人工知能的問題解決における問題分解法に関する研究

新　妻　清　三　郎

報告番号	乙 第 1983 号

目　　次

第 1 章　序　　論

1.1　本研究の動機と目的

人工知能（ Artificial Intelligence ）の研究の目的は，知能的な仕事を遂行できる機械をつくることである。この研究分野の主なものをあげると，

① 問題解決の自動化
② 言語の理解と翻訳
③ 定理の証明
④ 音声の認識
⑤ 視覚による対象物の認識

などがある[(1)]。これらは工学的に実現することがきわめて困難なものであるが，限定された範囲で実用可能ないくつかのコンピューター・プログラムが完成されている。たとえば，質量分析データから分子の構造を発見的に求めるプログラムＤＥＮＤＲＡＬ[(2)]，医療情報の質問応答システムＭＹＣＩＮ[(3)]，大規模な数式処理システムＭＡＣＳＹＭＡ[(4)] などがある。

人工知能の中心課題の１つである問題解決（ Problem Solving ）の研究は，大きく２つの流れに分けることができる。１つは事例研究的な発見的プログラミングの開発研究[(5)〜(10)] であり，他はそれらのプログラムで用いられている探索技法の整理・分類，及びその理論化[(1), (11)〜(16)]の研究である。問題解決に関する従来の研究の主流は前者であるが，その性格上，アイディアが先行し，個々の研究相互の関連が明らかにされないまま内容が個別的に発散していく傾向がある。一方，それらをまとめ基礎づけるべき後者の研究はごくわずかしかなされていない。その結果，コンピューターにより実現された最初のヒューリスティックなプログラムであるＬＴ（ Logic Theorist ）が作られてからほぼ４半世紀経つにもかかわらず，いまだに自律的発展の基礎が確立されないまま，コンピューターにかけた

“人工知能という夢”の中で漂っている。筆者が問題解決の理論的体系化を志向した背景はこのような状況にある。

これまでに作られた発見的プログラムの中で用いられている問題解決の方法は多種多様であるが，Nilsson[1]はそれらを

(1) state-space approach

(2) problem-reduction approach

(3) 述語計算の応用

の3つに分類している。本論文では，problem reduction approach の理論化を試みる。この方法は，複雑な問題をより簡単な問題に分解し，後者を解くことによって前者を解く方法で，記号積分のシステムや質量分析データの解析システム等に応用されている。本論文の目的は，問題解決に有用な問題の分解とはどのような分解かという視点から，GPS（General Problem Solver）[5]等3つの問題分解法を統一的に解析することである。

1.2 問題解決に関するこれまでの理論的研究と本論文の構成

問題解決に関する理論的研究はきわめて数が少なく，しかもほとんどがGPSを対象としている。理論化の対象としてGPSが選ばれる理由としては

① 問題の内容に独立な，問題解決の一般的な枠組を持っている。

② 他の多くのプログラムに影響を与え，GPSと類似の求解手法を持つ多数のプログラムが存在する。例えば，PPS[6]，STRIPS[9]，ABSTRIPS[10] 等。

③ GPSには“差異順序決定問題”という重要な未解決課題がある。

などがあげられる。GPSが持つ枠組の一般性についての検討はErnst[12]及びBanerji[14]によって試みられた。Ernstの場合，基礎的概念である“差異”の定義があまりにも広すぎ，“関連表”の定義では矛盾がみられ，加うるに差異順序決定問題に答えていない。Banerjiについても同様のことがいえる。即ち，差異及び関連表の定義が明確でなく，差異順序決定問

題に答えていない。従って，両者共ＧＰＳの理論とはいいがたい。彼らに対しては次のような指摘が見事にあてはまる。“概念を明確にするまでは，問題を正しく設定することもできず，ましてそれに答えることなど思いもよらない。”[17]

以上のように，従来の理論的研究から受けつぐべきものは殆どなく，本論文で用いられる概念及び方法はすべて本論文独自のものである。但し，Nilsson[1]からはいくつかのヒントを得ている。

次に本論文の構成を示す。

本論文は第２章で，まず，差異，差異と手段との関連等の概念を明確にすることから始める。差異は同値関係と“表裏の関係”にあることが示される。その結果，差異は状態の同値類別と関連づけられる。即ち，差異 $\mathbf{d}$ に対して同値関係 $\mathbf{d}^c$ が定まり，$\mathbf{d}^c$ により状態集合が同値類に分割される。この事実に基づいて，差異と求解の手段との関連が定義される。もし，手段 ω の適用により状態が s から s' に推移し，その結果 s' が s と異なる同値類に属するならば，s と s' との間に差異 $\mathbf{d}$ が導入されたことになるので，$\mathbf{d}$ と ω とは関連がある。s' が s と同じ同値類に属するならば，手段 ω の適用が差異 $\mathbf{d}$ の導入または消去とは無関係であるから両者の関連はないとみなされる。このような差異と手段との関連を表にしたのが関連表である。関連表は本論文において決定的な役割を演ずる。

第３章では，まず，関連表に基づいて“抽象化された問題”を構成する。これは本論文では商問題と呼ばれる。商問題の解をもとに下位目標を設定することにより，元の問題を下位問題列に分解する。このような分解の意味するところは，すべての下位問題が解けたならば，それは元の問題が解けたことになるということである。従って，このような分解は，下位問題が元の問題より簡単で，且つ求解可能なときのみ有用である。しかし，下位問題は一般には元の問題より簡単であるとは限らないし，又，可解であるとも限らない。そこで，関連表に基づいて，或る意味で元の問題より簡単な問題を下位問題から構成する。それを本論文では部分問題と呼ぶ。こ

のようにして得られた部分問題が求解可能であるための十分条件を示す。この条件は差異に関する条件として記述される。従って，商問題を作るとき，その基になる差異がどのような差異でなければならないかについて1つの手掛りが得られる。次に，以上の議論を基に，問題を“最も簡単な問題”の列に逐次分解する方法について論ずる。このような分解が可能であるための十分条件を示す。

第3章で述べた逐次分解法は，元の問題又は部分問題から商問題を構成し，それを解くというプロセスを含む。このプロセスはくり返されるから，もし，このプロセスを経ずに逐次分解法と同等の結果を得る問題分解法が存在するならば，その方が望ましい。実際，商問題が1つの手段で解けるならば，わざわざ商問題を構成し，それを解かなくともその解を捕えることができる。例えば，商問題P/d^cの解がただ1つの手段から成ることがわかっているものとする。このときP/d^cの手段集合はdに対して適切な手段の集合$\Gamma(d)$であるから，解は$\Gamma(d)$の元のいずれかである。ここで，$\Gamma(d)$は関連表から得られる。従って，$\Gamma(d)$の元すべてをP/d^cの解とみなし，これらの仮想的な解に基づいて元の問題を分解すれば，その結果得られる部分問題列の中には，商問題P/d^cの解に基づいた分解法によって得られる部分問題列が必ず含まれている。

第4章では，商問題を経ずに，商問題の解に基づく分解と同等の結果を得る1つの方法について論ずる。この方法はGPSをモデル化したものである。この方法と3章で述べた逐次分解法とを比較することにより，GPS研究における未解決課題である差異順序決定問題に対する1つの解答を与える。

第5章では，推論機構を持つシステムの求解法について考察する。推論方法として類比推論を考え，類比推論による問題解決が計画作成に相当することを示す。特に，問題Pから問題P′への問題射ηが存在し，且つP′の解$\widetilde{\omega}'$が既知の場合，P，P′は互いに類比であり，このとき$\widetilde{\omega}'$とηに基づきPの解に対する計画が得られること，及び計画によりPが部分問題列に

分解されることを示す。これは，第３章の商問題の解に基づく分解において，商問題の代りにそれに同形な他の問題（但し，解：既知）を置き換えたものである。

参　考　文　献

(1) Nilsson, N. J.: "Problem Solving Methods in Artificial Intelligence", McGraw-Hill, 1971.

(2) Feigenbaum, E. A., Buchanan, B. G. and Lederberg, J.: "On the Generality and Problem Solving: A Case Study Using the DENDRAL Program", in Meltzer, B. and Michie, D. (Eds.) Machine Intelligence, Vol. 6, Edinburgh Univ. Press, Edinburgh, 1971, pp. 165-190.

(3) Shortliffe, E.: "Computer-based Medical Consultations: MYCIN", Elvier, N. Y., 1976.

(4) Moses, J.: "Symbolic Integration: The Stormy Decade" Comm. ACM, 14, pp. 548-560, 1971.

(5) Ernst, G. W. and Newell, A.: "GPS: A Case Study in Generality and Problem Solving", Academic Press, 1967.

(6) Sandwell, E. J.: "A Planning Problem Solver Based on Look-Ahead in Stochastic Game Trees", JACM, Vol. 6, No. 3, July, 1969.

(7) Quinlan, J. R. and Hunt, E. R.: "A Formal Deductive Problem Solving System", JACM, Vol. 5, No. 4, October, 1968.

(8) Slagle, J. R.: "Artificial Intelligence: The Heuristic Programming Approach", McGraw-Hill, N. Y., 1971.

(9) Fikes, R. E., Hart, P. E. and Nilsson, N. J.: "STRIPS: A New Approach to the Application of Theorem Proving to Problem Solving," Art. Int. 2, pp. 189-208, 1971.

(10) Sacerdoti, E. D.: "Planning in a Hierarchy of Abstraction Spaces," Art. Int. 5, pp. 115-135, 1974.

(11) Amarell, S.: "On the Representation of Problems and Goal-Directed Procedures for Computers," in Banerji, R. B. and Mesarovic, M. (eds), Theoretical Approaches to Nonnumerical Problem Solving, pp. 179-242, Springer-Verllag, N.Y., 1970.

(12) Ernst, G. W.: "Sufficient Conditions for the Success of GPS," JACM, 61-4, pp. 517-533, 1969.

(13) Banerji, R. B.: "Theory of Problem Solving," American Elsevier, 1969.

(14) Banerji, R. B. and Ernst, G. W.: "A Theory for the Complete Mechanization of a GPS-type Problem Solver," 5th IJCAI pp. 450-456, 1977.

(15) Banerji, R. B. and Ernst, G. W.: "A Comparison of Three Problem Solving Methods," 5th IJCAI pp. 442-449, 1977.

(16) Cohen, B.: "The Mechanical Discovery of Certain Problem Symmetries," Art. Int. 8, pp. 119-131, 1977.

(17) G. I. ルザービン："数学論：数学的認識の本性"岩波書店，1977.

第２章　状態間の差異の数学的定式化

2.1 緒　　言

本論文では，“ 問題 ”及び“ 差異と手段との関連についての情報 ”が与えられているものとし，これらを理論の出発点にする。この設定は，従来のＧＰＳの研究[(1),(2)]における設定と同じであるが，これらの与件のうち特に“ 差異と手段との関連 ”に対する従来の定義は，未だその上に理論を構成するのに十分な明瞭さと厳密さを獲得しているとはいえない。

本章では，これらの与件の数学的定式化を行い，出発点の整備をする。

2.2 問題及び問題射

人工知能的問題解決で“ 問題 ”と呼ばれているものは陰に限定されている。それは，本質的に，与えられた手段の組合わせで解けるような問題である。その形式的定義は，Ｂａｎｅｒｊｉ[(4)]その他によって，“ 状態 ”及び“ 作用素 ”という概念を用いて表わされた。[注)] その数学的実体はオートマトンである。本論文では次の様な定義にたつ。

〔定義 2.1 〕（問題）　問題は５項組 $P=(S, \Omega, \lambda, s_0, G)$ で定義される。ここで，

Ｓ：状態を要素とする有限集合。

Ω：基礎的手段を要素とする有限集合。但し，何もしない手段 ω_ϕ を含む。

λ：Ω からＰＦ（Ｓ）への写像。但し，ＰＦ（Ｓ）はＳからＳへのすべての部分関数の集合。$\omega\in\Omega$ に対する $\lambda(\omega)$ は，従来，作用素と呼ばれるものに対応する。

注) 従来，問題は３項組（Ｓ，Ｆ，Ｔ）[(4)] 又は４項組（ｓ，Ｓ，Ｆ，Ｗ）[(3)] で定義されてきた。ここで，Ｓは状態集合，Ｆは作用素の集合，Ｔ，Ｗは目標集合，ｓは初期状態である。

s_0 ：初期状態，$s_0 \in S$。

G ：目標集合，$G \subset S$。

〔定義 2.2 〕 λの定義域をΩから自由モノイドΩ^*に拡張する。Ω^*上の演算を$\circ$，PF(S)上の演算を$\bullet$で表す。

$$\lambda^* : \Omega^* \to PF(S)$$

ここで，

$$\lambda^*(\omega_\phi) = I_S$$

$$\lambda^*(\bar{\omega} \circ \omega) = \lambda^*(\bar{\omega}) \bullet \lambda(\omega), \forall \bar{\omega} \in \Omega^*, \forall \omega \in \Omega$$

但し，I_S は恒等写像，また，$\forall \bar{\omega} \in \Omega^*$に対して，$\omega_\phi \circ \bar{\omega} = \bar{\omega} \circ \omega_\phi = \bar{\omega}$

〔定義 2.3 〕(可解) 問題Pは，$\forall s \in S$に対し，手段列$\bar{\omega} \in \Omega^*$が存在し，$\lambda^*(\bar{\omega})s \in G$となるとき，可解(solvable)であるといわれる。

〔定義 2.4 〕(解集合) Pが可解のとき，次のような集合$|P|$を考える。

$$|P| = \{\bar{\omega} \in \Omega^* ; \lambda^*(\bar{\omega}) s_0 \in G\}$$

$|P|$は解集合といわれる。$|P| \subseteq \Omega^*$ $\bar{\omega} \in |P|$は解(solution)といわれる。

〔定義 2.5 〕(問題射) $P = (S, \Omega, \lambda, s_0, G)$，$P' = (S', \Omega', \lambda', s_0', G')$を考える。PからP'への問題射(problem morphism) $\eta : P \to P'$は次のような条件を満たす写像 $\eta : S \cup \Omega \to S' \cup \Omega'$である。

(i) $\eta(S) \subseteq S'$, $\eta(\Omega) \subseteq \Omega'$

(ii) $\eta(s_0) = s_0'$, $\eta(G) = G'$

(iii) $\forall s \in S$, $\forall \omega \in \Omega$に対して，

$$\lambda'(\eta(\omega))(\eta(s)) \supset \eta(\lambda(\omega)s)$$ 注)

が成立つ。即ち，次の図式が可換である。

$$
\begin{array}{ccc}
s \in S & \xrightarrow{\lambda(\omega)} & S \\
\eta \downarrow & & \downarrow \eta \\
S' & \xrightarrow[\lambda(\eta(\omega))]{} & S'
\end{array}
$$

PからP′へ問題射が存在するとき，P′はPに準同形であるといい，P $\precsim$ P′と書く。特に，P $\precsim$ P′，P′$\precsim$ Pのとき，PとP′は同形であるといい，P $\approx$ P′と書く。

2.3 差異の数学的定式化

本節では，差異が状態間の2項関係で，差異の対立的概念である“同一”の数学的表現である同値関係と表裏の関係にあることを示す。

ここでは，状態数が有限であることから，状態が有限個の特徴の組で表現されると仮定しても一般性を失なわない。

差異はS上の2項関係であり，次のような写像cから定められる。

〔定義2.6〕（特徴抽出関数） Λを特徴の有限集合とすると，特徴抽出関数CはSから$\{0, 1\}^{\Lambda}$への写像である。ここで，状態$s \in S$が特徴$\alpha_i \in \Lambda$を持つとき，$C(s) = f$，fはΛから$\{0, 1\}$への写像で，α_iに対して値1をとり，他の$\alpha \in \Lambda$に対しては，$f(\alpha) = 0$であるものとする。

或る特徴$\alpha \in \Lambda$を固定すると，Sはc及びαによってきまる同値関係R(C_α)によって2つの同値類に分割される。ここで，

$$s R(C_\alpha) s' \Longleftrightarrow pr_\alpha(C(s)) = pr_\alpha(C(s'))$$

但し，pr_αは$\{0, 1\}^{\Lambda}$から$\{0, 1\}_\alpha$への射影で，$pr_\alpha(C(s)) = 1$

注）この式は，$\eta(\lambda(\omega)s) = \phi$，即ち，$s \in \mathrm{Dom}(\lambda(\omega))$のときはいつでも$\lambda'(\eta(\omega))(\eta(s)) = \eta(\lambda(\omega)s)$が成立つことを意味する。$\eta(\lambda(\omega)s) = \phi$，$\lambda'(\eta(\omega))(\eta(s)) = \phi$ということがあり得るので，記号$\supset$を用いる。

は，$C(s)$ の“ α座標 ”が1，即ち，状態sが特徴αを持つことを意味する。$R(C_\alpha)$によって得られる2つの同類値を

$$S_\alpha = \{ s \ ; \ pr_\alpha(C(s)) = 1 \}$$

$$S'_\alpha = \{ s \ ; \ pr_\alpha(C(s)) = 0 \}$$

とする。

〔定義2.7〕（基本差異） 次のような関係$DR(C_\alpha)$をαの基本差異と呼ぶ。$\alpha \in \Lambda$, $\forall s \in S_\alpha$, $\forall s' \in S'_\alpha$ に対して，$s\,DR(C_\alpha)\,s'$ であり，かつ $\forall s$, $s' \in S_\alpha$ 又は $\forall s$, $s' \in S'_\alpha$ に対して，$s\,\overline{DR(C_\alpha)}\,s'$ である。ここで，$s\,\overline{DR(C_\alpha)}\,s'$ は $s\,DR(C_\alpha)\,s'$ の否定を表わす。

基本差異は特徴の数 $|\Lambda|$ だけ考えられる。すべての基本差異の集合をDとする。Dの部分集合D'から“合成された差異”を定義する。

〔定義2.8〕（合成） 次のような関係DRをDから合成された差異と呼ぶ。$\forall s$, $s' \in S$ に対して，

$$s\,DR\,s' \Longleftrightarrow (\exists \alpha) \quad s\,DR(C_\alpha)\,s'$$

ここで，$DR(C_\alpha) \in D'$。このとき，$DR = DR(C_{\alpha 1}) \vee DR(C_{\alpha 2}) \vee \cdots \vee DR(C_{\alpha n})$ とかく（$|D'| = n$）。

以下では，特にことわらない限り，合成された差異を単に差異と呼ぶ。又，差異DRとそのグラフG_Dとを同一視し，どちらもdで表わす。

〔命題〕 差異をdとすると，$\forall s$, s', $s'' \in S$ に対して，

(i) $(s, s) \notin d$

(ii) $(s, s') \notin d \Longrightarrow (s', s) \notin d$

(iii) $(s, s') \notin d$，$(s', s'') \notin d$

$$\Longrightarrow (s, s'') \notin d$$

である。

この命題より，dの補集合 d^c が同値関係になり，差異と同値関係が表裏の関係にあることがわかる。

すべての基本差異の集合Dから合成される差異をd_{tot}とすると，$d^{c}_{tot} = G_{R(c)}$である。ここで，$G_{R(c)}$は写像Cによってきまる同値関係R(C)のグラフである。即ち，或るs，s′∈Sに対して，

$$(s, s') \notin d_i \quad (\forall d_i \in D)$$

ならば，特徴抽出機構cを通して観る状態観測者にとって，2つの状態は同じ状態とみなされる。Sのすべての元がDによって区別されるのは，d^{c}_{tot}によるSの同値類がすべて単元集合（singleton）になるときで，このときのDが状態集合Sに対して考えるべき差異集合の1つの基準になる。

〔定義2.9〕（直接可識別）　次の条件を満たすとき，差異集合Dは状態集合Sを直接可識別であるといわれる。

$\forall d_i \in D$に対して，$(s, s') \notin d_i$であるのは，$s = s'$のときで，かつこのときに限る。

2.4　例

簡単のため2枚の円盤より成るハノイの塔問題を考える。ハノイの塔問題とは，図2.1(a)の状態を円盤がすべて棒Cにある状態に移す問題で，問題規則が次のようなものである。即ち，ほかの棒へ1度に1枚の円盤しか動かすことができず，しかもより小さい円盤の上により大きい円盤を置くことはできない。状態を2項組（円盤1の位置，円盤2の位置）で表わす。例えば，図2.1(a)の状態は，（A，A）である。状態推移図は図2.1(b)で表される。但し，$\omega_i(x, y)$は棒xにある円盤iを棒yに移す手段である。状態集合Sは9個の元より成る。Sに対して直接可識別な基本差異の集合Dは，

$$D = \{ d_{1A}, d_{1B}, d_{1C}, d_{2A}, d_{2B}, d_{2C} \}$$

である。ここで，

$d_{ix} = \{ (y, z)$；状態y，zのいずれか一方において，円盤iが

棒 x にある $\}$

d_{1A} , d_{1B} のグラフを図2. 2に示す。

次に基本差異から合成された差異を考える。これは多数考えられるが，ここでは Ernst が文献(3)で定義した差異

$$d_i = \{ (x, y) ; \text{状態 } x \text{ と状態 } y \text{ とでは円盤 } i \text{ の位置が異なる} \}$$

に対応するものを示す。

$$d_1 = d_{1A} \vee d_{1B}$$

$$d_2 = d_{2A} \vee d_{2B}$$

d_1 , d_2 のグラフを図 2. 3 に示す。この図で，黒丸は S × S の元を表す。$\{ d_1 , d_2 \}$ が S を直接識別可能であることは，この図において対角元を除くすべての元が d_1 及び／又は d_2 に含まれていることから分かる。

