HB-71-50-20

(b) HB シリーズ

図6.8 荷重－ひずみ分布

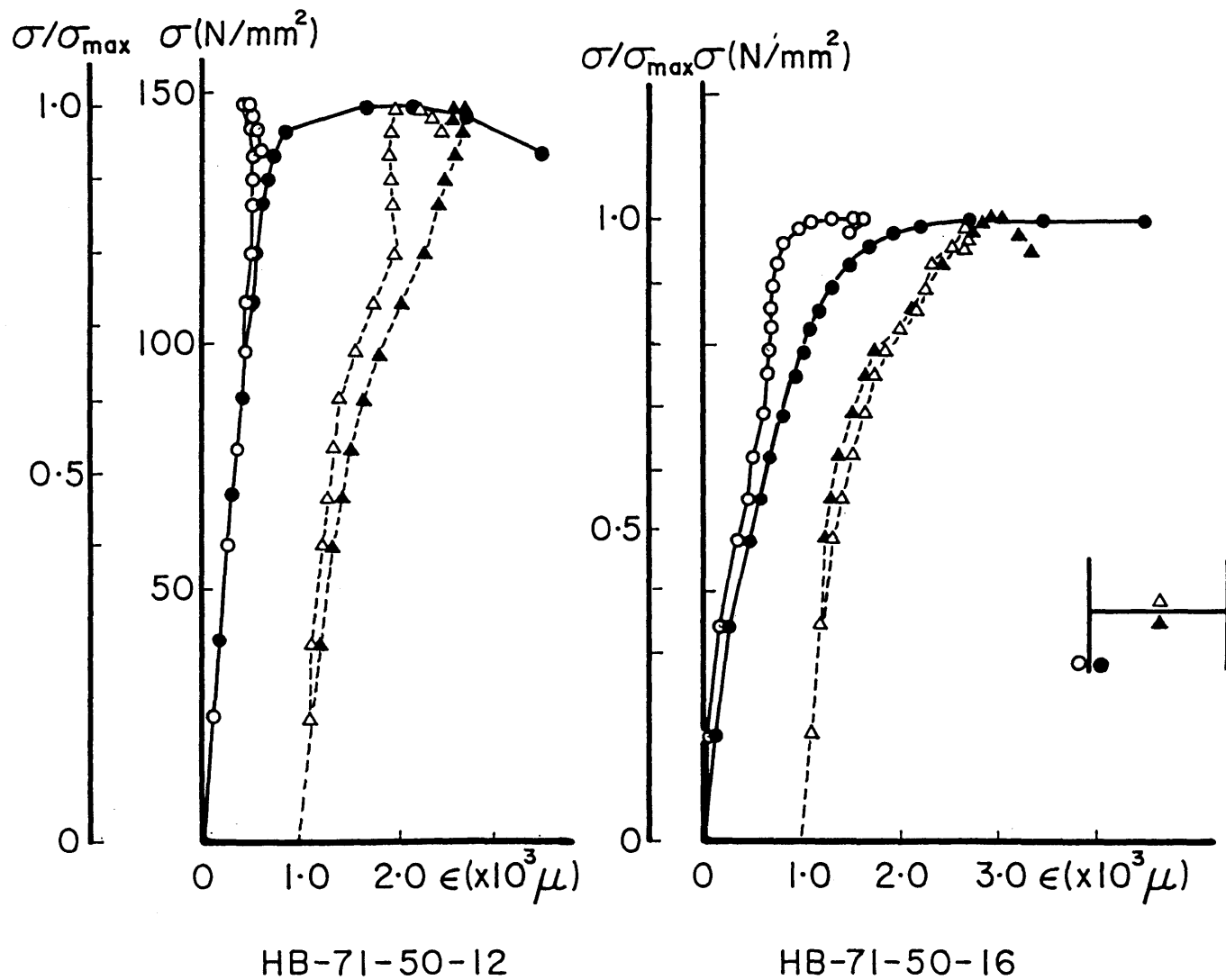


図6.9(a) 平均圧縮応力-ひずみ曲線

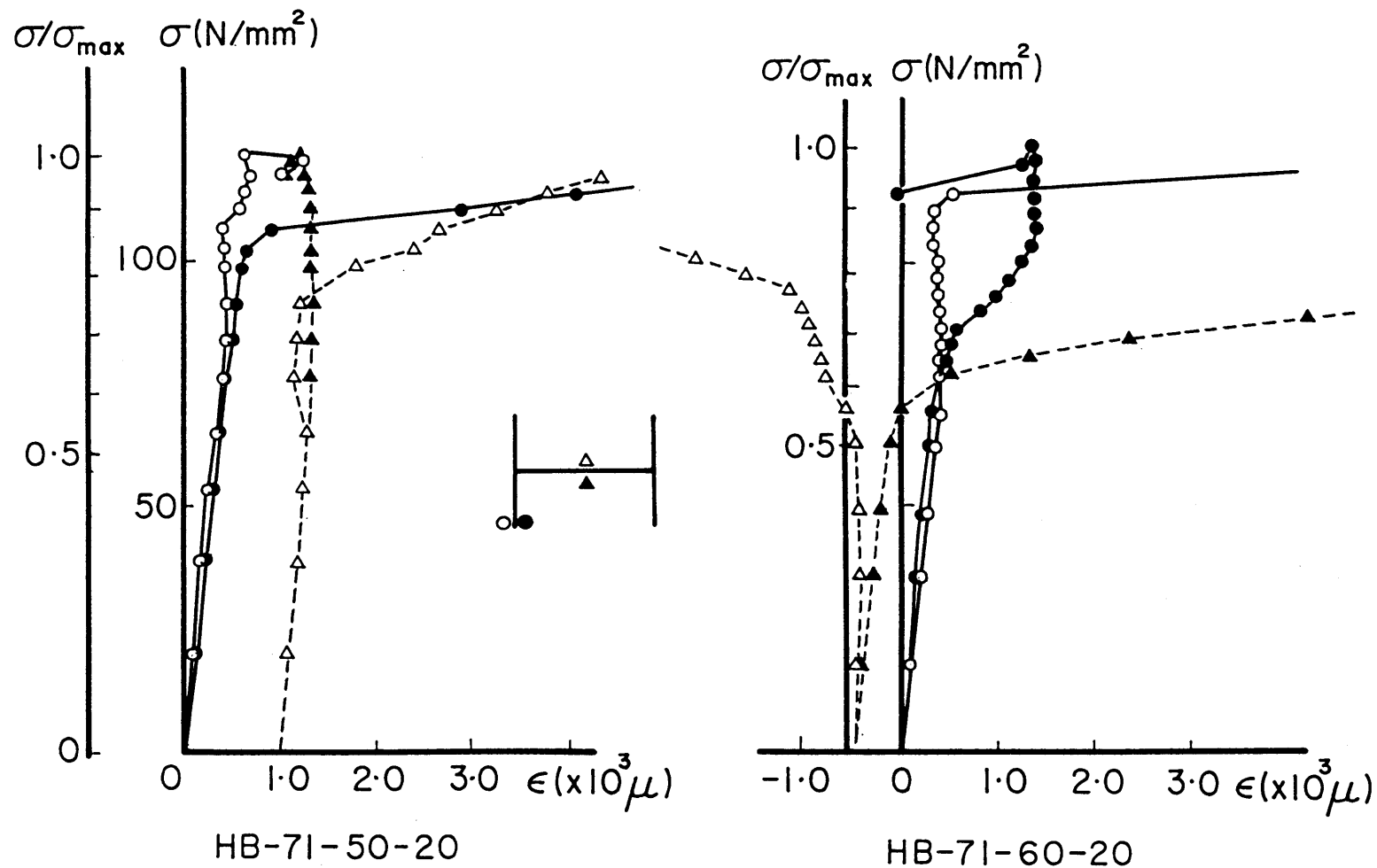
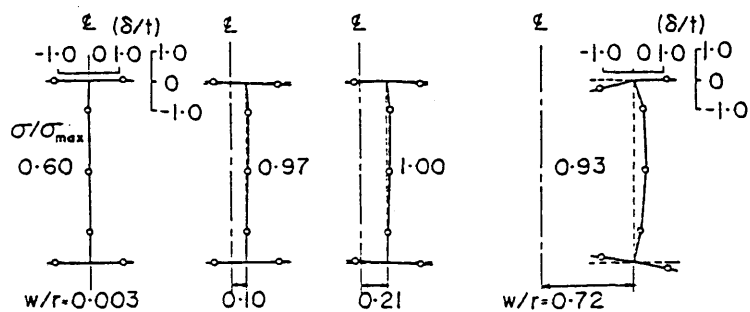
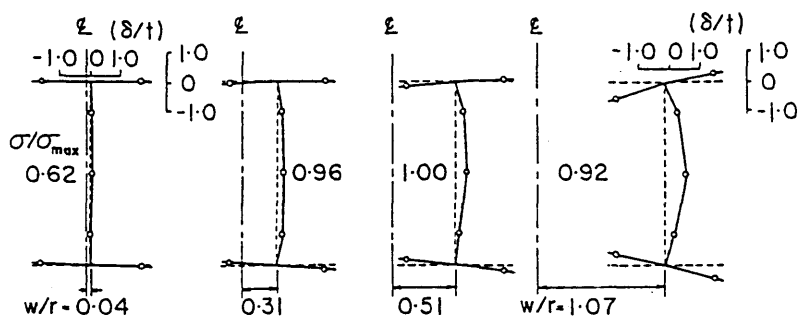


