

報告番号 甲第 1413 号

# 円筒殻の連続塑性座屈変形の 解析に関する研究

滝 佳 弘

図・本館

# 円筒殻の連続塑性座屈変形の 解析に関する研究

名古屋大学図書  
和 846995

滝 佳 弘

## まえがき

構造学を学ぼうとするものにとり、数ある特有用な問題のうち  
の円筒殻や球殻あるいはその部分殻などは格好の教材であろう。  
その実用的価値と応用面の広さもさることながら、不安定  
現象すなわち座屈の様式や座屈以後の変形などは非常にバラエ  
ティーに富んでいて私達を魅了し、いつまでも飽きさせない  
*Challenging Puzzle*を提供してくれる。

著者は、そのうちの一つの連続塑性座屈変形の解析をテーマ  
に選んだのであるが、そのきっかけは、“ちょうちん”状に潰れ  
たチューブを西村先生から初めて見せていただいた時ではない  
かと思う。この研究を通して、塑性、幾何学非線形、接触の  
問題、および数値計算法など多くのものを学ぶよい機会を持て  
たこと、さらに、まだ完全ではないが一応自分の望む結果に到  
達できるまで、長い間この問題が自分の注意を引き付けていて

くれたことは幸いであった。

本研究の内容に関して、オ2章の連続塑性座屈の初期過程については日本航空宇宙学会誌、オ27巻オ310号(1979)、および *Trans. of JSASS., Vol. 22, No. 57, (1979)* に掲載された論文「円筒殻の塑性大変形の擬平衡形要素による解析」と「*Analysis of Large Plastic Deformation in Cylindrical Shell by Using Pseudo-Equilibrium Hybrid Element*」に基づいている。そしてオ3章の変化する接触条件が座屈後の変形に与える影響についてとオ4章の衝撃的に加わる荷重が座屈変形に与える影響については近日中にも日本航空宇宙学会誌に、それぞれ、論文「塑性大変形を伴う接触問題の解析」と「円筒殻の塑性大変形の擬平衡形要素による解析オ2報(動的応答)」として掲載される予定である。

## 目次

才	1 章	序論	1
才	2 章	連続塑性座屈の初期過程について	11
	§ 2.1	弾塑性解析のための擬平衡形要素の意義	11
	§ 2.2	コンプリメンタリ仮想仕事の原理を用いた定式化	14
	§ 2.3	軸圧縮を受け座屈する円筒殻についての計算例	25
	§ 2.4	結論	33
才	3 章	変化する接触条件が座屈後の変形に与える影響について	43
	§ 3.1	接触条件の扱い方とその問題点	43
	§ 3.2	拘束条件付き仮想仕事の原理を用いた定式化	47
	§ 3.3	接触条件の離散化	52
	§ 3.4	接触状態の判別と反復計算手順	58
	§ 3.5	ブロックで圧縮される円筒殻についての計算例	64
	§ 3.6	結論	69

★	4 章	衝撃的に加わる荷重が座屈変形に与える影響について	78
	§ 4.1	動的応答解析の問題点	78
	§ 4.2	塑性変形を伴う系の運動方程式	80
	§ 4.3	運動方程式の <i>Newmark</i> 法による直接積分	83
	§ 4.4	<i>Newmark</i> の積分法の特性	85
	§ 4.5	衝撃的な軸圧縮力を受ける円筒殻についての計算例	93
	§ 4.6	結 論	98
★	5 章	総 括	107
	文 献		111
	附 録	擬平衡形軸対称殻要素	118
	謝 辞		133

## 記号

本文中の各章でを使用した記号は、特にことわりがなければ下記に従う。また、各節で固有のものについては、その個所で説明する。

## オ 2 章

$\epsilon_{ij}$  : ひずみ成分

$\sigma_{ij}$  : 応力成分

$u_i$  : 変位成分

$T_i (= \nu_j \sigma_{ij})$  : 周辺力成分

$\nu_i$  : 方向余弦成分

$H_{ijkl}$  : 弾性コンプライアンス

$V$  : 体積

$\partial V$  :  $V$  の外表面

$S_\sigma$  : 力学境界

$S_u$  : 幾何学境界

$V_N$  : 才  $N$  要素体積

$\partial V_N (= C_N + C_{No} + C_{Nu})$  : 才  $N$  要素の外表面

$C_N$  : 要素間境界

$C_{No}$  : 力学境界部分

$C_{Nu}$  : 幾何学境界部分

$S_j$  : 部材力

$\Delta_j$  : 部材変形量

$R_i$  : 節点外力

$r_i$  : 節点変位

$K_{ik} (= K_{ik}^E + K_{ik}^G)$  : 全剛性

$K_{ik}^E$  : 剛性

$K_{ik}^G$  : 幾何学剛性

$P_i^P$  : 等価塑性荷重

$P_i^R$  : 残差荷重



$(\dot{\quad})$  : 微小増分量

$\delta(\quad)$  : 微小な仮想量

$(\bar{\quad})$  : 規定量

$(\quad)^P$  : 塑性変形に関する量

$(\quad)'$  : 弾性変形に対応する仮の量

$(\quad)^F$  : 仮の量と真の量との差

$(\quad)_N$  :  $N$ 要素に関する量

$(\quad)_{,j}$  : 座標  $X_j$  に関する微分

### 才 3 章

$\varepsilon_{ij}$  : ひずみ成分

$\sigma_{ij}$  : 応力成分

$u_i$  : 変位成分

$X_i$  : 座標

$T_i$  : 周辺力成分

$E_{ijkl}$  : 弾性係数

- $V$  : 体積
- $\partial V$  :  $V$  の外表面
- $S_\sigma$  : 力学境界
- $S_u$  : 幾何学境界
- $C (= \partial V^1 \cap \partial V^2)$  : 接触面
- $u_n$  :  $C$  上の変位の外向き法線方向成分
- $u_s$  :  $C$  上の変位の接線方向成分
- $\Delta$  : 相対すべり量
- $T_n$  : 接触力の外向き法線方向成分
- $T_s$  : 接触力の接線方向成分
- $\mu$  : 摩擦係数
- $(\cdot)$  : 微小増分量
- $(\bar{\cdot})$  : 規定量
- $\delta(\cdot)$  : 微小な仮想量
- $(\cdot)^P$  : 塑性変形に関する量

$(f)$  : 摩擦力に関する量

$(\alpha)$  :  $\alpha=1$  は接触子、 $\alpha=2$  は標的子に関する量

$l$  : 接触子  $V^1$  の接触節点

$m, m+1$  : 標的子  $V^2$  の接触節点

$U_{li}^1, U_{mi}^2, U_{m+1i}^2$  : 接触節点変位

$r^1, r^2$  :  $V^1$  と  $V^2$  の残りの節点変位

$T_{li}^1, T_{mi}^2, T_{m+1i}^2$  : 接触力

$R^1, R^2$  :  $V^1$  と  $V^2$  の残りの節点力

$P^1, P^2, P_{li}^1, P_{mi}^2, P_{m+1i}^2$  : 等価塑性荷重

$\xi$  : 無次元接触位置パラメータ

$\eta$  : 増分量制御パラメータ

$\theta$  : 節点  $m$  と  $m+1$  を結ぶ直線と  $X$  軸とのなす角

$L$  : 節点  $m$  と  $m+1$  との距離

$IK$  : 剛性行列

$\hat{r}$  : 一般化増分変位ベクトル

$\dot{R}$  : 増分外力ベクトル

$IP^f$  : 摩擦力に関する修正ベクトル

$IP^p$  : 等価塑性荷重ベクトル

$IK_c$  : 接触剛性 (*contact stiffness*) 行列

## 才 4 章

$R_i$  : 節点外力

$r_i$  : 節点変位

$S_j$  : 部材力

$\Delta_j$  : 部材変形量

$M_{ik}$  : 質量

$C_{ik}$  : 減衰係数

$K_{ik}$  : 剛性

$(\dot{\quad})$  : 時間微分 ( $d/dt$ )

$\delta(\quad)$  : 仮想量

$\Delta(\quad)$  : 微小増分量

$(\cdot)^n$  : 時刻  $t=t_n$  での量

$h$  : 微小な時間増分

$\beta, \delta$  : Newmark法の積分パラメータ

$\lambda$  : 振動特性方程式の根

$\theta$  : 近似解の位相

$f$  : 外力

$m$  : 質量

$k$  : バネ定数

$y$  : 変位

## 例題

$L$  : 円筒殻の長さ

$R$  : 円筒殻の半径

$T$  : 円筒殻の厚さ

$E$  : ヤング率

$\nu$  : ポアソン比

$\sigma_y, \sigma_{yi}$  : 降伏応力

$C_p, C_{pi}$  : 硬化係数

$\mu$  : 摩擦係数

$W$  : 軸方向変位

$U$  : 半径方向変位

$\Delta(\ )$  : 増分量

$P_{cr}$  : 古典座屈臨界値  $P_{cr} = 2\pi ET^2 / \sqrt{3(1-\nu^2)}$

$P$  : 軸方向荷重

$R_e$  : 軸方向反力

$P_0$  : 印加する荷重の大きさ

$\dot{W}_0$  : 印加する速度の大きさ

$\sigma_s$  : 円筒の母線方向応力成分

$\sigma_\varphi$  : 円筒の周方向応力成分

$r, \varphi, z$  : 円筒座標

## 第 1 章 序 論

板と殻を主体にした薄肉軽量構造は、航空機やロケットのように、性能上の要求から軽量かつ高強度が不可欠な分野では広く利用されている。最近では他の分野でも省エネルギー問題に関連して、構造物の軽量化対策が重要な課題になってきた。たとえば、以前の石油が廉価な時代ではほとんど顧みられなかった自動車をはじめとする輸送機器産業でも、1973年のオイルショックを契機に軽量構造の採用を真剣に検討するようになり、それなりの成果を着実にあげている。この傾向は年々強くなることが予測されている。殻構造は自重に較べて遙かに大きな荷重に耐えられるので、その利用効果は各方面で立証されているが、その反面、圧縮荷重に対しては通常の剛な構造物に較べ、不安定現象すなわち座屈を生じ易いという不都合な点も持っている。しかし一方では、まだ特殊な応用例ではあるが

、衝撃的に大きな力が作用したときに、構造要素の一部が破壊するのを利用して加えられた大きなエネルギーの大部分を吸収し、他の重要な部分へ及ぶ影響を最小限に抑えようとする利用法もある。すなわち、衝突のような非常の場合に遭遇した時に、人命や重要な機器を、構造物の特性を活かして保護しようとする訳である。いずれにしても、殻構造の特性を積極的に活用できる分野は広いと云える。そこで、これらの特性を高度に利用した構造物を設計するには、各種の非線形効果を考慮した系の支配方程式を使って、種々の外荷重と境界条件のもとでの系の応答（変形、応力分布、剛性、耐荷能力など）を詳細に調べる必要がある。あるいは、それを合理的に評価するための基準が望まれる。

殻構造のうち、円筒殻とその部分殻は、最も多く利用されている構造要素の一つであろう。その寸法、材質、荷重条件の如何で多種多様な座屈様式を呈することが知られており、現在



もなお、多くの研究者が種々の座屈機構を解明し、座屈臨界値を正確に推定する方法を得るため、実験と理論解析の両面にわたって探究している。歴史的には、円筒殻の安定問題に関する研究は、1848年の W. Fairbairn<sup>(10)</sup> の実験に始まる。このときは塑性変形による座屈だけであったが、その後、薄肉殻の線形理論による弾性安定問題が R. Loreng<sup>(11)</sup> (1908, 1911) や S. Timoshenko<sup>(12)</sup> (1910) によって研究された。さらに、A. Robertson<sup>(13)</sup> (1928) は弾性座屈値の実験と理論値の比較をし、E.E. Lundquist<sup>(14)</sup> (1933), L.H. Donnell<sup>(15)</sup> (1934) は広範に弾性座屈実験を行った。しかし、いずれの結果も、線形理論から求めたいわゆる古典臨界値に較べ、 $\frac{1}{2}$  から  $\frac{1}{4}$  と極端に実験値の方が低いので、T. von Karman と H. S. Tsien<sup>(16)</sup> はこのギャップを埋める試みとして、有限変形理論に基づく扱い方を示し、以後それに続く多くの研究者たちによって、座屈後にはかなり低い平衡値が存在できることが説明された。また、初期不整や偏心荷重が座屈臨界値自身を低下させ

ることも調べられた。横圧を受ける円筒殻や円筒殻に限らず、圧縮力、剪断力または圧縮力と剪断力を同時に受ける曲面板や補強殻なども研究されるようになり、現在に至っている。

しかしながら、軸圧縮下で示す円筒殻の挙動は、現在でも解析が難解な部類に入る問題の一つに数えられている。この事情

については、Y.C. Fung と E.E. Sechler<sup>(17)</sup>, W.F. Thielemann<sup>(18)</sup> や N.J. Hoff<sup>(19)</sup> らのすぐれた文献に述べられているので、あらためてここでその詳細については書かない。しかし、その座屈臨界値と座屈以後の挙動を正確に予測することは非常に重要なことである。

円筒殻をその軸方向に圧縮すると、半径と厚さの比  $R/T$  と長さ  
と半径の比  $L/R$  の如何で、軸対称形の“ちょうちん”状になるものから非軸対称で局部的に起る“ダイヤモンド”状になるものまで、さまざまなタイプの座屈様式がある。W.H. Horton  
と S.C. Bailey<sup>(8)</sup> は、彼らの行った広範で詳細な実験の結果から、

次の5種に分類できるとしている(表1)。

- I. 初期座屈は塑性的で軸対称形、後続の座屈も同様。連続塑性座屈。
  - II. 初期座屈は塑性的で軸対称形、後続の座屈は塑性的であるが、四角形、楕円、正三角形あるいは正方形の非軸対称形。さらに、初めの数段は軸対称形でそのあと非軸対称形となるものと、才2段目から非軸対称形になるものとに分けられる。連続塑性座屈。
  - III. 塑性的で非軸対称な初期座屈のみで、後続の座屈は起らない。
  - IV. 弾塑性的な非軸対称形座屈。降伏応力以下で座屈するが塑性変形はその直後から始まる。
  - V. 弾性的な非軸対称形座屈。軸方向の変位が殻の厚さを超えるぐらいから塑性変形の効果は顕著になる。
- 才IとIIのクラスの間には、さらに半径 $R$ と厚さ $T$ 、それに荷

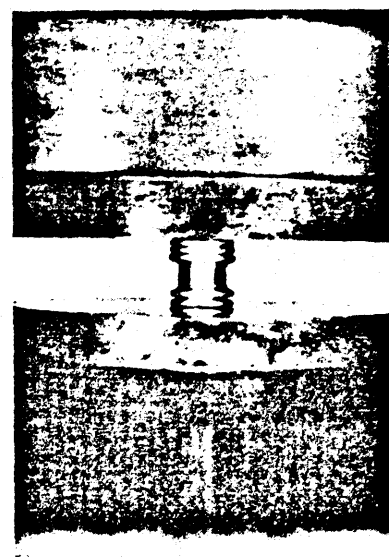
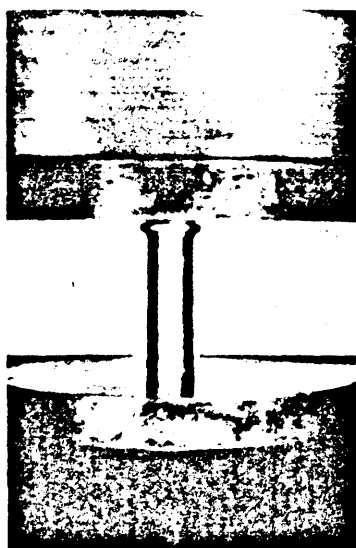
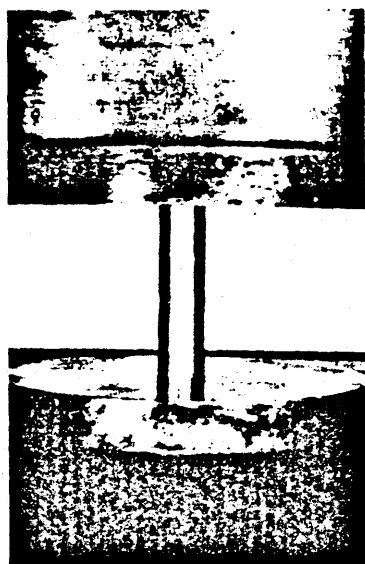
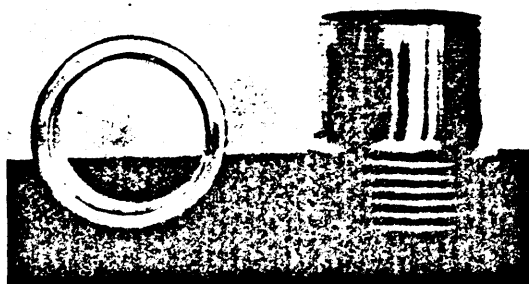


図1. ちょうちん状に潰れた円筒殻の軸対称形  
連続塑性座屈変形<sup>(8)</sup>

Class	Initial Buckle		Subsequent Buckle		
I	Plastic	Axisymmetric	Plastic	Axisymmetric	Class I and II are Progressive Plastic Buckling
II	Plastic	Axisymmetric	Plastic	Nonsymmetric Rectangular, Elliptic, Triangular, Square	(a) Nonsymmetry occurs after several symmetric ones are formed.
					(b) Nonsymmetry occurs immediately after first one.
III	Plastic	Nonsymmetric	Transition between the plastic and elastic buckling regions. Snap-through type		
IV	Elasto-Plastic	Nonsymmetric	Initial buckling stress is lower than yield strength of material. Snap-through type		
V	Elastic	Nonsymmetric	Plastic effect starts when the deflections exceed the thickness of shell. Localized buckling pattern		

表1. 軸圧縮を受ける円筒殻の座屈様式の分類<sup>(8)</sup>

重の負荷速度が同じでも長さ $L$ と半径 $R$ の比 $L/R$ の如何でオIのクラスとオIIのクラスに分かれる臨界値がある。

ここで、オIのクラスの変形をさらに詳しくみてみよう。

半径と厚さの比 $R/T$ が20~30ぐらいで、比較的細長い円筒をその両端からブロックで軸方向に圧縮すると、圧縮量に応じて、半径方向にポアソン比の分だけ一様に膨張しようとする。しかし、両端部分ではブロックからの拘束を受けるため、この膨張が妨げられて、結果として、両端部分に曲げ応力が誘起される。圧縮を続けると、一様な軸応力に加えてこの曲げ応力のため、弾性座屈臨界値の約 $\frac{1}{5}$ 程度の小さな荷重で塑性変形が始まり、両端のところに軸対称形の短い波長のバルジを生じ、座屈する。さらにブロックを押し続ければ、バルジが押し潰され、続いてすぐ横にオIIのバルジが形成され、また潰れる。何度か同様のプロセスが繰返えされて、最終的に空気バネのラバーローズやちょうちん状になる。これを軸対称形連続塑

性座屈 (Axisymmetric Progressive Plastic Buckling) という (図 1)。

本研究は、このオIのクラスの軸対称形連続塑性座屈の変形を有限要素法を用いて詳細に調べることを目的とする。本論文は3部分から構成される。オ2章では、擬平衡形要素を使った塑性大変形の定式化を示して、静的に荷重あるいは変形が加えられた場合を増分的に解き、初期座屈の変形プロセス、内部に生ずる応力とその分布を調べる。初期塑性座屈後の変形において、円筒殻とこれを押しているブロックとの接触部分では、単純支持や固定支持といった単純な条件ではなく、変形の進展に伴い、すべりが起ったり接触の位置が変わったりする。