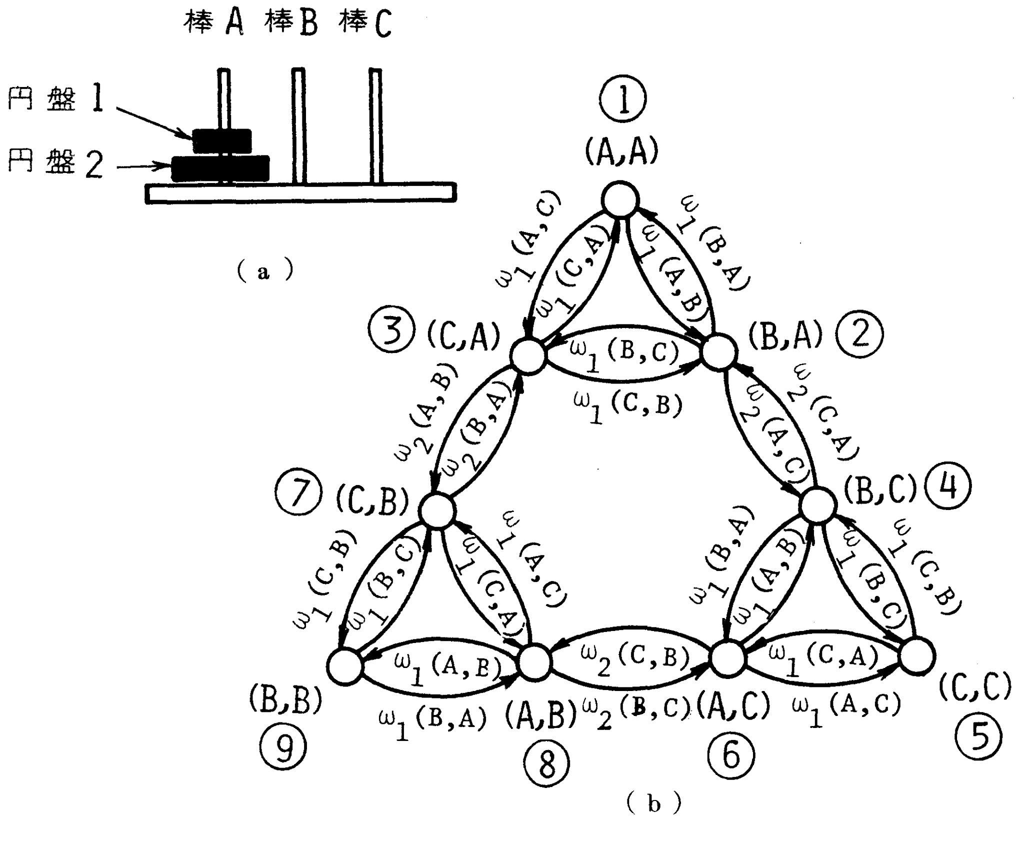


図 2. 1　　2円盤ハノイの塔問題の状態推移図

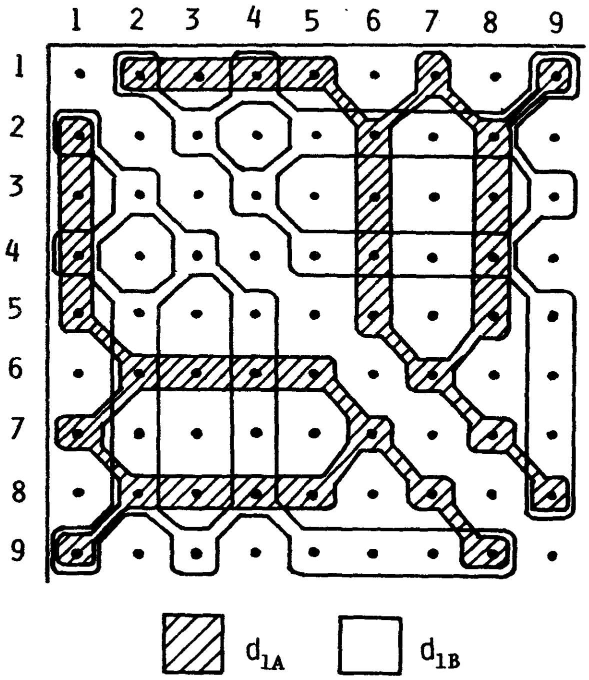


図 2. 2　　基本差異 d_{1A} , d_{1B} のグラフ

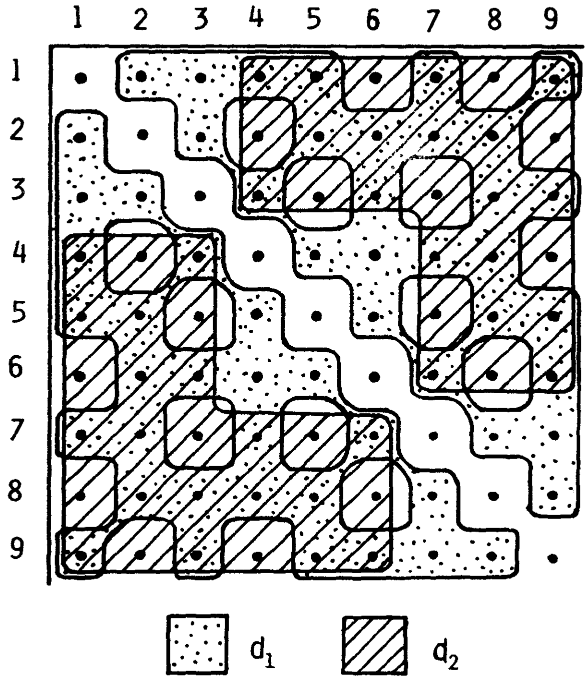


図 2. 3　　合成された差異 d_1 , d_2 のグラフ

2.5 関 連 表

本節では，差異と手段との関連を定義する。まず，特徴抽出関数Cについて仮定をたてる。

〔仮定〕 $\forall \alpha_i \in \Lambda_l \subseteq \Lambda$ に対して，

$pr_{\alpha i}(C(s)) = pr_{\alpha i}(C(s')) \Longrightarrow s，s' \in \mathrm{Dom}(\lambda(\omega))$ なるωに対して，

$$pr_{\alpha i}(C(\lambda(\omega)s)) = pr_{\alpha i}(C(\lambda(\omega)s'))。$$

$d = \underset{\alpha i}{\vee} d_{\alpha i}$，但し，$\alpha_i \in \Lambda_l \subseteq \Lambda$，$d_{\alpha_i}$は$\alpha_i$の基本差異とする。2.3の命題より，$d^c$はS上の同値関係になるが，それは次のように定義される。

$s\, d^c\, s' \Longleftrightarrow \forall \alpha_i \in \Lambda_\ell$ に対して，

$$pr_{\alpha i}(C(s)) = pr_{\alpha i}(C(s'))$$

〔補題〕 $s\,d^c s'$，$\exists \omega\,(s，s' \in \mathrm{Dom}(\lambda(\omega))) \Longrightarrow \lambda(\omega)s\,d^c\,\lambda(\omega)s'$

次に，記法上の約束をする。d^cによるSの商集合をS/d^cとする。又，或るω及び$S_i \in S/d^c$に対して，$S_i \cap \mathrm{Dom}(\lambda(\omega))$の任意の元の$\lambda(\omega)$による推移先を$\lambda(\omega)S_i$で表わすものとする。このとき差異と手段との関連が次のように定義される。

〔定義2.10〕（差異と手段との関連） 或る$\omega \in \Omega$及び或る$S_i \in S/d^c$に対して，$\lambda(\omega)S_i = S_j$とする。

(i) $j \neq i$のとき，即ち，$\lambda(\omega)$による推移先が他の同値類になるとき，手段ωは差異dに対して適切な手段の候補であるという。

(ii) $j = i$のとき，即ち，$\lambda(\omega)$による推移先が再び同じ同値類になるとき，手段ωは差異dに対して適切でない手段であるという。

〔定義2.11〕（関連表） Sの直接可識別な差異集合をD_oとする。D_oからΩへの対応Γで，次の条件を満たすものを関連表という。Γのグラフを$G_\Gamma (\subset D_o \times \Omega)$とする。

$(d，\omega) \in G_\Gamma \Longleftrightarrow \omega$はdに対して適切な手段の候補である。

2.6 既存の差異及び関連表の定義との比較

差異概念の数学的定式化は，まず Ernst[(3)]によって試みられた。彼によれば，差異 d は或る状態と或る状態集合との間の関係，$d \subset S \times P(S)$ で定義される。これは非常に多様な関係を記述できるが，それ故，逆に，差異に固有な性質を表現するには適切でない。 $P(S)$ の元を固定することにより d の簡単化を試みた Banerji ら[(5)] は，状態の部分集合で差異を定義した。すなわち，$D \subseteq S$，D を差異と呼ぶ。ここで，D は無規定の集合であるから，これによって意味のある概念が定義されたとは言い難い。強いてこの定義を解釈すれば次のようになる。即ち，基本差異 d から定まる同値関係 d^c は S を 2 つの同値類に分割するが，その一方を D とする。この D を Banerji らは差異と呼ぶのである。 D は同値類であって差異とは区別されるべきである。このような概念上の混乱の因は Ernst の定義に含まれている。彼の定義によれば同値関係も差異と呼ぶので，或る意味で同値関係を表わしている D も差異と呼ばれることになる。しかし，これらの定義の欠点は概念上の混乱よりむしろ次の点にある。即ち，これらの定義では差異の合成を定義できず，差異の可識別性及び順序構造を論ずることができない。従って，差異の定義として不十分である。

次に関連表の定義について，Ernst の定義（文献(3)，P520）と比較する。文献(3)の条件 C2 は，ω が d に対して適切ならば，$s \in S_i \cap \mathrm{Dom}(\lambda(\omega))$ のとき，$\lambda(\omega)s \notin S_i$ であるという主張とほぼ等価である。これは，s が ω の適用によって S_i 以外の同値類に移ることを表わしているが，どの同値類に移るかは示していない。従って，$s \in S_i \cap \mathrm{Dom}(\lambda(\omega))$ が ω の適用により，s とは異なる同値類に移る可能性を残している。即ち，$s\,d\,s'$ である s，s′ に対して，$\lambda(\omega)s \not{d}^{c} \lambda(\omega)s'$ ということが起り得る。2.5 節でたてた特徴抽出関数 C に関する仮定は，このようなことが起らないための，C に対する要請である。又，C1 によれば，図 2.4 の場合，ω は d を消去するのに不適切であるといわれる。一方，X を点円のように選んだとき，C2 によれば，ω は d を消去するのに適切である。

これは矛盾している。定義 2.10 によれば，ω は d に対して適切であって，不適切ではなく，矛盾は生じない。

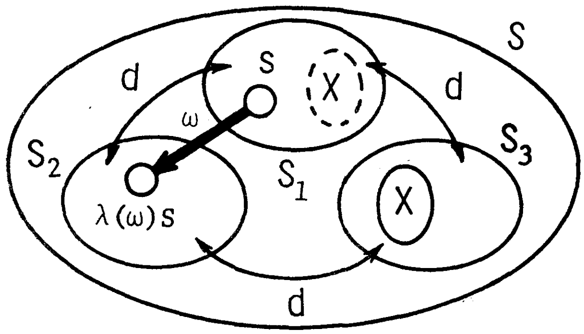


図 2. 4

2.7　結　　言

本章では，理論の出発点をなす概念の定義を与えた。それらの定義と既存の定義とを比較検討し，本章で述べた定義の優位性，及び後者が矛盾を含むか又は厳密な議論に堪え得ないことを明らかにした。

参 考 文 献

(1) Ernst, G. W. and Newell, A.: "GPS:A Case Study in Generality and Problem Solving", Academic Press, 1969.

(2) Newell, A. and Simon, H. A.: "GPS, A Program that Simulates Human Thought", Computers and Thought, 1963, pp. 279-293.

(3) Ernst, G. W.: "Sufficient Conditions for the Success of GPS", Journal of the Association for Computing Machinery, vol. 16, no. 4, 1969, pp. 517-533.

(4) Banerjy, R. B.: "Theory of Problem Solving", American Elsevier, 1969.

(5) Banerjy, R. B. and Ernst, G. W.: "A Theory for the Complete Mechanization of a GPS-type Problem Solver", 5th International Joint Conference on Artificial Intelligence, 1977, pp. 450-456.

(6) 新 妻 清 三 郎 : "GPS の解析における差異概念について", 信学論 (A), vol. 63, No. 8, 1980.

3章　商問題の解に基づく問題の分解

3.1　緒　　言

本章では，まず，関連表Γに基づいて“抽象化された問題”[注1)]を構成し，これを商問題（ quotient problem ）と呼ぶ。商問題の解$\omega_n \circ \omega_{n-1} \circ \cdots \circ \omega_1$をもとに下位目標 Dom（$\lambda(\omega_i)$）（ $i=1, \cdots, n$ ）を設定することにより，元の問題Pを（ $n+1$ ）個の下位問題P_i[注2)]（ $i=1, \cdots, n+1$ ）に分解する。P_iはPより“簡単”であるとは限らないし，又，可解であるとも限らない。そこで，関連表Γに基づいて，或る意味でPより簡単な問題をP_iから構成する。それを本章では部分問題と呼ぶ。このようにして得られた部分問題が可解であるために，関連表Γを構成する差異が持つべき性質を明らかにする。

次に，以上の議論を基に，問題を“最も簡単な問題”の列に分解することを考える。そのような分解が可能であるための条件を示す。

3.2　商　問　題

これまでに提案された抽象化の方法には2通りの方法がある。1つは，類似の問題との比較により，両者に共通の問題構造を抽出する方法[(6)]であり，他は，状態のいくつかの特徴を無視する，即ち状態表現を粗くすることにより状態を抽象化し，他の問題構成要素（手段，条件等）を状態表現に整合させるという方法[(1),(3)]である。後者はいくつかの状態を同一視するという考えが基調になっているので，これを“同一視による抽象化”と呼

注1）文献(1)では，abstracted problem と呼ばれ，文献(4)では，abstraction space と呼ばれている。

注2）P_iは従来，subproblem（部分問題と訳されている）と呼ばれているが[(2)]，本論文では数学及びシステム理論上の慣習に従い，“部分”問題という呼び方，より限定された対象にのみ用いる。

ぶことにする。本節では，同一視による抽象化によって得られる問題を関連表Γに基づいて構成する。

2.5の補題より，S/d^cに対して，次のような写像

$$\bar{\lambda} : \Gamma(d) \rightarrow PF(S/d^c)$$

が定まる。

$$\bar{\lambda}(\omega)\bar{s} = \overline{\lambda(\omega)s} \quad (s' \in \bar{s} \cap \mathrm{Dom}(\lambda(\omega)))$$

ここで，$\bar{s}$はsの同値類で，$\bar{s} \in S/d^c$。このとき，状態集合としてS/d^c，手段集合として$\Gamma(d)$を持つ問題を定義できる。

〔定義3.1〕（商問題）　$P/d^c = (S/d^c, \Gamma(d), \bar{\lambda}, \bar{s}_0, \bar{G})$ はPの d^c に関する商問題といわれる。ここで，$\bar{G} = \{\bar{s} \; ; \; s \in G\}$。

商問題と元の問題との間には次の関係が成立つ。

〔定理3.1〕　問題Pに対する関連表をΓ，Pのd^c（$d \in \mathrm{Dom}\Gamma$）に関する商問題をP/d^cとすると，P/d^cはPに準同形である。

（証明）　$S \cup \Omega$から$S/d^c \cup \Gamma(d)$への写像

$$s \longmapsto \bar{s} \quad (s \in S, \bar{s} \in S/d^c)$$

$$\omega \longmapsto \begin{cases} \omega & (\omega \in \Gamma(d)) \\ \omega_\phi & (\omega \in \Omega \setminus \Gamma(d)) \end{cases}$$

をηで表わす。ここで，$\omega_\phi \in \Gamma(d) \subsetneq \Omega$である。

$\forall s \in S$，$\forall \omega \in \Gamma(d)$に対して，

$$\bar{\lambda}(\eta(\omega))(\eta(s)) = \bar{\lambda}(\omega)\bar{s}$$

$$= \overline{\lambda(\omega)s'} \quad (s' \in \bar{s} \cap \mathrm{Dom}(\lambda(\omega)))$$

$s \in \mathrm{Dom}(\lambda(\omega))$ ならば，2.5の補題より，

$$\overline{\lambda(\omega)s'} = \overline{\lambda(\omega)s}$$

$$= \eta(\lambda(\omega)s)$$

$$\therefore \bar{\lambda}(\eta(\omega))(\eta(s)) \supset \eta(\lambda(\omega)s)$$

$\omega \in \Omega \setminus \Gamma(d)$ のとき，ωはdに対して適切でないから，

$$\eta(\lambda(\omega)s) = \eta(s)。$$

一方，定義より，

$$\eta(\omega) = \omega_\phi$$

よって，

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}(\eta(\omega))(\eta(s)) &= \bar{\lambda}(\omega_\phi)(\eta(s)) \\ &= \eta(s) \\ &= \eta(\lambda(\omega)s)。\end{aligned}$$

Q. E. D.

この定理から直ちに次の定理が得られる。

〔定理 3.2〕 問題Pが可解ならば，商問題P/d^c（$d \in \mathrm{Dom}\Gamma$）も可可解である。

$\mathrm{Dom}\Gamma$のすべての元から合成される差異を$\tilde{d}_0$とすると，$\tilde{d}_0^c$はトリビィアルな同値関係であるから，明らかに，

$$P \approx P/\tilde{d}_0^c$$

が成立つ。これは関連表Γに含まれる情報が問題Pを再構成（認識）するのに必要かつ十分なものであることを示している。

又，Γから得られる商問題の間には次の関係が成立つ。

〔定理 3.3〕 $D_1 \subset D_2 \subset \mathrm{Dom}\Gamma$，$D_1$，$D_2$から合成される差異をそれぞれ，$\tilde{d}_1$，$\tilde{d}_2$とする。このとき，

$$P/\tilde{d}_2^c \gtrsim P/\tilde{d}_1^c$$

である。

（証明） PからP$/\tilde{d}_1^c$及びP$/\tilde{d}_2^c$への問題射をそれぞれ，f及びgとする。$S/\tilde{d}_2^c \cup \Gamma(D_2)$から$S/\tilde{d}_1^c \cup \Gamma(D_1)$への写像

$$g(s) \longmapsto f(s) \quad (g(s) \in S/\tilde{d}_2^c,\ f(s) \in S/\tilde{d}_1^c)$$

$$\omega \longmapsto \begin{cases} \omega & (\omega \in \Gamma(D_1) \in \Gamma(D_2)) \\ \omega_\phi & (\omega \in \Gamma(D_2) \setminus \Gamma(D_1)) \end{cases}$$

を h で表わす。f，g は全射で，かつ $\widetilde{d}_1^c \succ \widetilde{d}_2^c$ であるから，h は全射である。

$$g(s) \in S/\widetilde{d}_2^c, \qquad \forall \omega \in \Gamma(\mathcal{D}_1) \text{ に対して，}$$

$$\begin{aligned}\underline{\lambda}(h(\omega))(h(g(s))) &= \underline{\lambda}(\omega)(f(s)) \\ &\supset f(\lambda(\omega)s') \\ &\quad (s' \in f(s) \cap \mathrm{Dom}(\lambda(\omega)))\end{aligned}$$

一方，

$$\begin{aligned}h(\overline{\lambda}(\omega)(g(s))) &\supset h(g(\lambda(\omega)s'')) \\ &\quad (s'' \in g(s) \cap \mathrm{Dom}(\lambda(\omega))) \\ &= f(\lambda(\omega)s'').\end{aligned}$$

$\widetilde{d}_1^c \succ \widetilde{d}_2^c$ から，$f(s) \supset g(s)$．従って，

$$s'' \in f(s) \cap \mathrm{Dom}(\lambda(\omega)).$$

よって，2.5 の補題より，

$$\lambda(\omega)s' \ \widetilde{d}_1^c \ \lambda(\omega)s''$$

$$\therefore \underline{\lambda}(h(\omega))(h(g(s))) \supset h(\overline{\lambda}(\omega)(g(s)))$$

又，$\omega \in \Gamma(D_2) \setminus \Gamma(D_1)$ のとき，

$$\begin{aligned}\underline{\lambda}(h(\omega))(h(g(s))) &= \underline{\lambda}(\omega_\phi)(f(s)) \\ &= f(s).\end{aligned}$$

一方，

$$g(s) \subset f(s)$$

かつ，Γ の定義より，ω は $\widetilde{d}_2$ に対して適切でないから，

$$\overline{\lambda}(\omega)(g(s)) \subset f(s).$$

よって，

$$h(\overline{\lambda}(\omega)(g(s))) = f(s)$$

$$\therefore \lambda(h(\omega))(h(g(s))) = h(\overline{\lambda}(\omega)(g(s)))$$

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\lambda(\omega)"] \arrow[d, "g"] \arrow[dd, bend right, "f"'] & S \arrow[d, "g"'] \arrow[dd, bend left, "f"] \\
S/\tilde{d}_2^c \arrow[r, "\overline{\lambda}(g(\omega))"] \arrow[d, "h"] & S/\tilde{d}_2^c \arrow[d, "h"'] \\
S/\tilde{d}_1^c \arrow[r, "\underline{\lambda}(f(\omega))"] & S/\tilde{d}_1^c
\end{tikzcd}
$$