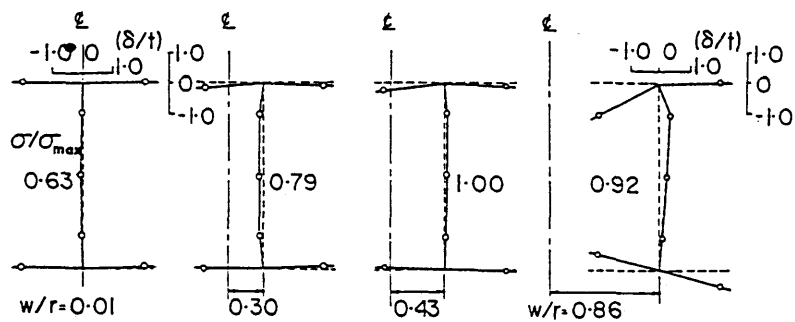
図6.9(b) 平均圧縮応力-ひずみ曲線



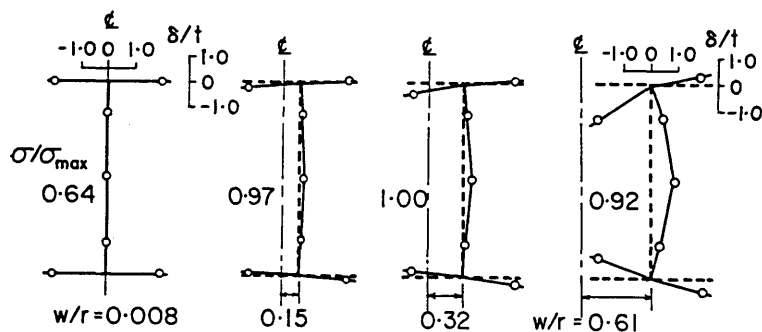
HB-71-50-12



HB-71-50-16

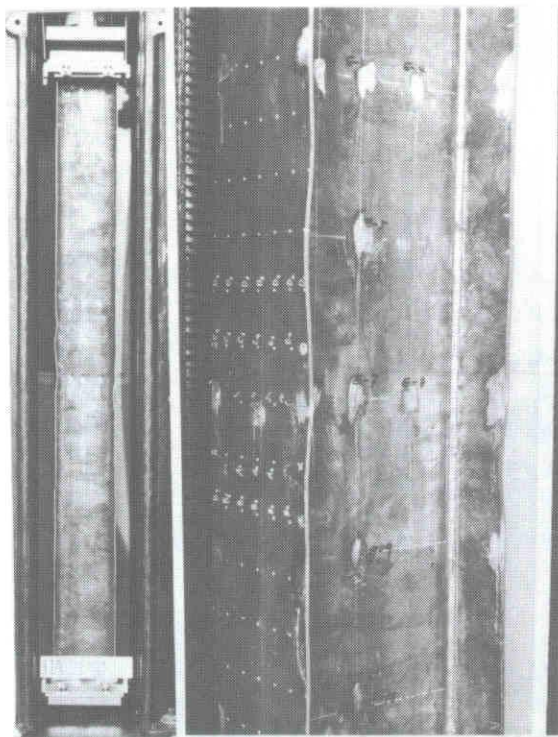


HB-71-50-20

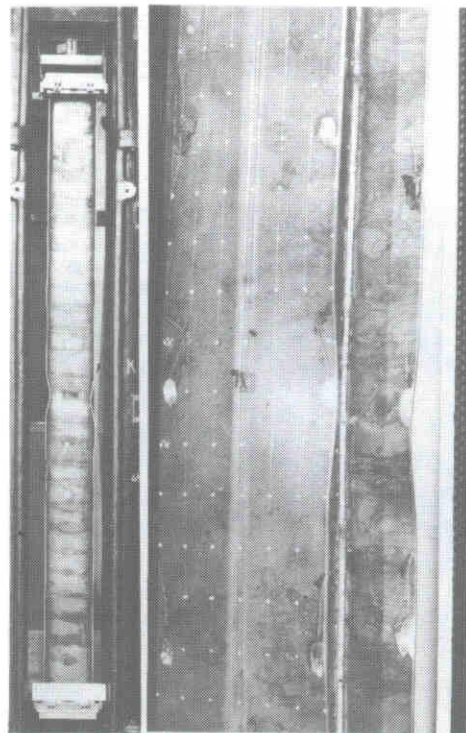


HB-71-60-20

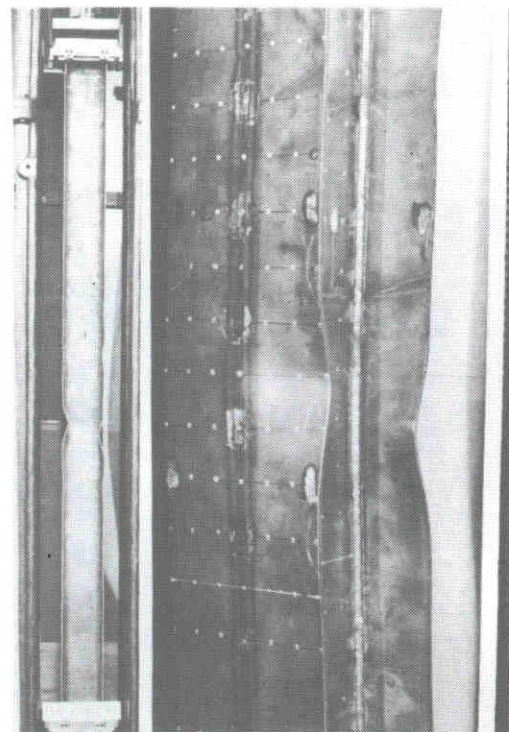
図6.10 断面の変形性状



HA-71-50-16

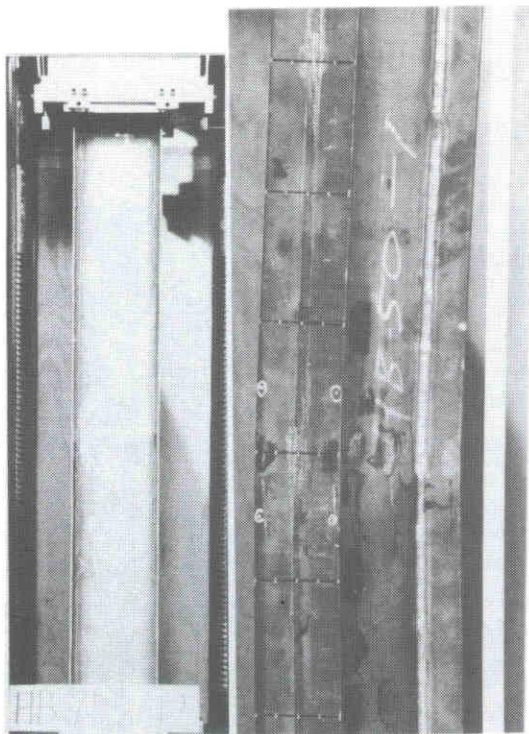


HA-71-50-20

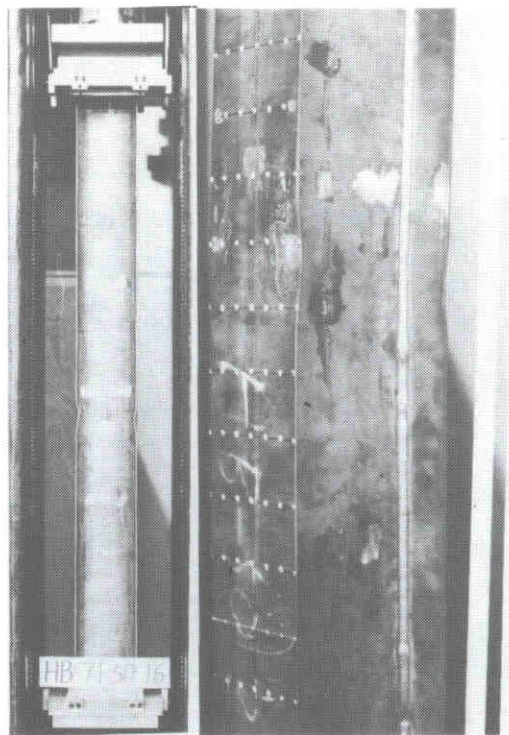


HA-71-40-20

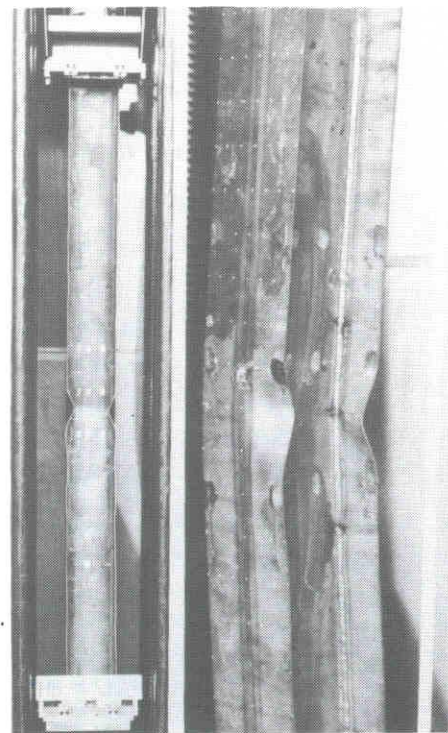
写真6.5(a) 載荷後の変形状態(HAシリーズ)



HB-71-50-12



HB-71-50-16



HB-71-50-20

写真6.5(b) 載荷後の変形状態(II Bシリーズ)