そこでオ3章では、塑性大変形を考慮した2次元すべり摩擦接触問題の定式化を考え、接触条件の変化が円筒殻の変形に与える影響について調べる。オ4章では、直接積分法を用い、塑性変形を考慮した円筒殻の運動方程式を時間増分ごとに積分し

ていくことで、衝撃的な荷重や変形が加えられた時の円筒殻の  
応答特性、とくに塑性座屈変形の起る位置について調べる。



## 第 2 章 連続塑性座屈の初期過程について

### § 2.1 弾塑性解析のための擬平衡形要素の意義

有限要素法を用いて構造解析するとき、ポテンシャルエネルギーの原理(変位法)やコンプライメンタリエネルギーの原理(応力法)を使うのが標準的な手法であろう。しかし、連続体を有限個の要素に分割し、節点量と呼ぶパラメータで各要素内の物理量を内挿するので、本来の無限個の自由度を持った系を有限自由度の離散系に置き換えて考えることになる。したがって、各要素間の境界上では、力や変位に関するすべての連続性を保証するのは難しくなる。このため、L.R.Herrmann<sup>(20)</sup>は Hellinger-Reissner の原理を使い、応力と変位の双方を変数にとり、それぞれに低次の連続性だけを要求する混合法を提案し、この点を克服している。一方、T.H.H.Pian<sup>(21)</sup>は、Hybrid 法ならば要素間境界上での適合条件や平衡条件を満足するか否

かを問わずに、要素内でだけ適合性または平衡性を定義すればよく、要素間境界上では積分的な意味で連続性の補償をする、一種の *Relaxation* 法の有効性を示した。この方法の最大の利点として、他の方法より精度の向上が望めることが、多くの研究報告<sup>(22)(23)(24)(25)</sup>で明らかにされている。

*Hybrid* 法のうち、コンプライメンタリエネルギー原理から誘導される応力仮定タイプのものは、応力・ひずみの関係式の如何によらないので、弾塑性混合問題への応用が期待できると鷲津<sup>(21)</sup>は述べている。この応力仮定の *Hybrid* 法で増分的に弾塑性解析をするとき、 $P_{iam}$  は平衡形要素と擬平衡形要素を使う二つの場合を紹介している。平衡形要素とは、要素内の応力分布を仮定するとき、塑性変形による影響を考慮して、ある真の増分応力を独立変数にとり、さらに平衡条件を満足するようにしたものという。一方、擬平衡形要素では、増分ひずみが弾性的に起っていると仮定し、対応する仮の増分応力を独立変数に

選ぶ。そして、塑性効果のために生ずる真の増分応力との矛盾を *Relaxation* 法で補うようにしたものである。理論上の合理性は平衡形要素の方にあるが、いくつかの計算例から精度や計算に要する手間などを総合的に検討した結果、*Pian* は後者の方が勝れていると結論している。

本章では、まずはじめに、増分形コンパリメンタリ仮想仕事の原理から擬平衡形要素の撓み性や剛性行列などを誘導する手順を示す。つぎに、幾何学非線形（初期応力）の効果は、増分形で表した要素の撓み性行列を全体系に組み立てるときに、部材力と部材変形という概念を導入することで考慮できることを示す。つぎに例題として、円筒殻が軸方向に圧縮されるとき、両端での境界条件は変形が進行する間も変化しないと仮定し、初期座屈の起る様子およびバルジ形の変形の発生と圧潰の機構を調べる。

## § 2.2 コンプリメンタリ仮想仕事の原理を用いた定式化

物体  $V$  について、コンプリメンタリ仮想仕事の式は次式<sup>(2.1)</sup>で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \int_V \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV - \int_{S_u} \bar{u}_i \delta T_i dS &= 0 \\ \text{付帯条件 } (\delta \sigma_{ij})_{,j} &= 0 \quad V \text{ 内} \\ \delta T_i &= 0 \quad S_\sigma \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

ここで、 $\varepsilon_{ij}$  はひずみ成分、 $\sigma_{ij}$  は応力成分、 $u_i$  は変位成分、 $T_i (= \nu_j \sigma_{ij})$  は周辺力成分、 $\nu_j$  は方向余弦の成分を示し、 $V$  は体積、 $\partial V$  は  $V$  の外周、 $S_\sigma$  は力学境界、 $S_u$  は幾何学境界を示す。また、 $\delta(\cdot)$  は微小な仮想量、 $(\cdot)_{,j}$  は座標  $X_j$  に関する偏微分を示す。式 (2.1) から出発して増分形 Hybrid 型要素の基礎式をうるため、 $V$  をいくつかの領域に分割し、境界  $\partial V_n$  で囲まれるある一つの領域  $V_n$  を要素と定義する。この  $V_n$  について増分コンプリメンタリ仮想仕事の式は、要素間境界  $C_n$  上での増分変位の分を加えると得られ、次式となる。

$$\left. \begin{aligned} & \int_{V_N} \dot{\epsilon}_{ij} \delta \sigma_{ij} dV - \int_{C_N} \dot{u}_i \delta T_i dC - \int_{C_{Nu}} \dot{\bar{u}}_i \delta T_i dC = 0 \\ \text{付帯条件} & \quad (\delta \sigma_{ij})_{,j} = 0 \quad V_N \text{内} \\ & \quad \delta T_i = 0 \quad C_{No} \text{上} \end{aligned} \right\} (2.2)$$

ここで、 $V_N$ は才 $N$ 要素の体積、 $\partial V_N$ は $V_N$ の外周、 $C_N$ は要素間境界、 $C_{No}$ は $\partial V_N$ の力学境界部分、 $C_{Nu}$ は幾何学境界部分を示し、また、 $(\dot{\quad})$ は微小増分量、 $(\bar{\quad})$ は規定量を示す。付帯条件の才2式を積分式へ入れて、 $C_{Nu}$ に関する項を積分式から付帯条件として取り出せば、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} & \int_{V_N} \dot{\epsilon}_{ij} \delta \sigma_{ij} dV - \int_{\partial V_N} \dot{u}_i \delta T_i dC = 0 \\ \text{付帯条件} & \quad (\delta \sigma_{ij})_{,j} = 0 \quad V_N \text{内} \\ & \quad \dot{u}_i = \dot{\bar{u}}_i \quad C_{Nu} \text{上} \end{aligned} \right\} (2.3)$$

これが基礎式である。この式をもとに塑性変形の効果を考慮する方法は2種類ある。

### <その1> 平衡形

式(2.3)の増分ひずみは弾性変形分と塑性変形分との和。

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^E + \dot{\epsilon}_{ij}^P$$

と表されるから  $\dot{\epsilon}_{ij}$  の代りにこれを使うと、

$$\int_{V_0} (\dot{\epsilon}_{ij}^E + \dot{\epsilon}_{ij}^P) \delta \sigma_{ij} dV - \int_{\partial V_0} \dot{u}_i \delta T_i dC = 0$$

が得られ、さらに弾性ひずみ増分は増分応力で表せるから、

$$\dot{\epsilon}_{ij}^E = H_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl}$$

を用いれば、次式となる。

$$\left. \begin{aligned} & \int_{V_0} H_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} \delta \sigma_{ij} dV - \int_{\partial V_0} \dot{u}_i \delta T_i dC + \int_{V_0} \dot{\epsilon}_{ij}^P \delta \sigma_{ij} dV = 0 \\ \text{付帯条件 } & (\delta \sigma_{ij})_{,j} = 0 \quad V_0 \text{ 内} \\ & \dot{u}_i = \dot{\bar{u}}_i \quad C_{0u} \text{ 上} \end{aligned} \right\} (2.4)$$

ここで、 $H_{ijkl}$  は弾性コンプライアンスを示す、また、 $(\cdot)^E$  は弾性に関する量、 $(\cdot)^P$  は塑性に関する量を示す。上式で増分応力  $\dot{\sigma}_{kl}$  に平衡条件を満たすものを選ぶ。仮想応力  $\delta \sigma_{ij}$  は平衡条件を満たすならば任意であるから、 $\dot{\sigma}_{kl}$  と同じ関数を使うことは差し支えない。塑性変形による補正分は、適当な構成式を用いて塑性ひずみ増分  $\dot{\epsilon}_{ij}^P$  が求めれば、下線部分で評価される。

これが平衡形要素の基礎式である。

この手法を板や殻の問題に適用する場合についてみると、弾性状態では、たとえば板厚方向の応力は線形分布するので2個のパラメータで十分であるが、塑性の影響で不連続もしくは高次の分布形となるときは、もはや2個のパラメータでは再現できなくなるし、適当な  $\dot{\sigma}_{kl}$  を見つけるのは一般に困難といえる。

### 〈その2〉 擬平衡形

増分ひずみを増分応力量で表すにあたって、前手法の真の増分応力で表す代りに、仮の増分応力を使う手法を考える。いま仮りに応力状態が弾性的であると考えたら、仮の増分応力  $\dot{\sigma}_{ij}$  で増分ひずみ  $\dot{\epsilon}_{ij}$  を一義的に表すことは可能であり、しかも平衡条件を満たすように与えることも、有限要素法的近似の範囲で出来るから、次式を考えうる。

$$\dot{\epsilon}_{ij} = H_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl}$$

$$\dot{\sigma}_{ij,j} = 0$$

このとき、式(2.3)は

$$\int_{V_N} H_{ijkl} \dot{\sigma}'_{kl} \delta \sigma_{ij} dV - \int_{\partial V_N} \dot{u}_i \delta T_i dC = 0$$

と書ける。ここで、仮想応力については、平衡条件が課せられている以外は任意であるから、仮の増分応力  $\dot{\sigma}'_{ij}$  と同一の関数を使うことは差し支えない。ところが、上式では真の増分応力が塑性変形したのちも平衡していることは保証していない。

そこで、真の増分応力  $\dot{\sigma}_{ij}$  が平衡条件を満たすようにラグランジュ乗数を用いて補償すれば、次式となる。

$$\int_{V_N} H_{ijkl} \dot{\sigma}'_{kl} \delta \sigma_{ij} dV - \int_{\partial V_N} \dot{u}_i \delta T_i dC + \int_{V_N} \dot{\sigma}_{ij,j} \delta u_i dV = 0 \quad (2.5)$$

ここで、仮の増分応力と真の増分応力の差

$$\dot{\sigma}_{ij}^F \equiv \dot{\sigma}'_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}$$

を定義し、次の積分公式

$$\int_V \sigma_{ij,j} u_i dV = \int_{\partial V} \sigma_{ij} \nu_j u_i dS - \int_V \sigma_{ij} \frac{1}{2} (u_{ij} + u_{ji}) dV$$

を使って式(2.5)の下線部を整理すれば、次式となる。



$$\begin{aligned}
 & \int_{V_N} H_{ijkl} \dot{\sigma}'_{kl} \delta \sigma'_{ij} dV - \int_{\partial V_N} \dot{u}_i \delta T'_i dC \\
 & + \left\{ \int_{V_N} \dot{\sigma}_{ij}^F \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) dV - \int_{\partial V_N} \dot{T}'_i \delta u_i dC \right\} = 0 \\
 & \text{付帯条件} \quad (\delta \sigma'_{ij})_{,j} = 0, \quad \dot{\sigma}'_{ij,j} = 0 \quad V_N \text{ 内} \\
 & \quad \delta T'_i = \nu_j \delta \sigma'_{ij} \quad \partial V_N \text{ 上} \\
 & \quad \dot{u}_i = \dot{\bar{u}}_i \quad C_{nu} \text{ 上}
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

ここで  $\dot{T}'_i = \nu_j \dot{\sigma}_{ij}^F$  としてある。これが擬平衡形要素の基礎式である。要素境界上  $\partial V_N$  の積分を等価な部材力  $S_j$  と部材変形  $\Delta_j$  で置き換え。

$$\int_{\partial V_N} \dot{u}_i \delta T'_i dC \equiv \dot{\Delta}_j \delta S_j$$

と表せば、塑性変形を考慮するための変形コンプライメンタリ仮想仕事の式が得られる。

$$\begin{aligned}
 & \int_{V_N} H_{ijkl} \dot{\sigma}'_{kl} \delta \sigma'_{ij} dV - \dot{\Delta}_i \delta S_i \\
 & + \left[ \int_{V_N} \dot{\sigma}_{ij}^F \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) dV - \dot{S}'_i \delta \Delta_i \right] = 0 \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

ここに、 $\dot{S}'_i \equiv \dot{S}'_i - \dot{S}_i$  とした。

式(2.7)から有限要素公式を得るためには、まず仮の増分応力

$\dot{\sigma}'_{ij}$  が平衡条件を満たすように、 $\dot{S}'_k$  を未定常数にもつ分布関数で与える。仮想ひずみでは  $\delta\Delta_k$  を未定常数にもつ分布関数で表す。

$$\dot{\sigma}'_{ij} = B_{ijk} \dot{S}'_k \quad (2.8)$$

$$\delta\sigma'_{ij} = B_{ijk} \delta S'_k \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{2}(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) = D_{ijk} \delta\Delta_k \quad (2.10)$$

上式を式(2.7)へ代入し、 $\dot{S}'_k$  と  $\dot{S}^F_k$  について解くと、次の関係を得る。

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{S}'_k = F_{ki}^{-1} \dot{A}_i \\ \dot{S}^F_k = \int_{VW} \dot{\sigma}^F_{ij} D_{ijk} dV \end{array} \right. \quad (2.11)$$

ここで、 $F_{ij}$  は撓み性 (flexibility) 行列の成分

$$F_{ij} = \int_{VW} H_{klmn} B_{kli} B_{mnj} dV$$

を示し、 $F_{ki}^{-1}$  は

$$\delta_{kj} \equiv F_{ki}^{-1} F_{ij} \quad \delta_{kj}: \text{クロネッカーデルタ}$$

となるように定義した。

次に、各要素  $V_n$  に関する撓み性行列を集成して全体系  $V$  での剛性方程式 (stiffness equation) を得るため、いま、ある外力の作用下で要素が平衡状態にあるとし、節点外力  $R_i$  と要素内の部材力を用いれば、仮想仕事の式は次のようになる。

$$R_i \delta r_i - \sum_N S_j \delta \Delta_j = 0 \quad (2.13)$$

ここで、 $R_i$  は節点力、 $r_i$  は節点変位を示す。さらに諸量が少し増加した後の別の平衡状態について、仮想仕事の式は次のように表される。

$$(R_i + \dot{R}_i) \delta r_i - \sum_N (S_j + \dot{S}_j) \delta \Delta_j^* = 0 \quad (2.14)$$

この式で、 $\delta \Delta_j^*$  は微小増分の後の状態で仮想変位  $\delta r_i$  によって生ずる仮想変形を表している。要素変形量は節点変位  $r_i$  の関数として表せるので、 $\delta r_i$  に関する仮想量は次のようになる。

$$\delta \Delta_j = a_{ji} \delta r_i \quad \text{ここに、} \quad a_{ji} = \partial \Delta_j / \partial r_i \quad (2.15)$$

また、 $\dot{r}_i$  に関する増分量は次式で表しうる。

$$\dot{\Delta}_j = a_{ji} \dot{r}_i \quad (2.16)$$

このとき、 $\Delta_j^*$  について仮想量は次のようになる。

$$\begin{aligned}\delta\Delta_j^* &= \delta\{A_j + (\partial A_j / \partial r_k) \dot{r}_k\} \\ &= (a_{ji} + C_{jki} \dot{r}_k) \delta r_i \quad \text{ここに, } C_{jki} = \partial^2 A_j / \partial r_i \partial r_k. \quad (2.17)\end{aligned}$$

式(2.17) を式(2.14) に代入し、高次の微小項を省略すれば

$$\{\dot{R}_i - \sum_N (a_{ji} \dot{S}_j + C_{jki} S_j \dot{r}_k) + (R_i - \sum_N a_{ji} S_j)\} \delta r_i = 0 \quad (2.18)$$

を得る。上式において、 $\dot{R}_i$  項がいわゆる剛性と初期応力の項であり、 $\sum_N a_{ji} S_j$  項が残差荷重の項である。ここで、 $\dot{S}_j = \dot{S}_j' - \dot{S}_j^F$  の関係と式(2.11), (2.12), (2.17) を使うと次式が得られる。

$$K_{ik} \dot{r}_k = \dot{R}_i + P_i^P + P_i^R \quad (2.19)$$

これが求める増分形剛性方程式である。

ここで、
$$K_{ik} = K_{ik}^E + K_{ik}^G$$

$$K_{ik}^E = \sum_N F_{jl}^{-1} a_{ji} a_{lk} \quad : \text{剛性}$$

$$K_{ik}^G = \sum_N C_{jki} S_j \quad : \text{幾何学剛性}$$

$$P_i^P = \sum_N a_{ji} \dot{S}_j^F \quad : \text{等価塑性荷重}$$

$$P_i^R = R_i - \sum_N a_{ji} S_j \quad : \text{残差荷重}$$

軸対称殻要素の撓み性行列、剛性行列、等価塑性荷重などの具体的な誘導は付録に述べてある。計算手順は次のように要約できる。一つの増分段階をステップと呼ぶなら、まず、あるステップで、 $P_i$ に零もしくは前ステップの最終値を仮定する。

式(2.19)から $\dot{\epsilon}_k$ を求める。このとき、左辺の係数行列は未知量を含んでいないから、あるステップの間は一定値となり、これを一度三角化ないしはLU分解すれば、その結果を反復計算用に保存しておくだけでよい。次に、各々の要素につき、式(2.16), (2.11)を用いて $\dot{S}_j$ を求め、さらに各要素内であらかじめ選んでおいた観測点ごとに、式(2.8)から $\dot{\sigma}_{ij}$ を計算し、降伏判定を行う。全部の点で弾性状態にあるときは、それぞれの点で $\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}'_{ij}$ と置いて、次のステップに進む。一方、一点でも降伏していて塑性変形が進行しているときは、そこでは、材料の構成方程式により $\dot{\sigma}_{ij}$ を用いて真の増分応力と塑性ひずみ増分 $\dot{\epsilon}_{ij}^P$ を求める。続いて、この $\dot{\epsilon}_{ij}^P$ に相当する $\dot{\sigma}_{ij}^F$ を求め

、さらに要素単位で  $S_j^F$  を求め、この  $S_j^F$  を全部集成すれば全体系での  $P_i^P$  が求まる。ところが、一般に、こうして得られた  $P_i^P$  はステップの初めに仮定した量とは一致しない。このとき、反復計算の収束性を改善し、さらには解の発散を防ぐ意味から、ある重みを付けた新旧の  $P_i^P$  の平均値を  $\alpha$  2 近似値として用い、上述の手順を繰り返す。最終的に  $P_i^P$  が十分に収束すれば、次のステップに進む。この操作を所望の荷重レベル、あるいは変形量に達するまで続ければよい。

## § 2.3 軸圧縮を受け座屈する円筒殻についての計算例

本節では、前節で述べた理論を使用した実際例の計算結果について説明する。計算に用いた円筒殻の寸法と材質を図2に示す。両端の支持条件として単純支持 ( $U=0$ ) と固定支持 ( $U=\theta=0$ ) の2種類を考えた。材質は2024-T4のアルミ合金であり、これに対する引張ひずみと応力の関係には、Ramberg-Osgood<sup>(31)</sup>の実験式を引用した(図3)。

### 円筒殻の寸法

軸 長  $L = 80 \text{ mm}$

半 径  $R = 20 \text{ mm}$

厚 み  $T = 1 \text{ mm}$

材 質 2024-T4 アルミ合金

ヤング率  $E = 7.17 \times 10^3 \text{ Kgf/mm}^2 \text{ (70.3 GPa)}$

ポアソン比  $\nu = 0.25$

密 度  $\rho = 2.82 \times 10^{-10} \text{ Kgf sec}^2/\text{mm}^4 \text{ (2.77} \times 10^3 \text{ Kg/m}^3)$