Q. E. D.

3.3 可解な部分問題への分解

前節では，“抽象化された問題”の1つのモデルとして，商問題を関連表Γから構成した。商問題の解を，

$$\omega_n \circ \omega_{n-1} \quad \circ \cdots\cdots \circ \omega_1$$

とすると，求解の次のステップは，Dom（$\lambda(\omega)_i$））を下位目標とする下位問題を解くことである。しかし，下位問題はいかなる意味でも元の問題より簡単であるとは限らない注)。そこで，下位問題を関連表Γに基づいて“簡単化”する方法について述べる。

まず，“より簡単”という言葉の意味を明確にしておかねばならない。

〔定義 3.2〕（部分問題） 問題$P' = (S', \Omega', \lambda', s_0', G')$は，次のとき$P = (S, \Omega, \lambda, s_0, G)$の部分問題といわれる。

(i) $S' \subsetneqq S$, $\Omega' \subsetneqq \Omega$

(ii) $\forall \omega \in \Omega'$に対して，$\lambda'(\omega)$は$\lambda(\omega)$の$\mathrm{Dom}(\lambda(\omega)) \cap S'$への縮少である。

注）従来，下位問題（部分問題と訳されることもある。原語は subproblem）は，“元の問題より簡単な問題”とほとんど同意義で用いられているが，それは経験的用語法であり，厳密に定義されたものではない。下位問題は初期状態と目標のみが元の問題とは異なる別の問題である。初期状態と目標が変れば，元の問題より簡単になるという保証はない。

或る下位問題が元の問題より簡単であるとは，その下位問題が元の問題の部分問題であることをいう。

商問題を P/d^c，その解を

$$\omega_n \circ \omega_{n-1} \circ \cdots\cdots \circ \omega_1$$

とする。この解から元の問題Pの目標Gの下位目標として，

$$\mathrm{Dom}(\lambda(\omega_1)),\ \mathrm{Dom}(\lambda(\omega_2)),\ \cdots\cdots,\ \mathrm{Dom}(\lambda(\omega_1))$$

がたてられる。即ち，Pの初期状態 s_0 を直接Gの或る要素に変換する手段列を見出す（Pを解く）代りに，まず，s_0 を下位目標 $\mathrm{Dom}(\lambda(\omega_1))$ に変換する手段列 $\widetilde{\omega}_1$ を見出し（下位問題 P_1 を解く），次に，

$$\lambda^*(\omega_1 \circ \widetilde{\omega}_1)\, s_0$$

を下位目標

$$\mathrm{Dom}(\lambda(\omega_2))$$

に変換する手段列 $\widetilde{\omega}_2$ を見出し（下位問題 P_2 を解く），以下これをくり返す。ここで，下位問題は，

$$P_1 = (S,\ \Omega,\ \lambda,\ s_0,\ \mathrm{Dom}(\lambda(\omega_1)))$$
$$\vdots$$
$$P_i = (S,\ \Omega,\ \lambda,\ \lambda^*(\omega_{i-1} \circ \widetilde{\omega}_{i-1} \circ \cdots\cdots \circ \omega_1 \circ \widetilde{\omega}_1)\, s_0,\ \mathrm{Dom}(\lambda(\omega_i)))\quad (2 \leq i \leq n)$$
$$\vdots$$
$$P_{n+1} = (S,\ \Omega,\ \lambda,\ \lambda^*(\omega_n \circ \widetilde{\omega}_{n-1} \circ \cdots\cdots \circ \omega_1 \circ \widetilde{\omega}_1)\, s_0,\ G)$$

で表わされる。

下位問題 P_i（$1 \leq i \leq n+1$）は元の問題Pが可解であっても可解とは限らず，又Pの部分問題でもない。

まず，P_i の状態集合及び手段集合を制限することによりPの部分問題を得る。

$$\widehat{P}_i = (\widehat{s}_{0,i},\ \Omega \setminus \Gamma(d),\ \lambda_{\widehat{s}_{0,i}},\ s_{0,i},\ \mathrm{Dom}(\lambda(\omega_i)) \cap \widehat{s}_{0,i})\qquad (1 \leq i \leq n)$$

$$\widehat{P}_{n+1} = (\widehat{s}_{0,n+1},\ \Omega \setminus \Gamma(d),\ \lambda_{\widehat{s}_{0,n+1}},\ s_{0,n+1},\ G)$$

ここで，

$$s_{0,1} = s_0$$

$$s_{0,i} = \lambda^{*}(\omega_{i-1} \circ \widetilde{\omega}_{i-1})\ s_{0,i-1}$$

である。但し，$\widetilde{\omega}_{i-1}$は$\hat{P}_{i-1}$ の解である。また，

$$\hat{s}_{0,i} = \{ s\ ;\ (s,\ s_{0,i}) \notin d \}$$

である。$\lambda_{\hat{s}_{0,i}}(\omega)$は，$\lambda(\omega)$の

$$\mathrm{Dom}(\lambda(\omega)) \cap \hat{s}_{0,i}$$

への縮少である。

〔命題 3.1〕 商問題$P/d^c = (S/d^c,\ \Gamma(d),\ \lambda,\ \bar{s}_0,\ \bar{G})$の解を

$\omega_n \circ \omega_{n-1} \circ \cdots\cdots \circ \omega_1$ ；

$$\bar{\lambda}(\omega_1)\bar{s}_0 = \bar{s}_1$$

$$\bar{\lambda}(\omega_2)\bar{s}_1 = \bar{s}_2$$

$$\vdots$$

$$\bar{\lambda}(\omega_n)\bar{s}_{n-1} \in \bar{G}$$

とする。このとき，

$$\bar{s}_{i-1} = \hat{s}_{0,i} \qquad (i=1,\ \cdots\cdots,\ n)$$

である。

（証明） まず，$\bar{s}_0 = \hat{s}_{0,1}$ であることを示す。$\forall s \in \bar{s}_0$ に対して，

$$(s\ ,\ s_0) \notin d.$$

$s_0 = s_{0,1}$ であるから，

$$(s\ ,\ s_{0,1}) \notin d.$$

$$\therefore\quad s \in s_{0,1}$$

よって，

$$\bar{s}_0 \subset \hat{s}_{0,1}$$

$\forall s \in \hat{s}_{0,1}$ に対して，

$$(s\ ,\ s_{0,1}) \notin d$$

$$(s\ ,\ s_0) \notin d$$

$$(s\ ,\ s_0) \in d^c$$

$$\therefore\quad s \in \bar{s}_0$$

よって，

$$\bar{s}_0 \supset \hat{s}_{0,1}.$$

故に，

$$\bar{s}_0 = \hat{s}_{0,1}.$$

次に，$\bar{s}_{k-1} = \hat{s}_{0,k}$ ならば，$\bar{s}_k = \hat{s}_{0,k+1}$ であることを示す。仮定より，

$$\bar{\lambda}(\omega_k)\,\bar{s}_{k-1} = \bar{s}_k$$

であるから，

$$s \in \mathrm{Dom}(\lambda(\omega_k)) \cap \bar{s}_{k-1}$$

に対して，

$$\lambda(\omega_k)\,s \in \bar{s}_k .$$

ところで，

$$\begin{aligned}\lambda^*(\tilde{\omega}_k)\,s_{0,k} &\in \mathrm{Dom}(\lambda(\omega_k)) \cap \hat{s}_{0,k} \\ &= \mathrm{Dom}(\lambda(\omega_k)) \cap \bar{s}_{k-1}\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}s_{0,k+1} &= \lambda^*(\omega_k \circ \tilde{\omega}_k)\,s_{0,k} \\ &= \lambda(\omega_k) \bullet \lambda^*(\tilde{\omega}_k)\,s_{0,k} \in \bar{s}_k .\end{aligned}$$

即ち，

$\forall s' \in \bar{s}_k$ に対して，$(s',\ s_{0,k+1}) \notin d$.

よって，

$$s' \in \hat{s}_{0,k+1}.$$

故に，

$$\bar{s}_k \subset \hat{s}_{0,k+1}.$$

$\forall s \in s_{0,k+1}$ に対して，

$$(s,\ s_{0,k+1}) \notin d$$

$$(s,\ s_{0,k+1}) \in d^c$$

ところで，

$$s_{0,k+1} \in \bar{s}_k$$

であるから，

$$s \in \bar{s}_k .$$

故に，

$$\bar{s}_k \supset \hat{s}_{0,k+1} .$$

$$\therefore \quad \bar{s}_k = \hat{s}_{0,k+1}$$

Q. E. D.

〔命題 3. 2 〕 $\hat{P}_i$ はPの部分問題である。

以上で，下位問題 $\hat{P}_i$ の状態集合及び手段集合を制限することにより，Pの部分問題 $\hat{P}_i$ が得られることが明らかになった。今後，“ PがP／d^cの解により部分問題列に分解される ”と言ったときは，P／d^c の解 $\omega_n \circ \omega_{n-1}$ から部分問題列

$$\hat{\mathbf{P}} = (\hat{P}_i)_{i=1}^{n+1}$$

が定まることを指すものとする。

次に，以上のようにして得られた部分問題が可解であるためには差異がいかなる条件を満たすべきかについて論ずる。

〔定理 3. 4 〕 差異 d が次の条件(A)を満たすならば，問題Pは d^c に関する商問題P／d^c の解により可解な部分問題列に分解される。

(A) $\forall \bar{s}_i \in S/d^c$ ， $\forall s,\ s' \in \bar{s}_i$ に対して，

$$\lambda^* (\bar{\omega})\, s = s'$$

なる $\bar{\omega} \in (\Omega \setminus \Gamma(d))^*$ が存在する。

（証明）

$$\forall \bar{s}_{i-1} \in S/d^c , \quad \forall s \in \bar{s}_{i-1}$$

に対して，条件(A)より，

$$\lambda^*_{\bar{s}_{i-1}} (\bar{\omega})\, s \in \mathrm{Dom}(\lambda(\omega_i)) \cap \bar{s}_{i-1}$$

なる $\bar{\omega} \in (\Omega \setminus \Gamma(d))^*$ が存在する。従って，部分問題 $\hat{P}_i$ は可解である。

Q. E. D.

3.4 逐次分解法

前節では，与えられた問題を部分問題列に分解する方法と，それらの部分問題が可解であるための条件について述べた。本節では，その自然な展開として，部分問題を更に部分問題に逐次分解し，初期状態と目標との間に唯一つの差異しか存在しないという意味で最も簡単な問題の列まで分解する方法について論ずる。この方法は，Nilsson(2)が問題置換法（problen reduction method）と呼んだものに相当する。Nilssonによれば，この方法の特徴は探索木がAND／OR形木で表わされる点にある。本章では，彼とは独立にAND／OR形部分問題木を定義し，その木が可解木を含むための条件を示す。なお，AND／OR形部分問題木が可解木を含むとき，前記の逐次分解法は求解に成功する。

3.4.1 差異列から定義されるAND／OR形部分問題木

本節では，問題の分解を木（tree）で表現することを考える。まず，木の一般的定義から始める。

〔定義3.3〕（木）　Iを自然数の集合，I^*をI上のすべての有限系列の集合，NをI^*の有限部分集合で次の(i)，(ii)の条件を満たすものとする。

(i)　$n \in N$　かつ　$n = n_1 n_2$ ならば，$n_1 \in N$。ここで，$n, n_1, n_2 \in I^*$。

(ii)　$nj \in N$　かつ　$i \leq j$　ならば，$ni \in N$。ここで，$n \in I^*$，$i, j \in I$。

木Tとは，集合N，Nと素な集合L，及びNからLへの写像$t : N \longrightarrow L$で定義される合成概念$T = (N, L, t)$であり，Nの各元を節点（node），Lの各元を節点のラベル（label）という。又，$n \in N$，$n1 \notin N$のとき，節点nを葉節点という。$n \in N$，$i \in I$に対して，$ni \in N$のとき，niはnの子節点，逆にnはniの親節点という。任意の$n \in N$に対して，

$$\varepsilon n = n \varepsilon = n$$

で定義されるεをNに含めることにする。εは根節点と呼ばれる。

3.3で述べた分解の結果はOR－AND の2階層の木で表現される。

〔定義3.4〕(単位木)　商問題から定まる次のような木を単位木という。

(i)　根節点のラベル$t(\varepsilon)$は，与えられた問題Pか又はPの部分問題$\hat{P}_i$である。

(ii)　根節点のラベルがPの場合。P/d^cの解集合を$\{\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \cdots, \tilde{\omega}_l\}$とすると，根節点の子節点のラベルは，

$$t(1)=\hat{P}_1, \quad t(2)=\hat{P}_2, \cdots, \quad t(l)=\hat{P}_l$$

である。節点1，2，…，lはOR節点と呼ばれる。

(iii)　節点i（$t(i)=\hat{P}_i$）の子節点のラベルは，$\tilde{\omega}_i$の長さをmとすると，

$$t(i1)=\hat{P}_{i1}, \quad t(i2)=\hat{P}_{i2}, \cdots\cdots,$$
$$t(i(m+1)) = \hat{P}_{i(m+1)}$$

である。節点i1，i2，…，i(m+1)はAND節点と呼ばれる。

(iv)　根節点のラベルが$\hat{P}_i$の場合も(ii)，(iii)と同様にOR節点，AND節点が定義される。

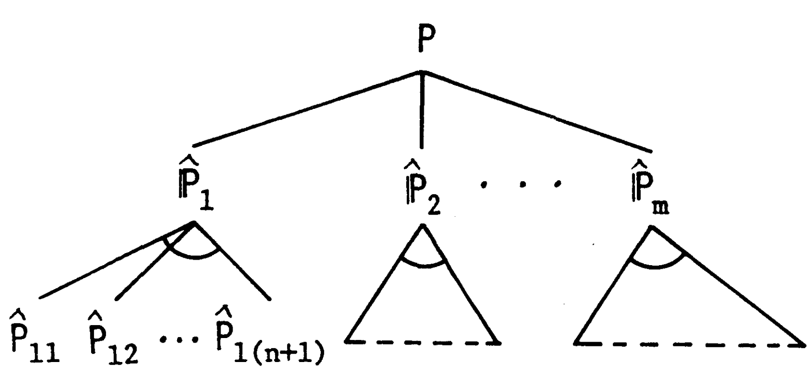


図3.1　　単位木

単位木は根節点のラベルPとその商問題P/d^cによって規定されるから，$T^U(P, d)$で表わす。$T^U(P, d)$の1つの節点をα，そのラベルを$\hat{P}_\alpha$とすると，$T^U(P, d)$は節点α（又は問題$\hat{P}_\alpha$）を含むという。特に，αが根節点ならば，T（P, d）は節点α（又は問題$\hat{P}_\alpha$）を根節点として含むという。

与えられた問題を部分問題列に分解し，部分問題をさらに部分問題列に分解した結果は，単位木の合成で表現される。

〔定義3.5〕（単位木の合成）　$T_1^U = (N_1, L_1, t_1)$，$T_2^U = (N_2, L_2, t_2)$を単位木とする。T_1^U，T_2^Uの根節点をそれぞれε_1，ε_2とする。

$$t_2(\varepsilon_2) = \hat{P}_i \in L_1$$

のとき，T_1^UとT_2^Uの合成

$$T_1^U \oplus T_2^U$$

が定義できて，

$$T = T_1^U \oplus T_2^U$$

とすると，$T = (N, L, t)$は次のような木である。

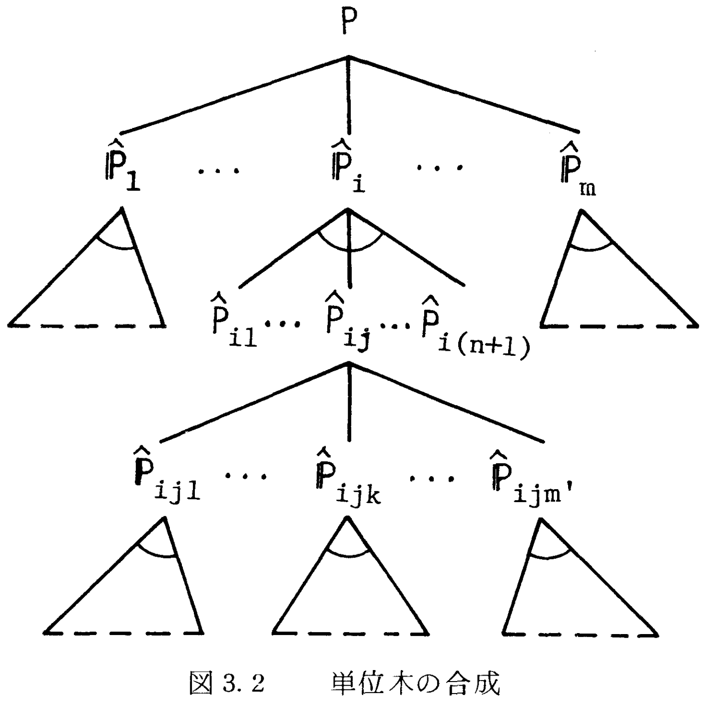


図3.2　単位木の合成

(i) $N = N_1 \cup N_2'$．ここで，$\hat{P}_i$ の T_1^U における節点を i とすると，

$$N_2' = \{ \ i\,n \ ; \ n \in N_2 \ \}$$

ii) $L = L_1 \cup L_2$

iii)
$$t(n) = \begin{cases} t_1(n) & (n \in N_1) \\ t_2(n') & (n \notin N_1, \ n = i\,n', \ n' \in N_2) \end{cases}$$

iv) Tの根節点は ε_1 である。

このとき，単位木 T_2^Uは節点 i に接がれるという。

この定義で，T_1^U を合成された木Tで置き換えると，木Tと単位木 T^U との合成

$$T \oplus T^U$$

が得られる。

部分問題 $\hat{P}_i$ をさらに分解するということはラベルが $\hat{P}_i$である節点に単位木 $T^U(\hat{P}_i, \cdot)$ を接ぐことに対応し，$\hat{P}_i$ がもはや分解できない，またはしないということは $\hat{P}_i$ をラベルとする節点が葉節点であることに対応する。したがって，いかなるときいかなる単位木が接がれ，またいかなるとき葉節点になるかを定めれば，分解の手順を木によって間接的に表現することができる。次に示す定義は，或る差異順序に従って問題を分解する手順を表わしている。

〔定義 3.6 〕(差異列Dから定義されるAND／OR形部分問題木)
関連表Γから適当に選ばれた差異の列を

$$D = (d_i)_{i=1}^{n}$$

とする。但し，$(d_1 \vee d_2 \vee \cdots \vee d_n)^c$ はトリビィアルな同値関係になるものとする。次の条件(i) ~(iv) を満たすものを差異列Dから定義されるAND／OR 形部分問題木といい，T(D)で表す。

(i) 根節点のラベルは与えられた問題**P**である。

(ii) Pを根節点として含む単位木は，$T^U(P, d_1)$である。

(iii) 節点αのラベルを $\widehat{P}_\alpha$ とする。又，αを含む単位木を$T^U(\cdot\ ,d_i)$とする。もし，$\widehat{P}_\alpha/d_{i'}^c$が可解ならば，節点$\alpha$には単位木$T^U(\widehat{P}_\alpha, d_{i'})$が接がれる。但し，$i' \geqq i+1$で，$d_{i'}$ は $\widehat{P}_\alpha/d_{i'}^c$ の解が ω_ϕ 以外のものになる d_i 以後の最初の差異（差異列**D**の順序に関して）である。もし，$\widehat{P}_\alpha/d_{i'}^c$ が可解になるような$d_{i'}(i' > i)$が存在しないならば，節点αは葉節点であり，αと同じ親節点を持つαより右のAND節点α'（$\alpha' > \alpha$）も葉節点である。

(iv) 節点βのラベルを$\widehat{P}_\beta$ とする。もし，$\widehat{P}_\beta$ の初期状態と目標との間に唯一つの差異しか存在しないならば，節点βは葉節点である。このような部分問題 $\widehat{P}_\beta$ を最簡問題という。

ここで定義した木は概略次のような手順を表わしている。問題Pと差異列**D**は与えられているものとする。まず，d_1^c に関するPの商問題P/d_1^cを構成し，それを解く。P/d_1^cの解を$\{\widetilde{\omega}_1, \cdots, \widetilde{\omega}_m\}$とすると，これらの解に基づいてPを部分問題列$\widehat{P}_1, \widehat{P}_2, \cdots, \widehat{P}_m$に分解する。次に$\widehat{P}_1$ に含まれる部分問題の分解を試みる。$\widehat{P}_{11}$ が最簡問題でないならば，d_2^c に関する$\widehat{P}_{11}$ の商問題 $\widehat{P}_{11}/d_2^c$ を構成しそれを解く。もしω_ϕ 以外の解が得られたならば，その解に基づいて $\widehat{P}_{11}$ を部分問題列に分解する。もし$\widehat{P}_{11}/d_i^c$ の解が ω_ϕか又は解けないならば，d_3 について同様のことを試みる。すべてのd_i（$i \geqq 2$）に対して，$\widehat{P}_{11}/d_i^c$ の求解に失敗したならば，$\widehat{P}_{11}$ の分解を諦め，同時に$\widehat{P}_{12}, \cdots, P_{1l}$ $(\widehat{P}_1 = (\widehat{P}_{1j})_{j=1}^{l})$ の分解も諦める。$\widehat{P}_1$ に対して試みたことを$\widehat{P}_2, \cdots, \widehat{P}_m$ に対しても同様に試みる。以下同様にして，すべての部分問題が最簡問題になるか，又は分解できないものとみなされるか，いずれかになるまで差異順序に従って逐次分解する。