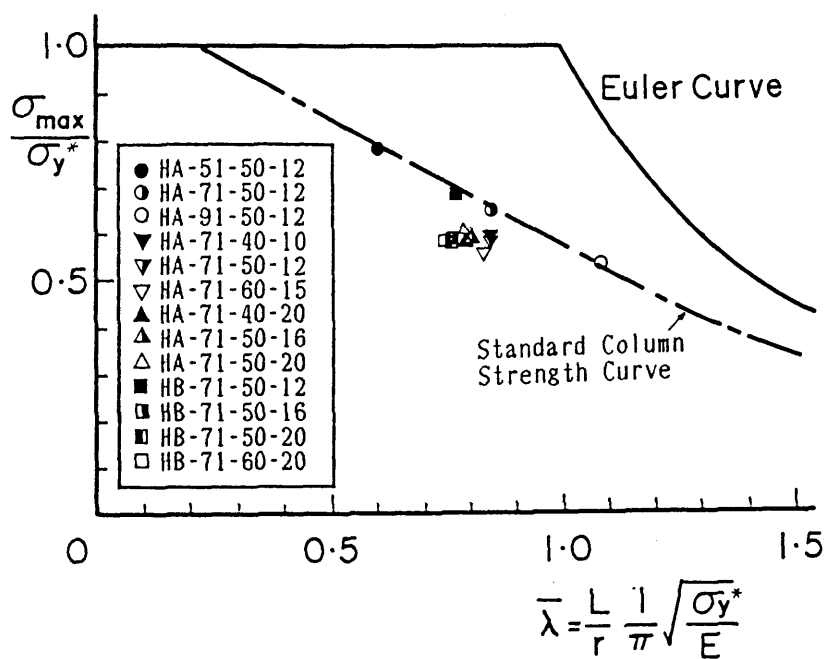


図6.11 最大平均圧縮応力度

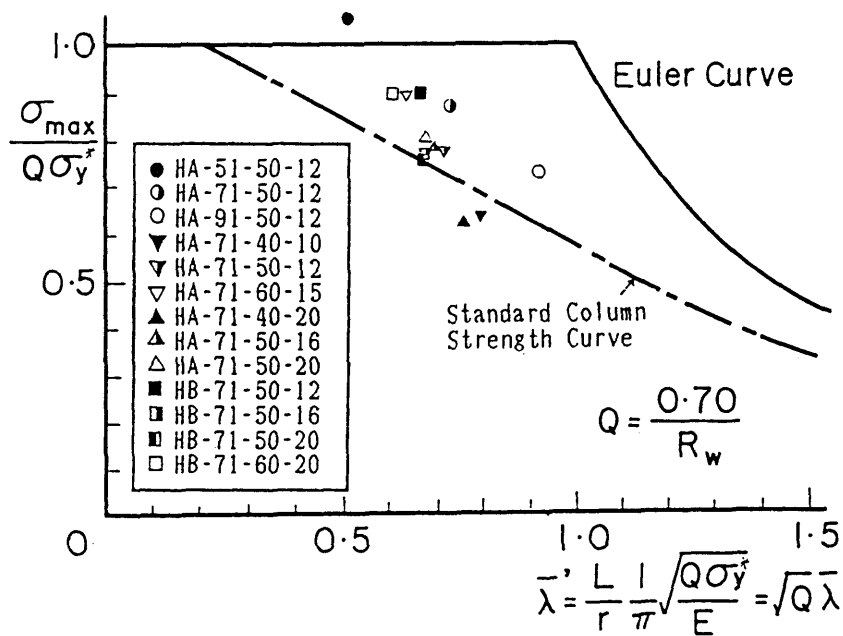


図6.12(a) 低減係数Qで整理した最大平均圧縮応力度

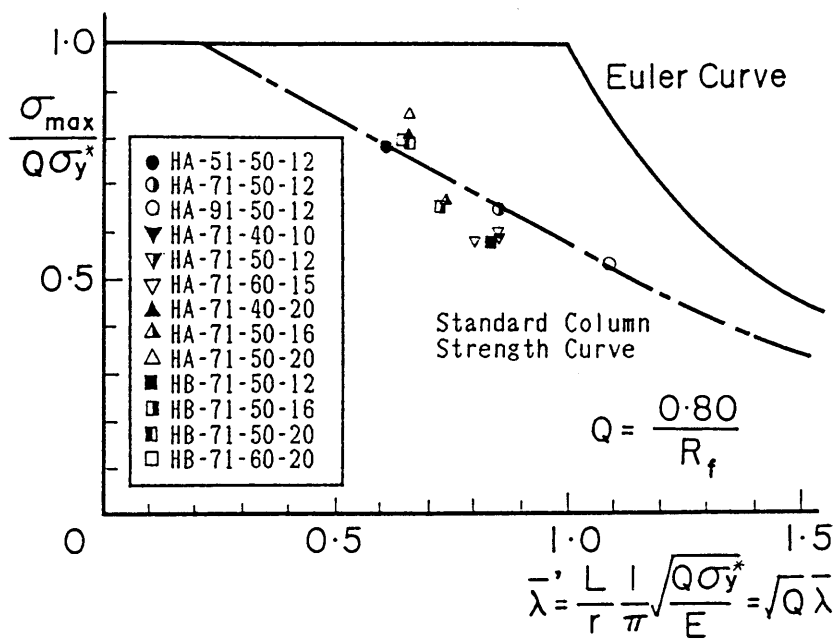


図6.12(b) 低減係数 Q で整理した最大平均圧縮応力度

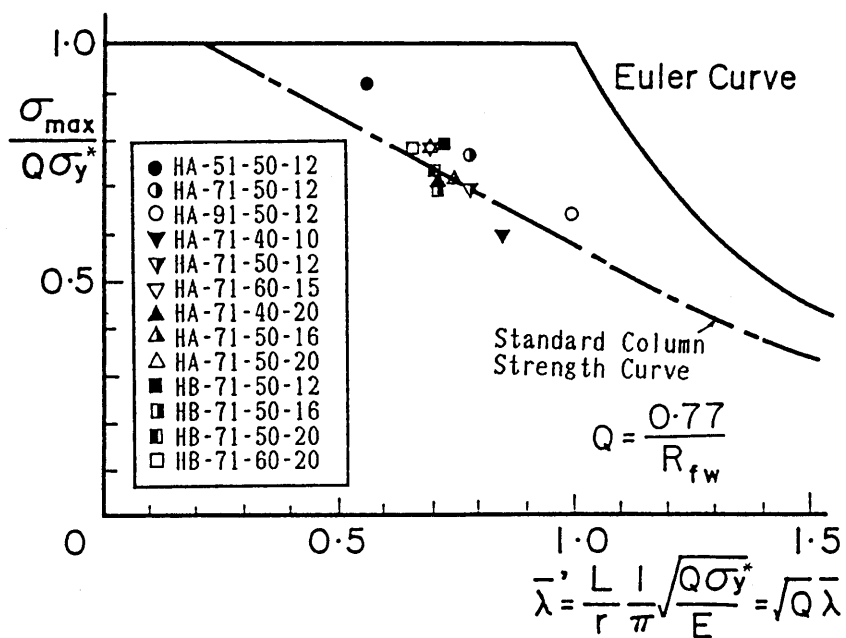


図6.12(c) 低減係数 Q で整理した最大平均圧縮応力度

第7章 薄肉鋼柱の連成座屈強度の算定式

7.1 概 説

鋼構造物の圧縮部材の設計において、現道路橋示方書¹⁾では降伏点応力度以下での局部座屈の発生を考慮した許容応力度式が採用されており、比較的幅厚比の大きい板要素の使用が認められている。従来、その構成板要素は作用する応力が、鋼材の降伏点応力度に達するまで局部座屈は生じないという条件があり、幅厚比の制限があった。通常の圧縮部材の設計においては、鋼材の降伏点応力度まで局部座屈を生じないような板厚を用いることが合理的である。しかしながら、交番応力として小さな圧縮応力を受ける部材、もしくは架設時のみに小さな圧縮応力を受ける部材において、鋼材の降伏点応力度まで局部座屈を生じないような板厚を用いることは不必要に厚い板を使用することになり、不経済な設計となると考えられる。また、高張力鋼材の使用においては、幅厚比は相当小さく制限され断面の薄肉化が妨げられており、高張力鋼の有効な利用がなされていなかったと思われる。

一方、我国のみならずアメリカ合衆国や西ドイツ等の諸外国でも鋼構造物の圧縮部材の設計において、降伏点応力度以下での局部座屈の発生を考慮した許容応力度式を採用している。アメリカのAISC設計示方書の規定²⁾は、1969年にCornell大学の研究グループが冷間加工部材に対して開発した方法³⁾を取り入れたものである。また、西ドイツでは、1978年制定のドイツ鋼構造委員会(DAST)の鋼板の座屈計算指針⁴⁾でも局部座屈と全体座屈の連成座屈強度の算定方法の規定があり、圧縮部材の設計に局部座屈を考慮した応力度式が採用されている。オーストラリア⁵⁾でもアメリカのAISIの規定と同様に、冷間加工鋼部材に対して連成座屈強度の規定がある。我国の現道路橋示方書においては、降伏点応力度以下での局部座屈の発生を考慮した許容応力度式を採用しているが、今までの理論的・実験的研究も少なく設計の実績も乏しいので、耐荷力評価式はかなり安全側の評価を行なっている。

このように、連成座屈に関する理論的・実験的研究は部材の耐荷力を厳密に評価し、経済的な設計をする上にも必要である。このような情勢から、宇佐美ら^{10)~14)}は一連の箱形断面柱の連成座屈実験と解析結果より中心軸圧縮及び曲げを受ける場合の設計公式を提案している。この設計公式はAISCの考え方を基にし、低減係数 Q を用いて整理している。また、中井ら¹⁵⁾も箱形断面柱の圧縮と曲げを受ける部材の連成座屈の強度式を提案している。

一方、H形断面部材については、冷間加工鋼部材に関する設計強度式が、Kalyanaraman⁹⁾らやHancock¹⁰⁾により提案されている。しかし、溶接H形断面部材の連成座屈挙動の実験的研究はほとんどなく、また、構成板要素の幅厚比の大きさにより、ウェブとフランジの相互の板要素が影響を考慮した連成座屈強度式はほとんどないのが現状である。

本章では、溶接H形断面鋼柱が中心軸圧縮を受ける場合の連成座屈の強度算定式の提案を行なう。まず、各国の中心縮圧縮柱の連成座屈の設計規定について述べる。次に、第4章で誘導した結合解析法を用いてH形鋼柱の連成座屈実験の解析を行ない、実験結果との比較検討を行なって解析法の妥当性を示す。さらに、溶接H形断面の中心軸縮圧縮柱の連成座屈を生じる場合の設計強度式を短柱および鋼柱の実験結果を基にして提案する。そして、幅厚比及び細長比等をパラメータに選んで、H形短柱および鋼柱のパラメータ解析を行ない、強度式と解析結果から得られた鋼柱の強度との比較検討し、提案式の妥当性について検証する。

7.2 既往の研究

ここでは、各国及び我国の局部座屈を考慮した中心軸圧縮部材の設計の規定および宇佐美らが提案している中心軸圧縮を受ける部材の設計公式について説明する。

1) AISCの考え方

AISC設計示方書の規定は、冷間加工部材に対するAISIの規定³⁾の考え方を採用している。そこでまず、AISIの規定の考え方について述べる。

補剛された板要素で構成された細長比が小さい柱は、降伏によって崩壊する。従って、板要素の厚さが十分に厚ければ、最大荷重は全断面積を A として

$$P = \sigma_y A \quad (7.1)$$

で与えられる。もし、板が十分に厚くなければ次式のWinterの有効幅 b_e の考え方^{17), 18)}を導入する。

$$\frac{b_e}{b} = \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_e}} (1 - 0.22 \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_e}}) \quad (7.2)$$

ここに、 σ_{cr} は局部座屈応力度であり、 σ_e は最大応力度である。よって

$$P = \sigma_y A_{eff}. \quad (7.3)$$

と表わされる。ここに、 A_{eff} は σ_y に対応する有効幅から計算される有効断面積である。この式は、板要素間の相互作用を考えていないが十分に精度のある結果を与える。式(7.3)の両辺を A で割ると

$$P/A = \sigma_y (A_{eff}/A) \quad (7.4)$$

ここで

$$Q_a = A_{eff}/A \quad (7.5)$$

とおくと、式(7.4)は

$$P/A = \sigma_y Q_a \quad (7.6)$$

一方、もし断面が補剛されていない板要素で構成されている場合には、局部座屈後の余剰耐力は期待できないので、最大荷重は

$$P = A \sigma_{cr} \quad (7.7)$$

あるいは

$$P/A = \sigma_{cr} \quad (7.8)$$

ここで

$$Q_s = \sigma_{cr}/\sigma_y \quad (7.9)$$

とおくと

$$P/A = Q_s \sigma_y \quad (7.10)$$

もし、断面が補剛されている板要素と補剛されていない板要素とで構成されている場合には、最大応力度は、補剛されていない板要素が局部座屈を生じる応力度であると安全側に仮定する。

逆に、補剛されている板要素の局部座屈応力度が補剛されていない板要素のそれよりも小さい時は、最大荷重は σ_{cr} に対して求まる有効断面積 A'_{eff} を用いて

$$P = \sigma_{cr} A'_{eff}. \quad (7.11)$$

と表わされる。式(7.4)と同様に

$$Q'_a = A'_{eff}/A \quad (7.12)$$

を導入し、式(7.9)を用いると式(7.11)は

$$P = Q'_a Q_s A \sigma_y = Q A \sigma_y \quad (7.13)$$

と与えられる。ここに、 Q を形状係数(form factor)あるいは低減係数と呼ぶ。式(7.1)と式(7.13)を比較すると、細長比が小さい柱の強度に及ぼす局部座屈の影響は、式(7.1)において σ_y のかわりに $Q\sigma_y$ をとることにより説明出来ることが分かる。

以上がAISIの規定である。そこで、中心軸圧縮柱の連成座屈強度はつぎのようにして求める。局部座屈がないときの中心軸圧縮柱の強度 σ_{cr}^p は、等価細長比 $\bar{\lambda}$ の関数 $f(\cdot)$ として次式で表わされる。

$$\sigma_{cr}^p = f(\bar{\lambda})\sigma_y \quad (7.14)$$

局部座屈を考えると、柱と同一断面の短柱の局部座屈強度 σ_{cr}^p すなわち式(7.13)より求まる $Q\sigma_y$ を σ_y のかわりに使用し、連成強度 σ_{cr}^p を求めれば次式となる。

$$\sigma_{cr}^p = Qf(\sqrt{Q}\bar{\lambda})\sigma_y \quad (7.15)$$

つまり、上述の方法がAISCの考え方である。しかしながら、この Q をどのようにして求めるかが問題となる。たとえば、計算による場合式(7.2)において σ_e が σ_y になるときに耐荷力になると仮定すると、 Q は等価幅厚比 R により次式で近似的に求めることができる。

$$\frac{\sigma_{cr}^p}{\sigma_y} = (1 - 0.22/R)/R \quad (7.16)$$

ここに、

$$R = \frac{t}{b} \sqrt{\frac{\sigma_y 12(1-\nu^2)}{E \pi^2 k}} \quad (7.17)$$

しかし、この考え方の問題点は、局部座屈後の急激な剛性低下の持つ影響を全く無視していることにある。また、柱の構成板を単一に考える場合、応力勾配のある板要素の座屈後の挙動が不明確である。そこで、もっと正確に Q を求めようとすれば短柱実験を行なえばよく、この場合次式で求められる。

$$Q = \frac{\sigma_{cr}^p}{\sigma_y} = \frac{P_u^p}{A\sigma_y} \quad (7.18)$$

しかしながら、常に実験により Q を求めるのは容易なことではない。

2) DAST指針012の考え方⁴⁾

降伏点応力度を基準に無次元化して表わした板の座屈応力度 σ_{cr}^p と柱の座屈応力度 σ_{cr}^p 、およびこれらの連成した座屈応力度 σ_{cr}^p の相関関係を図7.1に示す。図7.1の縦軸の横側に示してある曲線は、板の座屈応力度曲線であり次式で表わされる。

$$\frac{\sigma_{cr}^p}{\sigma_y} = \begin{cases} 1.0 & (R \leq 0.7) \\ 1.474 - 0.671R & (0.7 < R < 1.291) \\ \frac{1}{R^2} & (R \geq 1.291) \end{cases} \quad (7.19)$$

この、曲線はWinterの実験、Bilsteinの実験の理論解析結果から得られている。

また、横軸の下側にある曲線は鋼柱の耐荷力曲線を示し、ヨーロッパ鋼構造連合(ECCS)⁶⁾の座屈曲線のbラインに近似的に対応している。図7.1において、領域①では降伏に至るまで局部座屈も柱の座屈も生じない。領域②では局部座屈が先行し、④では柱の座屈が先行する。領域②と領域③の間の領域④が連成座屈を生じる部分で、その境界は R' と R'' で示される。なお、 R' は次式で表わされる。

$$R' = 0.1\bar{\lambda} + 0.68 \quad (7.20)$$

また、連成座屈を生じる領域の座屈強度 σ_{cr}^{cp} は次式で求める。

$$\frac{\sigma_{cr}^{cp}}{\sigma_y} = \left(\frac{1}{1+\bar{\lambda}^2 \cdot 8} \right)^{0.75} \quad (7.21a)$$