## Ramberg-Osgood の実験式

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)^m$$

$$\lambda = 6.12 \times 10 \text{ kgf/mm}^2 \text{ (0.60 GPa)}$$

$$m = 10$$

用いたアルミ合金は加工硬化とバウシニング効果を呈する。

数値計算のための適当な構成式モデルを選ぶにあたって、この

二つの性質を再現するため、応力とひずみの履歴が考慮できる

増分塑性理論が適している。そこで、その比較的簡単なもの

の例として、Prager-Ziegler<sup>(32)</sup>の移動硬化モデル(P-Zモデル)と

、より精密なMróz<sup>(33)(34)</sup>の多重移動硬化モデル(Mrózモデル)の2

種類を選んだ。ただし、従来の微小増分理論は、原理的には

無限小の増分量を前提としている。これに対して、数値計算

ではある程度有限な増分量を扱わなければならない。そのた

めに生ずる矛盾点、たとえば、応力が弾性状態にあり、有限な

増分応力あるいは増分ひずみが与えられて降伏し、さらに塑性



変形を起すといった弾塑性の遷移領域では、ある特別な工夫が必要となるので、実用的とはいえない。そこで、この微小増分理論に修正を加え、全ひずみ理論の長所を取り入れるよう拡張した、西村らの有限増分塑性理論<sup>(37)</sup>を採用した。このときの降伏応力と硬化係数は次のように与えられる。

(i) P-Z モデル

$$\sigma_Y = 35 \text{ kgf/mm}^2 (0.343 \text{ GPa}) \text{ 降伏応力}$$

$$C_p/E = 0.05 \text{ 硬化係数}$$

(ii) Mrözg モデル

$$\sigma_{Yi} = 20, 25, 30, 35 \text{ kgf/mm}^2 (0.196, 0.245, 0.294, 0.343 \text{ GPa})$$

初期降伏応力と後続の負荷応力曲線の大きさ

$$C_{pi}/E = 5.0, 1.0, 0.3, 0.05 \text{ 硬化係数}$$

実際の計算をするための有限要素モデルでは、円筒殻の左右の対称性から左半分の40mm長を対象とし、降伏判定は各要素をその厚さ方向に10層に分割して、各々の層の中央点で評価し、

そのときの塑性ひずみは各層内で一様分布するとした。計算に用いる量については、荷重端の $z$ 軸方向変位 $W$ は厚み $T$ で、荷重 $P$ は円筒殻の弾性古典座屈値 $P_{cr} = 2\pi ET^2 / \sqrt{3(1-\nu^2)}$ で無次元化した。式(2.19)を解くとき、荷重増分の代わりに荷重端の $z$ 軸方向に増分変位を与える、いわゆる一点変位規定法<sup>(41)(42)(43)</sup>を使用した。

#### (1) 単純支持の場合

適当な要素数を選ぶため、 $P$ - $Z$ モデルを用い、 $\Delta W/T = 0.01$ とし、要素数が20, 40, 80の場合について計算した。その結果を図4に示す。全変位が殻の厚みの2倍に相当する点 $W/T = 1.0$ での80要素と40要素の荷重 $P$ の差は1.8%であり、以後この差は変わらない。塑性域の分布や変形状態についても、40要素と80要素を用いて得られた結果の間にはほとんど差はなかった。さらに40要素に分割したときの要素長は殻の厚さ程度になっている。殻要素では厚さ方向に線形の応力分布を仮定している

から、その厚さより小さく分割しても、近似度のバランスから考えて、それほど精度の向上は望めない。他方、 $W/T=1.0$ までの変形に対して100ステップの計算を要しているから、さらに円筒殻が潰れるまで調べるため、もとの軸長の20~30%に及ぶ変形量を考えるには、さらに1000~2000ステップの計算が必要になる。そのためには、この例題では対称バンド行列を係数に持つ連立方程式になるが、それでも80要素を用いるときは40要素に対して4~8倍の計算が必要になる。以上のような理由から40要素を選んだ。

$W/T=5.0$ まで求めたときの荷重  $P/P_{cr}$  と変位  $W/T$  の関係を図5に示す。ここでは増分の大きさ  $\Delta W/T=0.01$  を用いており、実線はP-Zモデル、破線はMrozモデルの結果を示す。図6は、このときの円筒の母線の変形が進行する様子を表している。この図については、いずれの構成式を用いても差が認められない。塑性効果を考えない場合の結果を、参考のため、

図7に示す。このときの荷重 $P$ は $P_R$ に漸近的に近づくだけで、ピーク値はもたない。図8はMrozモデルを使ったときの塑性域の進展状況を表す。ここにPlastic Zone 1~4は、それぞれ図3の才1~4傾斜部分に相当する硬化係数をもって塑性変形している状態を表す。左端から数えて才1, 5, 10, 22番要素内の厚さ方向にわたる応力分布を図9に示す。実線は母線方向応力成分( $\sigma_s$ )、破線は周方向応力成分( $\sigma_\theta$ )を表し、一目盛は50  $\text{kgf/mm}^2$  (0.495 GPa) によってある。以上の結果を総合すると、円筒殻の変形プロセスは次の3段階からなることが分る。才一段階では、一様な軸圧縮応力と曲げ応力のため荷重端近傍の才5番要素あたりの内側表面に主として $\sigma_s$ のために塑性変形が始まる。才二段階では、その塑性域が一度は殻内の全領域に広がるが、特に最初に発生した塑性域での変形だけが急速に進み、残された部分では逆に除荷が生じて、再び弾性を取り戻す。この段階では、バルジの形成が始まる。才三段階では、

前の段階で出来たバルジの変形部分だけが外側に張り出してきて、一層はっきりとした形に成長する。それ以後では、塑性変形への $\sigma_p$ の寄与が支配的となる。さらに押し続けければ、荷重端が $Z$ 軸に平行に内側にめり込むように変形が進行するので、いわゆる連続塑性座屈のちょうちん状の変形は得られない。

この例での最大荷重  $P_{max}$  は  $P$ - $Z$  モデルで  $0.1683 P_{cr}$ 、 $M_{r\ddot{o}zy}$  モデルでは  $0.1649 P_{cr}$  であり、 $P$ - $Z$  モデルが  $2.06\%$  高い値を示すが、その後はほとんど同一の曲線となっている(図5)。

## (2) 固定支持の場合

図10, 11, 12, 13 は、両端を固定支持とし、要素数を40、増分変位を  $\Delta W/T = 0.01$  としたときの結果を示す。図10は  $P$  と  $W$  の関係を示し、このときの  $P_{max}$  は  $P$ - $Z$  モデルで  $0.1850 P_{cr}$ 、 $M_{r\ddot{o}zy}$  モデルでは  $0.1819 P_{cr}$  であって、その間の差は僅か  $1.70\%$  である。

図11, 12は円筒の母線の変形の進行状況を示す。図11からわかるように、最初のバルジは固定端近傍で、しかももとの母線よ

りもかなり外側に張り出すように形成され、そのすぐ横に僅かに内側に縮み込むように谷が出来る。この様子は図12に示した塑性を考慮しない場合の、中央で外向きの最大変位が生ずるのと較べて、まったく異なることが分る。塑性域は固定端の外側表面に続いて才10番要素あたりの内側から始まる。大体このあたりがバルジ変形の頂上になる。この変形様式は連続塑性座屈の才2番目のバルジ変形の様式に対応しているものと推察される。

## § 2.4 結 論

本章の結論として、次の3点があげられる。

(1) 一般に、応力仮定の Hybrid 法では困難であった板や殻の大変形問題が、次の2点の理由から容易に扱えることを示すことができた。 ㉵一に、仮の増分応力量を未知量にしたことで要素内のひずみ分布を別に仮定する必要があるが、その代り、応力に関する付帯条件の扱いがはるかに容易になる。 ㉵二に、要素に関する量を全体系に結びつける際に変形量と部材力量を導入したことで、幾何学非線形項と修正荷重項の計算を簡単化できる。

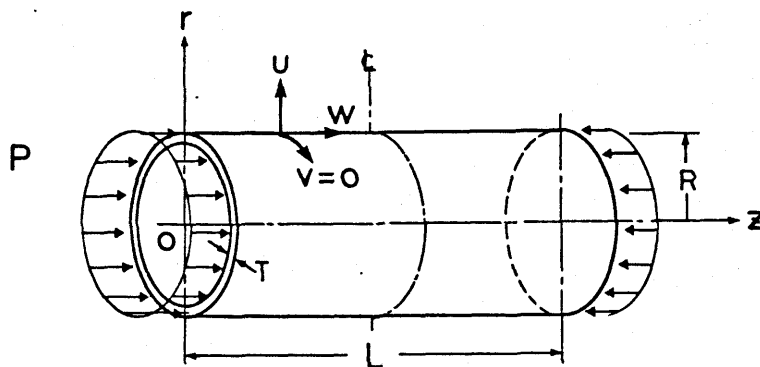
(2) 円筒殻が軸圧縮力を受けて塑性座屈するとき、弾性座屈臨界値の15~18%という極めて低い値で起きることを読みとることができた。 さらに、円筒殻の内部に生ずる応力の分布、塑性域の変遷を詳細に解明することができた。 ただし、初期座屈以後に生ずる荷重端での摩擦接触のための滑りと、バルジが潰

れていく過程での接触条件の変化と位置の移動を考慮した定式化をしないと、いわゆる“ちょうちん”状の連続塑性座屈の現象は解明できないことが分った。

(3) 構成式に *Mróz* モデルを採用すれば精度のよい結果が得られるし、塑性域の変化の詳細な様子が分るが、それに要する計算機の記憶容量と時間を考え、さらに大変形の領域にまでこの解析をすすめることを考慮するならば *P-Z* モデルの方に実用的価値が認められる。ただし、初期座屈の臨界値や応力分布、塑性域の様子を詳しく知るためには、やはり *Mróz* モデルを推奨すべきである。



CIRCULAR CYLINDER



DIMENSION : L=80 mm R=20 mm T=1mm

MATERIAL : 2024-T4 Al-Alloy

図2. 円筒殻の寸法と材質

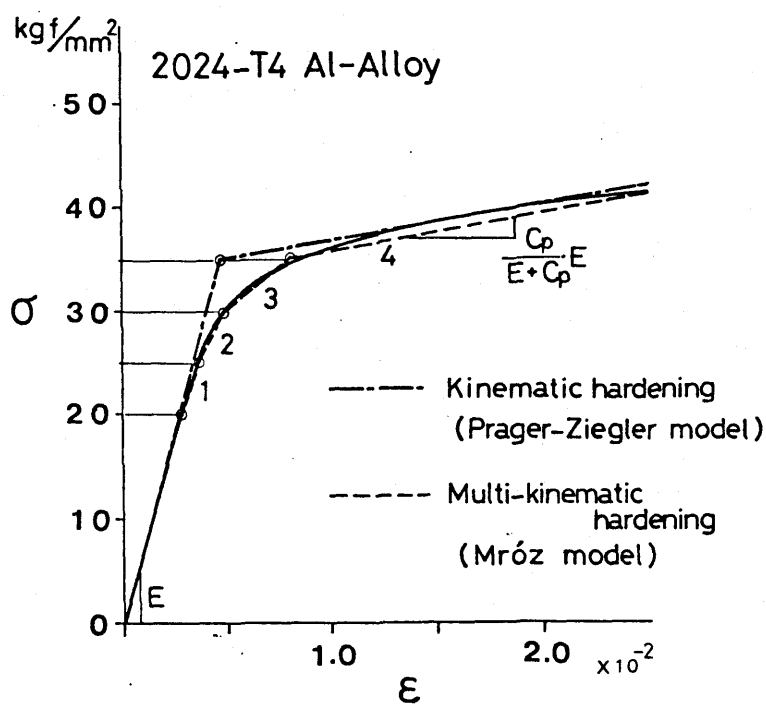


図3. 2024-T4 アルミ合金の応力ひずみ関係 (Ramberg-Osgood<sup>(32)</sup>の式より)

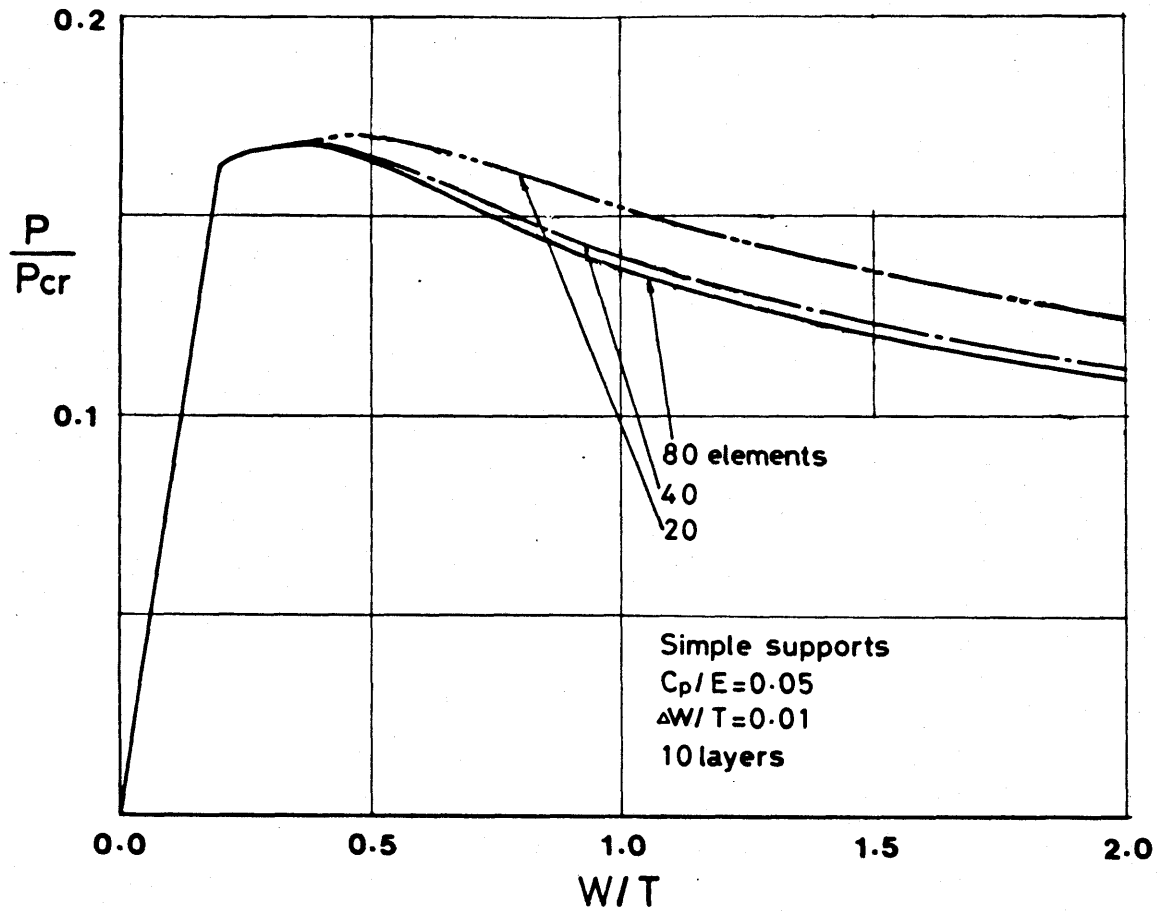


図4. 軸圧縮を受ける円筒殻の変位と荷重  
要素数による収束状況

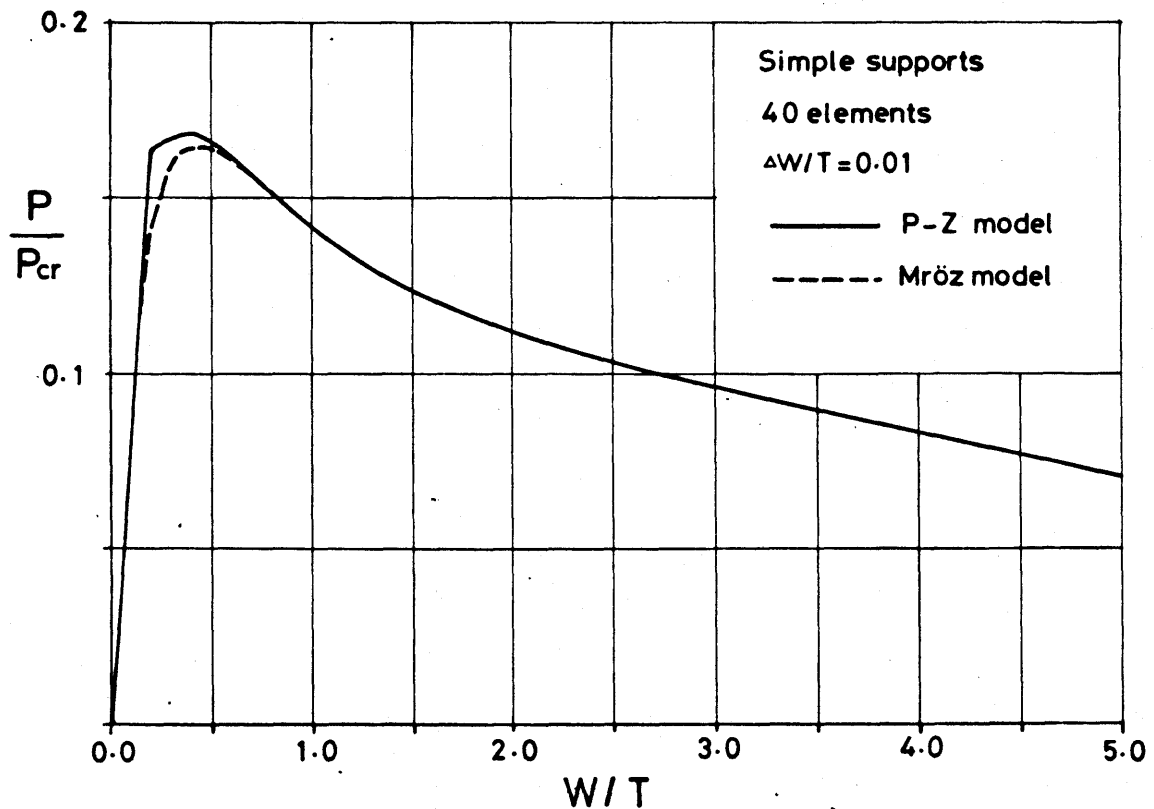


図5. 両端単純支持円筒殻の荷重と変位

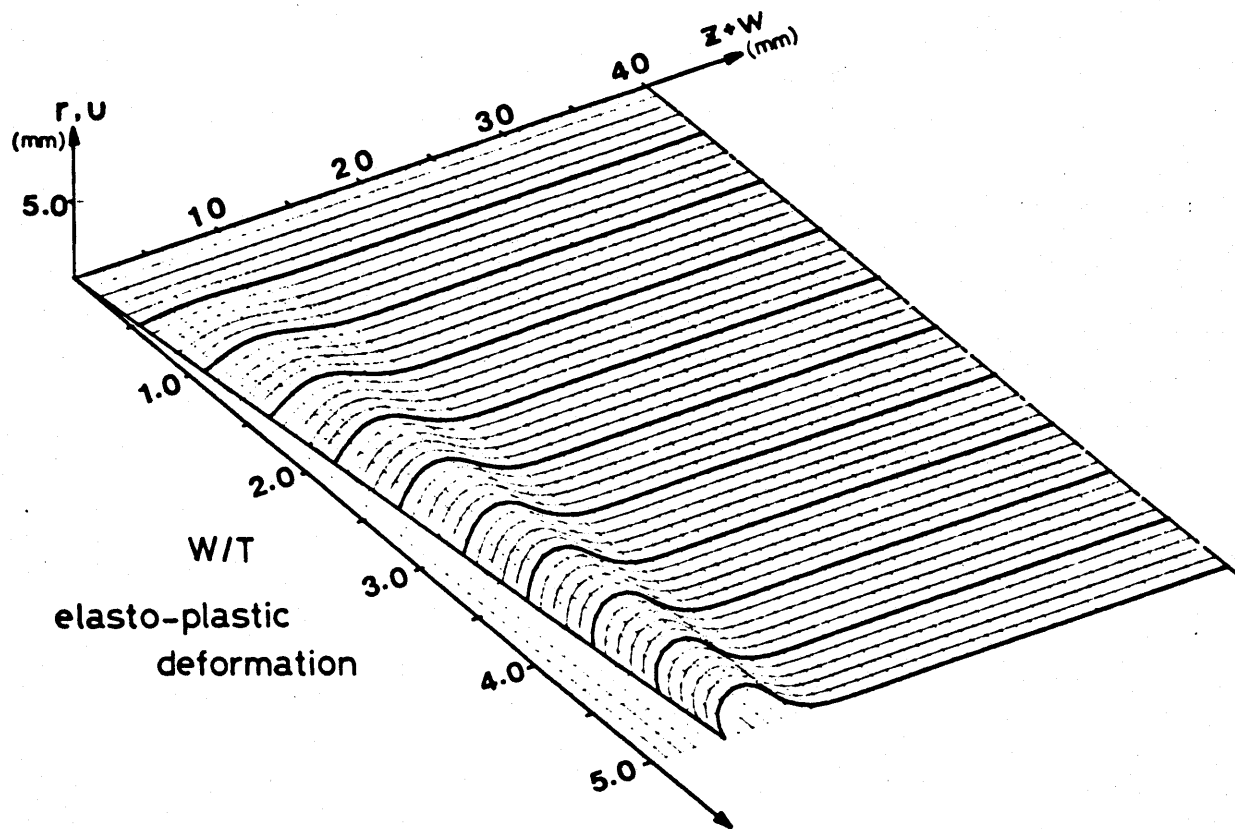


図6. 円筒殻母線の変形 (弾塑性解)