この手順は，T(**D**)が次のような可解木を含むとき求解に成功する。

〔定義3.7〕 $T_1 = (N_1, L_1, t_1)$，$T_2 = (N_2, L_2, t_2)$ を木とする。次のような単射$h: N_2 \rightarrow N_1$が存在するとき，T_1はT_2 を含むという。

(i)　$\forall n \in N_2$ に対して

$$t_2(n) = t_1(h(n))$$

(ii)　$\forall n \in N_2$，$\forall i \in I$ に対して，もし，$ni \in N_2$ ならば，

$$h(ni) = h(n)i$$

である。

特に，$N_2 \subset N_1$，$L_2 \subset L_1$ のとき T_2 を T_1 の部分木という。

〔定義3.8〕(可解木)　T(D)の部分木で次の条件(i)〜(v)を満たす木を可解木という。

(i)　根節点のラベルは与えられた問題Pである。

(ii)　根節点の子節点は唯一つのOR節点である。

(iii)　1つのOR節点のラベルを$\hat{P}_i = (\hat{P}_{ij})_{j=1}^{m}$　とする。このOR節点の子節点のラベルは $\hat{P}_{i1}$，…，$\hat{P}_{im}$ である。

(iv)　AND節点の子節点は唯一つのOR節点である。

(v)　すべてのAND節点のラベルは可解な部分問題である。

〔命題3.3〕　T(D)に含まれる可解木の葉節点のラベルはすべて最簡問題である。

(証明)　可解木の任意の葉節点をα，そのラベルを$\hat{P}_\alpha$とする。可解木の定義より $\hat{P}_\alpha$ は可解であるから，その商問題も可解である。もし，$\hat{P}_\alpha$ が最簡問題でないとすれば，定義3.6より節点αに単位木$T^U(\hat{P}_\alpha, \cdot)$が接がれるから$\alpha$は葉節点でないことになる。これは$\alpha$が葉節点であるという仮定に矛盾する。よって，可解木の葉節点のラベルはすべて最簡問題である。

Q. E. D.

図3.3は差異例(d_1，d_2，d_3)から定義されるAND／OR形部分問題木の一例で，図3.4はその中に含まれる可解木を抽出したものである。図中，枝と枝とを結ぶ円弧はそれらの枝の先の節点がAND節点であることを示す。

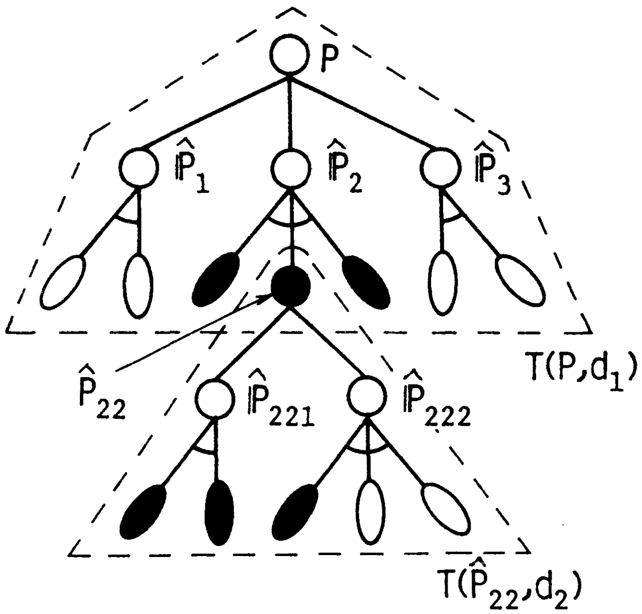


図 3. 3　　差異列（ d_1， d_2， d_3 ）から定義
されるＩつのAND／OR形部分問題木

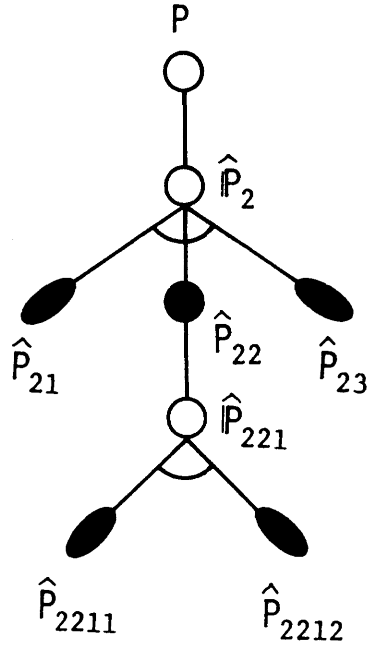


図 3. 4　　可解木

又，楕円は葉節点を，黒く塗りつぶされた節点はそれが可解節点であることをそれぞれ表わしている。

3.4.2　AND／OR形部分問題木が可解木を含むための十分条件

先に述べたように，AND／OR形部分問題木は差異列が定まれば，それに対して一意に定まるが，本節では，差異列がいかなる条件を満たすときこの木が可解木を含むかについて論ずる。

差異列

$$\mathbf{D} = (\mathbf{d}_i)_{i=1}^{n}$$

に対して，合成された差異の列

$$\widetilde{\mathbf{D}} = (\widetilde{\mathbf{d}}_i)_{i=1}^{n}$$

を次のように定義する。

$$\widetilde{\mathbf{d}}_1 = \mathbf{d}_1$$
$$\widetilde{\mathbf{d}}_2 = \mathbf{d}_1 \vee \mathbf{d}_2$$
$$\vdots$$
$$\widetilde{\mathbf{d}}_n = \mathbf{d}_1 \vee \mathbf{d}_2 \vee \cdots \vee \mathbf{d}_n$$

〔条件A′〕　$\forall \bar{s}_i \in S / \widetilde{d}_i^c$,　$\forall s,\ s' \in \bar{s}_i$ に対して，

$$\lambda^*(\bar{\omega})\, s = s'$$

なる$\bar{\omega} \in (\Omega \setminus \Gamma(\widetilde{\mathbf{d}}_i))^*$ が存在する。ここで，

$$\Gamma(\widetilde{\mathbf{d}}_i) = \Gamma(\mathbf{d}_1) \cup \cdots\cdots \cup \Gamma(\mathbf{d}_i)$$

である。

〔定理3.5〕　$\mathbf{D}$から定義される$\widetilde{\mathbf{D}}$が条件A′を満たすならば，$\mathbf{T}(\mathbf{D})$は可解木を含む。

（証明）　差異列$\mathbf{D} = (\mathbf{d}_i)_{i=1}^{n}$ に対して，部分列の順序を，

$$\mathbf{D}_1 = (\mathbf{d}_1),\ \mathbf{D}_2 = (\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)\ \cdots,\ \mathbf{D}_i = (\mathbf{d}_j)_{j=1}^{i},\ \cdots,\ \mathbf{D}_i = (\mathbf{d}_j)_{j=1}^{n}$$

と定める。このとき部分列の順序の帰納法により証明する。

(i)　$i=1$のとき。$T(D_1)$ の根のラベルはPで，これは可解。$T(D_1)$ の1つのOR節点のラベルは，P/d_1^c の1つの解によって分解されたPの部分問題列。d_1 は条件A′を満たすから，定理3.4より，それらの部分問題は可解である。従って，前記のOR節点の子節点であるAND節点はすべて可解である。

よって，$T(D_1)$ は可解木を含む。

(ii)　$i=k$のとき題意が成立つものとする。即ち，$T(D_k)$ が可解木を含むものとし，$T(D_{k+1})$が可解木を含むことを示す。$T(D_k)$に含まれる可解木の葉節点の任意の1つをαとする。αのラベルを$\hat{\hat{P}}_\alpha$とすると，定理3.2より，$\hat{P}_\alpha/d_{k+1}^c$は可解である。但し，$\hat{P}_\alpha$は最簡問題でないものとする。$\hat{P}_\alpha/d_{k+1}^c$の解の1つを$\widetilde{\omega}_\alpha$とすると，$\hat{P}_\alpha$は$\widetilde{\omega}_\alpha$によって可解な部分問題列に分解される。これは次のようにして証明される。

$\hat{P}_\alpha$ を含む単位木は

$$T^U(\bullet,\ d_{k'})\quad (k'\leq k)$$

である。従って，$\hat{P}_\alpha$ の状態集合は$S/\widetilde{d}_k^c$ の1つ元に等しく，手段集合は$\Omega\setminus\Gamma(\widetilde{d}_k)$に等しい。$\hat{P}_\alpha/d_{k+1}^c$ の解によって得られる $\hat{P}_\alpha$ の部分問題の1つを$\hat{P}_\beta$ とすると，$\hat{P}_\beta$ の状態集合は，

$$(S/\widetilde{d}_k^c)/d_{k+1}^c=S/\widetilde{d}_{k+1}^c$$

の1つの元に等しく，手段集合は，

$$(\Omega\setminus\Gamma(\widetilde{d}_k))\setminus\Gamma(d_{k+1})=\Omega\setminus\Gamma(\widetilde{d}_{k+1})$$

に等しい。条件（A′）より，

$$\forall \bar{s}_i\in S/\widetilde{d}_{k+1}^c,\quad \forall s,\ s'\in \bar{s}_i$$

に対して，

$$\lambda^*(\bar{\omega})s=s'$$

なる$\bar{\omega}\in(\Omega\setminus\Gamma(\widetilde{d}_{k+1}))^*$ が存在するから，$\hat{P}_\beta$ は可解である。

よって，$\hat{P}_\alpha$ を根節点として含む単位木$T^U(\hat{P}_\alpha,\ d_{k+1})$の任意のAND節点は可解である。故に，$T(D_{k+1})$は可解木を含む。即ち，$i=k+1$

のとき題意が成立つことが証明されたから，$i = n$のときも題意が成立つ。

Q. E. D.

3.5 例

条件Aを満たす差異及び条件A′を満たす差異列の具体例を示す。3枚の円盤よりなるハノイの塔問題を考える。状態を特徴の組

（円盤1の位置，円盤2の位置，円盤3の位置）

で表し，棒xにある円盤iを棒yに移す手段を$\omega_i(x, y)$で表す。状態推移は図3.5で表される。初期状態を（A,A,A），目標を（C,C,C）とする。直接可識別な差異の集合は，

$$\mathscr{D} = \{ d_1, d_2, d_3 \}$$

$$d_i = \{ (x, y) ; \text{状態}x\text{と状態}y\text{とでは円盤}i\text{の位置が異なる} \}$$

である。関連表Γは，

$$\Gamma(d_1) = \{ \omega_1(x, y) ; x, y = A, B, C, \quad x \neq y \}$$

$$\Gamma(d_2) = \{ \omega_2(x, y) : x, y = A, B, C, \quad x \neq y \}$$

$$\Gamma(d_3) = \{ \omega_3(x, y) ; x, y = A, B, C, \quad x \neq y \}$$

である。d_1^c，d_2^c，d_3^c による同値類別をそれぞれ，図3.6，図3.7，図3.8に示す。これらはそれぞれ点線で囲まれた3つの同値類より成る。図中，一は$\Gamma(d_1)$に属する手段を，=は$\Gamma(d_2)$に属する手段を，≡は$\Gamma(d_3)$に属する手段を表わす。図3.6で，状態sと状態s′とは，$\Omega \setminus \Gamma(d_1)$，即ち，=又は≡でつながっていないから，差異$d_1$は条件Aを満たさない。差異$d_2$についても同様である。図3.8で，点線で囲まれたどの状態間も$\Omega \setminus \Gamma(d_3)$，即ち，一又は=で結ばれているから，差異$d_3$は条件Aを満たす。

次に，商問題P/d_1^c，　P/d_2^c　，P/d_3^c の解とそれらの解から定まる部分問題について述べる。P/d_1^c の解は，

$$\{ \omega_1(A, C), \omega_1(B, C) \circ \omega_1(A, B), \cdots \}$$

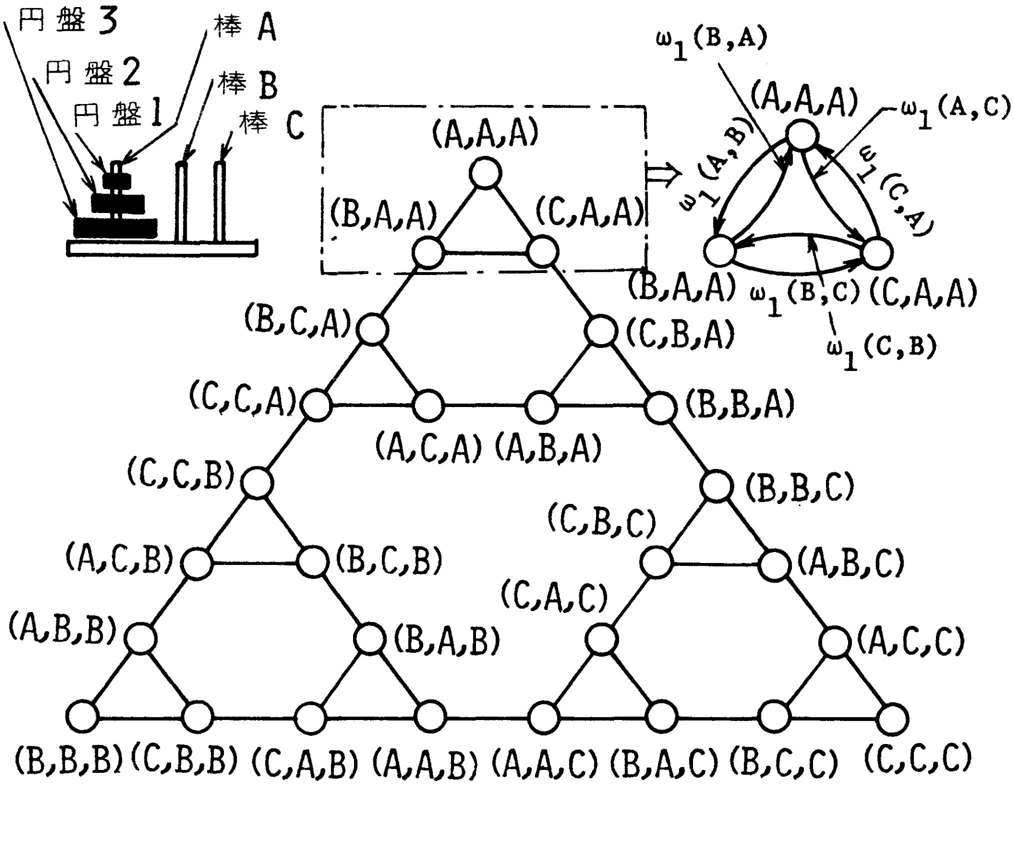


図 3.5　　3円盤ハノイの塔問題の状態推移図

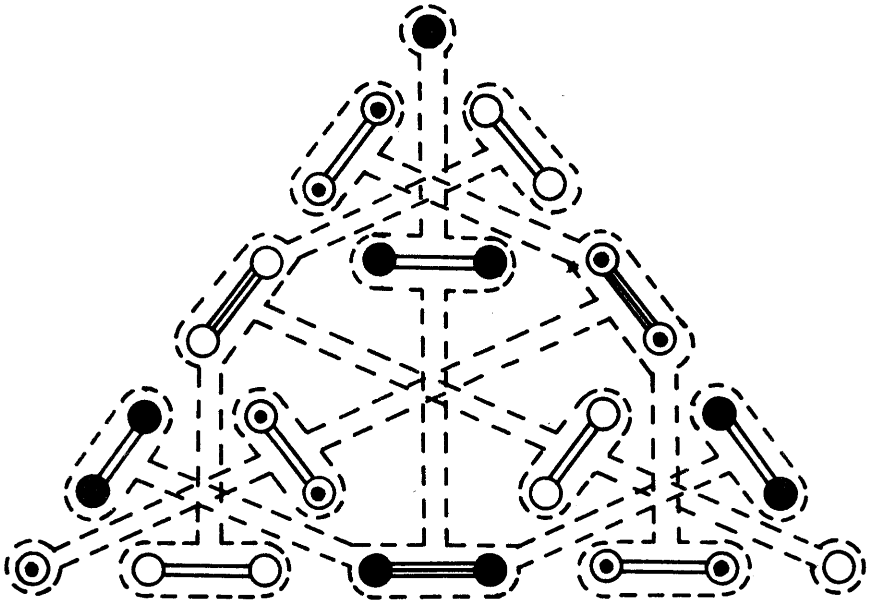


図 3. 6　　d_1^c による同値類別

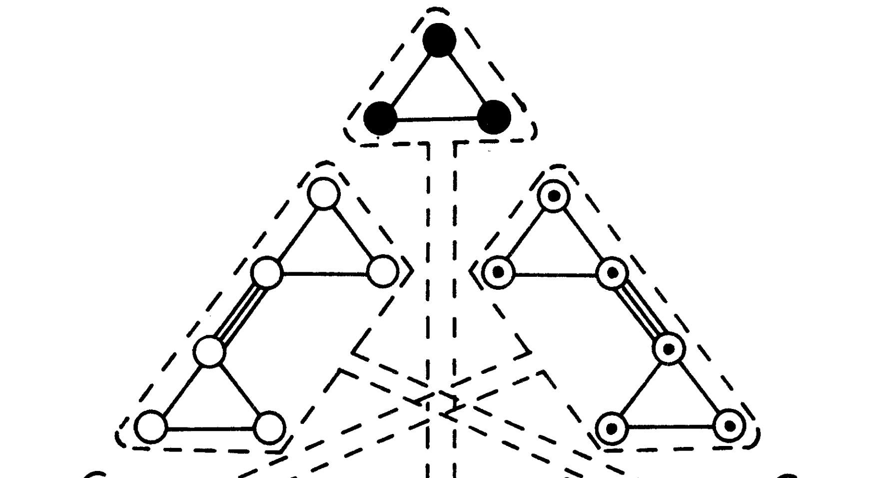


図 3. 7　　d_2^c による同値類別

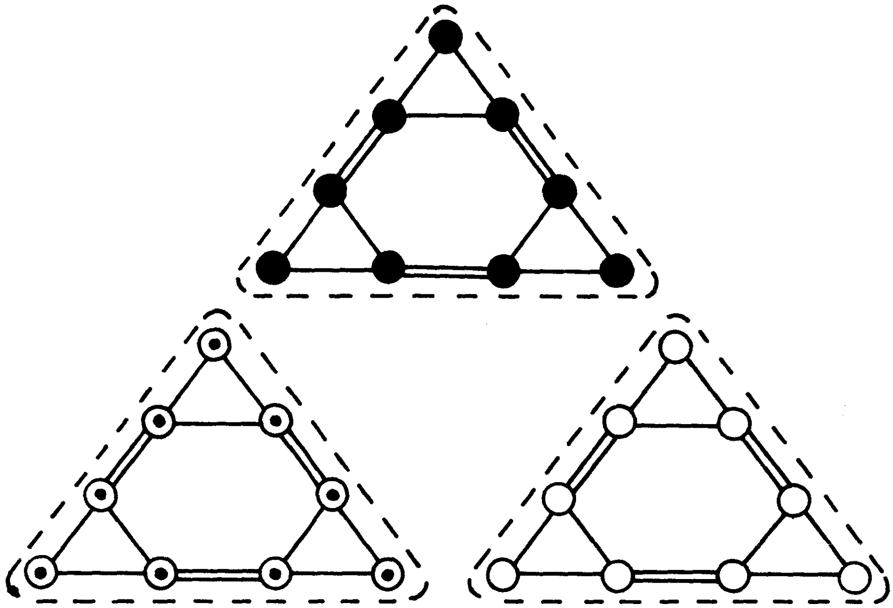


図 3. 8　　d_3^c による同値類別

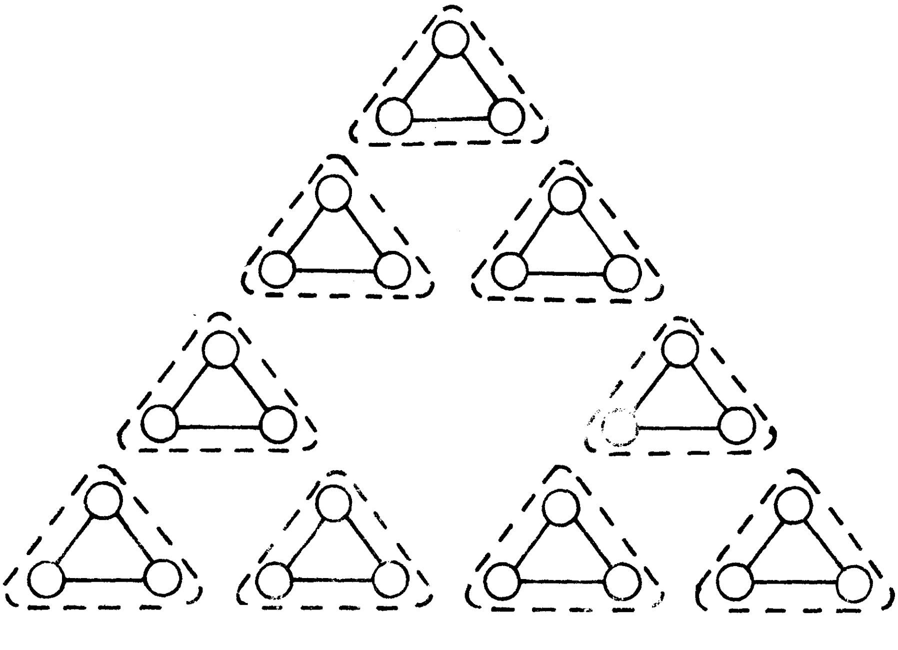


図 3. 9　　$\widetilde{d}_2^c$ による同値類別

である。最短解 ω_1 (A, C) から定まる部分問題の１つは，初期状態 (A, A, A) が目標

$$\mathrm{Dom}(\lambda(\omega_1(A, C))) \cap (\overline{A, A, A})$$

に含まれるトリビィアルな問題であり，他は，手段 $\Gamma(d_2) \cup \Gamma(d_3)$ によって，状態 (C, A, A) を状態 (C, C, C) に変換する問題で，これは解が存在しない。このような分解によって得られる利点はない。