ここに、

$$\bar{\lambda}_* = \bar{\lambda} + \frac{(3.8-\bar{\lambda})(R-R')}{3.4+R-0.1\bar{\lambda}} \quad (7.21b)$$

$(\bar{\lambda} > 0.2, R' > R > R'')$

3) 我国の道路橋示方書の考え方

我国の道路橋示方書においては、局部座屈応力度が降伏点応力度を超える板要素で構成された基準耐荷力、つまり局部座屈を考えない柱の耐荷力を σ_{cr}^o としたとき、 σ_{cr}^o で局部座屈する板要素を用いた場合の連成座屈応力度 σ_{cr}^{cp} を次式で算定している。

$$\sigma_{cr}^{cp} = \sigma_{cr}^o (\sigma_{cr}^o / \sigma_y) \quad (7.22)$$

ここに、 σ_{cr}^o は板要素の局部座屈応力度

また、道路橋示方書では、局部座屈に対する許容応力度を定めるための基準耐荷力式すわち低減係数 Q は、次式で与えられる。

$$\frac{\sigma_{cr}^o}{\sigma_y} = \begin{cases} 1.0 & (R \leq 0.7) \\ \frac{0.5}{R^2} & (R > 0.7) \end{cases} \quad (7.23)$$

ただし、 R は等価幅厚比で、特に、 $R > 0.7$ の領域では、弾性座屈強度の1/2を基準耐荷力としている。これは、初期不整や残留応力または他の要因により、 $0.7 < R < 1.3$ の領域では実験値が弾性座屈の理論値を下回ること、およびより幅厚比が大きい領域では、低い応力度で面外たわみや剛度の低下が生じやすいことを考慮している。

そこで、式(7.22)を式(7.15)と同じように Q と f を使って表わすと次式となる。

$$\sigma_{cr}^{cp} = Qf(\bar{\lambda})\sigma_y \quad (7.24)$$

すなわち、示方書では局部座屈のないときの柱の強度 $f(\bar{\lambda})$ を単純に Q 倍して連成強度を求

めている。このことから、示方書はかなり安全側の値を与える。

4) 宇佐美らの提案設計強度式

宇佐美らは一連の溶接箱形断面を有する柱の連成座屈実験を行なって、局部座屈を考慮した中心軸圧縮柱の設計強度式を提案している。これは、AISCの考え方を基にして次式のように表わされる。

フランジ幅 b 、ウェブ幅 d 、フランジ厚 t 、ウェブ厚 w の箱形断面を考え、次のような設計公式を導いている。

a) 降伏点応力度の低減係数 Q を次式により求める。

$$Q = 0.7/R \leq 1.0 \quad (7.25)$$

ここに R は次に示す R_f と R_w の小さい方の値とする。

$$R_f = \frac{b}{t} \sqrt{\frac{\sigma_y 12(1-\nu^2)}{E 4\pi^2}} \quad (7.26)$$

$$R_w = \frac{d}{w} \sqrt{\frac{\sigma_y 12(1-\nu^2)}{E 4\pi^2}} \quad (7.27)$$

b) 中心軸圧縮柱の強度 σ_{max}^{cp} は次式より求まる。

$$\frac{\sigma_{max}^{cp}}{Q\sigma_y} = \begin{cases} 1.0 & (\bar{\lambda}' \leq 0.2) \\ 1.109 - 0.545\bar{\lambda}' & (0.2 \leq \bar{\lambda}' \leq 1.0) \\ 1.0/(0.773 + \bar{\lambda}'^2) & (\bar{\lambda}' \geq 1.0) \end{cases} \quad (7.28)$$

ここに

$$\bar{\lambda}' = \sqrt{Q} \bar{\lambda}, \quad \bar{\lambda} = \frac{L}{r} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}} \quad (7.29)$$

宇佐美らはこの設計強度式の妥当性について、数値解析から得られた強度との比較を行なって検討している。式(7.25)の低減係数 Q は実験より求められた平均曲線であるが、短柱の解析強度はこれより多少下回った。また、式(7.28)の柱の強度と計算結果との誤差が数%内であり、ほぼ妥当であることが示されている。

また、図7.2は上で述べた局部座屈強度 σ_{cr}/σ_y と等価幅厚比 R の関係を示したものである。

7.3 連成座屈実験の解析と考察

7.3.1 解析方法

第4章で誘導した結合解析法を使用して連成座屈実験の解析を行なう。解析モデルは、部材中央点を中心に部材軸方向に左右対称の場合を考え、全部材長の半分を板要素一はり要素（結合点は一ヶ所）とし、実験ではY軸回りが両端ヒンジなので、図7.3に示すようなモデル化を行なった。また、モデルの板要素部分の断面の幅方向の分割数は、フランジ部は6分割、ウェブ部は4分割および板厚方向に6分割した。はり要素部分は、軸方向に8分割、断面内はフランジ、ウェブとも幅方向に8分割、板厚方向に8分割の計192分割している。なお、 DL は板要素部分の長さである。以下の解析において、材料特性は第5章の図5.1に示す引張試験の結果を用いたが、応力－ひずみ関係は図5.8に示すbi-linear形とし、降伏後の接線係数 E_{st} として3.2mm材で 0.765KN/mm^2 、4.5mm材で 0.967KN/mm^2 を使用した。残留応力は第6章の図6.1に示すような測定値を修正した分布を使用した。また、部材の初期たわみは、その最大初期たわみの大きさは表6.2に示す実測値とし、初期たわみ形状は半波の正弦関数を仮定した。なお、圧縮荷重は荷重点において変位制御により与えた。

7.3.2 解析と実験結果の比較検討

第4章では局部座屈が生じない断面寸法の解析モデルを使用した。ここでは連成座屈実験供試体を解析モデルに選んで解析を行なう。そこで、板要素部分の軸方向の分割数について調べた。解析精度は、ひずみ一定要素を用いてどの程度板の面内曲げを近似できるかという点に関係している。そこで、実験供試体HA-71-50-12を用いて、 DL の長さと板要素の軸方向分割数を変化させて解析した。なお、初期たわみはこの解析のみ最大 $L/1000$ 正弦波半波形で与え、 DL は20cm(0.23 L)と30cm(0.35 L)の2種類を使用した。

図7.4は縦軸に最大荷重を降伏点応力度で無次元化し、横軸にはフランジの幅 b と図中に示す板の細要素の軸方向の長さ l_e の比の関係を示したものである。これより、フランジの l_e/b が小さくなるほど両解析値は近づいており、 l_e/b が0.1程度であれば DL の長さに関係なく十分よい結果が得られると考えられる。しかし、 DL の長さが長くなると分割による節点数も増加し、計算時間も増大するので効率が悪いと思われる。このことより、面内曲げを受ける板要素の軸方向の分割方法と耐荷力の関係が明らかになった。また、この結果より、実験解析では板要素部分の軸方向の分割方法として、 l_e/b を0.1～0.15とし、 DL は

0.2～0.3Lとして解析した。

図7.5は第6章の実験供試体の解析結果で、(a)はHAシリーズの幅厚比を一定にして細長比を変化させた3体で、(b)はHBシリーズのウェブの幅厚比を一定にしてフランジの幅厚比を変化させた3体の荷重－変位曲線を示したものである。図7.5の縦軸は平均圧縮応力 $\sigma(=P/A)$ を、横軸は、部材中央ウェブ中心点Bの横たわみ w を板厚 t で無次元化したものである。HAシリーズでは、最大荷重および最大荷重前後の変位性状はよく対応しており、細長比の変化に伴って変位挙動の違いがよく解析できていることがわかる。また、HBシリーズでは最大荷重が多少大きい結果もあるが、最大荷重前後の変位性状はよく対応している。フランジの幅厚比が大きいHB-71-50-20供試体では、最大荷重に達した後の変形挙動はよく解析できていると思われる。また、HB-71-50-16供試体は載荷の初期の段階からたわみが生じており、第6章に述べたように問題があったと思われる。図7.6は、解析と実験によって得られた最大荷重をそれぞれ $(P_{max}/P_y)_{anal.}$ および $(P_{max}/P_y)_{exp.}$ として比較したものである。結合解析によって得られた結果は実験値とよく一致していることがわかり、本解析法の妥当性が示された。

これらの解析結果より、最大荷重および変形挙動は実験結果とよい対応を示すことがわかった。また、板要素部分の軸方向分割数と耐荷力の関係が明らかになった。

7.4 連成座屈強度の算定式の提案と検討

7.4.1 連成座屈強度の算定式の提案

第5章および第6章での薄肉H形断面の短柱と鋼柱の耐荷力実験の結果より得られた、中心軸圧縮を受ける部材の連成座屈強度の算定式について述べる。

図7.7(b)に示すH形断面を考える。短柱強度実験より低減係数 Q は次式で与えられる。

$$Q = 0.77/R_{fw} \leq 1.0 \quad (7.30)$$

ここに R_{fw} は次式より求まる。

$$R_{fw} = \frac{h_w}{t_w} \sqrt{\frac{\sigma_y^* 12(1-\nu^2)}{E \pi^2 k_{w\zeta}}} \quad (h_w t_f / b_f t_w > 3.07) \quad (7.31a)$$

$$= \frac{b_f}{t_f} \sqrt{\frac{\sigma_y^* 12(1-\nu^2)}{E \pi^2 k_{f\zeta}}} \quad (h_w t_f / b_f t_w \leq 3.07) \quad (7.31b)$$

ただし

$$\sigma_y^* = \sigma_{yf}(2A_f/A) + \sigma_{yw}(A_w/A) \quad (7.32)$$

なお、 σ_{yf}, A_f および σ_{yw}, A_w はそれぞれフランジの降伏点応力度、断面積およびウェブの降伏点応力度、断面積で $A=2A_f+A_w$ となる。 k_{wc} および k_{fc} は第5章の付録5.1に示す方法により求めるものとする。これより、中心軸圧縮柱の強度 σ_{max}^{cp} は次式より求める。

$$\frac{\sigma_{max}^{cp}}{Q\sigma_y^*} = \begin{cases} 1.0 & (\bar{\lambda}' \leq 0.2) \\ 1.109 - 0.545\bar{\lambda}' & (0.2 \leq \bar{\lambda}' \leq 1.0) \\ 1.0 / (0.773 + \bar{\lambda}'^2) & (\bar{\lambda}' \geq 1.0) \end{cases} \quad (7.33)$$

ここに、

$$\bar{\lambda}' = \sqrt{Q} \bar{\lambda}, \quad \bar{\lambda} = \frac{L}{r} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_y^*}{E}} \quad (7.34)$$

7.4.2 解析パラメータ

まず、短柱の解析を行なう。解析には、フランジとウェブの幅厚比をそれぞれ3種類考え、それらを組み合わせて連成を考慮した等価幅厚比 R_{fw} を計算した。フランジの幅厚比は10, 16, 22およびウェブの幅厚比は30, 50, 70と両者ともかなり大きい値をとった。この結果、表7.1に示すような4種類の R_{fw} を計算に用いることにした。なお、表7.1の R_{fw} の(,) は、左側がウェブの幅厚比で、右側がフランジの幅厚比である。解析に用いた材料定数は表7.1に示す。板の初期たわみ形状は図7.7(b)に示すように仮定した。フランジとウェブの交線部分は直角を保つようにフランジ部分のたわみを仮定している。ウェブの最大初期たわみ量 Δw は道路橋示方書制限値を与えた。残留応力は図7.7(c)に示す分布形を与え、圧縮残留応力の最大値は $0.3\sigma_y$ とした。また、短柱の長さは第5章の付録5.1より最小座屈モードの長さを計算し、 a/h_w または a/b_f が1.0になるようにとった。解析対象は1/2部分とし、分割方法はフランジ及びウェブの幅方向に6分割、長さ方向に6分割とした。なお、荷重は、X軸方向の端点に一様変位の変位制御により与えた。