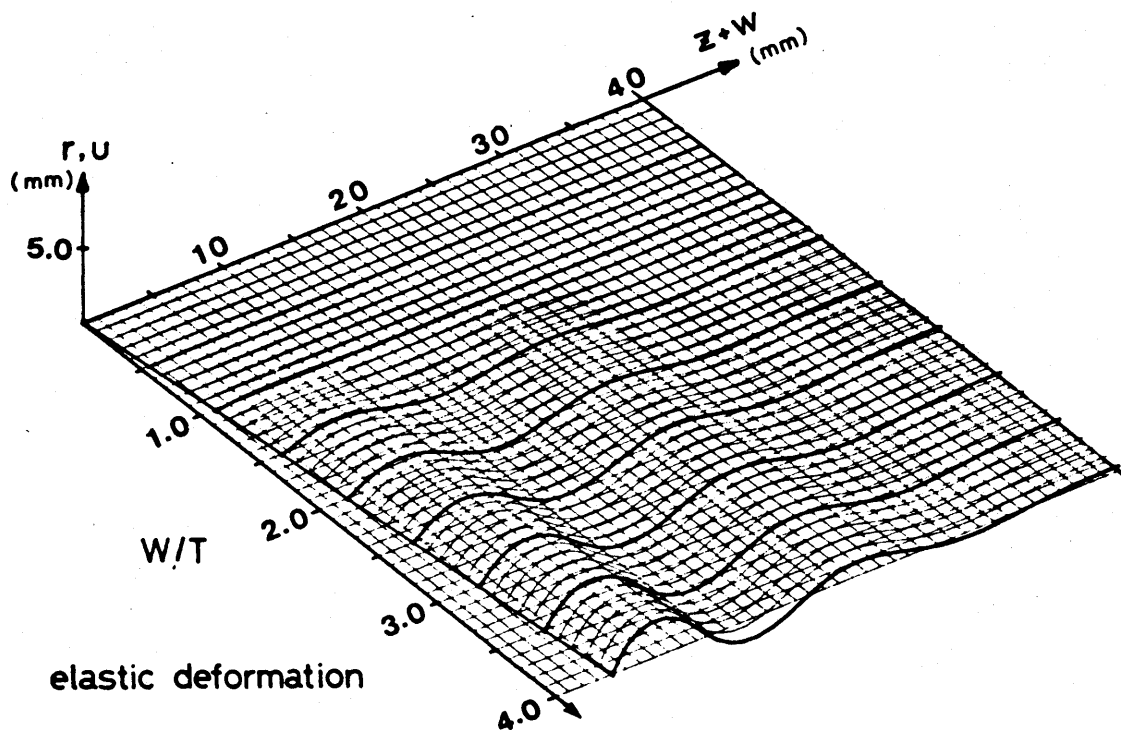


図7. 円筒殻母線の変形 (弾性解)

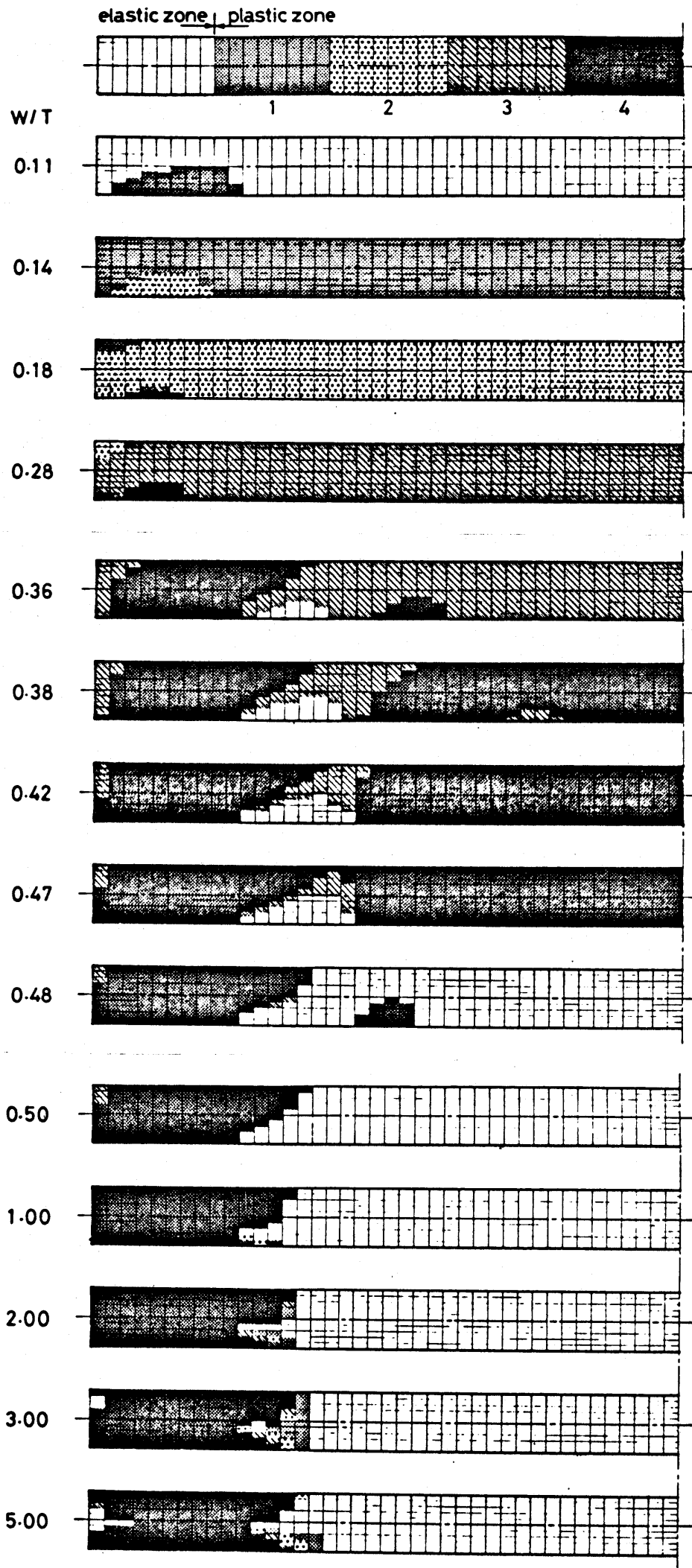


図8. 塑性域の分布 (Mroz model)

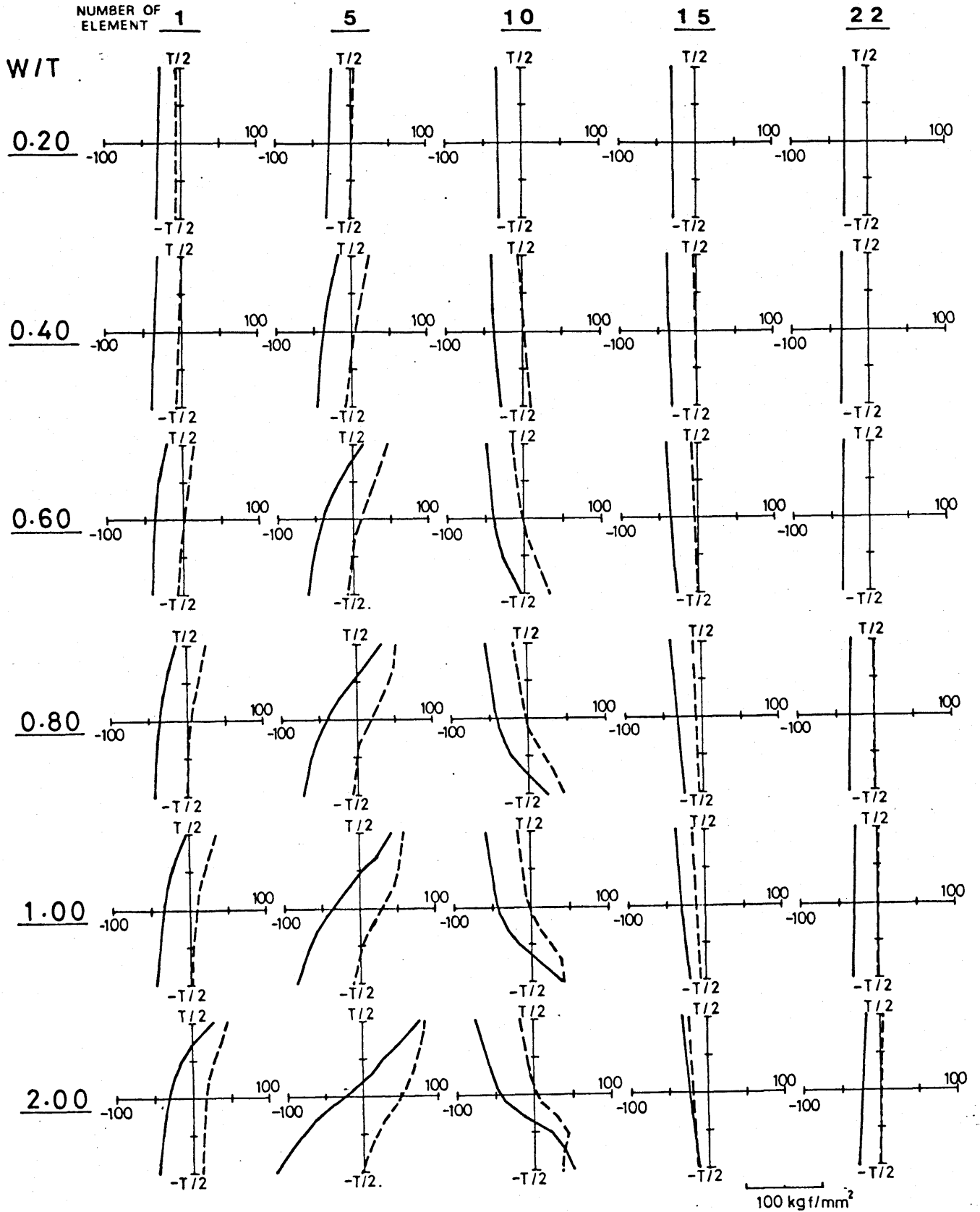


図9. 応力分布、実線は母線方向成分( $\sigma_s$ )、破線は周方向成分( $\sigma_\phi$ )、(Mroz model)

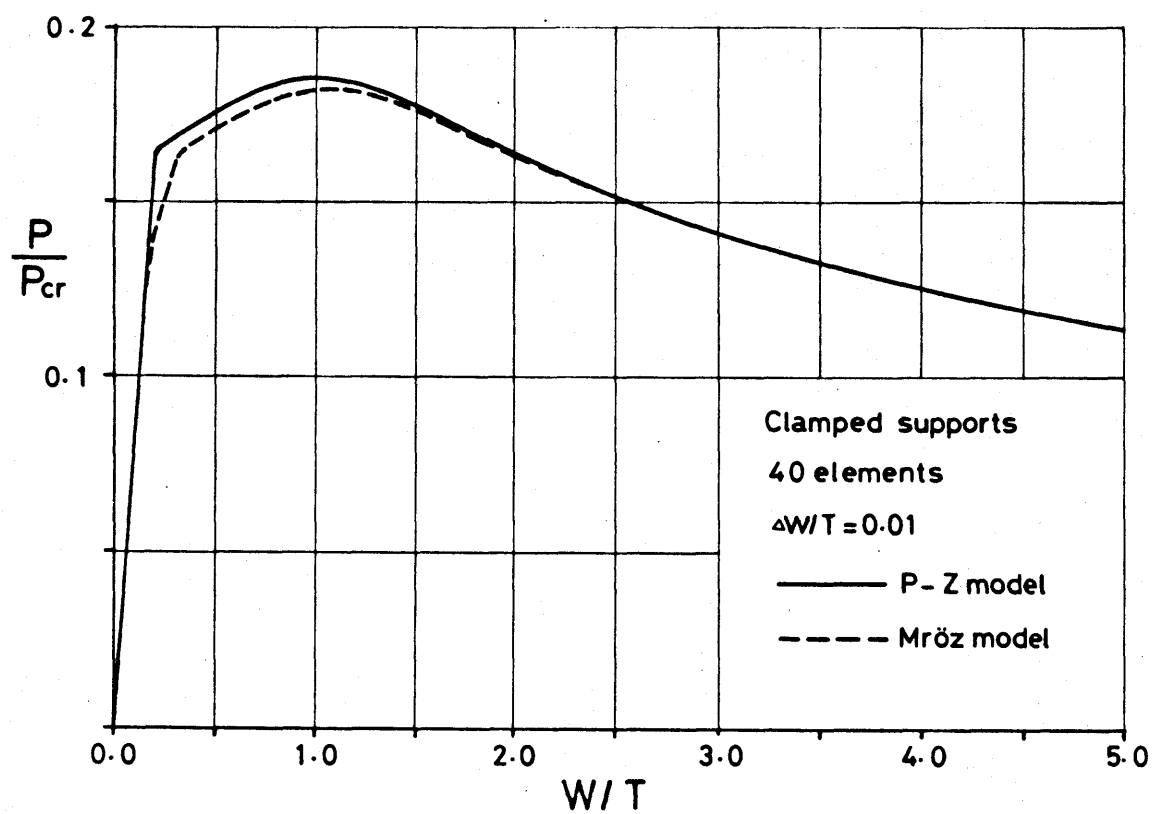


図10. 固定支持円筒殻の荷重と変位

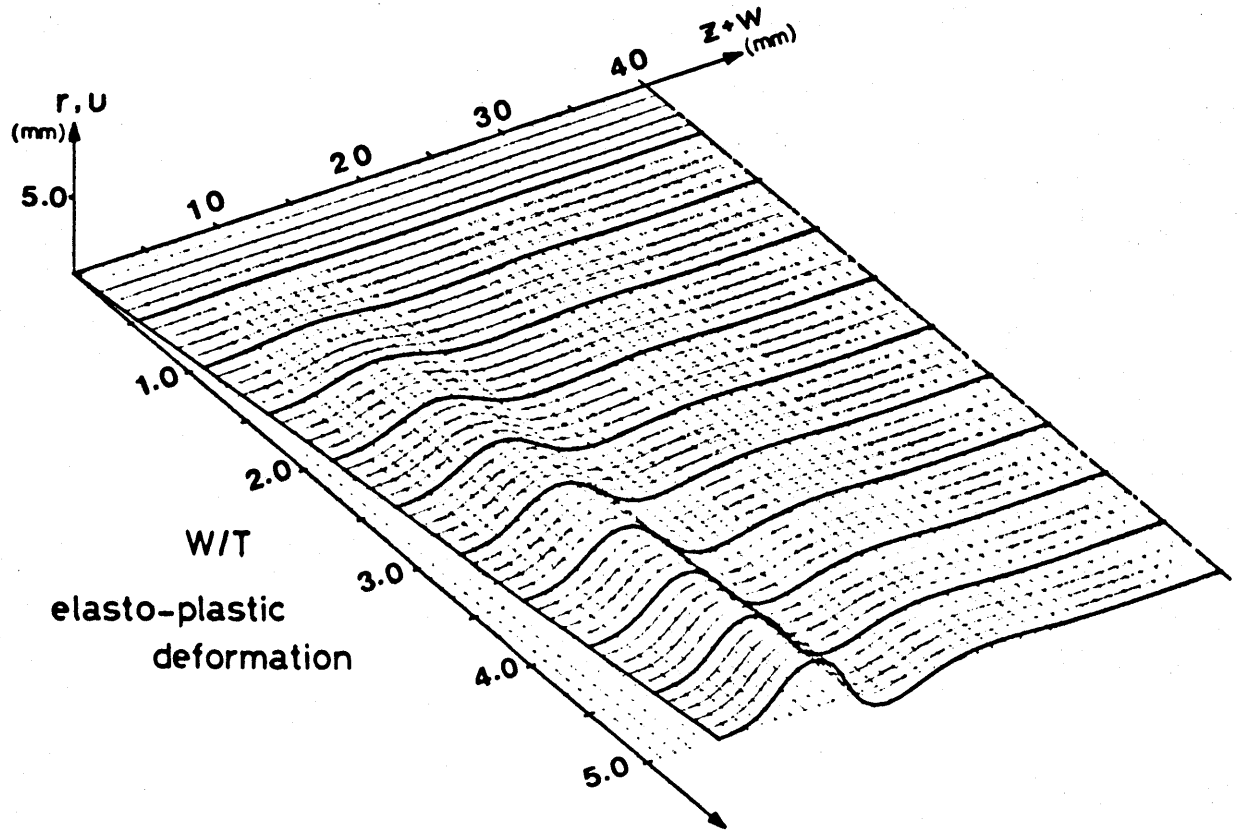


図11. 円筒殻母線の変形 (弾塑性解)