P / d_2^c の解は

$$\{\omega_2(A, C),\ \omega_2(B, C) \circ \omega_2(A, B),\ \cdots\}$$

である。最短解 ω_2 (A, C) から定まる部分問題の１つは，手段 $\Gamma(d_1) \cup \Gamma(d_3)$ によって，状態 (A, A, A) を

$$\mathrm{Dom}(\omega_2(A, C))) \cap (\overline{A, A, A})$$

に変換する問題である。この問題は可解ではないが，１つの解 ω_1 (A, B) が存在する。もう１つの部分問題は，状態 (B, C, A) を状態 (C, C, C) へ手段 $\Gamma(d_1) \cup \Gamma(d_3)$ によって変換する問題である。これは解が存在しない。従って，このような分解から得られる利点はない。

P / d_3^c の解は，

$$\{\omega_3(A, C),\ \omega_3(B, C) \circ \omega_3(A, B),\ \cdots\}$$

である。最短解 ω_3 (A, C) から定まる部分問題は，手段 $\Gamma(d_1) \cup \Gamma(d_2)$ によって，状態 (A, A, A) を

$$\mathrm{Dom}(\lambda(\omega_3(A, C))) \cap (\overline{A, A, A})$$

に変換する問題と，状態 (B, B, C) を状態 (C, C, C) に変換する問題である。これらはいずれも可解で，かつ元の問題とくらべて，状態数が $1/3$ 手段数が $2/3$ である。

以上のように差異による問題分解法は，差異が条件Aを満たさないときはその効用をほとんど期待できないが，一方，差異が条件Aを満たすときは複雑な問題を可解かつより簡単な問題に分けて解くことができるという利点を持つ。

次に，この問題の場合，条件A′を満たす差異列が存在することを示す。

差異列を

$$\mathbf{D} = (\,d_3\,,\ d_2\,,\ d_1\,)$$

とすると，合成された差異の列$\widetilde{\mathbf{D}}$は次のように定義される。

$$\widetilde{d}_1 = d_3$$

$$\widetilde{d}_2 = d_3 \vee d_2$$

$$\widetilde{d}_3 = d_3 \vee d_2 \vee d_1$$

$$\widetilde{\mathbf{D}} = (\,\widetilde{d}_1\,,\ \widetilde{d}_2\,,\ \widetilde{d}_3\,)$$

である。このとき，$\widetilde{d}_1$，$\widetilde{d}_2$，$\widetilde{d}_3$はすべて条件A′を満たす。$\widetilde{d}_1$と$\widetilde{d}_3$は明らかである。$\widetilde{d}_2^c$ による同値類別を図3.9に示す。この図で，任意の同値類内の状態はすべて一でつながっているから，$\widetilde{d}_2$が条件A′を満たすことがわかる。ここで定義された$\widetilde{\mathbf{D}}$以外の合成された差異列で条件A′を満たすものは存在しない。

3.6 結　　言

差異による手段の選択と，その手段による問題の分解は，Nilsson(2)によって提案された。本章の3.3節では，この過程を厳密に定式化し，差異に基づく簡単かつ可解な問題への分解がいかなる条件のもとで可能かという理論的課題を提起し，それを部分的に解決した。即ち，定理3.4の条件Aを満たす差異ならば，簡単かつ可解な問題への分解が可能であることを示した。これは，極めて多数考えられる差異の中で，問題の分解による求解に有用な差異はどのようなものかについて1つの指針を与えるものである。

3.4節では，3.3節で述べた商問題の解に基づく分解を反復し，最終的に最も簡単な問題（初期状態と目標との間に唯一つの差異しか存在しないという意味で）の列に分解する，逐次分解法について論じた。この方法による分解の結果は，関連表から選ばれる差異の列に依存する。条件A′は，どのような差異をどのような順序で選ぶべきかについて1つの基準を与える。この条件は，GPSの“差異順序決定問題”に対する1つの解であることが次章で明らかになる。

参　考　文　献

(1) Newell, A., Shaw, J. C. and Simon, H. A.: "Report on a General Problem-Solving Program", Proceedings of the International Conference on Information Processing, 1959, pp. 256-264.

(2) Nilsson, N. J.: "Problem Solving Methods in Artificial Intelligence", McGraw-Hill, 1971.

(3) Sandwall, E. J.: "A Planning Problem Solver based on Look-Ahead in Stochastic Game Trees", JACM, Vol. 16, No. 3, July, 1967.

(4) Sacerdoti, E. D.: "Planning in a Hierarchy of Abstraction Spaces", Art. Int. 1974, pp. 115-135.

(5) Banerjy, R. B. and Ernst, G. W.: "A Comparison of Three Problem-Solving Methods", 5th IJCAI, 1977, pp. 442-449.

(6) 新妻清三郎："類比推論による問題解決の数学的定式化", 信学論（A）, 61-A, 6, 1978

(7) 新妻清三郎："問題解決に有用な問題の分解", 信学論（A）, 掲載予定（1981, 1）

4章　ＧＰＳにおける問題の分解

4.1 緒　　言

３章で述べた分解の方法は，まず商問題を構成し，それを解き，得られた解に基づいて問題を分解する。ところで，商問題が１個の手段で解けるならば，わざわざ商問題を構成し，それを解かなくともその解を捕えることができる。例えば，P/d^cの解の長さが１であることがわかっているものとする。このとき，P/d^cの手段集合は$\Gamma(d)$であるから，解は$\Gamma(d)$の元のいずれかである。従って，$\Gamma(d)$の元すべてをP/d^cの解とみなし，これらの仮想的な解に基づいてＰを分解すれば，その結果得られる部分問題列の中には，前記の方法によって得られる部分問題列が必ず含まれている。この事実は，商問題を経ることなく差異ｄと差異と手段との関連Γにのみ基づいて問題を分解する方法で，その結果が商問題を経た分解の結果を含むような分解法の存在を示唆する。

本章では，そのような分解法の１つとしてＧＰＳ[(1)〜(6)]の問題分解法をとらえ，商問題を経た分解法との比較により，ＧＰＳ研究における未解決課題である“差異順序決定問題”に１つの解答を与える。

まず，ＧＰＳの概要を述べ，次いで，３章の結果を基礎にＧＰＳの求解アルゴリズムを分析する。

4.2 ＧＰＳの概要

ＧＰＳは，O. K. Moore と S. B. Andersonがエール大学における問題解決に関する研究で用いた命題論理の証明問題を素材として，被験者に声を出しながら問題を考えさせたプロトコールの分析の結果得られたものである。[(17)] それ故，ＧＰＳは２つの“顔”を持つ。１つは，人間の問題解決過程のコンピューター・モデルという顔であり，他は人間によく似た解き方をするコンピューター・プログラムという顔である。GPSはこれ

2つの顔を使い分けることにより，心理学，工学両分野の研究者達の関心を呼び起した。

GPSの研究におけるおもな関心は，どのようにして，差異及びそれを縮少するのに適切な作用素を導き出すか，そのためにはどのような問題の表現方法がもっとも適切であるか，という点に向けられていたが[(5), (6)]，その後，GPSに類似の問題解決プログラムの構成[(13)〜(16)]やGPSの求解手順の数学的解析[(7)(8)(11)]に及んでいる。GPSは，このように多数の研究者によって色々な視点から考察されたにも拘らず，未だに解明されていない部分を持つ。それは"差異順序決定問題"と呼ばれるものである。この問題の説明に入る前に，GPSの求解手順について簡単に述べる。

GPSを特徴づけているのは，或る特定の問題ではなく，より広範な問題を一般的な手法で解くという汎用性である。この汎用性を支えているのは，手段ー目標分析（means-ends analysis）と呼ばれる発見法（heuristies）である。これは，次の3種類の目標，

① 変換型目標

② 縮少型目標

③ 適用型目標

と，これらの目標を達成するための方法とを組み合わせて最終目標を達成するよう設計された論理系であるが，ここでは単純化して説明する。

初期状態を s_0，目標をGとすると，まず，s_0 をGに変換することを目指す（変換型目標）。そのために s_0 とGとの間の差異

$$D_1 = \{ d_1, d_2, \cdots, dn \}$$

を縮少することを目指す（縮少型目標），D_1 の元の1つ d_i を選び，それを消去するのに適切な手段 ω_1 を選ぶ。ω_1 を s_0 に適用することを目指す（適用型目標）。もし適用可能ならば，ω_1 を s_0 に適用し，新しい状態 s_1 を得る。（図4.1(a)）。もし適用不能ならば，Dom（$\lambda(\omega_1)$）をGの下位目標として設定し，s_0 を，まず，下位目標Dom（$\lambda(\omega_1)$）へ変換することを目指し，しかる後，Gへ変換することを目指す（図4.1(b)）。この

過程をすべての s_i について行って，所要の手段列を得る。

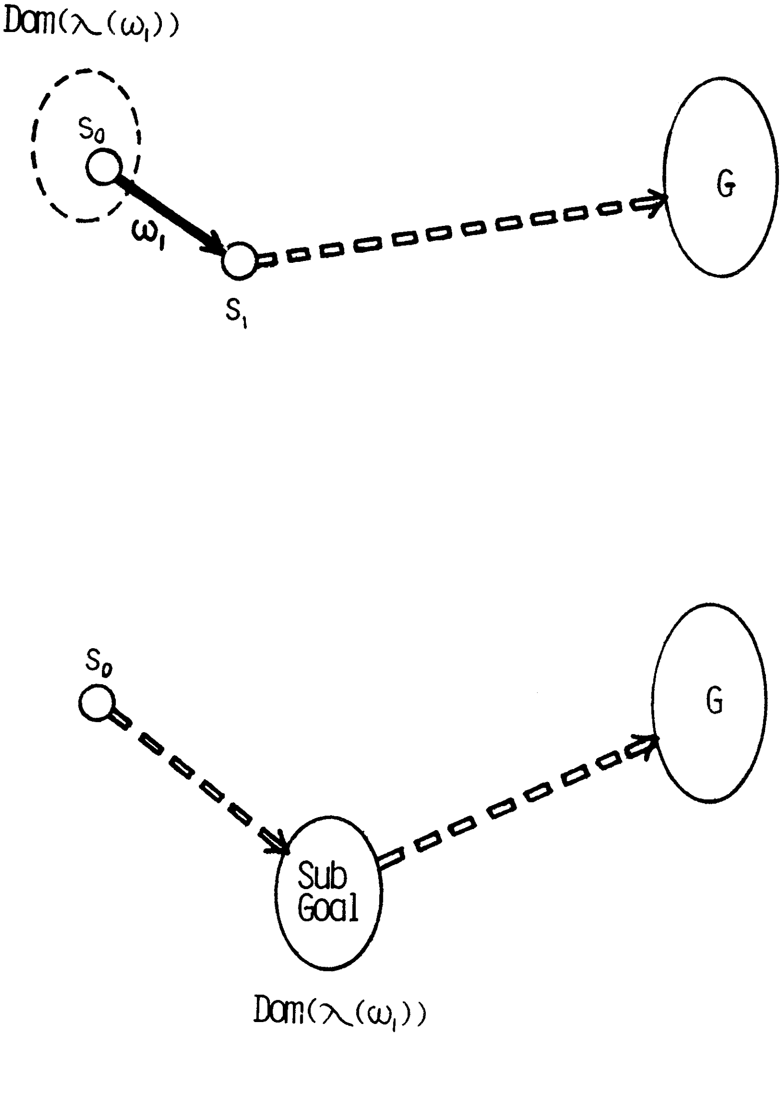


図 4. 1　　手段－目標解析の説明図

ＧＰＳに関する説明の中には，“差異 d_i よりも縮小することが難しい差異 d_j”とか“差異の難易度による順序づけ”といった表現が出てくる。これは前記の D_1 から１つの元を選ぶときの選び方を規定するものである。即ち，差異には難しい差異と易しい差異があって，ＧＰＳは最も難しい差異を除去又は縮少することを目指す，というのがＧＰＳを作った人達の主張であるが，　これは，詰まる所，差異が順序づけられる必要があることを語っているにすぎない。実際，差異が順序づけられていないならば，D_1 からどの元を選んでよいかわからず，ＧＰＳは全くの試行錯誤プログラムに転落してしまう。しかし，ＧＰＳ自身に差異順序を発見する機能がなく，外部からそれを与える際，明確な基準も知られていない。一方，次のような経験的事実が知られている。即ち，或る問題は或る差異及び差異順序でうまく解けるが，他の差異及び差異順序では解けない。又，或る問題はいくら差異及び差異順序をかえてもうまく解けない（即ち，悉皆的になる）。これらの事実は次のような課題を提起する。即ち，

或る問題に対して，どのような差異をどのように順序づけたならば，ＧＰＳは求解に成功するか。

この課題に対する１つの解答も未だ報告されていない。本章の 4.4 節において初めてこの課題に対する１つの解答が示される。

4.3　ＧＰＳ形分解のＡＮＤ／ＯＲ形木による表現

ＧＰＳを初めて“問題の分解”という視点からとらえたのはＮｉｌｓｏｎ[9]である。彼は，求解に決定的に重要な作用素（本論文の“手段”に対応する）をkey operatorsと名付け，このkey operator により問題を下位問題列に分解する方法を提案した。このkey operator を発見する１つの方法として，ＧＰＳが手段－目標解析により手段を選ぶ過程に着目し，差異を手掛りにkey operator を見つける方法を示唆した。従って，Ｎｉｌｓｓｏｎ はＧＰＳと問題分解を結びつけた最初の人といえる。しかし，彼はアイディアの提示に留まっている。

本節では，ＧＰＳを問題分解という側面からとらえ，その分解法の特徴を明らかにし，分解法をＡＮＤ／ＯＲ 形下位問題木で間接的に表現する。

今，問題Ｐを分解するものとする。そのためにはＰの初期状態と目標との間の差異を抽出し，差異順序によりそれらの中から１つの差異ｄを選び出す。次に，ｄに対して適切な手段の候補を関連表Γの中から見出す。例えば，

$$\Gamma(d) = \{\omega_1, \omega_2\}$$

とすると，$P = (S, \Omega, \lambda, s_0, T)$を２つの下位問題列に分解する。１つは，

$$P_{11} = (S, \Omega, \lambda, s_0, \mathrm{Dom}(\lambda(\omega_1)))$$

$$P_{12} = (S, \Omega, \lambda, s_{0,1}, G)$$

であり，他は，

$$P_{21} = (S, \Omega, \lambda, s_0, \mathrm{Dom}(\lambda(\omega_2)))$$

$$P_{22} = (S, \Omega, \lambda, s_{0,2}, G)$$

である。ここで，P_{i1} の解を$\widetilde{\omega}_i$ とすると，

$$s_{0,i} = \lambda^*(\omega_i \circ \widetilde{\omega}_i)\, s_0$$

である。これを木で表わすと図 4. 2のようになる。この木の特徴は次の３点である。

① 根節点から出る枝の数は$\Gamma(d)$の元の数 $|\Gamma(d)|$ に等しい。

② ＯＲ節点から出る枝の数は２本である。

③ ＡＮＤ節点のラベルは下位問題である。

これらの特徴はＧＰＳ形分解の特徴を表わしている。但し，実際のＧＰＳでは，根節点から出る枝の数が$\Gamma(d)$の数より一般に少ない。それは，ｄに対して適切な手段の中から予備的テスト等によって更に候補を絞る機能があり，又，解が見つかれば，それ以上の分解が不要になるからである。例えば，図 4. 2で，下位問題P_{11}，P_{12}がともに解かれたならば，ＧＰＳの解探索はそこで終り，ＯＲ節点P_2が作られることはない。３章でもそうだったが，本論文の“分解を表わす木”は探索木[9]とは異なる。むしろ

Slagle[10]の“見えない木”に近い。

3章で，下位問題を部分問題に変換することを知ったわれわれにとって，③は奇異に感ずるかもしれない。GPS形分解によって得られる下位問題を3.3節で述べた方法によって部分問題に変換したならば，それらは一般に可解でなくなるか，又は問題でさえなくなる。何故なら，下位問題$\mathbf{P}=(S,\ \Omega,\ \lambda,\ s_0,\ \mathrm{Dom}(\lambda(\omega_i)))$の状態集合を制限し，

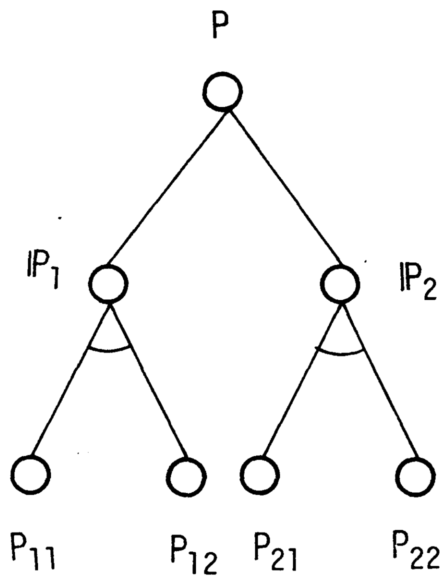


図4.2　GPSによる問題の分解を表わす木

$$\hat{s}_0=\{s\ ;\ (s,\ s_0)\in d\}$$

とすると，

$$\hat{s}_0\cap \mathrm{Dom}(\lambda(\omega_i))=\phi$$

となることがあるからである。このような場合，定義2.1によれば，問題と呼ばれない。従って，GPS形分解の場合，下位問題を部分問題に変換することはできない。

〔定義4.1〕（GPS形単位木）　問題Pの初期状態と目標との間の差異をdとする。このとき，次の条件(i)〜(iii)を満たす木を，Pを根節点として含むGPS形単位木といい，$T_G^U(P,\ d)$とかく。

(i)　根節点のラベルはPである。

(ii)　$\Gamma(d)=\{\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_n\}$

とすると，根節点の子節点のラベルは，

$$t(1)=\mathbf{P}_1,\quad t(2)=\mathbf{P}_2,\quad \cdots,\quad t(n)=\mathbf{P}_n$$

である。節点 1，2，…，n はOR節点と呼ばれる。ここで，$\mathbf{P}_i$ は手段 ω_i によって得られるPの下位問題列である。

(iii) 節点 i の子節点のラベルは，

$$t(i1) = P_{i1},\quad t(i2) = P_{i2}$$

である。ここで，

$$P_{i1} = (S, \Omega, \lambda, s_0, \mathrm{Dom}(\lambda(\omega_i)))$$

$$P_{i2} = (S, \Omega, \lambda, s_0', G)$$

$$s_0' = \lambda^*(\omega_i \circ \widetilde{\omega}_i)\, s_0$$

$$\widetilde{\omega}_i : P_{i1} \text{ の解}$$

である。節点 i1，i2 はAND節点と呼ばれる。

(ii)の手段 ω_i によって得られる下位問題列とは，(P_{i1}，P_{i2}) を指す。即ち，$\mathbf{P}_i = (P_{i1}, P_{i2})$ である。

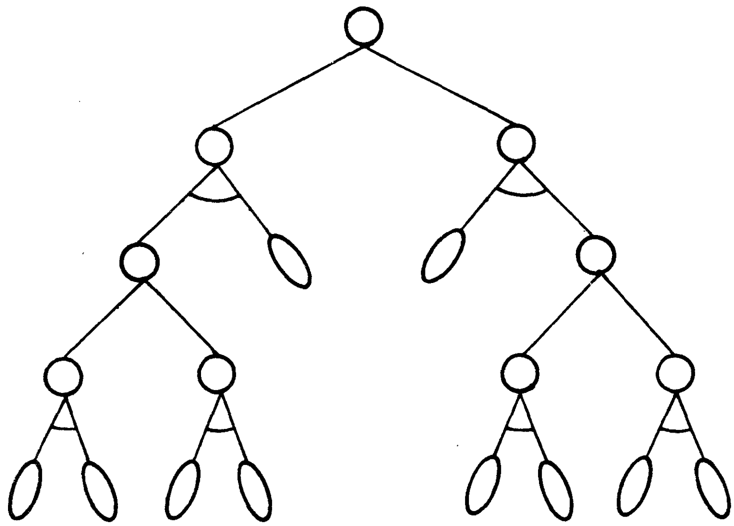
〔定義 4.2 〕(差異 d から定義される下位問題木) 問題 P の初期状態と目標との間の差異を d とする。このとき，次の条件(i)〜(iii)を満たす木を，P を根節点として含む，差異 d から定義される GPS 形 AND／OR 形下位問題木，略して，差異 d から定義される下位問題木といい，$T_G(P, d)$ と書く。