次に長柱については、使用した断面寸法、形状、等価幅厚比 R_{fw} および残留応力の分布は短柱の場合と全く同様である。解析対象は $L/2$ で (L は部材長)、分割方法は板要素およびはり要素ともに連成座屈実験解析の場合と同じである。板要素部分の長さ DL は $0.2 \sim 0.3 L$ とし、軸方向の分割数は、一細要素の長さ方向の長さ l_e とフランジ幅 b との比 l_e/b が $0.1 \sim 0.15$ になるようにモデル化した。部材の最大初期たわみの大きさは $L/1000$ とし、初期たわみ形状は半波の正弦関数と仮定した。また、荷重は変位制御により与えた。

7.4.3 算定式の検討

圧縮を受ける短柱の解析結果を図7.8に示す。図は計算結果から得られた短柱強度を低減係数により整理したもので、式(7.30)と計算結果を比較したものである。なお、図にはフランジとウェブの幅厚比の組み合わせを変化させた他の等価幅厚比 R_{fw} の計算結果も示してある。等価幅厚比が1.0以上では、解析結果は式(7.30)より強度は大きく計算されており、式(7.30)はかなり安全側になるが、この式を用いれば短柱強度をよく推定できる。

次に、図7.9は中心軸圧縮鋼柱に対する解析結果を、式(7.33)の提案式の耐荷力曲線と比較して示したものである。図のプロットは式(7.30)の低減係数 Q を用いて整理した解析値である。結果は、2,3の場合を除いて式(7.30)の提案式の推定強度を上回っており、提案式の妥当性が示された。なお、修正細長比 $\bar{\lambda}'$ が0.5以下では提案式よりもかなり強度が大きくなっている。

表7.2は解析で得られた最大平均圧縮応力度 $\sigma_{max}(=P_{max}/A)$ 、 σ_{max}/σ_y^* および $\sigma_{u,s}/\sigma_y^*$ 等をまとめて示した。表7.2の $\sigma_{u,s}$ は、第6章で求めた方法と同様で、現行の道路橋示方書の許容応力規定で計算した許容軸方向圧縮応力度 σ_{ca} を安全率倍して耐荷力表示したものである。また、 $b_f/t_f > 16$, $h_w/t_w > 56$ の供試体もあるが、示方書の表の式をそのまま適用して求めた。解析結果との比較を $\sigma_{max}/\sigma_{u,s}$ で表7.2に示している。この表からもわかるように、連成座屈の影響がなかったと考えられる供試体 $R_{fw}=0.772$ を除いた他の供試体では、耐荷力は解析結果の方が耐荷力評価式で計算した値に比べて44~180%も大きく上回っており、連成座屈する場合の示方書の耐荷力評価式は、解析結果からも応力的には安全側過ぎることがわかった。

7.5 結 論

本章では、圧縮を受ける薄肉H形鋼柱の座屈実験供試体を、結合解析法を用いて解析して実験結果と比較検討した。実験結果から連成座屈の強度式の提案を行ない、パラメータ解析より得られた強度と比較した。得られた結果の主なものを挙げると次のようである。

- (1) 本解析法を用いて局部変形の影響を考慮した鋼圧縮部材を解析する場合の板要素部分の軸方向分割方法の目安が得られ、解析モデル化が簡単に行なえるようになった。
- (2) 本解析法は、初期たわみや残留応力等の初期不整を考慮して、連成座屈挙動や耐荷力が精度よく解析できる。
- (3) 解析結果は最大荷重および変形挙動とも実験結果とよい対応を示し、本解析法の妥

当性が示された。

- (4) 短柱実験から得られた短柱強度式（式(7.30)）は、解析結果とよい対応を示した。
- (5) 提案した中心軸圧縮柱の強度推定式は解析結果とよく一致する。
- (6) 部材が連成座屈をする場合、解析結果に比較しても現行の示方書の部材の耐荷力の評価式は応力的には相当安全側になる。

用いた記号

- α : 座屈荷重を最小にする座屈たわみモード
- A : 断面積
- A_{eff} : 有効断面積
- A_f : フランジの断面積
- A_w : ウェブの断面積
- b : 箱形断面、H形断面のフランジ幅
- b_e : 有効フランジ幅
- b_f : H形断面のフランジ半幅
- b_f/t_f : フランジの幅厚比
- d : 箱形断面のウェブ幅
- E : ヤング率
- E_{st} : ひずみ硬化係数
- h : H形断面のウェブ高
- h_w : H形断面のウェブ内側高
- h_w/t_w : ウェブの幅厚比
- h_w/b_f : H形断面のウェブ高とフランジ半幅の比
- k : 座屈係数
- $k_{f\zeta}$: フランジ板を基準とした座屈係数
- $k_{w\zeta}$: ウェブ板を基準とした座屈係数
- l_e : 一細要素の軸方向の長さ
- L : 部材長
- L/r : 細長比
- P_{max} : 実験鋼柱の最大荷重
- Q_a, Q_s, Q : 形状係数または低減係数
- r : 弱軸回りの断面二次半径
- R', R'' : 西ドイツのDAST指針012の座屈曲線の境界線
- R_f : フランジ板の等価幅厚比($k=0.425$)
- R_{fw} : ウェブとフランジの連成を考慮した等価幅厚比
- R_w : ウェブ板の等価幅厚比($k=4.0$)

t : 板厚、箱形断面のフランジ幅
 t_f : フランジの板厚
 t_w : ウェブの板厚
 w : 実験供試体のウェブのたわみ、箱形断面のウェブ厚
 α_f : 比 a/b_f
 α_w : 比 a/h_w
 ζ_f : フランジの拘束度係数
 ζ_w : ウェブの拘束度係数
 $\bar{\lambda}$: 等価細長比
 $\bar{\lambda}'$: $\sqrt{Q} \bar{\lambda}$
 $\bar{\lambda}_m'$: 式(7.21)
 ν : ポアソン比
 π : 円周率
 $\sigma_{cr}^p, \sigma_{max}^p$: 短柱の最大引張応力度
 $\sigma_{cr}^c, \sigma_{max}^c$: 局部座屈を考慮しない場合の鋼柱の最大応力度
 $\sigma_{cr}^{cp}, \sigma_{max}^{cp}$: 局部座屈を考慮する場合の鋼柱の最大応力度
 σ_{rc} : 圧縮残留応力
 σ_y : 公称降伏点応力度
 σ_y^* : 平均降伏点応力度 (式(7.32))
 σ_{yf} : フランジ板の降伏点応力度
 σ_{yw} : ウェブ板の降伏点応力度
 σ_e : 最大応力度
 $\sigma_{u,s}$: 現行の道路橋示方書の許容応力度規定で計算した許容軸方向圧縮
 応力度 σ_{ca} を安全率倍して耐荷力表示したもの
 σ_{cr}^p : 局部座屈応力度

参考文献

- 1) 日本道路協会:道路橋示方書・同解説, 1980年2月.
- 2) AISC : Specifications for the Design, Fabrication and Erection of Structural Steel for Buildings, 1969.
- 3) AISI : Cold-Formed Steel Design Manual, Pt. I - Specification, 1968, Pt. V - Commentary, 1970.
- 4) Deutscher Ausschuss für Stahlbau(DASt.) : Beulsicherheitsnachweise für Platten, DASt-Richtlinie 012, 1978.
- 5) Standards Association of Australia: SAA Cold-Formed Steel Structures Code, AS1538, 1974.
- 6) European Convention for Constructional Steelwork : Introductory Report, 2nd, International Colloquium on Stability of the Structure, Liege, April, 1977.
- 7) Johnston, B. G. : Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures, 3rd., ed., John Wiley and Sons, Inc., New York, 1976.
- 8) DeWolf, J. T., Pekoz, T. and Winter, G. : Local and Overall Buckling of Cold-Formed Members, Proc. of ASCE, Vol.100, No.ST10, Oct., 1974, pp.2017-2036.
- 9) Kalyanaraman, V., Pekoz, T. and Winter, G. : Unstiffened Compression Elements, Proc. of ASCE, Vol.103, No.ST9, Sep., 1977, pp.1833-1848.
- 10) Hancock, J. : Interaction Buckling in I-Section Columns, Proc. of ASCE, Vol.107, No.ST1, Jan., 1981, pp.165-179.
- 11) 宇佐美勉・福本嘜士・青木徹彦:溶接箱形断面柱の局部座屈と全体座屈の連成強度に関する実験的研究, 土木学会論文報告集, 第308号, 1981年4月, pp.47-58.
- 12) 宇佐美勉・福本嘜士:鋼圧縮部材の連成座屈強度実験と有効幅理論による解析, 土木学会論文報告集, 第326号, 1982年10月, pp.41-50.
- 13) 宇佐美勉・福本嘜士・青木徹彦・松川昭夫:補剛箱形断面偏心圧縮柱の強度に関する実験的研究, 土木学会論文集, 第350号/(I-2), 1984年10月, pp.197-205.
- 14) 宇佐美勉・土屋信洋・大谷恭弘・福本嘜士:薄板集成短柱の弾塑性有限変位解析, 土木学会論文集, 第362号/(I-4), 1985年10月, pp.293-302.
- 15) 宇佐美勉・土屋信洋・福本嘜士:鋼圧縮部材の連成座屈挙動の理論的研究, 土木学会

論文集, 第362号/(I-4), 1985年10月, pp. 303-312.

- 16) Nakai, H., Kitada, T. and Miki, T. : Interaction Curve of Thin-Walled Box Stub-Column Subjected to Compression and Bending for Applying to Overall Buckling Analysis of Columns, Proc. of JSCE, No. 362/(I-4) , Oct., 1985, pp. 65-73.
- 17) Winter, G. : Strength of Thin Steel Compression Flanges, Trans., ASCE, Vol. 112, Paper No. 2305, 1947, pp. 527-576.
- 18) Winter, G. : Thin Walled Structures - Theoretical Solutions and Test Results, Preliminary Publication of Eighth Congress, International Association for Bridge and Structural Engineering, 1968, pp. 101-112.
- 19) 北田俊行: 圧縮板の設計耐力曲線の統一化について, 土木学会第40回年次学術講演会概要集, 第I部, 1985年9月.
- 20) 金井道夫: 道路橋示方書 II 鋼橋編改訂の背景と運用, 橋梁と基礎, Vol. 15, No. 2, 1981年2月, pp. 11-15, No. 3, 1981年3月, pp. 6-13.
- 21) 伊藤文人: 局部座屈と全体座屈の連成問題, 橋梁と基礎, Vol. 15, No. 2, 1981年2月. pp. 16-18.
- 22) 山尾敏孝・崎元達郎: 薄肉H形短柱の耐力挙動に関する実験的研究, 土木学会論文集, 第380号/(I-7), 1987年4月.
- 23) 山尾敏孝・佐藤啓治・荒牧 浩・崎元達郎: H形鋼柱の連成座屈強度に関する実験的研究, 土木学会第40回年次学術講演会講演概要集, 第I部, 1985年9月.
- 24) 山尾敏孝・崎元達郎・平井一男・植野幹博・川森晋治: H形鋼柱の連成座屈強度実験, 土木学会第41回年次学術講演会概要集, 第I部, 1986年11月.
- 25) 山尾敏孝・崎元達郎: 薄肉H形鋼柱の連成座屈に関する実験的研究, 土木学会論文集, 第380号/(I-7), 1987年4月.