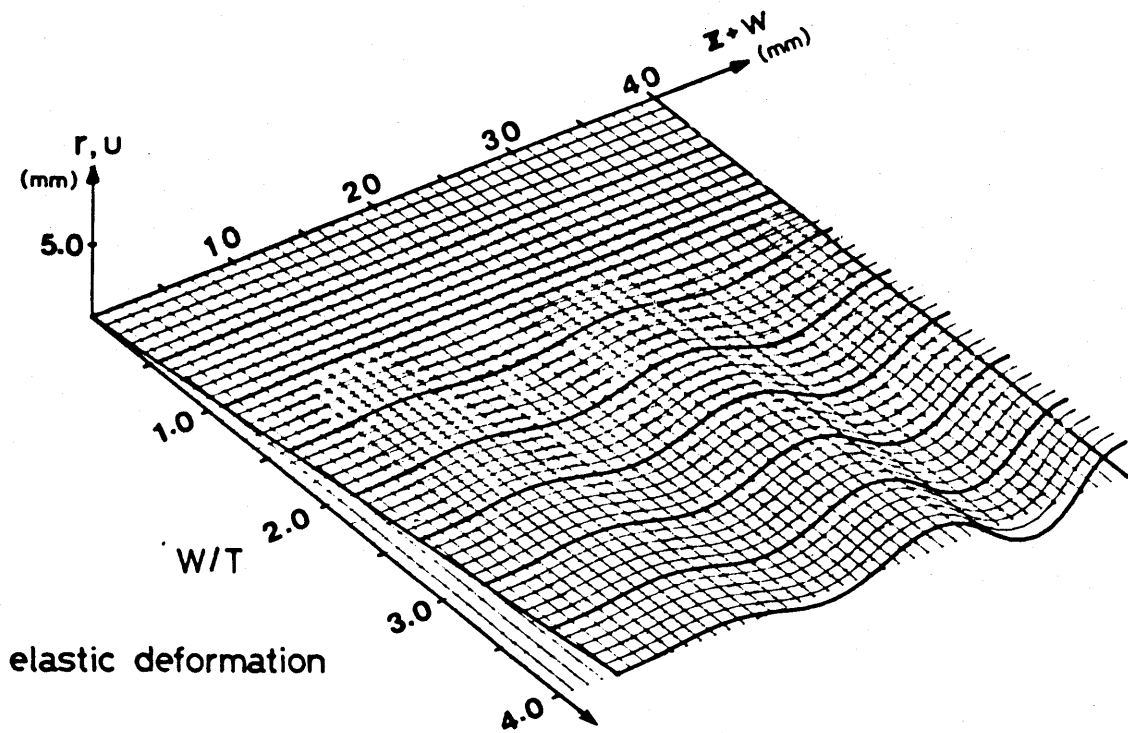


図12. 円筒殻母線の変形 (弾性解)

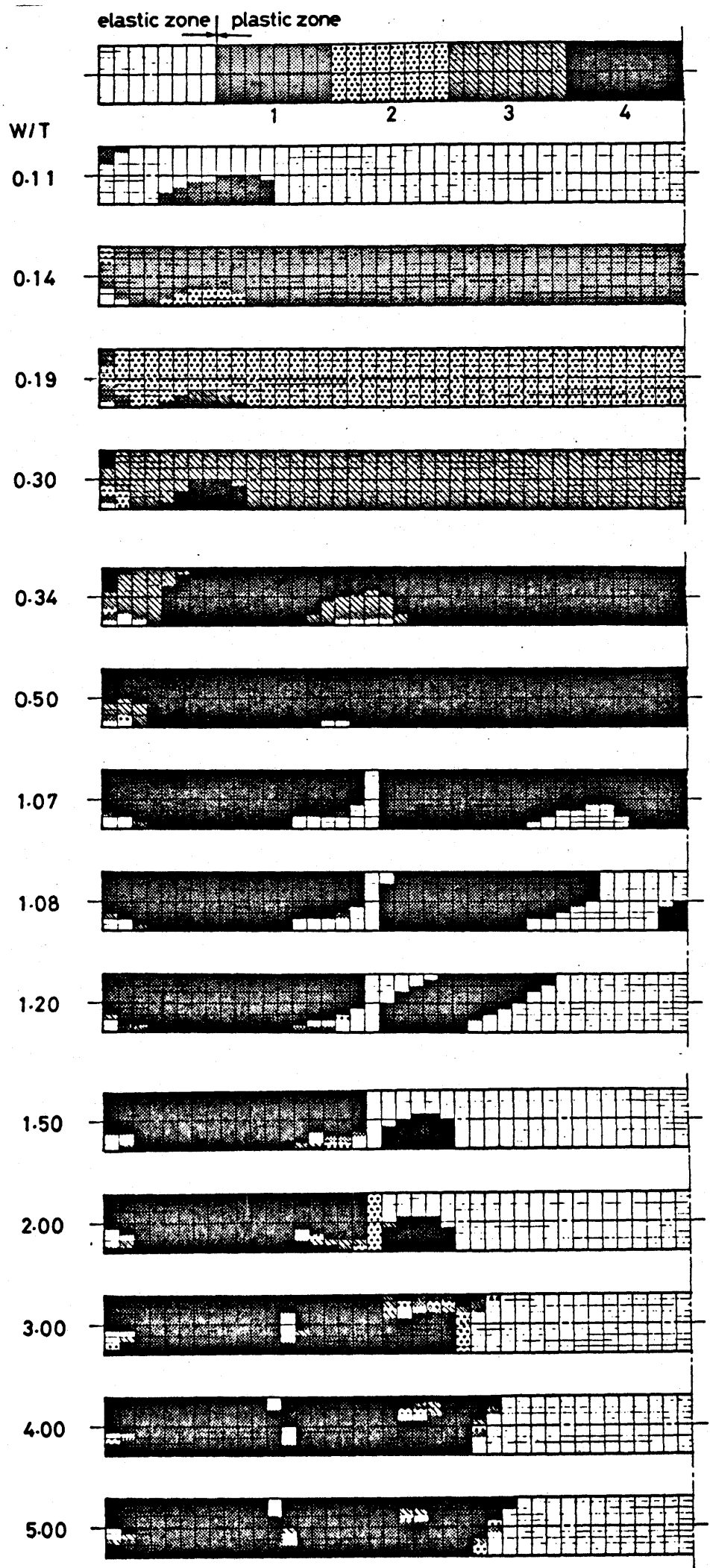


図13. 塑性域の分布 (Mroz model)



## 第 3 章 変化する接触条件が座屈後の変形に 与える影響について

### § 3.1 接触条件の扱い方とその問題点

構造解析や機械要素の応力解析などでは、互いに接触している 2 個あるいはそれ以上の物体がその接触面を通して及ぼしあっている力が系に作用する外力となる場合が少くない。このとき、変形が進むとともに、接触面の状況やその位置も変わってくる。この変化がその後の変形や応力分布へ及ぼす影響も無視できないほどになることは当然である。前章で述べた円筒殻の場合も、正にこの影響を考えなければ、連続塑性座屈の変形機構は解明できない。そればかりでなく、逐次変化する境界をもつ系に関する変形の定式化を示すことの意義は、きわめて大きい。

これまでの有限要素法に関する接触問題の例をその手法から

みると、次の3種類に分けられる。オ一の方法は、<sup>(45)</sup> 大手や葛<sup>(46)</sup>らの提案した、接触面上の連続条件を繁雑な行列演算によって系全体の剛性方程式へ導入する方法である。彼らはこの方法を用いて、平板の弾性接触応力を解析した。オ二には、L.R.<sup>(51)(52)</sup> Herrmann による、2個の物体の互いに接している部分に、仮想の剛性を持った、いわゆる *bond link element* を挿入する方法がある。彼は、これを土中へのパイルの打ち込みや鉄筋などで補強されたコンクリートの挙動を調べるのに利用した。オ三の方法は、<sup>(54)(55)(56)</sup> T.J.R. Hughes らが示した、いわゆる *contact element stiffness* の算定に、ラグランジュ乗数を使った拘束条件付き変分原理が利用できることに基づいている。彼らは、柔らかい非線形パッドを押しつけたときの円筒殻の振舞いなど、大変形を伴う問題を増分的に解いた。彼らはそこで、接触条件を拘束条件として扱う時に、互いに接する2物体の一方を接触子 (*contactor*)、他方を標的子 (*target*) と区別して、接触子の接触の

可能性をもったある1個の節点が、相手である標的子の相隣り合う2個の節点の中間で接するという扱い方を採り入れている。

この点は、以前から使われている、節点同志の接触を考える方法に比べて一般性がある。ただ実際に、摩擦接触ですべりの起る計算例が示されていない点に、その不備が指摘されよう。あらためて接触問題を定式化する上での問題点を列挙すると、

- (1) 移動しながら変化する接触条件を、どのように系の支配方程式へ導入するか、
- (2) 反復計算を含め、どのように非線形問題を扱い易い形で線形化するか、
- (3) 接触状態の存在とその変化をどのように調べるか、  
ということになる。

そこで本章では、Hughesらの示した手法の利点である、数学的な意味の明確さとプログラミングの簡便さに着目し、これに

基づいて、とくに塑性変形の効果を考慮に入れるため、増分表示の仮想仕事の式へラグランジュ乗数を介して拘束条件を導入する定式化を示し、通常の有限要素法で離散化する手法について述べる。さらに、各々の接触状態を分類するアルゴリズムを考え、系の剛性方程式にその対称性をくすすことなく摩擦接触の条件を導入した。次に、簡単な反復計算によって解を得る方法を考案した。例題としては、円筒殻が両側からブロックで押されて潰される場合を解いた。

### § 3.2 拘束条件付き仮想仕事の原理を用いた定式化

本節では、互いに接している2物体の接触面上の拘束条件の扱い方に要点を置き、簡単のため仮想仕事の原理を基礎とし、次に要約される問題を議論する。尚、最終的に得られる剛性方程式において、前章で誘導した擬平衡形要素の剛性行列に置き換えてやれば、精度を向上させることが出来る。

- (1) 2個の物体が2次元空間で接していて、互いに力を及ぼしあっているものとする。
- (2) 幾何学および材料非線形性を伴う、大変形までを考える。
- (3) 接触条件として、非接触、固着接触および摩擦接触(*Coulomb's friction*)の3種類を考える。
- (4) 接触面の形状は直線かあるいはゆるやかな曲線状からなり、折れ線近似ができるとする。

才14図は、平面( $X_1, X_2$ )内で2個の物体 $V^1$ と $V^2$ がある外力の作用のもとで互いに接しており、かつ平衡状態にあることを示し

ている。便宜上、一方を接触子、他方を標的子と定義し、それぞれ肩添字 1, 2 で区別をする。物体力の項を省けば、増分形仮想仕事の式は文献(27)より、次式で表しうる。

$$\left. \begin{aligned} & \int_{V^\alpha} \{ \dot{\sigma}_{ij} \delta \epsilon_{ij} + \sigma_{ij} \dot{u}_{k,i} \delta u_{k,j} \} dV - \int_{S_\alpha^\alpha} \dot{T}_i \delta u_i dS = 0, \quad (\alpha=1,2) \\ \text{付帯条件} \quad & \delta \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \{ (\delta_{ki} + u_{k,i}) \delta u_{k,j} + (\delta_{kj} + u_{k,j}) \delta u_{k,i} \} \quad V^\alpha \text{ 内} \\ & \delta u_i = 0 \quad S_\alpha \text{ 上} \end{aligned} \right\} (3.1)$$

ここで  $( )^\alpha$  は接触子 ( $\alpha=1$ ) と標的子 ( $\alpha=2$ ) に関する量を表し、その他の記号は前述と同様である。この式で、増分応力を弾性ひずみ増分で表し

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl} (\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}_{kl}^P),$$

接触面  $C$  を通して受ける接触力の項を加えると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_{V^\alpha} \{ E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \delta \epsilon_{ij} + \sigma_{ij} \dot{u}_{k,i} \delta u_{k,j} \} dV - \int_{C^\alpha} \dot{T}_i \delta u_i dC \\ & - \int_{S_\alpha^\alpha} \dot{T}_i \delta u_i dS - \int_{V^\alpha} E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^P \delta \epsilon_{ij} dV = 0, \quad (\alpha=1,2) \end{aligned} \quad (3.2)$$

ここで  $E_{ijkl}$  は弾性係数、 $C (= \partial V^1 \cap \partial V^2)$  は接触面を示し、 $( )^P$

は塑性変形に関する量を示す。

次に、接触面  $C$  上の条件について考える。前述の3種類の接触条件はそれぞれ次のように表しうる。

$$(i) \quad \text{非接触部分} \quad dC = 0 \quad (3.3)$$

$$(ii) \quad \text{固着接触部分} \quad dC \neq 0 \quad \left. \begin{array}{l} X_i^1 - X_i^2 = 0, \quad \dot{u}_n^1 + \dot{u}_n^2 = 0, \quad \dot{u}_s^1 + \dot{u}_s^2 = 0, \\ T_n + \dot{T}_n < 0, \quad (T_i^1 + \dot{T}_i^1) + (T_i^2 + \dot{T}_i^2) = 0 \end{array} \right\} (3.4)$$

$$(iii) \quad \text{摩擦接触部分} \quad dC \neq 0 \quad \left. \begin{array}{l} X_i^1 - X_i^2 = 0, \quad \dot{u}_n^1 + \dot{u}_n^2 = 0, \quad \dot{u}_s^1 + \dot{u}_s^2 - \Delta = 0, \\ T_n + \dot{T}_n < 0, \quad (T_i^1 + \dot{T}_i^1) + (T_i^2 + \dot{T}_i^2) = 0, \\ (T_s + \dot{T}_s) + \text{sign}(\Delta) \mu (T_n + \dot{T}_n) = 0, \quad \text{sign}(\Delta) = \begin{cases} 1 & (\Delta > 0) \\ -1 & (\Delta < 0) \end{cases} \end{array} \right\} (3.5)$$

ここで  $X_i$  は座標、 $u_n$  は  $C$  上の変位の外向き法線方向成分、 $u_s$  は接線方向成分、 $\Delta$  は相対すべり量、 $T_n$  は  $C$  上の接触力の外向き法線方向成分、 $T_s$  は接線方向成分を示す。そして、 $\mu$  は摩擦

係数を示す。接触面  $C$  上の増分変位に関する連続条件と、すべり摩擦の条件にそれぞれラグランジュ乗数  $\delta T_n, \delta T_s, \delta \Delta$  を考慮して積分式に入れると、接触問題の基礎式がえられる。

$$\sum_{\alpha=1}^2 \left[ \int_{V^\alpha} \{ E_{ijkl} \dot{E}_{kl} \delta \epsilon_{ij} + \sigma_{ij} \dot{u}_{k,i} \delta u_{k,j} \} dV - \int_{C^\alpha} \dot{T}_i \delta u_i dC \right. \\ \left. - \int_{S_0^\alpha} \dot{T}_i \delta u_i dS - \int_{V^\alpha} E_{ijkl} \dot{E}_{kl}^p \delta \epsilon_{ij} dV \right] \\ + \int_C \{ (\dot{u}_n^1 + \dot{u}_n^2) \delta T_n + (\dot{u}_s^1 + \dot{u}_s^2 - \Delta) \delta T_s \} dC \\ + \int_C \delta \{ (T_s + \dot{T}_s) + \text{sign}(\Delta) \mu (T_n + \dot{T}_n) \} \delta \Delta dC = 0$$

付帯条件

$$\delta \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \{ (\delta_{ki} + u_{k,i}) \delta u_{k,j} + (\delta_{kj} + u_{k,j}) \delta u_{k,i} \} \quad V^\alpha \text{ 内}$$

$$\delta u_i = 0 \quad S_u^\alpha \text{ 上}$$

$$\left. \begin{aligned} X_i^1 - X_i^2 = 0, \quad (T_i^1 + \dot{T}_i^1) + (T_i^2 + \dot{T}_i^2) = 0, \\ T_n + \dot{T}_n < 0 \end{aligned} \right\} C \text{ 上}$$

(3.6)

最後の積分項中の  $\delta$  はすべり摩擦のある部分で 1、それ以外では 0 をとる。上式について、接触状態が存在しなければ  $C$  に関する積分項と付帯条件が消えるので、これは  $V^1$  と  $V^2$  について



の通常の仮想仕事の式に帰着される。また、 $\text{sign}(\Delta)$  は  $\Delta > 0$  ならば 1、 $\Delta < 0$  ならば -1 をとる。この記号は、すべりとは逆の方向を指定するためのものである。総和記号内のオ一項は通常の剛性と初期応力による剛性であり、残りはそれぞれ接触力、外力および塑性ひずみによる項である。この式が式(3.2)、(3.3)、(3.4)、(3.5) と等価であることは容易に判る。

### § 3.3 接触条件の離散化

ここでは、接触子  $V'$  の接触状態にある節点の各々について、2個の接触力成分と1個の相対すべり量の計3個の自由度を全自由度に追加する手法について提案する。まずオーに、式(3.6)中の総和記号で囲まれた部分を通常の有限要素法によって離散化する。次に、接触条件をこの同一離散化系で表すのであるが、このとき、従来用いられている、常に  $V'$  と  $V^2$  の節点同志が接点であるとする扱いは、大変形問題の、とくに2物体間ですべりを伴う場合には、わずかな変形の後でもすでに矛盾が起るため、適当とはいえない。より合理的な方法として、図15に示すように、 $V'$  のうちのオと節点が  $V^2$  に接するとき、あい隣り合う  $V^2$  の  $m, m+1$  節点を  $\xi: 1-\xi$  に内分する点で接すると考える。もちろん、すべりに伴い  $\xi$  は変る量である。説明の簡単のため  $V'$  の1個の節点だけが接触に関連しており、しかもすべり摩擦の状態にあるとする。そして次の諸量を定義す

る。

$l$  : 接触子  $V^1$  の接触節点

$m, m+1$  : 標的子  $V^2$  の接触節点

$U_{li}^1, U_{mi}^2, U_{m+1i}^2$  : 接触節点変位

$r^1, r^2$  :  $V^1$  と  $V^2$  の残りの節点変位

$T_{li}^1, T_{mi}^2, T_{m+1i}^2$  : 接触力

$R^1, R^2$  :  $V^1$  と  $V^2$  の残りの節点外力

$P^1, P^2, P_{li}^1, P_{mi}^2, P_{m+1i}^2$  : 等価塑性荷重

$\xi$  : 無次元接触位置パラメータ

$\theta$  : 節点  $m$  と  $m+1$  を結ぶ直線と  $X$  軸とのなす角

$L$  : 節点  $m$  と  $m+1$  との距離

$V^1$  と  $V^2$  に対する有限要素式は

$$IK^1 \begin{bmatrix} \dot{r}^1 \\ \dot{U}_{li}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{R}^1 \\ \dot{T}_{li}^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P^1 \\ P_{li}^1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$IK^2 \begin{bmatrix} \dot{U}_{mi}^2 \\ \dot{U}_{m+1i}^2 \\ \dot{r}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{T}_{mi}^2 \\ \dot{T}_{m+1i}^2 \\ \dot{R}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{mi}^2 \\ P_{m+1i}^2 \\ P^2 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

と書ける。また、式(3.6)の付帯条件のうち、力の釣り合い式は、3個の節点が接触に関連しているので

$$(T_{li}^1 + \dot{T}_{li}^1) + (T_{mi}^2 + \dot{T}_{mi}^2) + (T_{m+1i}^2 + \dot{T}_{m+1i}^2) = 0$$

と表せる。ここで  $\dot{T}_{li}^1$  を変数に選び、 $T_{li}^1 + \dot{T}_{li}^1$  が節点  $m, m+1$  に楕円関係で配分されるとするなら、相対すべり量の影響も含めると、

$$T_{mi}^2 + \dot{T}_{mi}^2 = -(1 - \xi + \frac{\Delta}{L})(T_{li}^1 + \dot{T}_{li}^1)$$

$$T_{m+1i}^2 + \dot{T}_{m+1i}^2 = -(\xi - \frac{\Delta}{L})(T_{li}^1 + \dot{T}_{li}^1)$$

となる。ここで高次の微小項を無視し、増分前での釣り合い条件を考慮するならば、 $\dot{T}_{mi}^2, \dot{T}_{m+1i}^2$  は次式で表せる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{T}_{mi}^2 &= -(1 - \xi)\dot{T}_{li}^1 - \frac{\Delta}{L}T_{li}^1 \\ \dot{T}_{m+1i}^2 &= -\xi\dot{T}_{li}^1 + \frac{\Delta}{L}T_{li}^1, \quad 0 < \xi \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