(i) 根節点のラベルは P である。

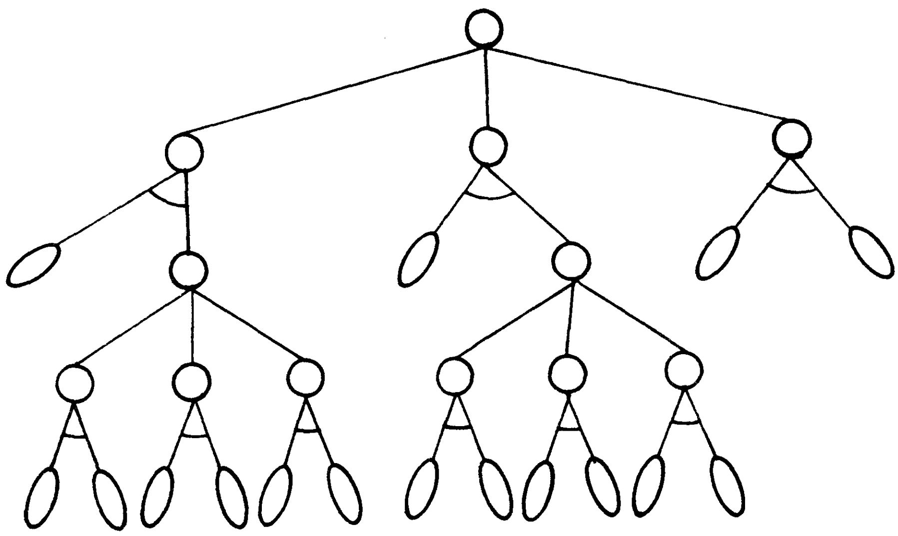
(ii) P は根節点として含む GPS 形単位木は $T_G^U(P, d)$ である。

(iii) 節点 α のラベルを P_α (P_α は P の下位問題) とする。P_α の初期状態と目標との間に差異 d が存在するならば，節点 α には GPS 形単位木 $T_G^U(P_\alpha, d)$ が接がれる。もし，d が存在しないならば，節点 α は葉節点である。

1 つの差異 d から定義される木の例を図 4.3 に示す。(a)は $\Gamma(d)$ の元の数が 2 の場合を，(b)は 3 の場合を表わしている。



（a） $|\Gamma(d)|=2$



（b） $|\Gamma(d)|=3$

図 4. 3　　差異から定義される木の例

〔定義 4.3〕(差異列$\mathbf{D}$から定義される下位問題木) 関連表Γから適当に選ばれた差異の列を

$$\mathbf{D} = (d_i)_{i=1}^{n}$$

とする。但し，$(d_1 \vee \cdots \vee d_n)^c$ はトリビィアルな同値関係になるものとする。次の条件(i)〜(iv)を満たすものを差異列$\mathbf{D}$から定義されるGPS形AND／OR形下位問題木，略して，差異列$\mathbf{D}$から定義される下位問題木といい，$T_G(\mathbf{D})$と書く。今，与えられた問題をPとする。

(i) 根節点のラベルは与えられた問題Pである。

(ii) Pを根節点として含む，1つの差異から定義される下位問題木は，$T_G(P, d_1)$である。

(iii) 節点αのラベルを$P_\alpha = (S, \Omega, \lambda, s_{0,\alpha}, \mathrm{Dom}(\lambda(\omega_\alpha)))$とする。又，$\alpha$を含む，1つの差異から定義される下位問題木を$T_G(P_\beta, d_k)$とする(図 4.4)。

(a) もし，

$$(s_{0,\alpha}, \mathrm{Dom}(\lambda(\omega_\alpha))) \in d_{k'} \quad (k' < k)$$

なる$d_{k'}$が存在するならば，αは葉節点である。

(b) $$k'' = \min\{\, i \,;\, d_i \ni (s_{0,\alpha}, \mathrm{Dom}(\lambda(\omega_\alpha)))\}$$

とする。もし，$k'' > k$ならば，αには，$T_G(P_\alpha, d_{k''})$が接がれる。

(c) もし，$\forall i$に対して

$$d_i \not\ni (s_{0,\alpha}, \mathrm{Dom}(\lambda(\omega_\alpha)))$$

ならば，αは葉節点である。

(iv) OR節点αの子節点$\alpha 1$，$\alpha 2$で，$\alpha 1$のラベルに解が存在しないか，又は$\alpha 1$が葉節点ならば，$\alpha 2$は葉節点である。

この定義の(iii)(a)は，“GPSは，サブ・ゴールがそのスーパー・ゴールより難しい場合には，そのゴールにはとり組まない”[4]ということを表わしている。

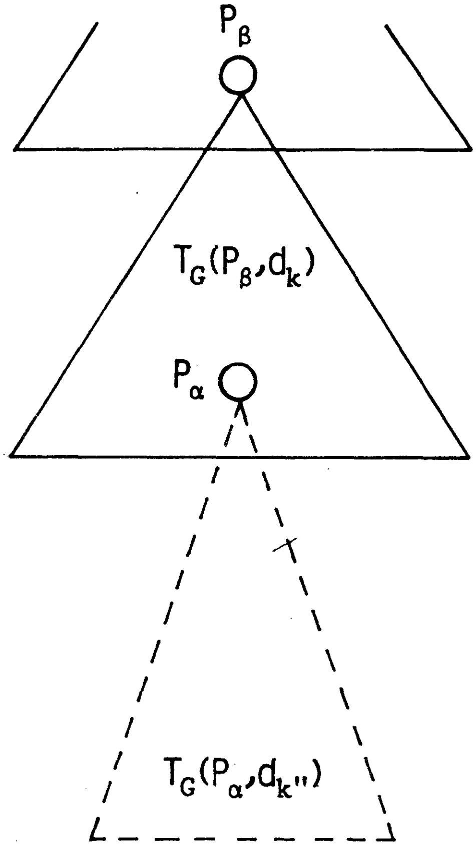


図 4. 4　　定義 4. 3 の説明

4.4　差異順序決定問題に対する一つの解答

前節で述べたように，1 つの差異列に対する G P S 形分解の結果は 1 つの木で表わされる（定義4.3 ）。従って，差異順序決定問題は次のように表現される。即ち，

差異列 **D** がいかなる条件を満たすとき，T_G(**D**) は全ての葉節点のラベルがトリビィアルである部分木を含むか

本節では，定理 3. 5 に基づいて，この問題に答える。まず，T(**D**) を，T_G(**D**) と比較が可能な形に変換する。

（例）　商問題 P/d^c の解を $\{\omega_2 \circ \omega_1\}$ とする。このとき，単位木

$T^U(P, d)$ は図 4.5 (a)で表わされる。分解の手続きを次のように２回に分けても得られる部分問題列は同じである。

(i) P を，

$$P_{11} = (S, \Omega, \lambda, s_0, \mathrm{Dom}(\lambda(\omega_1)))$$

$$P_{12} = (S, \Omega, \lambda, s_{0,12}, G)$$

に分解する。

(ii) P_{12} を，

$$P_{1211} = (S, \Omega, \lambda, s_{0,1211}, \mathrm{Dom}(\lambda(\omega_2)))$$

$$P_{1212} = (S, \Omega, \lambda, s_{0,1212}, G)$$

に分解する。

この分解の結果は，図 4.5 (b)で表わされる。下位問題 P_{11}，P_{1211}，P_{1212} を部分問題に直すと，$\hat{P}_{11}$，$\hat{P}_{12}$，$\hat{P}_{13}$ に等しい。

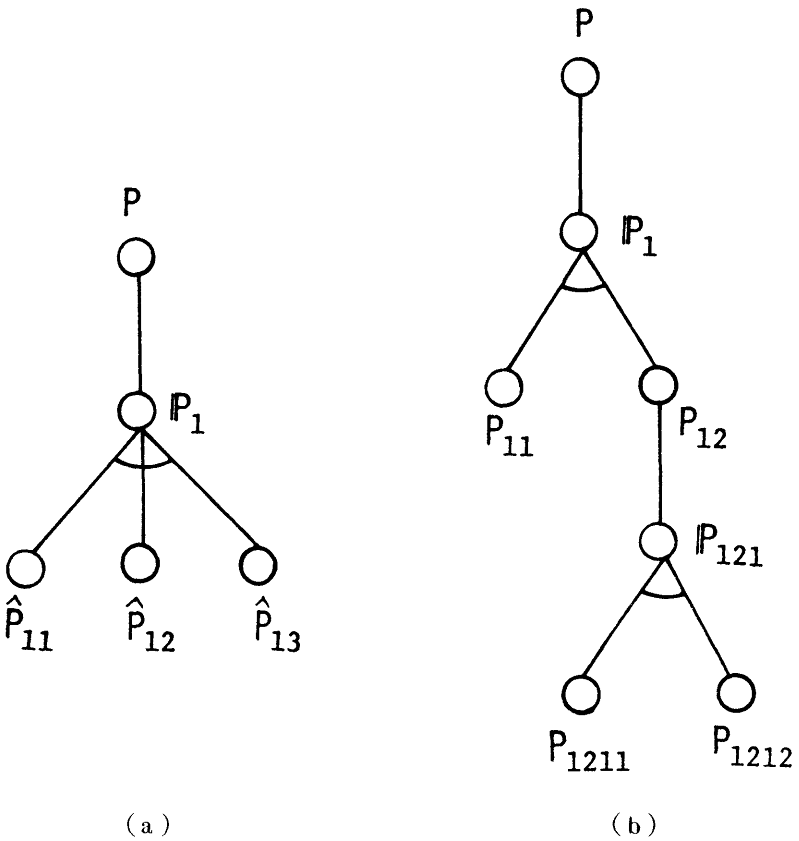


図 4.5　商問題形分解の２つの表現

この例に倣って，葉節点のラベルを左から順に並べたとき，定義3.4の単位木のそれに等しく，かつOR節点から出る枝の数が常に2である木（この木を2分木と呼ぶ）を定義する。

商問題P/d^cの1つの解を

$$\omega_n \circ \omega_{n-1} \circ \cdots \circ \omega_1$$

とする。この解に基づいて問題Pは（ n + 1 ）個の下位問題

$$P_1 = (S, \Omega, \lambda, s_{0,1}, \mathrm{Dom}(\lambda(\omega_1)))$$
$$P_2 = (S, \Omega, \lambda, s_{0,2}, \mathrm{Dom}(\lambda(\omega_2)))$$
$$\vdots$$
$$P_{n+1} = (S, \Omega, \lambda, s_{0,n+1}, G)$$

に分解される。ここで，

$$s_{0,1} = s_0$$
$$s_{0,i} = \lambda^*(\omega_{i-1} \circ \widetilde{\omega}_{i-1})\, s_{0,i-1}$$
$$\widetilde{\omega}_i : P_i \text{ の解}$$

である。（ n + 1 ）個の下位問題の集合をXで表わす。即ち，

$$X = \{ P_1, P_2, \cdots, P_{n+1} \}$$

〔定義4.4〕（下位問題の合成） $P_i = (S, \Omega, \lambda, s_{0,i}, \mathrm{Dom}(\lambda(\omega_i)))$，$P_j = (S, \Omega, \lambda, s_{0,j}, \mathrm{Dom}(\lambda(\omega_2)))$を2つの下位問題とする。もし，適当な$s \in \mathrm{Dom}(\lambda(\omega_i))$が存在して，

$$\lambda(\omega_i)\, s = s_{0,j}$$

ならばP_1とP_2の和P_1　P_2が定義できて，

$$P_1 \cup P_2 = (S, \Omega, \lambda, s_{0,i}, \mathrm{Dom}(\lambda(\omega_j)))$$

である。

〔定義4.5〕（Xから生成される下位問題の集合） 次の規則によって生成される集合をXから生成される下位問題の集合といい，〔X〕とかく。

(i)　$\forall P_i \in X$は〔X〕に属する。

(ii)　P_iとP_jが〔X〕に属し，且つ両者の間に和が定義できるならば，

$P_i \cup P_j$ も〔X〕に属する。

${}^\forall P_\alpha \in$〔X〕に対して，

$$P_\alpha \cup P_\phi = P_\phi \cup P_\alpha = P_\alpha$$

なる P_ϕ も〔X〕に含める。

〔命題〕 ${}^\forall P_\alpha$，P_β，$P_\gamma \in$〔X〕に対して，

$$(P_\alpha \cup P_\beta) \cup P_\gamma \in \text{〔X〕}$$

ならば

$$P_\alpha \cup (P_\beta \cup P_\gamma) \in \text{〔X〕}$$

で，

$$(P_\alpha \cup P_\beta) \cup P_\gamma = P_\alpha \cup (P_\beta \cup P_\gamma)$$

である。

〔X〕の元の族 $(P_i)_{i=1,\cdots,m}$ で，$P_i \cup P_{i+1}$ が定義可能なものを考える。このとき，

$$Q_1 = P_1,\quad Q_{i+1} = Q_i \cup P_{i+1} \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1)$$

によって，〔X〕の元 Q_1，Q_2，…，Q_m が一意的にきまる。Q_m を $\bigcup_{i=1}^{m} P_i$ で表わす。

〔定理 4.1〕 $m \geq 2$，$1 \leq l < m$ のとき，

$$\bigcup_{i=1}^{m} P_i = \left(\bigcup_{j=1}^{l} P_j\right) \cup \left(\bigcup_{k=l+1}^{m} P_k\right)$$

（証明） mに関する帰納法による。$m = 2$ の場合は明らかである。次に $m \geqq 3$ とし，$m-1$ の場合まで証明できているものとして，上式を証明する。まず，$l = m-1$ のときは Q_i の定義より明らかである。$l < m-1$ ならば

$$\bigcup_{k=l+1}^{m} P_k = \left(\bigcup_{k=l+1}^{m-1} P_k\right) \cup P_m$$

$$\left(\bigcup_{j=1}^{l} P_j\right) \cup \left(\bigcup_{k=l+1}^{m} P_k\right) = \left(\bigcup_{j=1}^{l} P_j\right) \cup \left(\left(\bigcup_{k=l+1}^{m-1} P_k\right) \cup P_m\right)$$

$$= \underbrace{\left(\left(\bigcup_{j=1}^{l} P_j\right) \cup \left(\bigcup_{k=l+1}^{m-1} P_k\right)\right)}_{\bigcup_{j=1}^{m-1} P_i} \cup P_m$$

Q. E. D.

この定理をくりかえし用いて，例えば次のような演算ができる。

$P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4$ ………………… ①

$= P_1 \cup (P_2 \cup P_3 \cup P_4)$

$= P_1 \cup (P_2 \cup (P_3 \cup P_4))$ ……… ②

又は，

$P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4$

$= (P_1 \cup P_2) \cup (P_3 \cup P_4)$ ……… ③

このように和の作り方において，“括弧の入れ方”を変えても同じ結果に到達する。これを問題の分解という視点からみると，括弧の入れ方は分解の仕方に対応する。例えば，①は図 4. 6 (a)に対応し，②，③はそれぞれ図 4. 6 (b)，(c)に対応する。但し，(b)で，

$P_{234} = P_2 \cup P_3 \cup P_4$

$P_{34} = P_3 \cup P_4$

(c)で，

$P_{12} = P_1 \cup P_2$

$P_{34} = P_3 \cup P_4$

である。一般に

$P = P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_{n+1}$

のとき，1つの適当な括弧の入れ方に対応して，1つの2分木 $T_b(P, d)$ が定まる。可能なすべての括弧の入れ方に対応して，2分木のクラス $\{T_b(P, d)\}$ が定まる。$T_b(P, d)$ の葉を左から順に並べると，

$P_1, P_2, P_3 \cdots, P_{n+1}$

である。

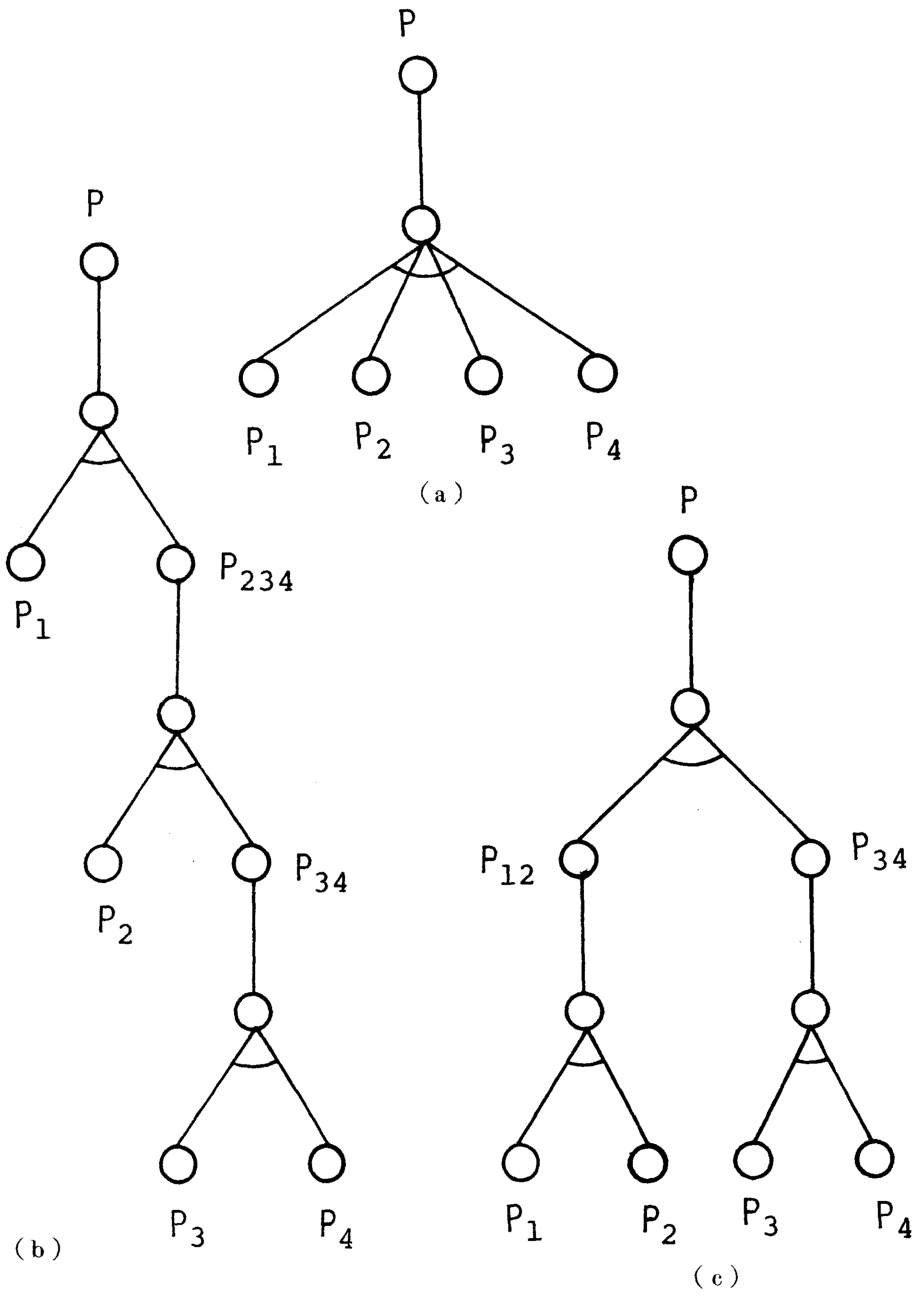


図 4. 6　　単位木の 2 分木への分解

以上で商問題 P/d^cの１つの解に基づく分解の２分木による表現が得られた。複数個の解の場合，根節点から解の数に対応するだけの枝及びＯＲ節点が作られるだけで，１つの場合と原理的相違点はない。これは別の面から観ると，単位木 $T^U(P, d)$の２分木への分解が示されたことになる。但し，２分木への分解は一意ではなく，１つの単位木には２分木のクラスが対応する。

次に，$T_G(P, d)$と$T_b(P, d)$とを比較する。

〔定義 4.6 〕（木の節点の深さ）　木の節点の深さは次のように定義される。

i）根節点の深さはゼロである。

ii）根節点以下の任意の節点は親節点の深さに１をプラスしたものである。

〔補題 4.1 〕　$\{T_b(P, d)\}$の任意の元はすべて$T_G(P, d)$に含まれる。

（証明）　木の深さに関する帰納法による。T_G，T_b を深さ２，４，…，２ｍ　に切る。

T_G^{2k} ：T_G で，深さが２ｋ以下の節点から成る木。

T_b^{2k} についても同様である。

(i)　ｋ＝１の場合。

T_b^2 の任意のＯＲ節点をｉ，その子節点をｉ1，ｉ2 とする。節点ｉのラベルはP/d^c の解をなす１つの手段ω（即ち，P/d^c の解は…$\circ\omega\circ$…と書ける）によってＰを分解したときの下位問題列 $\mathbf{P}_i$ であり，ｉ1，ｉ2のラベルは下位問題P_{i1}，P_{i2}である。ここで，

$$\mathbf{P}_i = (P_{i1}, P_{i2})$$

$$P_{i1} = (S, \Omega, \lambda, s_0, \mathrm{Dom}(\lambda(\omega)))$$

$$P_{i2} = (S, \Omega, \lambda, s_0', G)$$

である。ところで，$\omega \in \Gamma(d)$であるから，T_G^2 のＯＲ節点の中にはラベ

ルが $\mathbf{P}_i$ であるものが存在し，その子節点のラベルは P_{i1}， P_{i2} である。よって， T_G^2 は T_b^2 を含む。