表7.1 解析パラメータ

Young's Modulus	E	206 (KN/mm ²)
Yield Stress	σ_y	245 (N/mm ²)
Plate Thickness	t_f, t_w	3.2, 4.5 mm
Poisson' Ratio	ν	0.3
Slenderness Ratio ($h_w/t_w, b_f/t_f$)	R_{fw}	0.772 (35,10) 0.903 (50,16) 1.068 (50,22) 1.259 (70,22)
Residual Stress	σ_{rc} / σ_y	0.3
Initial Plate Deflection	$\Delta w / h_w$	1/150
Initial Column Deflection	δ_0 / L	1/1000

表7.2 解析結果

Specimens	R_{fw}	L/r	b_f/t	h_w/t	$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_y^*}$	$\frac{\sigma_{u,s}}{\sigma_y^*}$	$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{u,s}}$
RFA-30	0.772	30	10	35	0.937	0.940	1.0
RFA-50	0.772	50	10	35	0.768	0.820	0.94
RFA-70	0.772	70	10	35	0.660	0.700	0.94
RFA-100	0.772	100	10	35	0.505	0.513	0.98
RFB-30	0.903	30	16	50	0.938	0.591	1.59
RFB-50	0.903	50	16	50	0.811	0.515	1.57
RFB-70	0.903	70	16	50	0.634	0.440	1.44
RFB-100	0.903	100	16	50	0.503	0.323	1.56
RFC-30	1.068	30	22	50	0.76	0.333	2.28
RFC-50	1.068	50	22	50	0.705	0.290	2.43
RFC-70	1.068	70	22	50	0.610	0.248	2.46
RFC-100	1.068	100	22	50	0.420	0.175	2.40
RFD-30	1.259	30	22	70	0.854	0.302	2.83
RFD-50	1.259	50	22	70	0.686	0.263	2.61
RFD-70	1.259	70	22	70	0.590	0.225	2.62
RFD-100	1.259	100	22	70	0.400	0.165	2.42

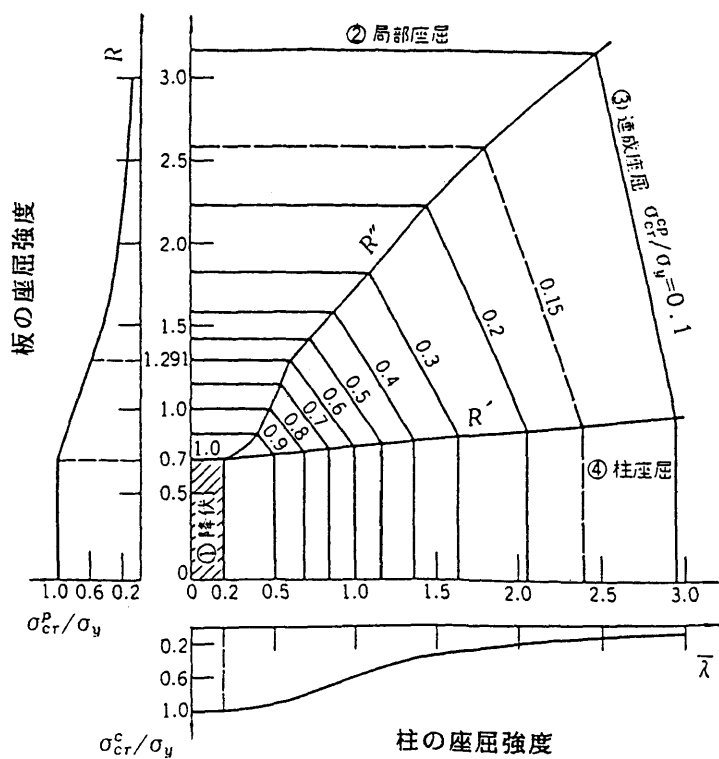


図7.1 連成座屈応力度 (DAST. 012)

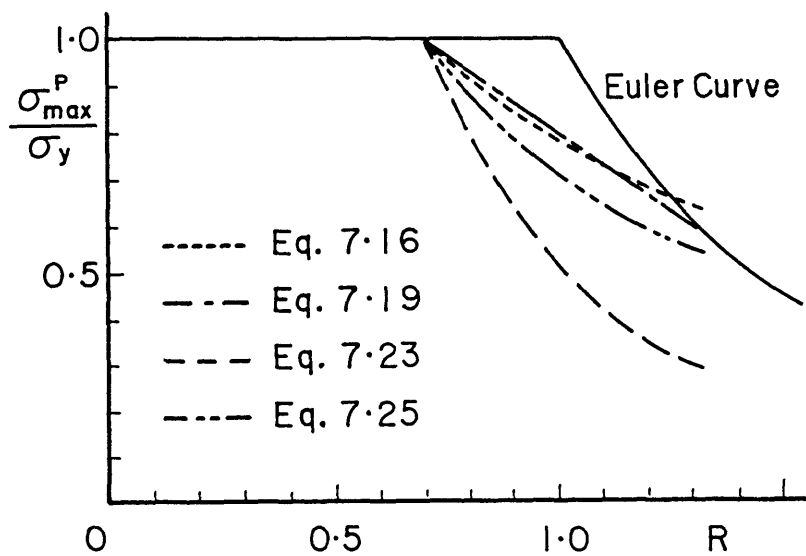


図7.2 局部座屈応力度と幅厚比 R の関係

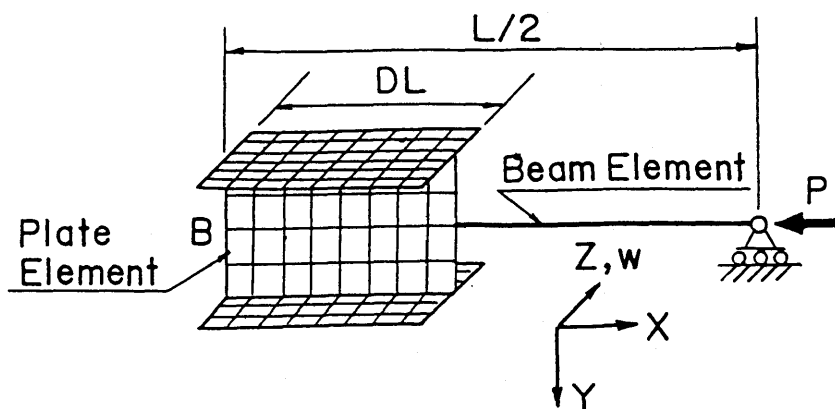


図7.3 解析モデル

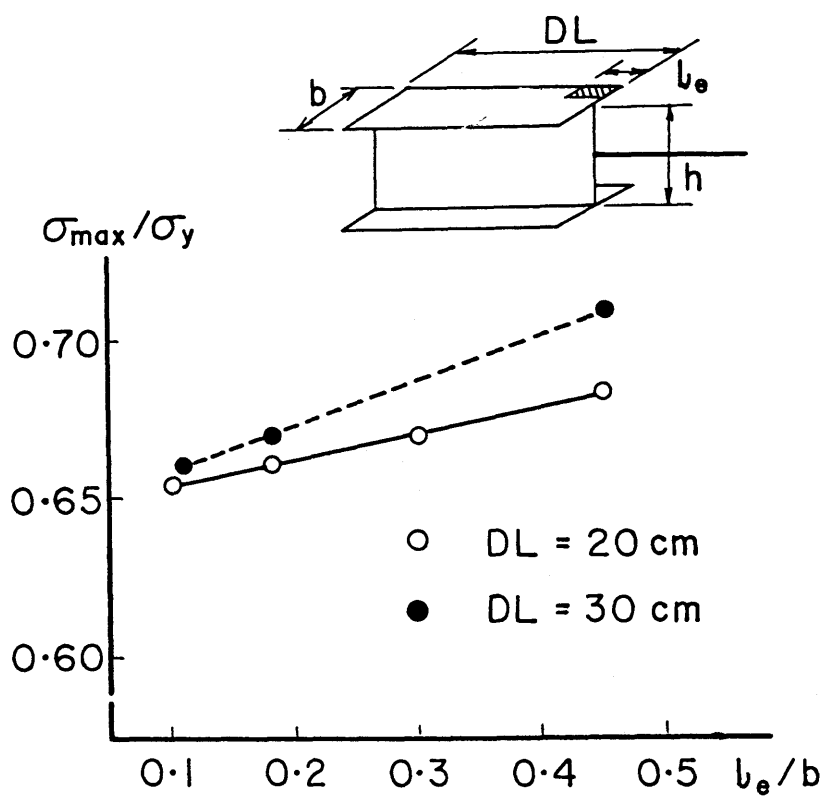


図7.4 軸方向分割数と精度の関係

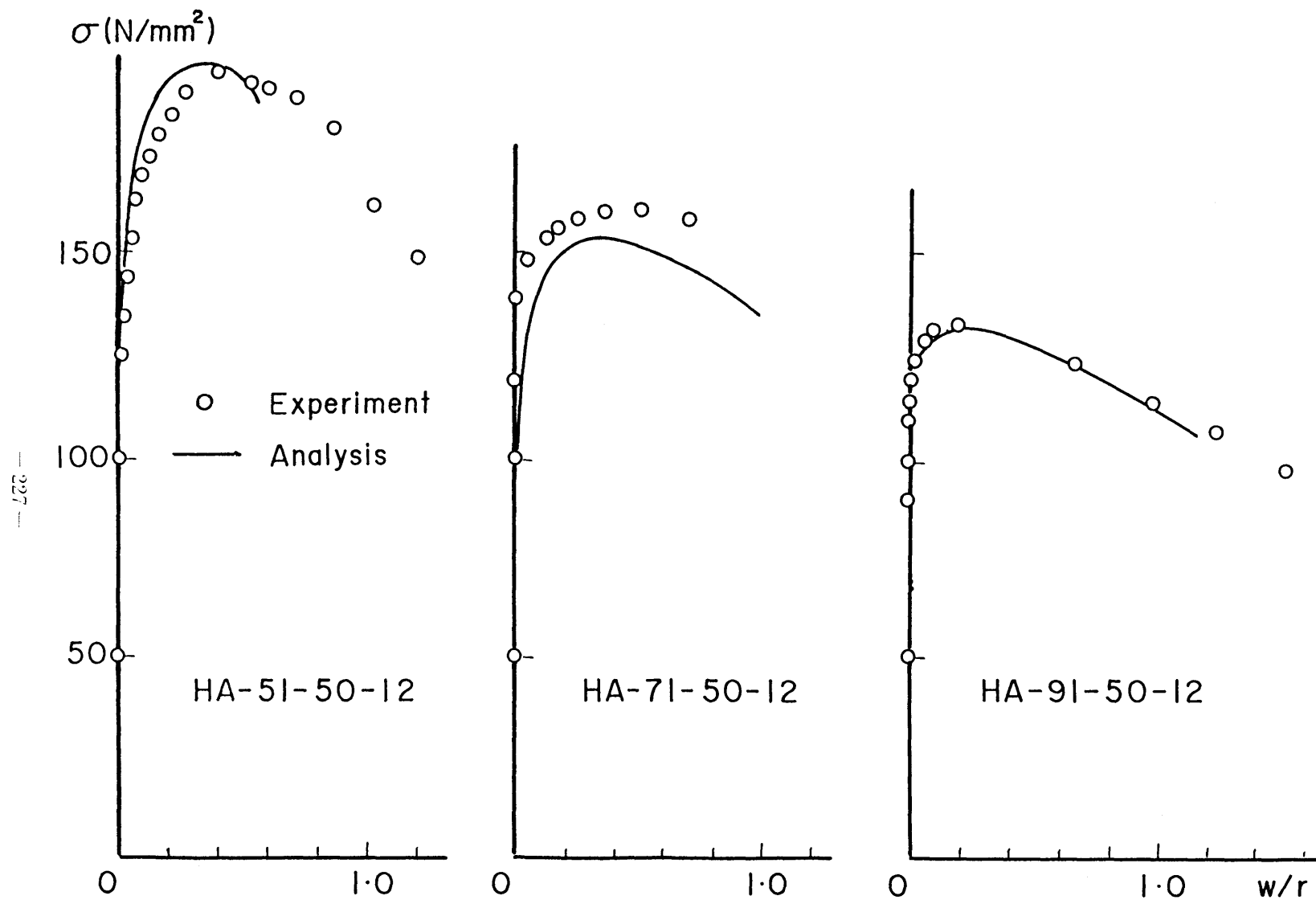


図7.5(a) 荷重-変位曲線(HAシリーズ)