一方、2個のCに関する積分項でこれらを  $X_i$  成分で表すなら

$$\dot{U}_{li}^1 - \left\{ (1 - \xi)\dot{U}_{mi}^2 + \xi\dot{U}_{m+1i}^2 \right\} + \Delta \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} = 0 \quad (3.10)$$

および



$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -\sin\theta & 0 & 1-\xi & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & 1-\xi & 0 & 0 & & & & & \\ & & 0 & 0 & 1-\xi & 0 & & & & & \\ & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & & & K^2 & & \\ & & 0 & \xi & 0 & 0 & & & & & \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

明らかに  $K$  は対称性を保持していることが分る。また、破

線で囲まれた部分を *Contact stiffness* といひ  $K_c$  と書く。

一方、節点  $i$  が固着状態ならば式 (3.13) の中ですべり摩擦に関

する部分が不要になる。すなわち  $P^f = 0$ 、そして  $K_c$  は

$$K_c = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ & & & -1 & 0 & 0 & & & & & \\ & & & 0 & -1 & 0 & & & & & \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\xi & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\xi & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & 1-\xi & 0 & 0 & & & & & \\ & & & 0 & 1-\xi & 0 & & & & & \\ & & & \xi & 0 & 0 & & & & & \\ & & & 0 & \xi & 0 & & & & & \\ & & & 0 & 0 & 0 & & & & & \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

となる。式 (3.12) の右辺には塑性ひずみと摩擦力に関する 2 種

類の未知量があるので、あらかじめ  $IP^p$ ,  $IP^f$  を仮定し、反復計算から逐次  $IP^p$ ,  $IP^f$  に修正を加えて正解を得るよう、工夫が必要になる。これについては、次節で説明する。ただ、接点が2個以上になる場合には、接触子  $V'$  の各々の節点に3自由度を加え、その状態に応じた  $IK_c$  を剛性方程式に加えればよい。また逆に、接触節点でなくなれば、3自由度を減じ、対応する  $IK_c$  もなくせばよい。

### § 3.4 接触状態の判別と反復計算手順

構造物の非線形挙動を解析する標準的な手法には増分法がある。これは、系に作用する外力あるいは変形量をあらかじめ設定しておき、これをいくつかに分割したものを増分量とし、順次これを増加させながら解析を進めていくものである。それゆえ、途中で変った荷重経路を与えることも可能であるし、また最終的な変形状態のみならず途中での様子も知ることが出来る、という利点がある。それゆえ、本題のように増分の途中で境界の様子が変化する場合に、すなわち、剛性行列がその影響を受けるため、各増分段階(ステップ)ごとに接触点の有無と変化を調べて次のステップへと進む操作が不可欠な場合に、最適な方法といえる。ただ注意を要することとして、2物体の行動は互いに相手領域に侵入するような変形は物理的にありえないので、これを禁じるような処置が必要である。さらに、一般にはあらかじめ設定された増分量に対し、そのステッ



アの途中で接触状況が変化を受ける場合が普通なので、この増分量をその変化を受けるときの大きさと一致させるように調節できる機能を持たせなければならない。いま、状態変化を分類すれば、次の4種類に分けられる。

〈場合1〉 非接触—— $(0 < \eta \leq 1, 0 < \xi \leq 1) \xrightarrow{\text{YES}}$  接触

新たに生ずる  $V^1$  の節点  $l$ 、 $V^2$  の節点  $m$  と  $m+1$  の座標を  $X_l^1$ 、 $X_m^2$ 、 $X_{m+1}^2$ 、増分変位を  $\dot{U}_l^1$ 、 $\dot{U}_m^2$ 、 $\dot{U}_{m+1}^2$ 、また図17-a に示すように増分調節量を  $\eta$  ( $0 < \eta \leq 1$ )、接する位置パラメータを  $\xi$  とすると、この  $\eta$  と  $\xi$  は次式から決定される。

$$0 = \{X_l^1 - X_m^2 + \eta(\dot{U}_l^1 - \dot{U}_m^2)\} \times \{X_{m+1}^2 - X_m^2 + \eta(\dot{U}_{m+1}^2 - \dot{U}_m^2)\} \quad (3.16)$$

$$\xi = \frac{\{X_l^1 - X_m^2 + \eta(\dot{U}_l^1 - \dot{U}_m^2)\} \cdot \{X_{m+1}^2 - X_m^2 + \eta(\dot{U}_{m+1}^2 - \dot{U}_m^2)\}}{|X_{m+1}^2 - X_m^2 + \eta(\dot{U}_{m+1}^2 - \dot{U}_m^2)|^2} \quad (3.17)$$

これら  $\eta$  と  $\xi$  がそれぞれ上記の条件を満たせば節点  $l$  は  $V^2$  に接したことになる。

〈場合2〉 接触—— $(T_n + \eta \dot{T}_n = 0, 0 < \eta \leq 1) \xrightarrow{\text{YES}}$  非接触

<場合3> 固着  $\longrightarrow (|T_s + \eta \dot{T}_s| - \mu |T_n + \eta \dot{T}_n| = 0, 0 < \eta \leq 1) \xrightarrow{\text{YES}}$  すべり

<場合4> すべり  $\longrightarrow (\Delta = 0) \xrightarrow{\text{YES}}$  固着

これらの様子は応力空間では図17-cに示す。また図16のブロックダイヤグラムは3種の状態から出発して、その次にくる状態を判定するための手順の流れを示す。

ここで、増分制御量  $\eta$  を導入すると、支配方程式 (3.12) は次式となる。

$$K \dot{r} = \eta \dot{R} + IP^f + IP^p \quad (3.18)$$

いま、あるステップにおける計算手順を要約すると、

- (1)  $\eta = 1$  とおき、 $IP^f$  と  $IP^p$  のオ1近似値に前ステップの最終値を仮定する。
- (2) 式 (3.18) を解いて  $\dot{r}$  を求める。
- (3) 各々の要素の観測点ごとに降伏判定を行い、さらに  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$  を求める。これを系全体について集成し、 $IP^p$  を計算する。
- (4)  $IP^p$  の収束判定を行う。未収束ならば再び(2)へ戻る。

- (5) すべり摩擦状態の節点について、 $\dot{T}_n$ ,  $\dot{T}_s$  と  $\Delta$  から  $IP^f$  を求める。
- (6)  $IP^f$  の収束判定を行う。未収束ならば(2)へ戻る。
- (7)  $\partial V'$ ,  $\partial V^2$  上の節点について、接触状態の変化を調べて  $\eta$  を求める。
- (8) 接触状態に変化があれば、 $\eta$  についての収束判定を行う。  
未収束なら(2)へ戻る。
- (9) 次のステップへ進む。

上述の手順は、塑性変形があり、すべり摩擦の節点があり、さらにその状態がまさに変化しようとするステップにおいては重の反復計算ループを形成する。そのために計算量の増大が予想されるので、ここで次のような考慮を行った。 $\eta$  についての反復計算はごくまれに出会うだけなので、それほど影響はないと思われる。しかし手順(7)の作業では、 $\partial V'$  上の節点と  $\partial V^2$  上の節点との関連方式を毎回必ず調べなければならないので、

この操作を効率化する方法を検討するのに重要な意義がある。

この効率化に対して、次のような方法を考えた。本法のプログラムでは $\partial V'$ 、 $\partial V^2$ 上の節点をとくに *Candidate contact node* と名付けて、他の節点と区別し、さらにこれらをグループ化して、数個の *segment* に分ける。次に、互いに接触の可能性をもった *segment* 同志の間でこの判定作業をするようにする。これ以外にプログラミングに際して注意を払わねばならないことを列記すると、オ1に、接触が起る節点を探るときは現在の座標値に微小な増分変位量あるいはそれを $n$ 倍した量を加えて判定作業をするために、打ち切り誤差の影響を受けやすくなる。

それゆえ、計算には倍精度を用いるべきである。オ2に、3種類の状態の相互の変化を調べるとき、新たな接触点を探すには変位量を、接触状態にあるものからの変化には応力量を使うため、接触と非接触の状態がステップ毎に交番するような不都合が生ずる可能性がある。その対策として、状態の変化方式

に前ステップでの変化方式に対応した、何らかの制約を加える配慮がある。 尤もとして、非接触の状態から接触状態に移るとき(場合1)、一般に固着になるかすべり摩擦かは区別が出来ない。 しかしこの状態は、剛性方程式の左辺係数行列にも影響するので正確に知らねばならない。 そこで、最初は固着状態として扱い。 その結果から応力状態がすべり摩擦と判定される場合についてだけ、再度すべり摩擦に仮定を修正して、そのステップについて計算を繰り返す。

### § 3.5 ブロックで圧縮される円筒殻についての計算例

応用例として、図18に示す円筒殻が、その両端をブロックで軸方向に圧縮される場合を解いた。それとともに、摩擦係数 $\mu$ およびブロックとの接触部分の変化が殻の変形に及ぼす影響について調べた。試験片の寸法はW.H.Hortonらが行った実験に用いられたものに相当する。

円筒殻の材質 2024-T4 アルミ合金\*

寸法 軸長  $L = 100 \text{ mm}$

半径  $R = 30 \text{ mm}$

厚み  $T = 1.5 \text{ mm}$

ブロックの材質 鋼

ヤング率  $E = 206 \text{ GPa}$

ポアソン比  $\nu = 0.3$

---

\* 材料定数は §2.3 を参照のこと

全変形量が試験片の最初の長さの30%に及ぶ大きな変形まで解くために、構成式にはP-Zモデルを採用した。試験片の有限要素モデルを図19に示す。円筒殻には、前章で誘導した擬平衡形軸対称殻要素を用い、左右の対称性から、右半分だけを考えてある。ブロックは鋼製で、その形状は剛性方程式の自由度を減らすために、接触が生じそうな部分だけのリング状のものとし、軸対称中実要素を用いた。次にブロックにZ軸方向増分変位  $\Delta W/T = -0.005$  を順次与えて式(3.18)を数値的に解いた。降伏判定としては、殻要素の各々について厚さ方向に6層に分け、塑性ひずみがこの各層内でそれぞれ一様分布するとして、各層の中央点で調べた。図20,21はそれぞれ $\mu$ が0.3と0.5のときの円筒殻の母線の変形が進行する様子を、図22は $\mu=0.3, 0.4, 0.5, 1.0$ の各値に対する $W$ と軸方向反力 $R_e$ の関係を示す。また図23,24,25,26はそれぞれの $\mu$ に対するブロックと殻の接触部分の移り変わる様子を示す。図中の●印は接触節点に対応し

、とくに図23では破線で接触節点の動きを、斜線部分は2個の節点が接触に関連していることを示してある。

これらの結果から次のような経過がわかる。まず、 $W/T$ が  $-0.15$  から  $-0.47$  の間に初期座屈が起る。このときの  $P_{max}$  は  $0.1715P_c$  である。その後、 $\mu=0.3\sim 0.5$  では中心軸方向に向けて殻端ですべりが始まる。ブロックと接する節点数が2個になった時点で殻は再び剛性を取り戻し、そこでは接触節点が隣りに移るので、接触位置が外側に向かって移動を始めることになる。その後、接触節点は変らなくなるが、その位置がわずかに内側に移動しながら再び剛性を失い、そしてバルジがしだいに潰されていく。この剛性の回復と喪失の過程は次の原因によるものと考えられる。このような変形状態の変化に大きく影響する要因は荷重の作用点の位置である。すなわち、塑性変形が進行する部分にはバルジの頂上と谷底の二つの部分があり、接触点に作用する力は頂上および谷底と接触点との距離に



応じた曲げモーメントを形成する。 始めの接触点の位置は、元の母線より内側にあるので頂上部分で変形が進むが、この位置が外側に移動するにつれて谷底の変形が顕著になり、それとともに頂上の変形がしだいに少なくなる。 したがって、この両部分の変形がしだいに平衡状態に移行する過程が前述の過程に対応するはずである。  $\mu=1.0$  のときは、ほとんど内側への殻端のすべり込みが認められないので、 $R_e$ は他の場合ほど低くはならないが、その後の剛性の回復と喪失の過程は他の場合と同様といえる。 図22に示す曲線  $R_e \sim W$  において、接触節点が隣接の節点に移り変るときに対応して、ジグザグ状を呈しているのが認められる。 これに対応する現象は本来これよりも滑らかな曲線で表されるものと推察されるが、その理由として、次の点を挙げることができる。 ここでは連続体を扱うのに、殻要素からなる離散系で取り扱っているから、上述のような結果を生じるのは避けられないと考えられる。 要素の細分割を

してこの傾向をさらに調べる方法もあるが、この例題では十分滑めらかな変形曲線を得るために要素の寸法をその厚さ程度にまで小さくしているため、この方法を用いるとしても限度がある。また、実際にジグザグ状の結果が得られるかどうか、丁寧な実験を試みる必要もあろう。

### § 3.6 結 論

- (1) 初めに推察したように円筒殻の連続塑性座屈の初期座屈後の変形には、殻端での接触条件およびその接触点の位置と動きが非常に大きく影響するばかりでなく、剛性の回復と喪失現象の存在がこの数値計算例によって、初めて明らかにされた。
- (2) 手法の簡便さから、他の方法、例えば仮想の接触要素や複雑な行列演算を用いる方法に較べて、拘束条件付き仮想仕事の原理を用いる本法は、接触問題に最も適切なことを示すことができた。
- (3) 本法によって、2次元接触問題、とくに移動する境界を有する問題を詳細、かつ合理的に扱うことが可能になった。

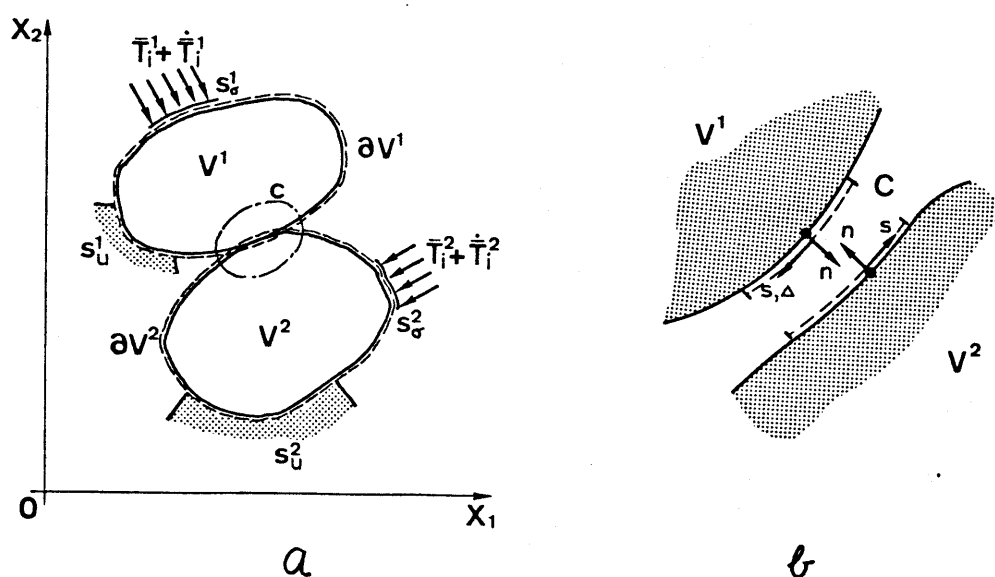


図14. 接触している物体  $V^1, V^2$  と座標系  
および接触面

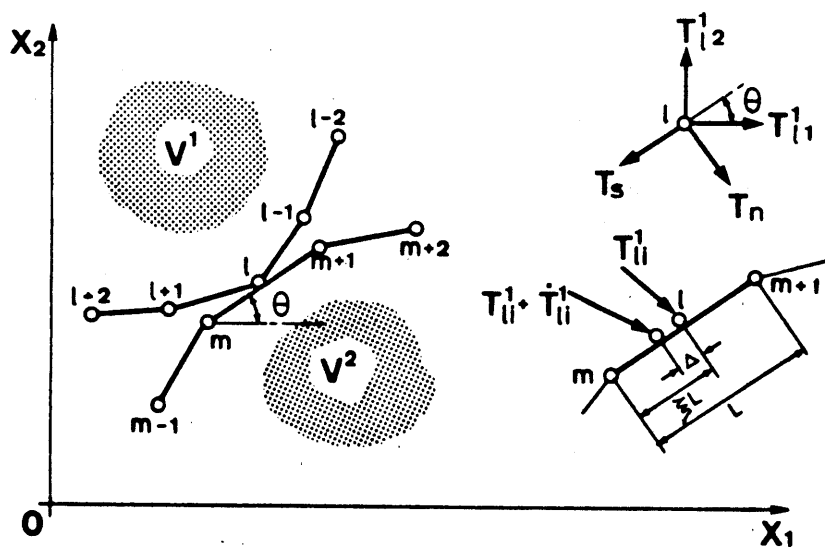


図15. 接触子  $V^1$  と標的物  $V^2$  の節点と接触力

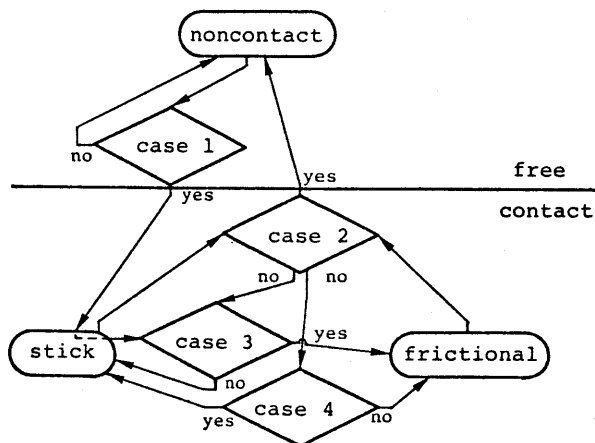


図16. 接触状態変化のブロック図

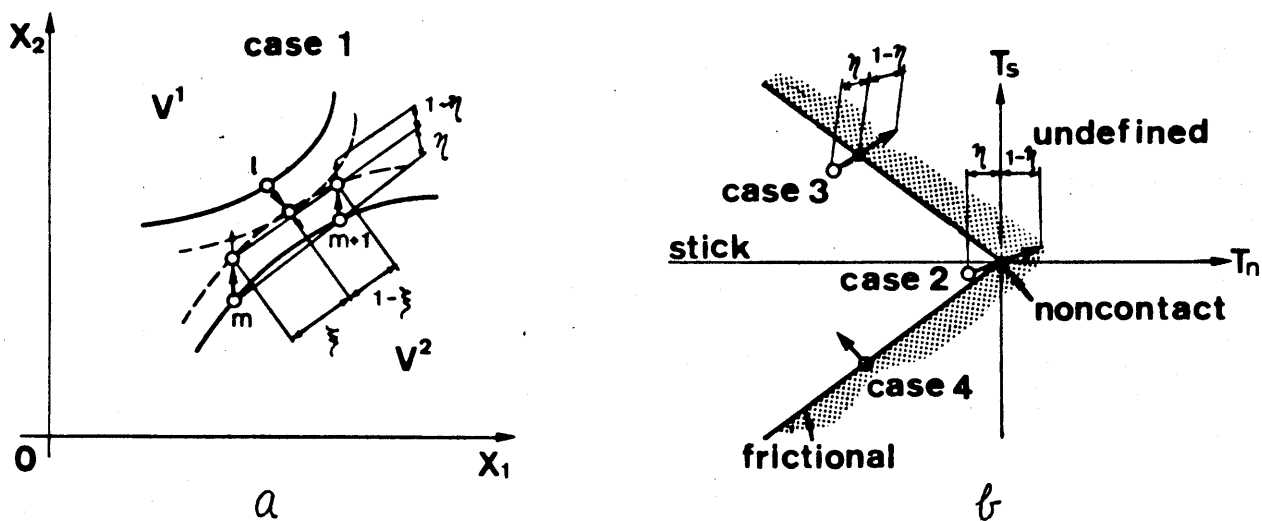
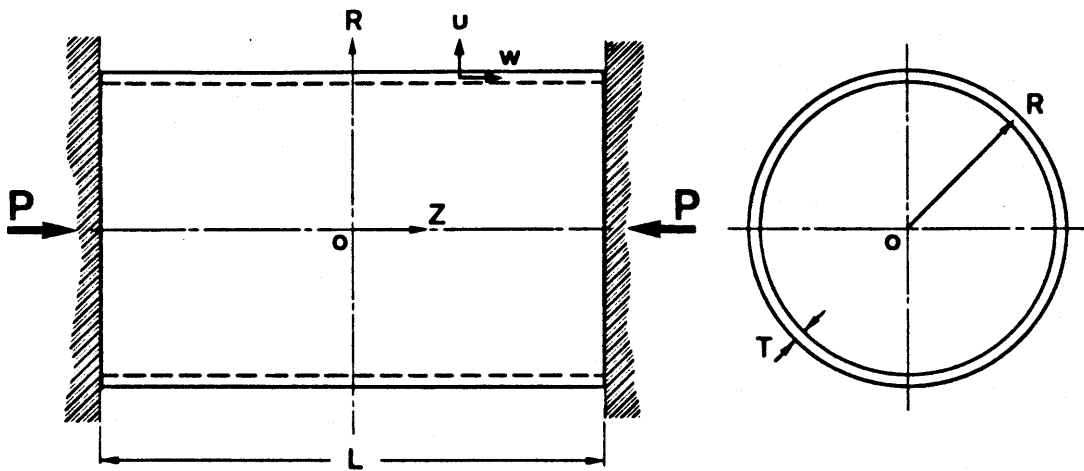