(ii) T_G^{2m}がT_b^{2m}を含むものと仮定したとき， T_G^{2m+2} がT_b^{2m+2} を含むことを示す。

T_b^{2m+2}の節点で，深さ2mかつ葉でない節点をαとする。帰納法の仮定より， T_G^{2m+2} の節点で，αに対応する節点α'が存在し，

$$t_b(\alpha) = t_G(\alpha')$$

である。このラベルを

$$P_\alpha = (S, \Omega, \lambda, s_{0,\alpha}, \mathrm{Dom}(\lambda(\omega_\beta)))$$

とする。αの子節点はOR節点$\alpha 1$で，そのラベルは，P/d^c の解の一部をなす手段$\omega_{\beta'}$で P_α を分解したときの下位問題列 $\mathbf{P}_{\alpha 1}$ である。$\alpha 1$の子節点$\alpha 11$と$\alpha 12$ のラベルはそれぞれ，

$$P_{\alpha 11} = (S, \Omega, \lambda, s_{0,\alpha}, \mathrm{Dom}(\lambda(\omega_{\beta'})))$$

$$P_{\alpha 12} = (S, \Omega, \lambda, s_{0,\alpha 12}, \mathrm{Dom}(\lambda(\omega_\beta)))$$

である。ところで， $s_{0,\alpha}$ と$\mathrm{Dom}(\lambda(\omega_\beta))$との間には差異dが存在するから， T_Gの定義よりα'には$T_G^U(P_\alpha, d)$ が接がれる。$\omega_{\beta'} \in \Gamma(d)$であるから，$T_G^U(P_\alpha, d)$ の節点の中には$\alpha 1$，$\alpha 11$，$\alpha 12$ に対応し，ラベルが$\mathbf{P}_{\alpha 1}$， $P_{\alpha 11}$， $P_{\alpha 12}$であるものが存在する。よって，T_G^{2m+2} はT_b^{2m+2}を含む。故に題意が成立つ。

Q. E. D.

前に述べたように，単位木 T^Uは2分木 T_b に分解される。一方，差異列Dから定義される部分問題木T(D)は，単位木の合成として得られる（定義3.6）から，合成の仕方をそっくり真似ることにより，2分・下位問題木 $T_b(\mathbf{D})$が得られる。但し，T^Uには2分木のクラス$\{T_b\}$が対応するから，$T(\mathbf{D})$ には2分・下位問題木のクラス$\{T_b(\mathbf{D})\}$が対応する。

補題4.1から直ちに次の定理が得られる。

〔定理4.2〕 $\{T_b(\mathbf{D})\}$の任意の元はすべて$T_G(\mathbf{D})$ に含まれる。

この定理から，T(**D**)が可解木を含むならば，T_G(**D**)もそれに対応するものを含むことになる。可解木に対応するものがT_G(**D**)ではどのように特徴づけられるかを述べる。まず，図3.4の可解木を2分木に分解する。

$$P = P_{21} \cup P_{22} \cup P_{23}$$
$$= P_{21} \cup (P_{2211} \cup P_{2212}) \cup P_{23}$$
$$= (P_{21} \cup (P_{2211} \cup P_{2212})) \cup P_{23}$$

又は

$$= P_{21} \cup ((P_{2211} \cup P_{2212}) \cup P_{23})$$

これを図示すると，図4.7のようになる。図4.7(a)の木 $T_b(d_1, d_2, d_3)$ を含む下位問題木$T_G(d_1, d_2, d_3)$は図4.8で示される。可解木の定義より，下位問題P_{21}，P_{2211}，P_{2212}，P_{23} の初期状態と目標との間には唯一つの差異が存在する。例えば，P_{2211} の初期状態 $s_{0,2211}$ と目標G_{2211}との間には差異 d_3 しか存在しない。従って，節点2211には$T_G(P_{2211}, d_3)$が接がれる(図4.8)。部分問題$\hat{P}_{2211}$ が可解であることから，$T_G(P_{2211}, d_3)$の葉節点のラベルの中には

$$P_{2211} = P_{2211\,i1} \cup P_{2211\,i2}$$
$$P_{2211\,i1} = (S, \Omega, \lambda, s_{0,2211\,i1}, \mathrm{Dom}(\lambda(\omega_j)))$$
$$P_{2211\,i2} = (S, \Omega, \lambda, s_{0,2211\,i2}, G_{2211})$$
$$(\omega_j \in \Gamma(d_3))$$

とすると，

$$s_{0,2211\,i1} \in \mathrm{Dom}(\lambda(\omega_j))$$
$$s_{0,2211\,i2} \in G_{2211}$$

となるようなものが必ず存在する。これは定義4.3(iii)，(c)で定義された葉節点である。

〔定義4.7〕(解決木)　T_G(**D**)に含まれる，次の条件(i)〜(iii)を満たす木を解決木という。

i) 根節点のラベルはPである。又，根節点の子節点は唯一つのOR節

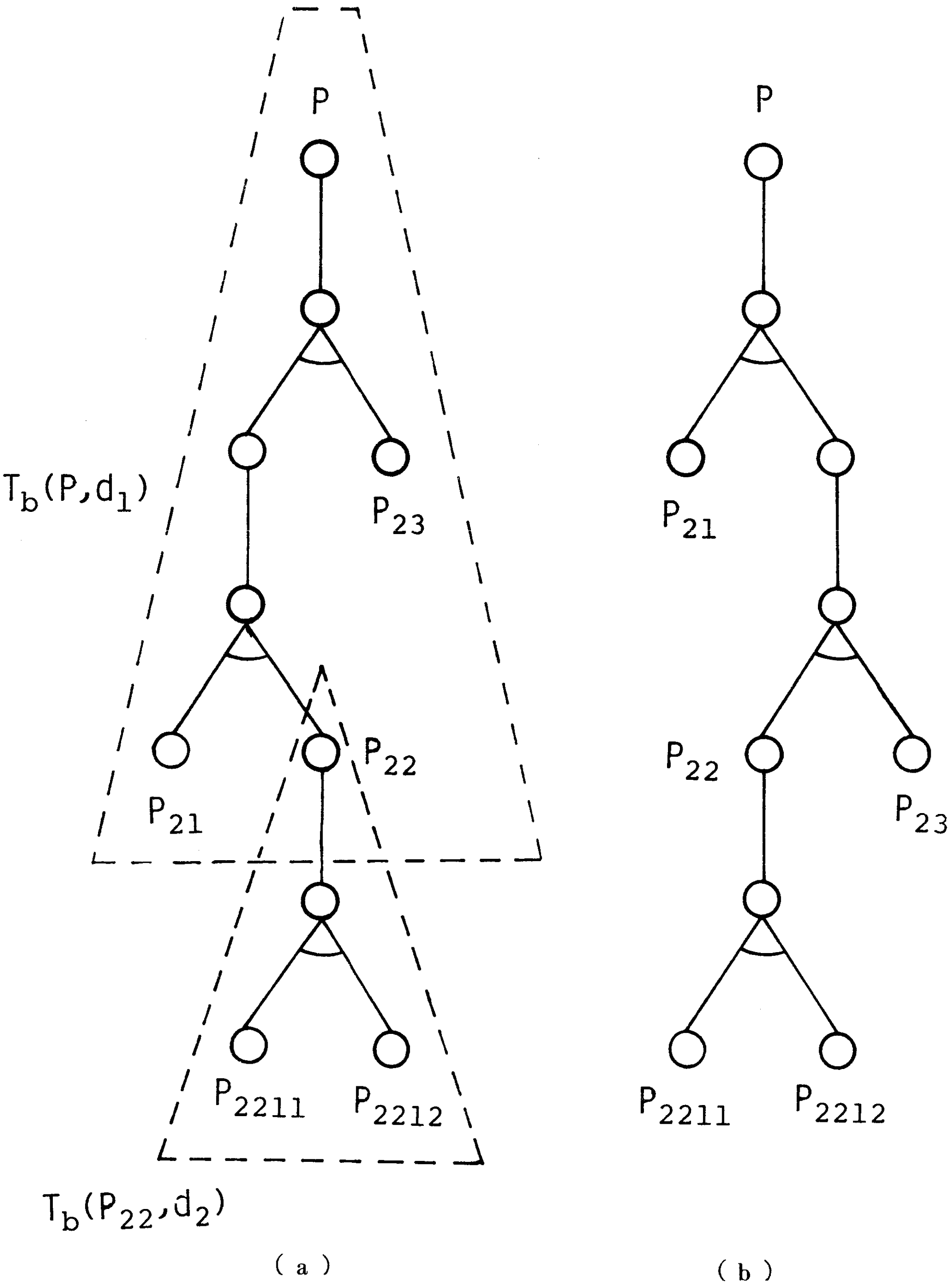


図 4. 7　　図 3. 4 の可解木の 2 分木への分解

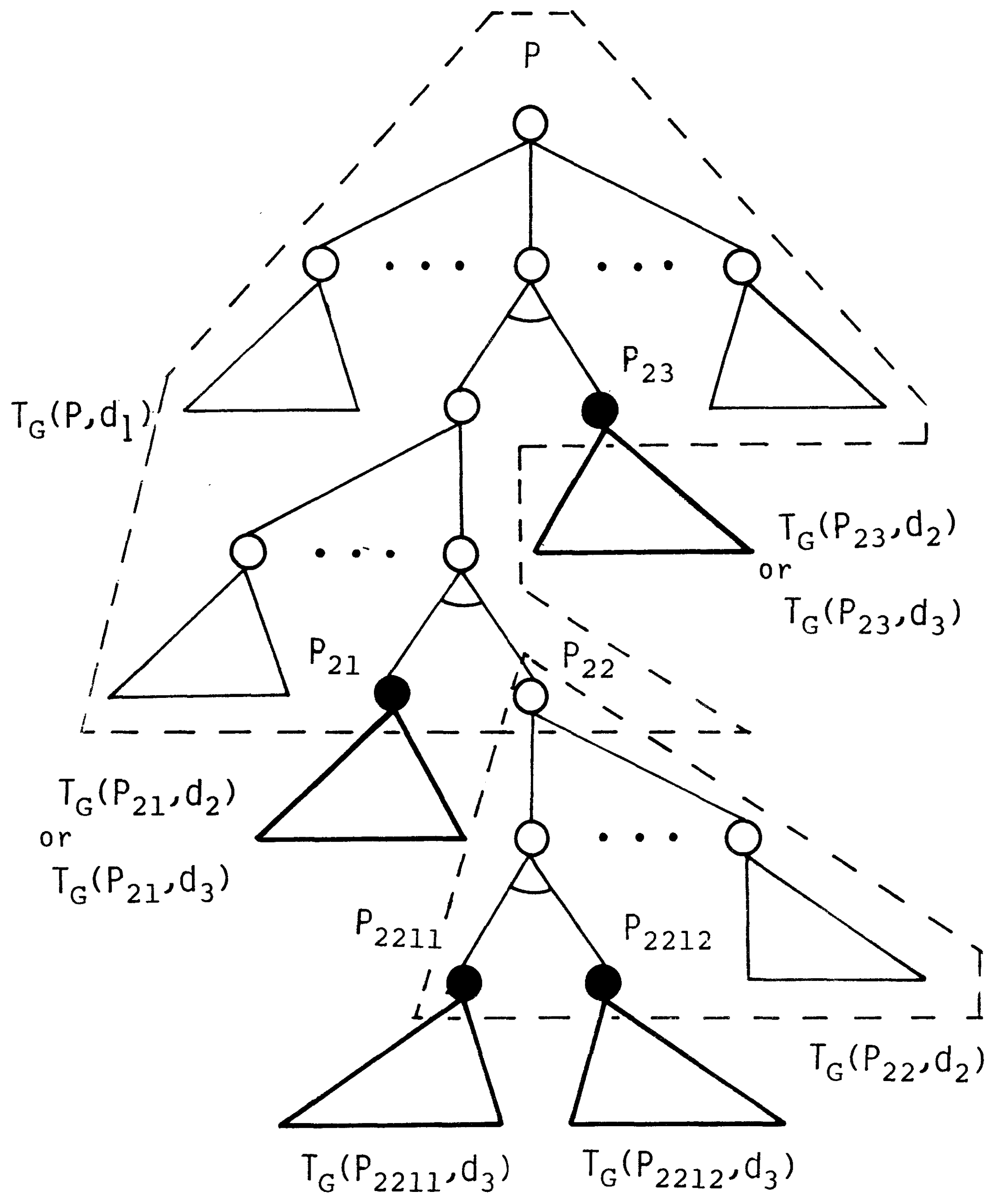


図4. 8　　差異列（ d_1 , d_2 , d_3 ）から定義される下位問題木 T_G

点である。

ii) 任意のＯＲ節点の子節点は２つのＡＮＤ節点である。又，任意のＡＮＤ節点の子節点は唯一つのＯＲ節点である。

iii) 任意の葉節点のラベルを P_α とすると，P_α の初期状態 $s_{0,\alpha}$ と目標 G_α との間には差異が存在しない。即ち，

$$s_{0,\alpha} \in G_\alpha$$

である。

これで $\mathbf{T}(\mathbf{D})$ における可解木に相当するものが $T_G(\mathbf{D})$ に対して定義できた。今や，差異順序決定問題に答えることができる。

〔条件 A′〕　$\forall \bar{s}_i \in S/\widetilde{d}_i^c$,　$\forall s,\ s' \in \bar{s}_i$ に対して，

$$\lambda^*(\bar{\omega})\, s = s'$$

なる $\bar{\omega} \in (\Omega \setminus \Gamma(\widetilde{d}_i))^*$ が存在する。ここで，

$$\Gamma(\widetilde{d}_i) = \Gamma(d_1) \cup \cdots \cup \Gamma(d_i)$$

である。

〔定理 4.3〕　差異列 $\mathbf{D}$ から定義される $\widetilde{\mathbf{D}}$ が条件 A′ を満たすならば，$T_G(\mathbf{D})$ は解決木を含む。

4.5　結　　言

本章では，ＧＰＳ形分解の結果を表わす木 $T_G(\mathbf{D})$ が商問題の解に基づく逐次分解法の結果を表わす木 $T(\mathbf{D})$ を，２分木 $T_b(\mathbf{D})$ を媒介して，間接的に含むこと，その当然の帰結として，ＧＰＳ形分解と逐次分解法とが求解に成功するための十分条件を共有することが明らかになった。$T_G(\mathbf{D})$ が $\mathbf{T}(\mathbf{D})$ を含むということは，逐次分解法で解ける問題はＧＰＳでも解けることを意味するが，一面，悉皆法への接近も意味しており，効率という視点から両者をくらべたとき，一概に一方を他方より優れているということはできない。ＧＰＳ形分解は商問題を構成し，それを解くという手続を

省くことができるが，その代償を解決木の探索の際払っている。即ち，商問題の解が短く，且つ差異に対して適切な手段の候補が少ない場合は，下位問題木 $T_G(\mathbf{D})$ が部分問題木 $T(\mathbf{D})$ にくらべて余り大きくならないが，これらのパラメータが大きくなると，$T_G(\mathbf{D})$ が飛躍的に大きくなるため，ＧＰＳの効率は大変悪いものになる。ちなみに，ＧＰＳが最も効率的に解いた例として，ハノイの塔問題があるが，この問題に対しては条件 A′ を満たす差異列が存在し，且つ商問題の解の長さがすべて１である。又，$T_G(\mathbf{D})$ にはラベルが同じである節点が多数含まれていて，本質的にはグラフである。従って，ループが存在する。ここにもＧＰＳの効率を悪くする原因がある。

結局，ＧＰＳは逐次分解法にくらべて，商問題を構成し，それを解くという手続きを省くことができるという点で優位性を持っているが，この相対的優位性を保持できるのは，商問題の解の長さが短く，適切な手段の候補の数が少ないときに限ること，これらのパラメータが少しでも大きくなると急激に効率が悪化することが明らかになった。

今後の課題としては，或る問題が与えられたとき条件 A′ を満たす差異列が存在するか否かを判別するアルゴリズムを見つけることが残されている。

参　考　文　献

(1) Newell, A., Shaw, J. C. and Simon, H. A.: "Report on a General Problem-Solving Program", Proceedings of the International Conference on Information Processing, 1959, pp. 256-264.

(2) Newell, A., Shaw, J. C. and Simon, H. A.: "A Variety of Intelligent Learning in a General Problem Solver", Self-Organizing Systems, 1960, pp. 153-189.

(3) Newell, A. and Simon, H. A.: "Computer Simulation of Human Thinking and Problem Solving", Computers and Automation, Aprill 1961, pp. 18-26.

(4) Newell, A. and Simon, H. A.: "GPS, A Program that Simulates Human Thought", Computers and Thought, 1963, pp. 279-293.

(5) Ernst, G. W. and Newell, A.: "Some Issues of Representation in a General Problem Solver", Proceedings of the Spring Joint Computer Conference, 1967, pp. 583-600.

(6) Ernst, G. W. and Newell, A.: "GPS: A Case Study in Generality and Problem Solving", Academic Press, 1969.

(7) Ernst, G. W.: "Sufficient Conditions for the Success of GPS", Journal of the Association for Computing Machinery, vol. 16, No. 4, 1969, pp. 517-533.

(8) Banerjy, R. B.: "Theory of Problem Solving", American Elsevier, 1969.

(9) Nilsson, N. J.: "Problem Solving Methods in Artificia Intelligence", McGraw-Hill, 1971.

(10) Slagle, J. R.: "Artificial Intelligence: The Heuristic Programming Approach", McGraw-Hill, 1971.

(11) Banerjy, R. B. and Ernst, G. W.: "A Theory for the Complete Mechanization of a GPS-type Problem Solver", 5th IJCAI 1977・pp. 450-456.

(12) Banerjy, R. B. and Ernst, G. W.: "A Comparison of Three Problem-Solving Methods", 5th IJCAI, 1977. pp. 442-449.

(13) Quinlan, J. R. and Hunt, E. B.: "A Formal Deductive Problem-Solving System", JACM, vol. 15, No. 4, October, 1968.

(14) Sandwall, E. J.: "A Planning Problem Solver based on Look-Ahead in Stochastic Game Trees", JACM, Vol. 16, No. 3, July, 1967.

(15) Fikes, R. E. and Nilsson, N. J.: "STRIPS: A New approach to the Theorem Proving to Problem Solving", Art. Int. 1971, pp. 189-208.

(16) Sacerdoti, E. D.: "Planning in a Hierarchy of Abstraction Spaces", Art. Int. 1974, pp. 115-135.