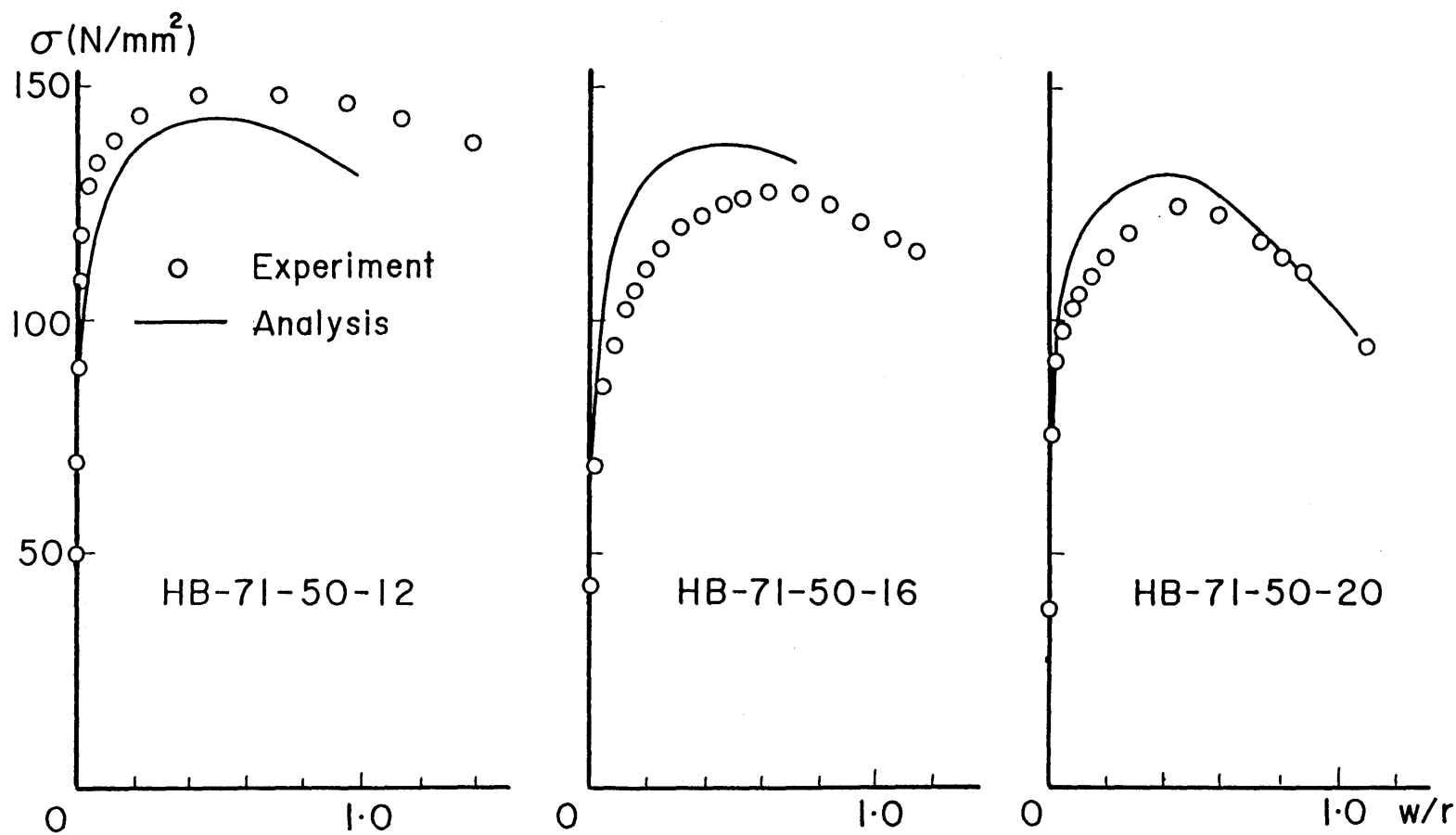


図7.5(b) 荷重-変位曲線(HBシリーズ)

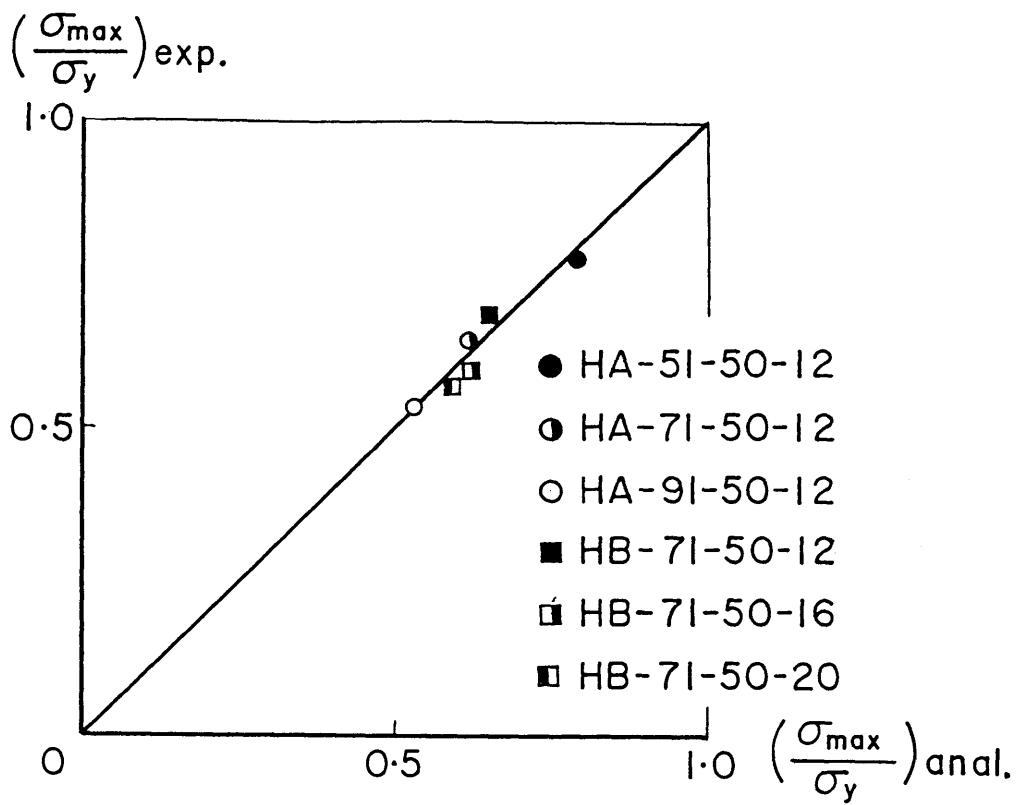
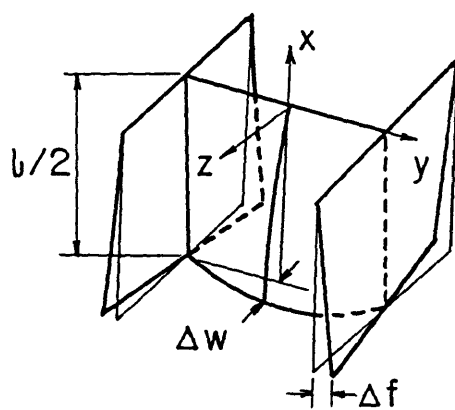
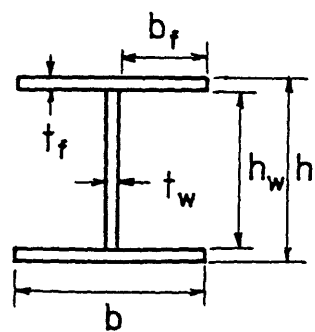


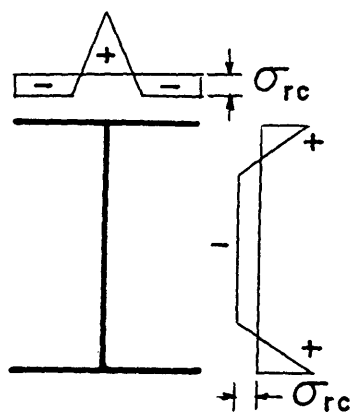
図7.6 最大荷重の比較



(a) 初期たわみ形状



(b) 断面寸法



(c) 残留応力分布

図7.7 短柱解析

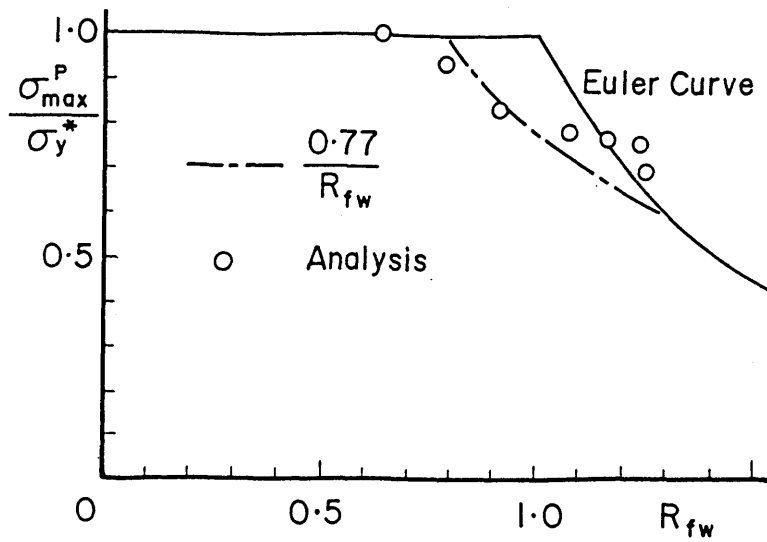


図7.8 短柱の最大圧縮応力度

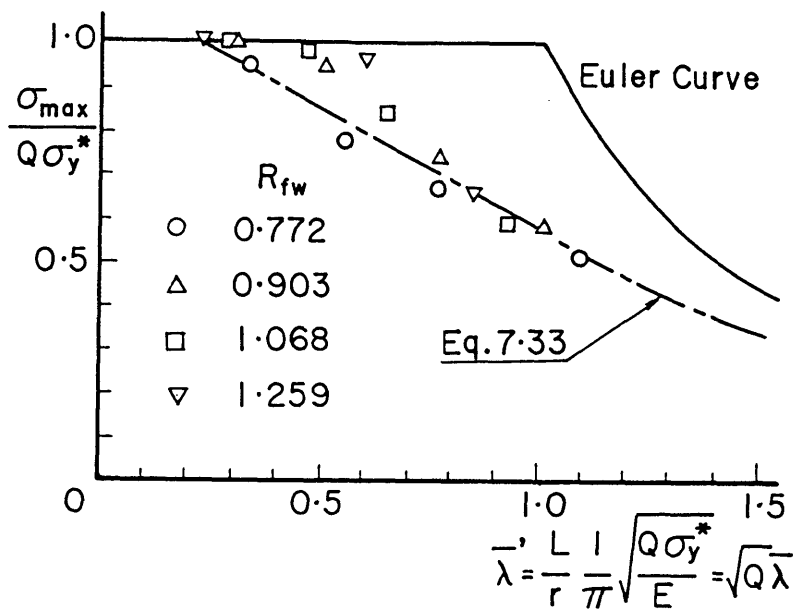


図7.9 中心鋼圧縮柱の強度

第 8 章 結 論

本論文では、中心軸圧縮を受ける薄肉 H 形断面鋼柱の部材の全体座屈と板の局部座屈の連成座屈問題について、薄肉骨組構造部材の断面の変形を考慮して全体構造の解析ができる有限変位弾塑性解析の理論を展開し、この解析法による数値解析と考察、さらに、実験による連成座屈現象の把握、および連成座屈強度の算定式の提案を行なった。なお、各章で得られた結論はそれぞれの章末に述べたが、本章ではそれらの主要な結論を要約する。

第 1 章では連成座屈に関する既往の研究の概説、本研究の目的および本論文の内容と構成について述べた。

第 2 章では任意形状の薄肉開断面の三次元構造の有限変位弾塑性解析法を、ポテンシャルエネルギー増分の停留原理に基づいて誘導し定式化を行なった。本解析結果と他の理論解析結果や実験値と比較し本解析法妥当性について検討した。得られた結果は次のようである。

- 1) 初期たわみや残留応力及び荷重の偏心等がある薄肉開断面構造物の幾何学的非線形性と材料学的非線形性の両方を考慮した剛性マトリックスを誘導した。
- 2) 相当応力度、相当ひずみの概念を用いて二軸応力状態での材料の弾塑性ひずみ硬化挙動を、単軸応力状態の硬化型弾塑性関係で表わしている。
- 3) 増分荷重ごとに部材断面の応力度分布及び塑性域の発達を、全荷重過程を通して追跡し表示することができる。
- 4) 本解析法では、剛体変位除去の手法を使用しなくとも、大たわみ問題を単精度計算により精度よく行なえる。
- 5) 部材が組み合わせ荷重を受ける場合、本解析結果が実験結果や他の解析結果とよく対応しており、弾塑性状態での剛性評価がうまくできている。