図17. 接触点の発生と応力空間での接触状態の変化

## EXAMPLE



Dimension :  $L = 100 \text{ mm}$   $R = 30 \text{ mm}$   $T = 1.5 \text{ mm}$

Material : 2024-T4 Al-Alloy

Boundary : Coulomb's friction

図18. 両端からアロックで押される円筒殻

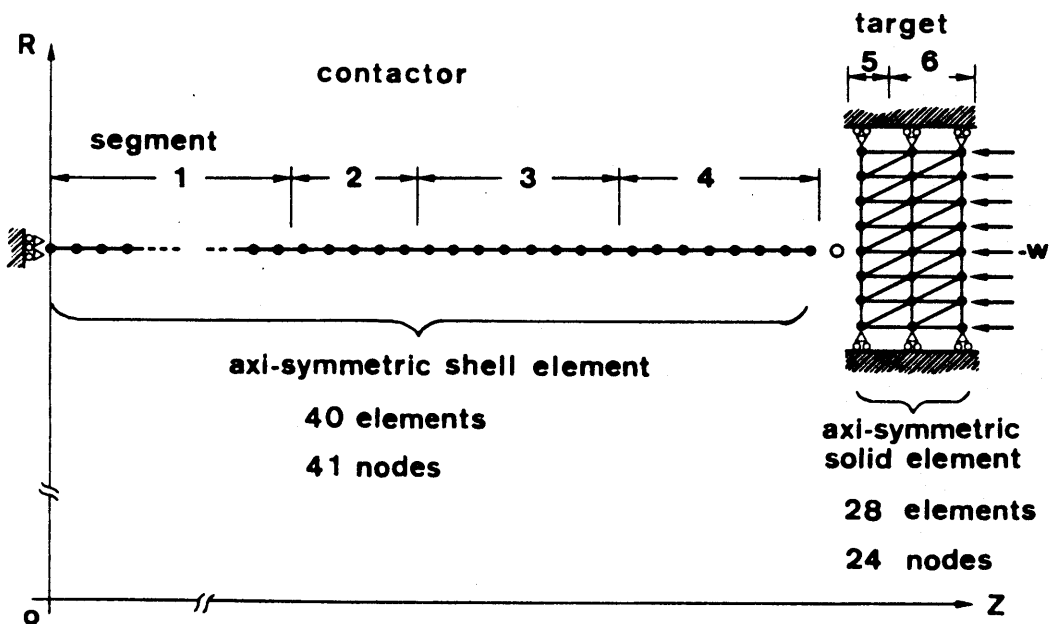


図19. 有限要素モデル

## DEFORMATION CURVES

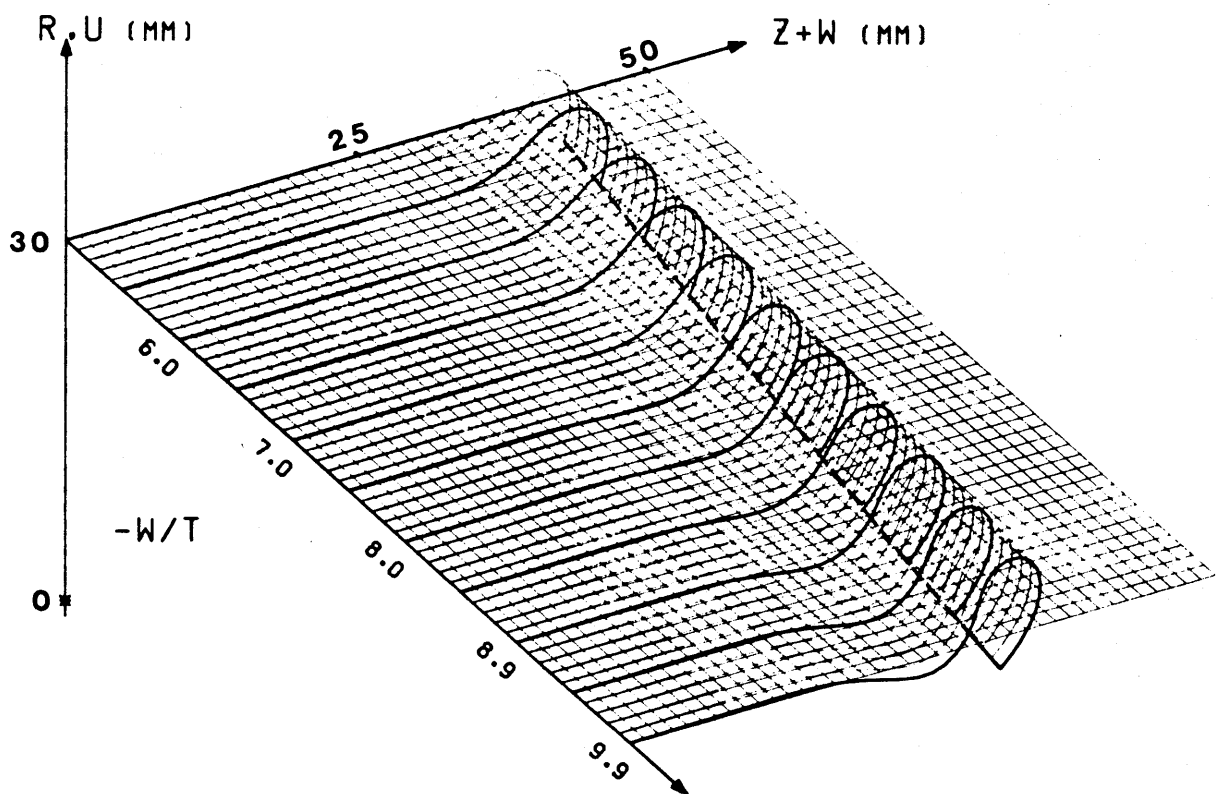
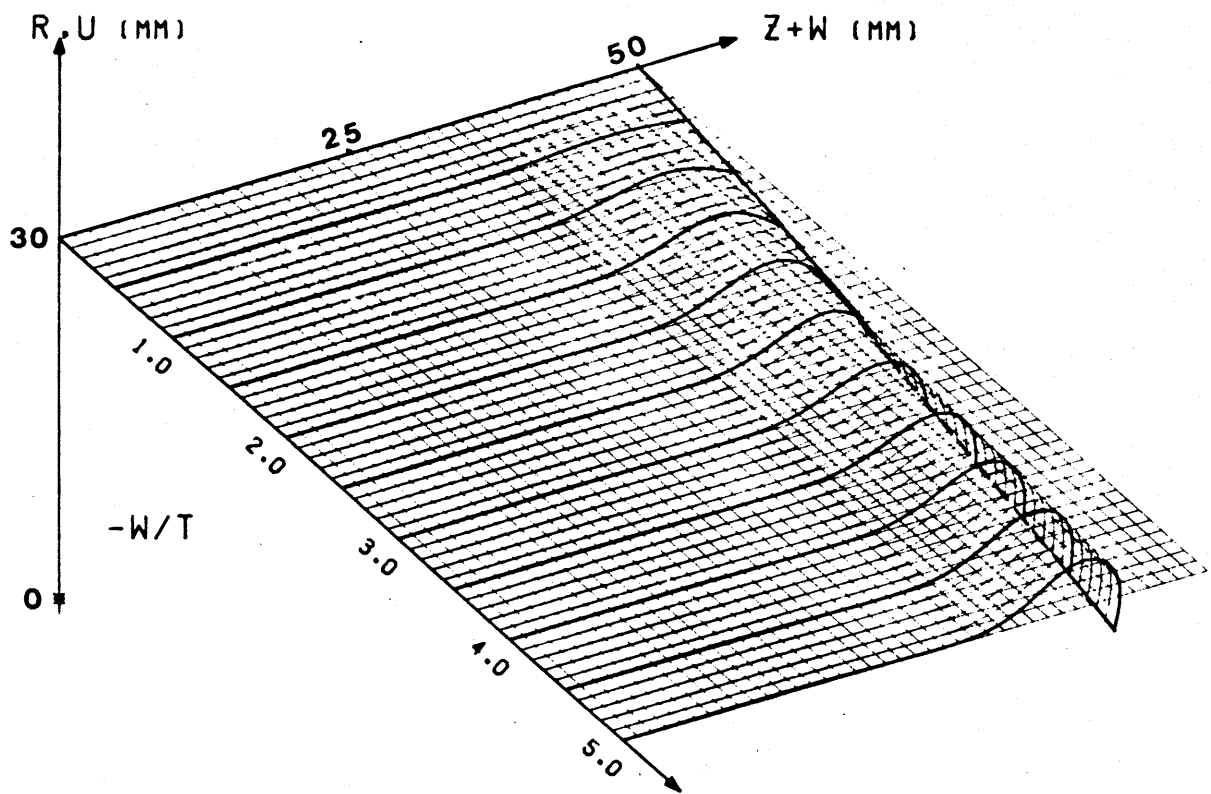


図20. 円筒殻の母線の変形曲線 ( $\mu=0.3$ )

## DEFORMATION CURVES

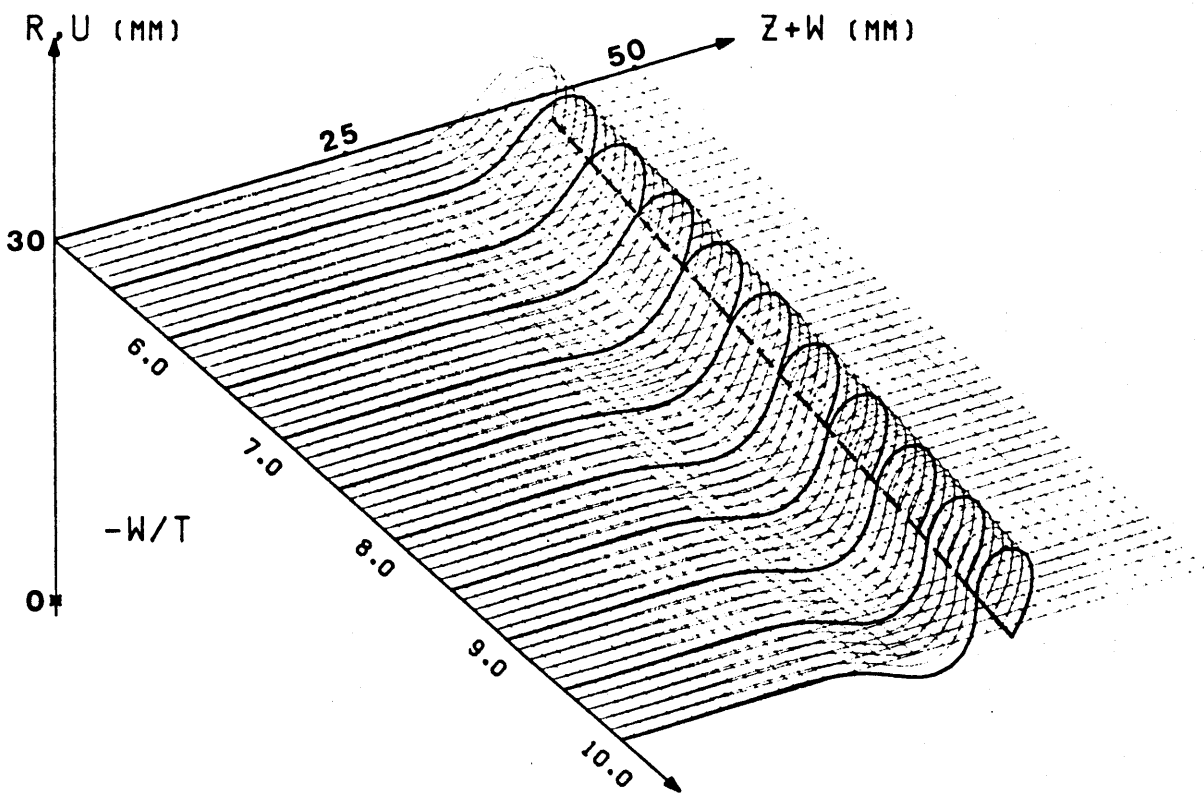
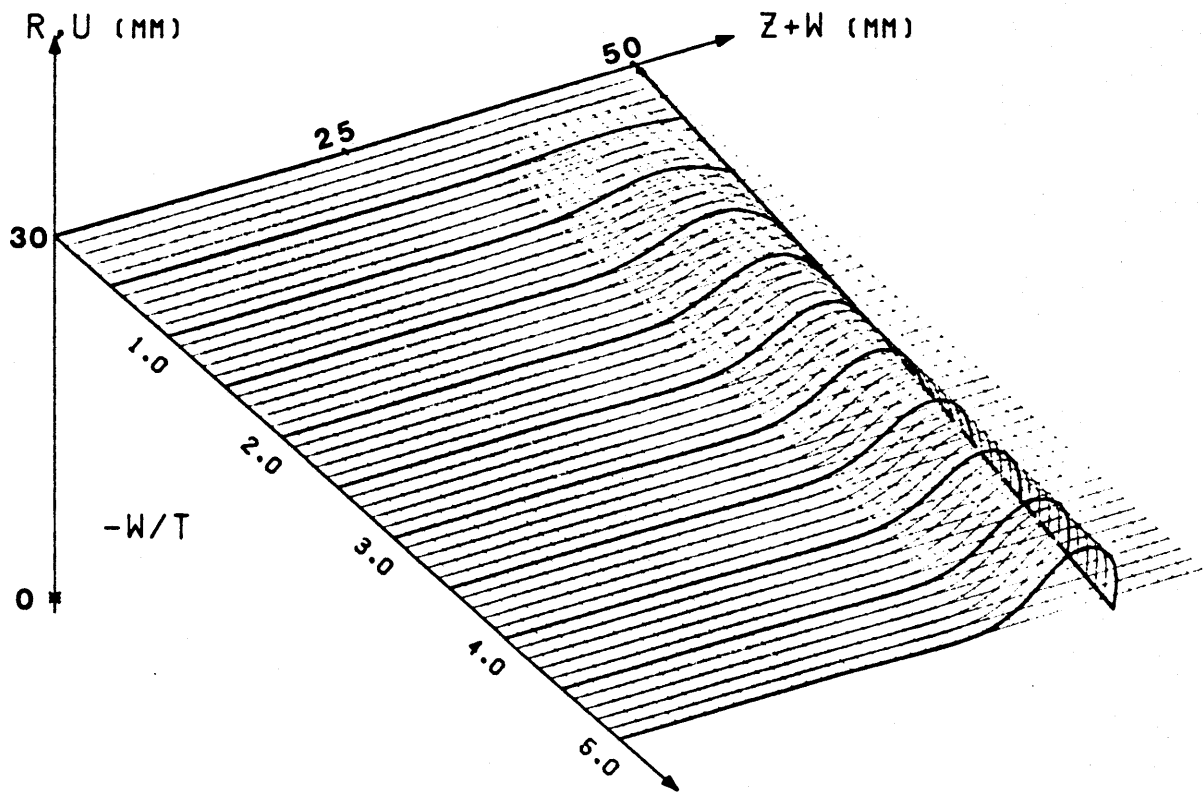


図21. 円筒殻の母線の変形曲線 ( $\mu=0.5$ )



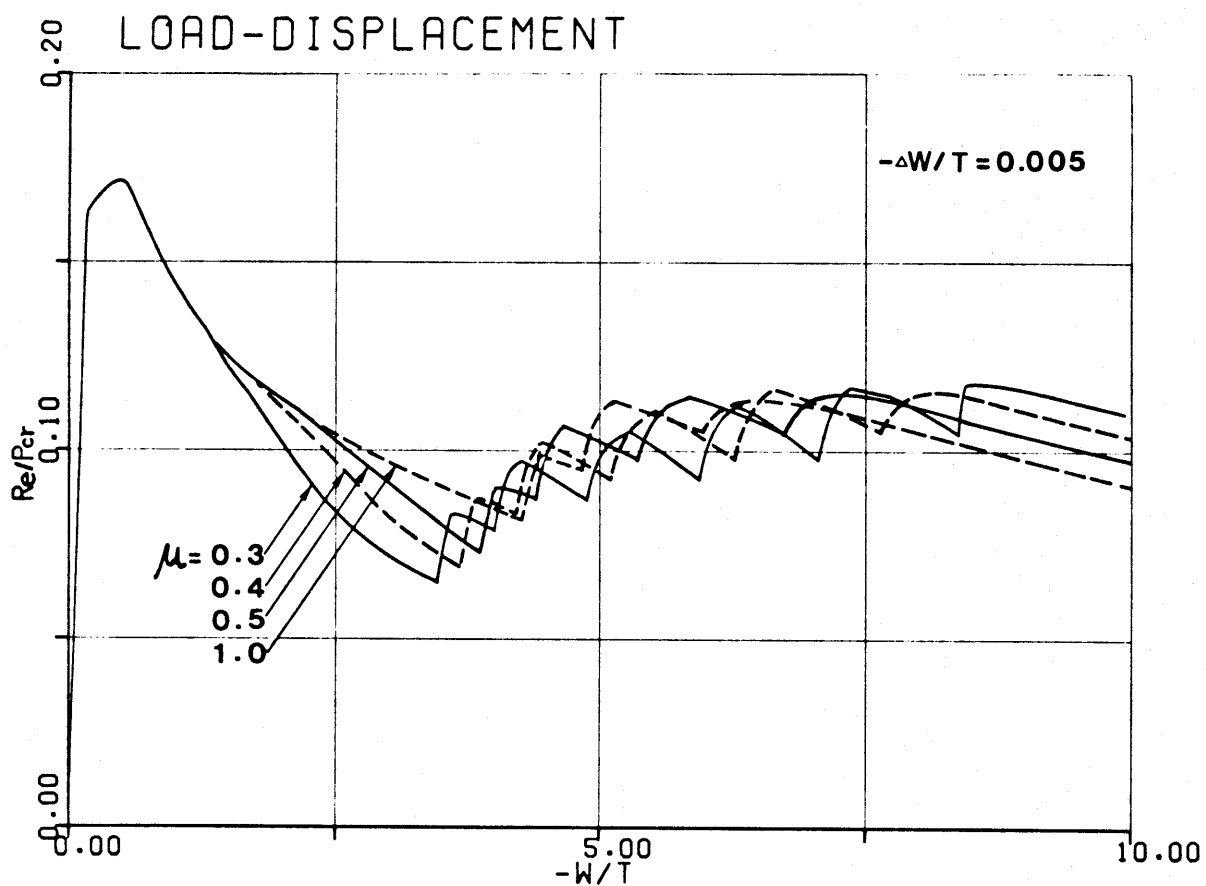


図22. 軸方向変位と反力.  $P_r = 2\pi ET^2 / \sqrt{3(1-\nu^2)}$   
 $(\mu = 0.3, 0.4, 0.5, 1.0)$