(17) 久 保 山 千 秋 : " GPSにおける差異の性質 ",和歌山大学経済学会,経済理論, 1971

5章　類比推論による問題の分解

5.1 緒　　言

我々人間は，問題を解こうとする際，まず与えられた問題の計画を作り，その計画に従って解を探索するという方法をとる。計画作成は問題解決の要であり，人間の高度な問題解決能力の秘密を握る鍵である。従って，計画作成機能を持つ問題解決システムが実現できたならば，計算機の知的能力は飛躍的に向上されることになる。一方，計画作成機能を持つという計算機プログラムもいくつか提案されているが，[1][2][3] それらは，個々の研究者の経験や直感に基づいて定式化されたもので，計画及び計画作成の基礎的概念さえもとらえ方が様々である。しかし，与えられた問題を解くのに何らかの意味でそれに類似の問題を考え，後者の解又は求解手順に関する知識を利用して与えられた問題を解こうとする発想はある程度共通している。

本章は，かかる発想を更に発展させ，厳密な定式化を試みたものである。即ち，計画作成過程を推論による既得の知識利用の過程としてとらえ，推論方法として類比推論を考え，類比推論による計画作成法を3章の成果を踏まえて定式化している。

5.2 類比推論による計画作成

5.2.1 類比推論

本節では，類比推論の概括的説明を行う。或る対象Aがほかの対象Bに同一ではないが，或る観点にたてば互いに一致しているとみることができるとき，換言すれば，A，Bが同じ類に属しているとみなせるとき，AとBは互いに類比であるという。例えば，整数の加算と掛算は交換的であり，結合的である。従って，同じ類（可換半群）に属している。よって，加算と掛算は互いに類比である。

対象Aの特性 a_1，a_2，…，a_i とBの特性 b_1，b_2，…，b_i とが関係Rで一致しているとみなせるとき，即ち，A，Bが関係Rの下で同じ類に属し，類比であるとき，Bの未知特性 b_j をそれに対応するAの既知特性 a_j から推論することを類比推論という（図 5.1 ）。類比推論は，同一の類に属するものは同一の，又は類似の性質を持つであろうという確信をその背景にしている。従って，類比推論により得られる結論は蓋然性しかもたず，それは実践によって確かめられねばならない。即ち，類比推論による結論は，一つの作業仮説としての役割を持つ。この作業仮説の確からしさは，A，B間の関係Rが強い程増加する。

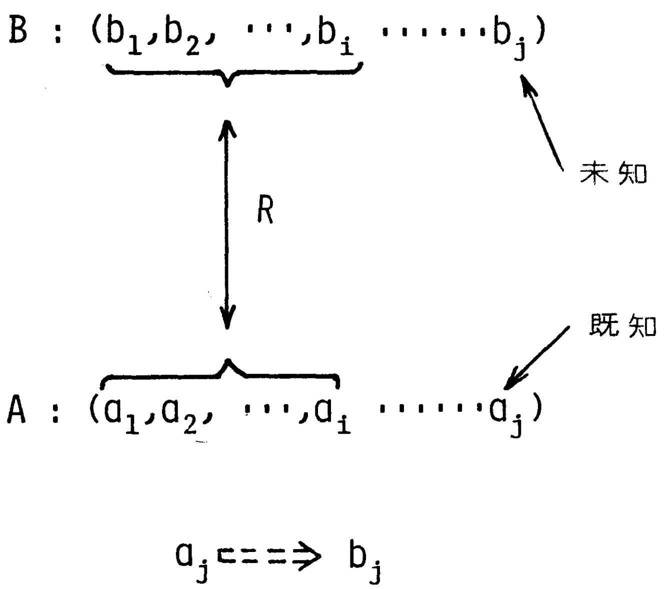


図 5.1　類 比 推 論

5.2.2 類比推論による計画作成

前節で述べたように，類比推論とは，共通性をもつ２つの対象A，Bがあるとき，一方の既知特性から他方の未知特性を推論し，未知特性に対する作業仮説をたてることである。これを問題解決に当てはめてみると，類

比推論は計画作成に相当する。この節では，類比推論による問題解決を考察する中で，計画及び計画作成の１つのモデルを示す。

類比推論による問題解決は，我々が問題を解くときよく用いる，“与えられた問題をこれによく似た問題にあてはめて考えてみる”という解き方に相当する。これをよりくわしく述べると次のようになる。

一般に問題Pは，初期状態 s_0， 手段Ω，条件，目標Gにより構成される（2.2参照）。これらを問題の構成要素と呼ぶ。2つの問題P，P′の構成要素の間に何らかの対応関係Rがあるとき，前節よりP，P′は互いに類比であるといわれる。もし，Pの解$\tilde{\omega}$が未知で，P′の解$\tilde{\omega}'$が既知ならば，P，P′間の類比に基づいた推論により，$\tilde{\omega}'$から$\tilde{\omega}$に対する作業仮説を得ることができる（図5.2参照）。求解手順に対しても同様である。このように類比問題P′の解$\tilde{\omega}'$又は求解手順Q′からの推論によって得られる問題Pの解$\tilde{\omega}$又は求解手順Qに対する作業仮説を“計画”と呼ぶことにする。即ち，計画は2種類考えられる。それらは，

① 解に対する作業仮説

② 求解手順に対する作業仮説

である。このとき類比推論の過程は計画作成の過程といえる。計画作成の手順を概略的に述べると次のようになる。

(1) 問題P（$\tilde{\omega}$，Q：未知）に類比の問題P′（$\tilde{\omega}'$，Q′：既知）を選択する。

(2) P，P′間の対応関係Rを導出する。

(3) P′の解$\tilde{\omega}'$と対応関係Rに基づき，Pの解に対する作業仮説（計画）をたてる。

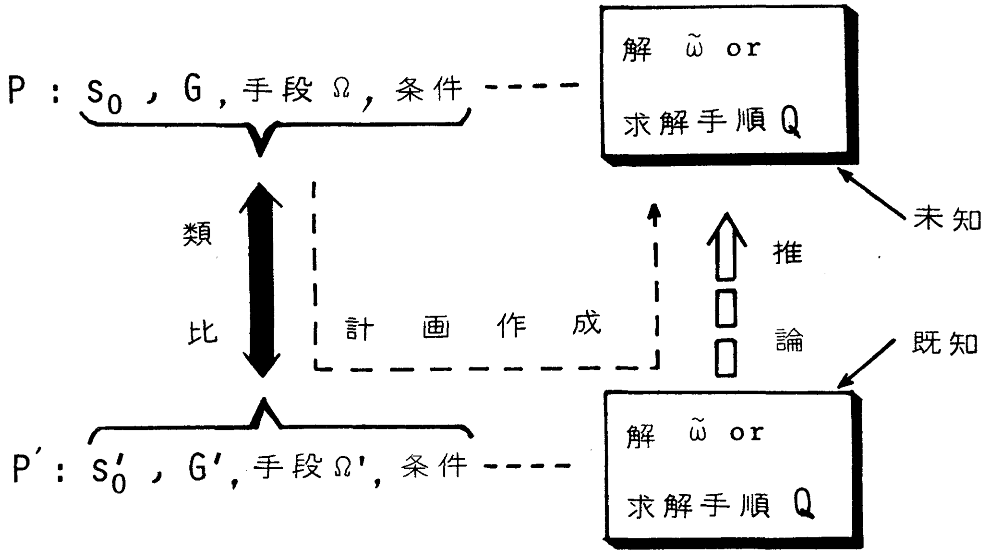


図 5. 2　　類比推論による計画作成

5.3　問題間に問題射が存在する場合の計画作成

本節では，2つの問題 P，P′ 間の対応関係が 2. 2 節で定義した問題射で表わされる場合の計画作成について述べる。

P から P′ への問題射を

$$\eta : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}'$$

とする。任意の s，s′ ∈ S に対して，

$$s\,\mathbf{R}(\eta)\,s' \Longleftrightarrow \eta(s) = \eta(s')$$

とすると，R(η)は同値関係となる。P の状態集合 S を R(η)によって同値類別し，それらの同値類よりなる状態集合をもつ問題を考える。ここで，R(η)が条件

$$s\,\mathbf{R}(\eta)\,s',\ 且つ\quad s,\ s' \in \mathrm{Dom}(\lambda(\omega))$$
$$\Longrightarrow \lambda(\omega)\,s\,\mathbf{R}(\eta)\,\lambda(\omega)\,s'$$

を満たすとき，

$$\bar{\lambda}(\omega)\,\bar{s} = \overline{\lambda(\omega)\,s'} \qquad (s' \in \bar{s} \cap Dom(\lambda(\omega)))$$

となるような写像

$$\bar{\lambda} : \Omega \quad \rightarrow PF\,(S/R(\eta))$$

が定まる。但し，Dom ($\lambda(\omega)$) は $\lambda(\omega)$ の定義域，$\bar{s}$ は s の同値類，$S/R(\eta)$ は S の $R(\eta)$ に関する商集合である。

〔定義5.1〕 $P/R(\eta) = (S/R(\eta),\ \Omega,\ \bar{\lambda},\ \bar{s}_0,\ \bar{G})$ は，P の $R(\eta)$ に関する商問題といわれる。

〔定理5.1〕 P から P′ へ問題射 η が存在し，状態写像が全射とする。このとき，

$$P \ \underset{\rightarrow}{\sim}\ P/R(\eta) \approx P'$$

である。

（証明） $P \underset{\rightarrow}{\sim} P/R(\eta)$ は定義より明らかである。$P/R(\eta) \approx P'$ を証明する。

(1) まず，$P/R(\eta) \underset{\rightarrow}{\sim} P'$ を示す。

$$\forall \bar{s} \in S/R(\eta)$$

に対して，$\hat{\eta}^{-1}(\bar{s})$ を

$$\hat{\eta}^{-1}(\bar{s}) = x, \qquad s.t.\ \hat{\eta}(x) = \bar{s}$$

と選ぶ。$P/R(\eta)$ から P′ への問題射 $\tilde{\eta}$ を次のように定義する。

$$\tilde{\eta}(\bar{s}) \triangleq \eta\,(\hat{\eta}^{-1}(\bar{s})) = \eta\,(x)$$

$$\tilde{\eta}(\omega) \triangleq \eta\,(\omega)$$

このとき，

$$\tilde{\eta}(\bar{s}_0) = s'_0$$

$$\tilde{\eta}(\bar{G}) = G'$$

は容易に確かめ得る。

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\hat{\eta}"'] & P' \\ P/R(\eta) \arrow[ur, "\tilde{\eta}"'] & \end{tikzcd}$$

次に，図式(a)が可換であることを示す。

$$\begin{array}{ccc} S/R(\eta) & \xrightarrow{\bar{\lambda}(\omega)} & S/R(\eta) \\ \tilde{\eta}\downarrow & & \downarrow\tilde{\eta} \\ S' & \xrightarrow[\lambda'(\tilde{\eta}(\omega))]{} & S' \end{array}$$

(a)

$$\lambda'(\tilde{\eta}(\omega))(\tilde{\eta}(\bar{s})) = \lambda'(\eta(\omega))(h(x))$$
$$\tilde{\eta}(\bar{\lambda}(\omega)\bar{s}) = \tilde{\eta}(\overline{\lambda(\omega)s})$$
$$= \eta(\lambda(\omega)x)$$

ところで，

$$P \gtrsim P'$$

から

$$\lambda'(\eta(\omega))(\eta(x) = \eta(\lambda(\omega)x)$$
$$\therefore \lambda'(\tilde{\eta}(\omega))(\tilde{\eta}(\bar{s})) = \tilde{\eta}(\bar{\lambda}(\omega)\bar{s})$$

よって，

$$P/R(\eta) \gtrsim P'$$

である。

(2) 次に，$P' \gtrsim P/R(\eta)$ を示す。状態写像ηは全射であるから，$\forall s' \in S'$ に対して，

$$\eta(s) = s'$$

となるような$s \in S$が必ず1つは存在する。そこで，

$$\eta^{-1}(s') = s, \quad s.t, \quad \eta(s) = s'$$

とする。$\eta^{-1}(\omega')(\omega' \in \Omega')$ は次式から一意に定まる。

$$\eta(\lambda(\eta^{-1}(\omega'))(\eta^{-1}(s'))) = \lambda'(\omega')s'$$

そこで，P' から $P/R(\eta)$ への問題射$\tilde{\eta}^{-1}$ を次のように定義する。

$$\tilde{\eta}^{-1}(s') \triangleq \hat{\eta}(\eta^{-1}(s')$$

$$\widetilde{\eta}^{-1}(\omega') \triangleq \widehat{\eta}(\eta^{-1}(\omega'))$$

このとき，

$$\widetilde{\eta}^{-1}(s'_0) = \bar{s}_0$$

$$\widetilde{\eta}^{-1}(G') = \bar{G}$$

は明らかである。図式(b)が可換であることを示す。

$$\begin{array}{ccc} S' & \xrightarrow{\lambda'(\omega')} & S' \\ \Big\downarrow \widetilde{\eta}^{-1} & & \Big\downarrow \widetilde{\eta}^{-1} \\ S/R(\eta) & \xrightarrow[\bar{\lambda}(\widetilde{\eta}^{-1}(\omega'))]{} & S/R(\eta) \end{array}$$

(b)

$$\bar{\lambda}(\widetilde{\eta}^{-1}(\omega'))\ (\widetilde{\eta}^{-1}(s'))$$
$$= \bar{\lambda}(\widehat{\eta}(\eta^{-1}(\omega')))\ (\widehat{\eta}(\eta^{-1}(s')))$$

$$\widetilde{\eta}^{-1}(\lambda'(\omega')s') = \widehat{\eta}(\eta^{-1}(\lambda'(\omega')s')$$
$$= \widehat{\eta}(\lambda(\eta^{-1}(\omega'))\ (\eta^{-1}(s'))$$

ところで，

$$P \precsim P/R(\eta)$$

であるから，

$$\bar{\lambda}(\widehat{\eta}(\eta^{-1}(\omega)))\ (\widehat{\eta}(\eta^{-1}(s'))) = \widehat{\eta}(\lambda(\eta^{-1}(\omega'))\ (\eta^{-1}(s)))$$

$$\therefore\ \bar{\lambda}(\widetilde{\eta}^{-1}(\omega'))\ (\widetilde{\eta}^{-1}(s') = \widetilde{\eta}^{-1}(\lambda'(\omega')s')$$

よって，

$$P' \precsim P/R(\eta)$$

(1)，(2)より

$$P/R(\eta) \approx P'$$

Q. E. D.

定理 5.1 より，P から P′ へ問題射 η が存在する場合，P の R(η) に関する商問題 P／R(η) が P′ に同形であるから，P と P′ は互いに類比であ

る（5.2.1参照）。従って，P'の解$\widetilde{\omega}'$からPの解に対する作業仮説（計画）$\eta^{-1}(\widetilde{\omega}')$が得られる。ここで，$\eta$が1－1対応のとき，

$$\eta^{-1}(\widetilde{\omega}') = \eta^{-1}(\omega'_n) \circ \eta^{-1}(\omega'_{n-1}) \circ \cdots \circ \eta^{-1}(\omega'_1)$$

$$(\widetilde{\omega}' = \omega'_n \circ \omega'_{n-1} \circ \cdots \circ \omega'_1)$$

である。多対一のときは，$\eta^{-1}(\omega'_i)$が複数の手段になるから，$\eta^{-1}(\widetilde{\omega}')$は手段列のクラスになる。

ところで，

$$P' \approx P/R(\eta)$$

であるから，P'の解$\widetilde{\omega}'$に基づいてPを下位問題列に分解することができる（3章参照）。即ち，P'を商問題の代りに使うことができる。類比推論による問題解決（計画作成）は，類似の問題の解に基づく問題分解法であるといえる。

$$\eta^{-1}(\omega'_n) = \omega_n, \quad \eta^{-1}(\omega'_{n-1}) = \omega_{n-1}, \quad \cdots, \quad \eta^{-1}(\omega'_1) = \omega_1$$

とすると，下位問題列は，

$$P_1 = (S, \Omega, \lambda, s_{0,1}, \mathrm{Dom}(\lambda(\omega_1)))$$

$$P_2 = (S, \Omega, \lambda, s_{0,2}, \mathrm{Dom}(\lambda(\omega_2)))$$

$$\vdots$$

$$P_{n+1} = (S, \Omega, \lambda, s_{0,n+1}, G)$$

である。ここで，$s_{0,1} = s_0$，$s_{0,i} = \lambda^*(\omega_{i-1} \circ \widetilde{\omega}_{i-1})\, s_{0,i-1}$，$\widetilde{\omega}_{i-1}$ は P_{i-1} の解である。

状態集合S，手段集合Ωを次のように制限すれば，部分問題列が得られる。

$$\hat{s}_i = \{ s \ ; \ s R(\eta) s_{0,i} \}$$

$$\hat{\omega}_i = \{ \omega \ ; \ s \in \hat{s}_i \text{ に対して，} \lambda(\omega) s \in \hat{s}_i \}$$

$$\hat{P}_i = (\hat{s}_i, \hat{\omega}_i, \lambda\hat{s}_i, s_{0,i}, \mathrm{Dom}(\lambda(\omega_i)) \cap \hat{s}_i)$$

このようにして得られる部分問題列は，3.3節で得た部分問題列と基本的に同じである。

5.4 結　　言

本章では，類比推論による問題解決について述べ，それが計画作成に相当することを示し，計画作成の1つのモデルを示した。特に，PからP′へ問題射ηが存在し，P′の解$\widetilde{\omega}'$が既知の場合，P，P′は互いに類比であり，このとき$\widetilde{\omega}'$とηに基づきPの解に対する計画が得られること，及び計画によりPが部分問題列に分解されることを示した。これは3章の商問題の解に基づく分解で，商問題の代りにそれに同形な他の問題（但し，解：既知）を置き換えたものということができる。この方法は，解が既知である問題のリストが与えられているとき有用である。

次に，計画作成に関する従来の研究について検討し，本章の内容との関連を明らかにする。商問題に類似の概念として平石(6)の計画モデル及び中村(5)のマクロ問題があげられる。前者は類比の問題といった特定の問題ではなく，一気に，類似の問題を解いた多くの経験から得られる情報（これがイメージ空間の実体と思われる。これは集合として定まらない）から出発しているため，イメージ抽出関数という定義不能な関数を先験的に仮定せざるを得ない羽目に陥っている。その結果，計画モデルも宙に浮いた概念としての宿命を負っている。後者は，問題を非決定性オートマトンで定義しているが，その理由及び背景は明らかでない。非決定性オートマトンという幾つかの目的のためには有効であるが実際には考えにくいモデルを出発点としているため理論全体が不鮮明で，状態写像の定義では混乱も見られる。従って，マクロ問題は商問題に概念的には類似しているが，両者の比較を厳密に行うことはできない。

参　考　文　献

(1) Sandwall, E. J.: "A Planning Problem Solver Based on Look-Ahead in Stochastic Game Trees", JACM Vol. 6, No. 3, July, 1969.

(2) Sacerdoti, E。D.: "Planning in a Hierarchy of Abstraction Spaces", Art. Int. 1974, pp. 115-135。

(3) Fahlman, S. E.: "A Planning System for Robot Construction Tasks," Art. Int. 5, pp. 1-49, 1974.

(4) Kling, R. E.: "A Paradigm for Reasoning by Analogy", Art. Int. 1971.

(5) 中村達也：" 帰納的問題解決と準同形写像による問題の分解 ", 信学会オートマトンと言語研資, AL 74-66, 1975-03.

(6) 平石, 矢島：" 確率オートマトンモデルによる問題解決システム ", 信学会オートマトンと言語研資, AL 74-41, 1975-01.

(7) ポリア：" 数学における発見はいかになされるか ", 丸善, 1953.

(8) 新妻清三郎：" 類比推論による問題解決の数学的定式化 ", 信学論(A), 61-A, 6, 1978.

6章　結　　論

3章で述べた商問題の解に基づく問題の分解という発想は本論文独自のものであるが，その萌芽はNilsson の差異に基づいて問題を分解するという発想の中に存在する。Nilsson は，差異→key operator（手段）→問題の分解，という道を辿った（但し，スケッチ程度に留っており，理論的に筋道が示されたのではない）が，我々は差異概念の分析からそれが同値関係と表裏の関係にあることを把握していたので，差異→（同値関係→状態集合の商集合）→商問題→商問題の解→問題の分解，という道を辿ることができた。差異と問題の分解との間に商問題を導入した点に本論文の独自性がある。差異と問題の分解とを結びつけるものとして商問題を導入したことは，本論文の大きなテーマである“問題解決に有効な問題の分解とはどのような分解か”という問いに対する解答を，差異に関する条件という形で表わすことを可能にした。ここで商問題に優るとも劣らぬ重要な役割を演じているのは関連表である。3章の結果は関連表の定義の成功を示している。これは，Ernst や Banerji の研究で，関連表が有効な役割をほとんど演じていないという事実と対照的である。

4章では，前述の問いに答えることがGPSの差異順序決定問題に答えることにもなるということが示された。即ち，GPSに個有の問題と思われていた差異順序決定問題の根底に横たわっているのが，実は，どのような分解が問題解決に有効であるかというより普遍的な問題であることがわかったのである。これは，差異順序決定問題に対する1つの解答を示したことと共に本論文の重要な成果である。

5章では，計画作成を類比推論による問題解決という視点から定式化した。ここでも商問題（厳密には商問題と同形な問題）による問題の分解が示され，3章で述べた方法との関連が示されたが，どのようなとき可解な部分問題列が得られるかという課題には答えていない。これは今後の課題である。

又，次のような課題が残されている。定理 3.3 より

$$P \approx P/\widetilde{d}_n^c \underset{\rightarrow}{\sim} P/\widetilde{d}_{n-1}^c \underset{\rightarrow}{\sim} \cdots \underset{\rightarrow}{\sim} P/\widetilde{d}_2^c \underset{\rightarrow}{\sim} P/\widetilde{d}_1^c$$

なる関係式が得られる。このとき，$P/\widetilde{d}_i^c$ の解に基づいて$P/\widetilde{d}_{i+1}^c$ を部分問題列に分解することができる。従って，$P/\widetilde{d}_1^c$ の解に基づいて$P/\widetilde{d}_2^c$ る部分問題列に分解し，それらの部分問題を解くことによって得られた $P/\widetilde{d}_2^c$ の解に基づいて$P/\widetilde{d}_3^c$ を分解する。以下これをくりかえし，最終的にPを部分問題列に分解して解くという方法が考えられる。この方法とＡＢＳＴＲＩＰＳの求解法を比較することにより，後者が求解可能であるための条件が得られることが期待できる。又，ＧＰＳとＡＢＳＴＲＩＰＳとの比較も可能になる。これらは今後の課題である。

“科学の特定の分野が豊富な問題を持つ限り，その分野は生き続ける。問題の欠除は，そのような分野の独立的発展の消滅あるいは終焉の前兆に他ならない。”

―ヒルベルト―

謝　　辞

筆者が名古屋大学大学院博士課程在学中ならびにその後も長い間本研究に関し，御指導・御鞭撻を賜わった中村嘉平教授に心から感謝の意を表します。また，筆者が本学博士課程で研究する機会を与えてくださり，その後も暖かい御援助と有益な御助言を賜わった福村晃夫教授に深く感謝の意を表します。さらに，本論文の作成にあたり有益な御助言，御教示を賜わった本多波雄教授に深く感謝の意を表します。

常日頃，有益かつ熱心な御討論により筆者を現在ある方向に導いて下さいました本学助手松尾強博士に心から感謝の意を表します。また，筆者が人工知能の研究に関心を持つに至ったのは，大阪大学大学院基礎工学研究科修士課程に在学中，当時同学の助手をしておられた北橋忠宏博士（現在，豊橋技術科学大学教授）の影響によるものであります。同教授には，その後筆者が茨城大学工学部に在職中も，また本大学大学院に在学中も終始変らぬ励ましと御指導・御援助を賜わりました。微才な筆者が本研究をまとめられるまでに至ったのは真に北橋教授と松尾博士の御蔭であると深く感謝しています。重ねて厚く御礼申し上げます。

長年に亘って，真に友情あふれる態度で筆者を励ましてくれた畏友兵藤信夫・千草御夫妻に心から感謝の意を表します。

最後に，筆者が長い間研究に専念するわがままを期待をもって許して下さり，援助を惜しまなかった父母，ならびに妻直江の理解ある援助に感謝の言葉を述べたいと思います。