また、本解析法の主な特徴を第 2 章の概説で述べたが、今後は次の点についてさらに検討する必要があると思われる。

(a) 任意形状開断面部材の非弾性そりねじり挙動を解析。(b) ひずみの反転を考慮した影響。(c) 部材断面の図心軸以外の任意点に荷重が作用した場合の解析。

なお、H 形断面部材の圧縮とねじりを受ける部材場合のそりねじり挙動について、解析と実験を行なっている。

第 3 章では板構造の弾塑性有限変位解析法を、ポテンシャルエネルギー増分の停留原理に基づいて誘導した。数値解析例により本解析法の妥当性および有効性について検討した。

得られた結果は次のようである。

- 1) 三角形平板要素は通常用いられるひずみ一定の要素と曲げ要素からなり、その定式化が容易である。特に、面外曲げ問題に対しては少ない分割数で大変位解析が可能である。
- 2) 通常のひずみ一定三角形要素に、平面応力問題において存在しない面内回転剛性を導入して、一節点6自由度の三角形平板要素を導いている。また、面内回転変位は線形変位関数を仮定しているので定式化が簡略された。
- 3) 板の面内曲げを受ける場合の、板要素の幅方向及び軸方向の分割方法と精度の関係を明らかにした。特に、ひずみ一定要素を使用する関係上、軸方向の分割数が大きく影響することが判明したので、解析する際には分割数に十分注意する必要がある。
- 4) 面内回転角も適切に計算されており、面内回転剛性の導入の妥当性が示された。
- 5) 剛体変位の除去の手法を用いることによりひずみ－変位関係が線形化でき、大変形挙動をよく解析することができた。
- 6) 残留応力や初期たわみが存在する場合も、その変形挙動や最大強度もよく解析できしており、弾塑性剛性の評価方法の妥当性が示された。

なお、はりの曲げ問題における応力度の線形分布に対応するように、面内変位を補正する方法もあるが、立体構成した場合に自由度が大幅に増加するので有効でないと思われる。

第4章では、局部座屈等による断面の変形を考慮して全体構造を解析する手法として、はり要素の有限変位弾塑性解析法と板要素の有限変位弾塑性解析法を結合して解析する方法を提示した。本解析結果と他の理論解析結果及び実験結果と比較検討し解析法の妥当性について検討した。得られた結果は次のようである。

- 1) 板要素により立体構成した板要素部分とはり要素の結合は、多点拘束処理の手法によりうまく処理ができ、変位の連続性も満足している。また、結合部での応力度もはり理論値とよく対応している。
- 2) 結合解析でのモデル化において、両要素の結合位置つまり板要素部分の長さは、部材長 L の0.2～0.3程度でよいと思われる。
- 3) 解析精度は、単一板と同様に面内曲げを受ける板要素の長さ方向の分割数に関係がある。この分割数は、板面内曲げを受ける板要素の幅 b と一板要素の軸方向の長さ l_e の比 l_e/b が0.1～0.2程度であれば十分である。
- 4) 板要素が降伏点応力度に至るまで局部座屈を生じない断面の解析例ではほぼ満足する結果が得られた。

第5章では、一様圧縮を受ける溶接H形断面短柱の最大強度及びウェブとフランジの連成局部座屈挙動の実験、及び有限変位弾塑性解析を行なった。得られた結果は次のようである。

- 1) 幅厚比が大きい板要素からなる短柱では、局部変形が発生してから最大強度に達するまでにかかなりの余剰耐荷力がある。
- 2) H形断面短柱のフランジとウェブは互いに連成しながら変形し、フランジとウェブの接合辺はほぼ直角を保持していた。
- 3) 幅厚比が比較的大きいH形断面の、構成板要素相互の影響を考慮した等価幅厚比 R_{fw} と短柱の耐荷力との相関が大きいことが明らかにされた。
- 4) 今回の実験での短柱の耐荷力は、 R_{fw} を使った $\sigma_{max}/\sigma_y^* = 0.77/R_{fw}$ の形で表わされ、定数は $C=0.77$ となった。これは両縁支持板に対する既存のデータの値0.7よりも多少大きくなった。
- 5) 面内回転剛性を導入した一節点6自由度を有する板要素の有限変位弾塑性解析法は、薄板要素で立体構成したH形短柱のフランジ及びウェブの変形挙動をよく解析できた。
- 6) 板要素の解析法より得られた最大強度は実験結果とよく対応し、板要素の有限変位弾塑性解析法の妥当性が確認された。
- 7) 板要素断面内のウェブの平均圧縮残留応力はかなり大きく、また初期たわみはほぼ示方書の制限値以内であった。

第6章では、圧縮を受ける薄肉H形鋼柱の弱軸回りの連成座屈挙動及び耐荷力に関して、幅厚比や細長比を変化させて実験を行なった。得られた結果は次のようである。

- 1) フランジ及びウェブの幅厚比が小さい断面を持つ鋼柱は、最大荷重に達した後の変形能が大きい。また、局部座屈後もかなりの余剰耐力を保持している。
- 2) しかし、フランジの幅厚比が大きくなると最大荷重に達した後の強度の低下が早い。つまり、変形にねばりがなくその変形能も小さい。
- 3) フランジの幅厚比が大きい断面は、ウェブとフランジが連成して局部変形を生じ、部材全体の耐荷力挙動に大きく影響する。
- 4) 部材が連成座屈を生じる場合、実験結果に比較して現行の道路橋示方書の部材の耐荷力の評価式は応力的には相当安全側となる。
- 5) 短柱の強度 $Q(=\sigma_{max}/\sigma_y^*)$ から求まる仮想の降伏点応力度 $Q\sigma_y^*$ を用いると、H形鋼柱の連成座屈強度をよく推定できる。
- 6) 実験結果からもわかるように、H形断面の構成板要素の連成局部挙動および部材全

体との連成座屈挙動は初期たわみや溶接残留応力等の初期不整を考慮して弾塑性解析する手法が必要であると考えられる。

第7章では、圧縮を受ける薄肉H形鋼柱の連成座屈の強度式の提案を行ない、パラメータ解析より得られた強度と比較検討した。得られた結果は次のようである。

- 1) 本解析法を用いて局部変形の影響を考慮した鋼圧縮部材を解析する場合の板要素部分の軸方向分割方法の目安が得られ、解析モデル化が簡単に行なえるようになった。
- 2) 本解析法は、初期たわみや残留応力等の初期不整を考慮して、連成座屈挙動や耐荷力が精度よく解析できる。
- 3) 解析結果は最大荷重および変形挙動とも実験結果とよい対応を示し、本解析法の妥当性が示された。
- 4) 短柱実験から得られた短柱強度式 ($\sigma_{ax}/\sigma_y^* = 0.77/R_{fw}$) は、解析結果とよい対応を示した。
- 5) 提案した中心軸圧縮柱の強度推定式は解析結果とよく一致する。

以上のように、薄肉H形鋼柱の連成座屈に関する理論解析法の確立と耐荷力実験を行なって連成座屈の強度式を提案した。しかし、合理的な設計式の確立のためには、軸力と曲げを受ける部材についても数値解析および連成座屈実験を行ない、強度式を提案することが必要と思われる。また、本解析法を用いて連成座屈挙動を精度よく解析するためには板要素の軸方向の分割数を多くする必要があるので、定式化が容易で分割数が少なくても精度がよい要素を開発できれば、さらに複雑な構造物にも簡単に適用が可能となると考えられ、今後検討する必要がある。

著者の発表した論文

論文

1. Sakimoto, T., Yamao, T. and Komatsu, S. : Experimental Study on the Ultimate Strength of Steel Arches, Proc. of JSCE, No.286, June, 1979, pp.139-149.
2. 崎元達郎・山尾敏孝:鋼アーチの耐荷力に関する実験的研究, 熊本大学工学部研究報告, 第27巻, 第2号, 1978年7月, pp.75-82.
3. 山尾敏孝・崎元達郎:溶接箱形断面柱の連成座屈強度実験, 土木学会論文報告集, 第335号, 1983年7月, pp.195-198.
4. Sakimoto, T., Yamao, T. : Ultimate Strength of Deck-Type Steel Arch Bridges, 3rd Int. Colloq. on Stability of Metal Structures Preliminary Report, 1983.
5. Sakimoto, T., Yamao, T., Kikuchi, R. and Sakata, T. : Nonlinear Analysis of Thin-Walled Frames and Members with Arbitrary Open Cross Sections, Proc. of JSCE, No.362/(I-4), Oct., 1985, pp.139-147.
6. 崎元達郎・山尾敏孝・坂田 力:薄肉開断面部材の非線形解析, 構造工学論文集, Vol.32A, 1986年3月, pp.255-264.
7. 山尾敏孝・崎元達郎:板要素とはり要素の結合による薄肉鋼構造物の有限変位弾塑性解析, 構造工学論文集, Vol.32A, 1986年3月, pp.291-302.
8. 山尾敏孝・崎元達郎:H形鋼柱のねじり挙動に関する実験的研究, 構造工学論文集, Vol.32A, 1986年3月.
9. Yamao, T. and Sakimoto, T. : Nonlinear Analysis of Thin-Walled Structures by a Coupled Finite Element Method, Proc. of JSCE, No.374/(I-6), Oct., 1986.
10. 山尾敏孝・崎元達郎:薄肉H形短柱の耐荷力挙動に関する実験的研究, 土木学会論文集, 第380号/(I-7), 1987年4月.
11. 山尾敏孝・崎元達郎:薄肉H形鋼柱の連成座屈に関する実験的研究, 土木学会論文集, 第380号/(I-7), 1987年4月.

謝 辞

本論文は、筆者が恩師熊本大学崎元達郎教授の御指導のもとで昭和54年から行なった研究成果をまとめたものである。本研究を行なうに際し、未熟な筆者が同教授から終始懇切な御指導と激励を賜ったことに對し深謝するとともに、心から厚く御礼申し上げます。また、名古屋大学福本嘯士教授には、名古屋大学での内地研究の便宜をはかっていただき、本論文をまとめることができました。さらに本論文をまとめるにあたり貴重な御助言を賜りました。ここに厚く感謝の意を表します。

名古屋大学島田静雄教授、坂本 順教授、宇佐美勉助教授には、本論文をまとめるにあたり貴重な御助言を賜りました。ここに厚く御礼申し上げます。

筆者の所属する熊本大学工学部土木工学科構造力学研究室の平井一男教授には、長年にわたる懇切なる御指導および御助言を賜わるとともに、種々の便宜をはかっていただきました。ここに厚く感謝の意を表します。

さらに、本研究を実施する上で、当時熊本大学あるいは熊本大学大学院の学生であった八木 弘氏、佐保嘉則氏、佐藤久嘉氏、中崎邦夫氏、佐方良二氏、野口寿信氏、小畑克己氏、堀田守男氏、宮田英樹氏、岩上憲一氏、荒牧 浩氏、佐藤啓治氏、坂田 力氏、小林敏彦氏、荒木栄次氏、植野幹博氏、川森晋治氏らの御協力を得ました。ここに記して感謝の意を表します。

筆者の所属する熊本大学土木系教室には種々の御配慮をいただきました。また構造力学研究室の宮崎靖男技官には実験研究の御協力および本論文の多くの図の作成に御協力をいただきました。厚く御礼申し上げます。また、本論文をまとめるにあたり名古屋大学山田健太郎助教授をはじめとして研究室諸氏のお世話になりました。記して謝意を表します。

本論文は以上の方々の他に多くの方々の御援助および御協力によるものであり、ここに感謝の意を表します。

なお、本論文の数値計算は九州大学大型計算機センターのFACOM M-200, M-382, VP-100および名古屋大学大型計算機センターのFACOM M-382を利用した。また、本論文の作成には名古屋大学大型計算機センターの日本語清書システムODMを使用させていただいた。特に、使用にあたっては名古屋大学伊藤義人助手のお世話になりました。厚く御礼申し上げます。最後に、常に激励しかつ支援してくれた妻・満智子と二人の子供に感謝する。