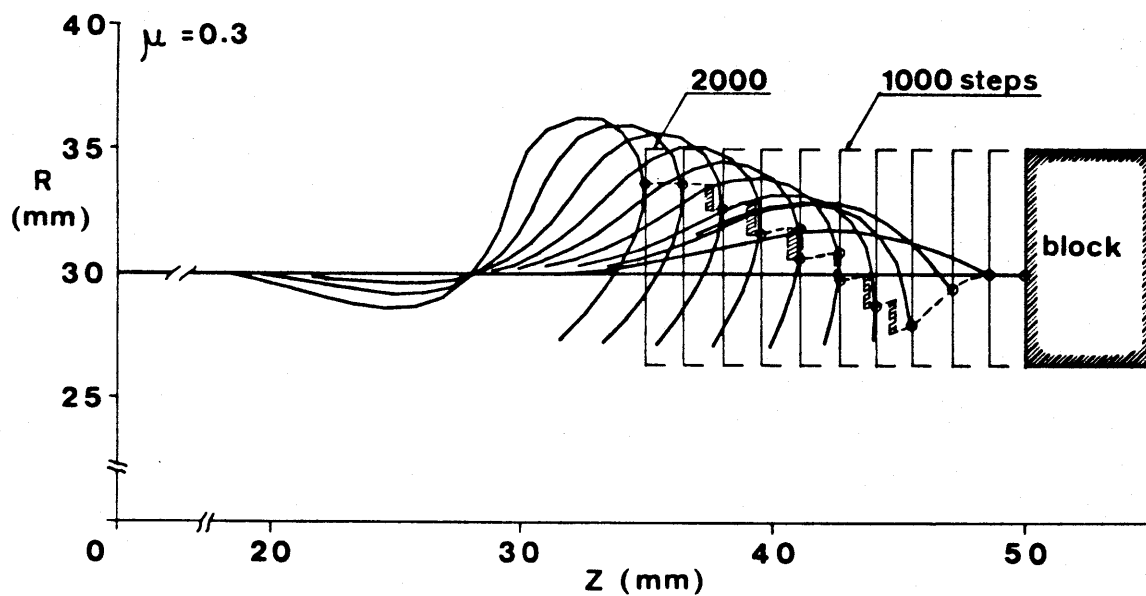


図23. 殻端の変形と接触部分の軌跡  $\mu=0.3$   
 (破線は1節点, 斜線部は2節点で接触)

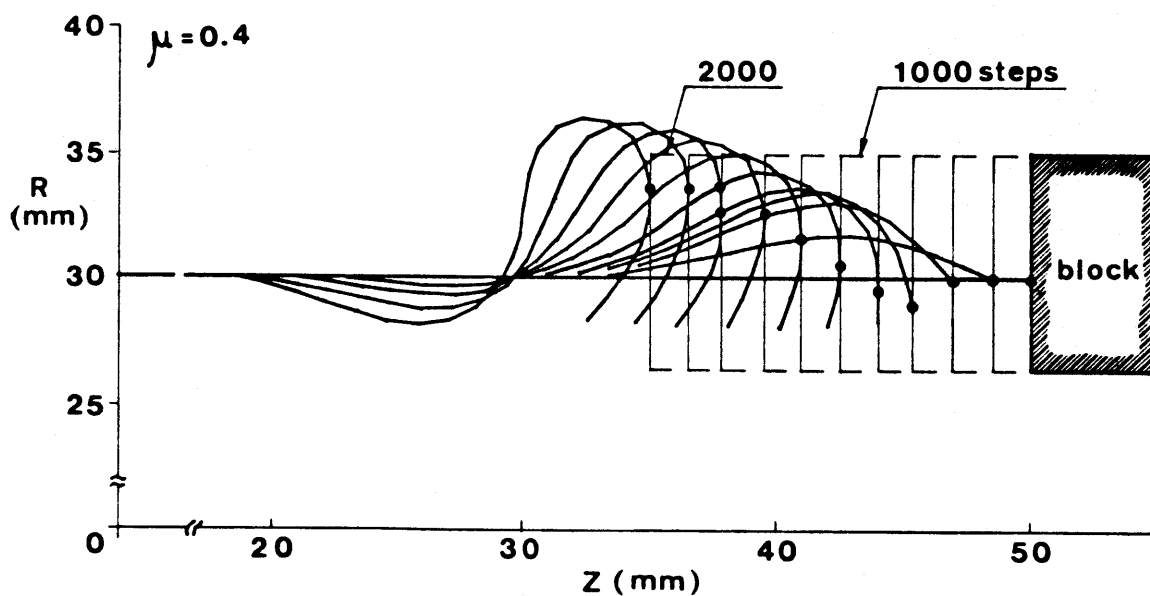


図24.  $\mu=0.4$  のときの殻端の変形状況

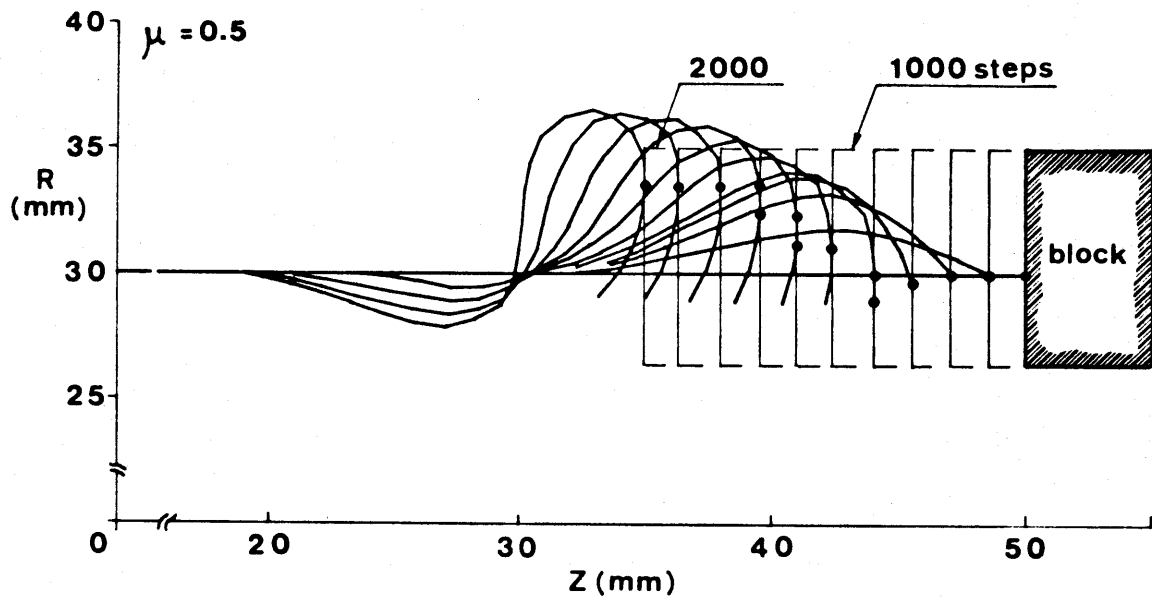


図25.  $\mu=0.5$  のときの殻端の状況

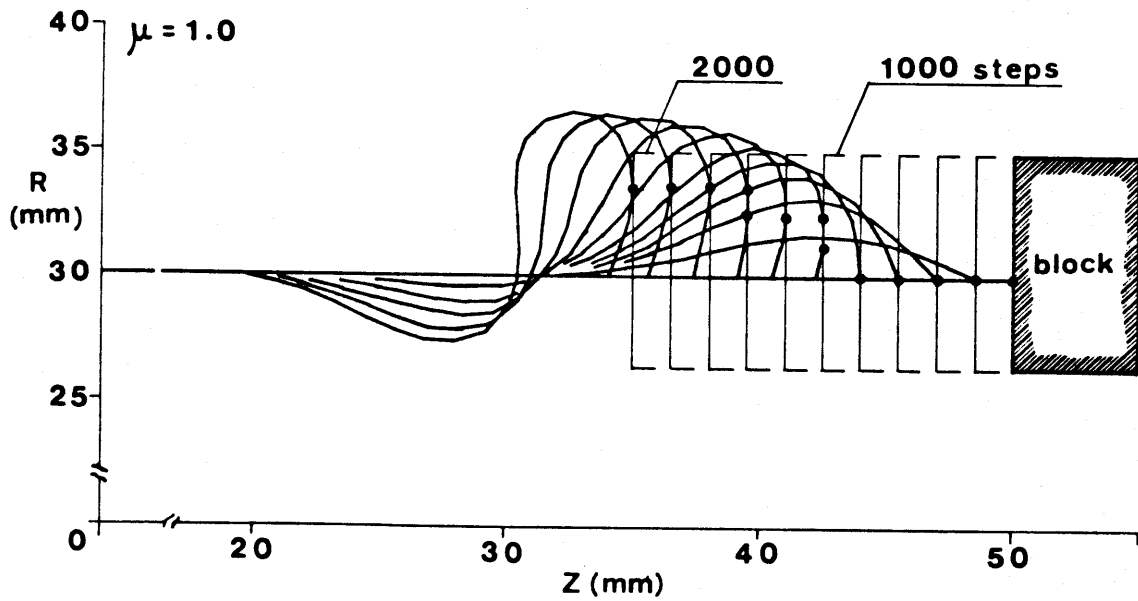


図26.  $\mu=1.0$  のときの殻端の状況

## オ 4 章 衝撃的に加わる荷重が座屈変形に 与える影響について

### § 4.1 動的応答解析の問題点

前章までは、円筒殻に静的な荷重が作用した場合について、その変形、応力分布等を調べてきた。円筒殻はまた、構造要素の一つとして、軽量構造物の一部を構成する場合が多い。それゆえ、円筒殻に関する動的な問題、とくに構造破壊につながるような衝撃力が作用した時、円筒殻にどのような変形が生ずるか、また耐えられる限界はどの程度かを知る必要が生じる。

そこで本章では、オ 2 章で著者が誘導した擬平衡形要素を用いて、これに慣性力の影響を含めるよう拡張した定式化を示す。こうして作られる運動方程式は、幾何学、材料非線形性が顕著になる大変形を考えているので、通常モード解析(modal

*analysis*)は使えない。そのため、*step by step* に方程式を数値積分して、所要の結果を得る直接法を使用する。このとき、使用する積分法の種類、その際の積分の時間増分の大きさの選定が得られる結果の精度と安定性に大きく影響する。とくに、非線形問題に適用するときには十分な注意が必要である。そこで、線形の振動問題に対して無条件に安定で、かつ扱い易く簡単なことから、構造の振動解析でよく使われている *Newmark* の方法を使うことにした。ただし、座屈以後、運動方程式をモード分解したときに負の剛性をもつ成分が現れると、対応する解は指数成分 (*exponential form*) をもつことになる。このとき、*Newmark* の方法がいかなる結果を与えるかに興味があるので、その特性についても調べる。

例題として、才2章と同様の両端を単純支持した円筒殻の一端から軸方向圧縮力を加えた場合について調べることにする。

## § 4.2 塑性変形を伴う系の運動方程式

構造全体について、慣性力の項を含め、有限要素法で離散化した形式の仮想仕事の式を表す。

時刻  $t = t_n$  において、上述の式は次のようになる。

$$R_i^n \delta r_i - \sum_N S_j^n \delta \Delta_j - M_{ik}^n \ddot{r}_k^n \delta r_i = 0 \quad (4.1)$$

ここに、 $R_i$ ,  $r_i$ ,  $S_j$  および  $\Delta_j$  はそれぞれ節点外力、節点変位、部材力および部材変形量を示し、 $M_{ik}$  は質量を示す。また  $(\dot{\quad})$  は時間微分 ( $d/dt$ )、 $(\quad)^n$  は時刻  $t = t_n$  における量、 $\delta(\quad)$  は仮想量を示し、 $h (= t_{n+1} - t_n)$  は積分における時間増分を示す。

時刻  $t = t_{n+1}$  では、式(4.1)を次のように表しうる。

$$R_i^{n+1} \delta r_i - \sum_N (S_j^n + \dot{S}_j^n h) \delta \Delta_j^* - M_{ik}^{n+1} \ddot{r}_k^{n+1} \delta r_i = 0 \quad (4.2)$$

ここで、第2章の結果の式(2.15)、(2.17)から

$$\delta \Delta_j = a_{ji} \delta r_i \quad (4.3)$$

$$\delta \Delta_j^* = \{ a_{ji} + C_{jki} (r_k^{n+1} - r_k^n) \} \delta r_i \quad (4.4)$$

を用い、 $\dot{S}_j^n h$  はわずかな時間  $h$  の間に生ずる真の部材力増分で

あるから

$$\dot{S}_j^n h = (\dot{S}_j' - \dot{S}_j^F) h \quad (4.5)$$

と置く。一方、 $\dot{S}_j' h$  は式(2.11)から

$$\dot{S}_j' h = F_{jm}^{-1} \dot{S}_m h = F_{jm}^{-1} a_{mk} (r_k^{n+1} - r_k^n) \quad (4.6)$$

で与えられる。ここで、式(4.3)を式(4.1)に、式(4.4), (4.5), (4.6)

を式(4.2)へ代入し、高次の微小項を省略すれば、次の有限要素法の公式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} M_{ik}^n \ddot{r}_k^n &= R_i^n - \sum_N S_j^n a_{ji} \\ M_{ik}^{n+1} \ddot{r}_k^{n+1} + K_{ik} (r_k^{n+1} - r_k^n) &= R_i^{n+1} - \sum_N S_j^n a_{ji} + P_i^p \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

ここで

$$K_{ik} = \sum_N \{ F_{jm}^{-1} a_{ji} a_{mk} + S_j^n C_{jki} \}$$

$$P_i^p = \sum_N (\dot{S}_j^F) h a_{ji}$$

$$(\dot{S}_j^F) h = \int_{V_N} D_{ikj} (\dot{\sigma}_{ik}^F) h dV$$

別の表現として、式(4.7)の第一、二式の差をとり、さらに、質

量はこの時間内で一定 ( $M_{ik}^{n+1} = M_{ik}^n = M_{ik}$ ) と仮定し、 $\Delta r_k = r_k^{n+1} - r_k^n$ ,

$\Delta R_i = R_i^{n+1} - R_i^n$  なる量を増分量と定義すれば、

$$M_{ik} \Delta \ddot{r}_k + K_{ik} \Delta r_k = \Delta R_i + P_i^p \quad (4.8)$$

なる、増分形表示の運動方程式が得られる。ここでまた、式(4.7)、(4.8)の右辺に未知量  $P_i^p$  が含まれるため、これらの式に対しては反復計算が必要となる。



### § 4.3 運動方程式の Newmark 法による積分

運動方程式の数値積分法として広く使われている Newmark の

<sup>(57)(65)(68)</sup>  
 $\beta$  法によれば、ある時刻  $t_n$  での系の状態  $(r_k^n, \dot{r}_k^n)$  が分っていて、

それから微小な時間増分  $h$  の後の時刻  $t_{n+1} = t_n + h$  における系の

状態  $(r_k^{n+1}, \dot{r}_k^{n+1})$  を求めるために、次の仮定をおいている。

$$\left. \begin{aligned} \dot{r}_k^{n+1} &= \dot{r}_k^n + h(1-\delta)\ddot{r}_k^n + h\delta\ddot{r}_k^{n+1} \\ r_k^{n+1} &= r_k^n + h\dot{r}_k^n + h^2\left\{\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\ddot{r}_k^n + \beta\ddot{r}_k^{n+1}\right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

ここに、 $\beta, \delta$  は位相遅れと人工減衰の程度を調節するパラメータである。

いま  $\beta = \frac{1}{4}, \delta = \frac{1}{2}$  と置けば、単振動の問題をはじめ

とする線形振動問題では無条件に安定で、また非常に簡単にな

ることが知られている。このとき、

$$\left. \begin{aligned} \dot{r}_k^{n+1} - \dot{r}_k^n &= \frac{h}{2}(\ddot{r}_k^n + \ddot{r}_k^{n+1}) \\ r_k^{n+1} &= r_k^n + \frac{h}{2}(\dot{r}_k^n + \dot{r}_k^{n+1}) \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

となる。これを式(4.7)に代入すると

$$\left[ M_{ik} + \frac{h^2}{4} K_{ik} \right] (\dot{r}_k^n + \dot{r}_k^{n+1}) = 2M_{ik} \dot{r}_k^n \quad \left. \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{h}{2}(R_i^n + R_i^{n+1} - 2 \sum_N S_j^n a_{ji}) + \frac{h}{2} P_i^p \\
 & r_i^{n+1} = r_i^n + \frac{h}{2}(\dot{r}_i^n + \dot{r}_i^{n+1})
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} & + \frac{h}{2}(R_i^n + R_i^{n+1} - 2 \sum_N S_j^n a_{ji}) + \frac{h}{2} P_i^p \\ & r_i^{n+1} = r_i^n + \frac{h}{2}(\dot{r}_i^n + \dot{r}_i^{n+1}) \end{aligned}} \right\} (4.11)$$

を得る。これが Newmark ( $\beta = \frac{1}{4}$ ) 法による系の漸化式である。

前節で述べた通り、式(4.11)は右辺には項  $P_i^p$  が含まれているので反復計算が必要となるが、左辺の係数行列は積分の時間増分  $h$  の間は一固定なので、時間増分  $h$  についての1回の積分をステップと呼ぶなら、各ステップで連立方程式を解く操作は一度でよく、あとの反復計算のためにその結果を保存しておくだけでよい。

## § 4.4 Newmark の積分法 の特性

運動方程式の応答を求めるには2種類の方法がある。一つはモード解析法である。これは各モードの応答を加え合せて系の応答を求める方法であり、低次のモードだけが結果に大きく関係する時には有利な方法である。しかし、固有値解析が必要なことと、適用できる系が線形な場合に限定されるので、ここでは考えない。他の方法は直接法である。これは、ある与えられた初期値を出発値として、直接、*step by step* に運動方程式を数値積分していく方法で、通常は各時間増分の間は方程式を線形とみなしておくか、もしくは繰返し近似を行う方法であるから、非線形系に対して有効である。しかし、時間増分の取り方は解の収束性と安定性、および計算労力に大いに関係しているため、予測される系の性質および使用する方法の特性を吟味しておく必要がある。

ここで収束性とは、時間増分  $\Delta t$  についての収束性、すなわら

、置き換えられた系の解が  $\epsilon \rightarrow 0$  のもとで、もとの方程式の正解に十分近く収束するかどうかをいう。また、得られた解が正しい解より遠く離れ、解のもつ性質を表さなくなる状態を不安定な状態とし、とくに  $\epsilon$  がある限界を越えたときに起る。これに対し、無条件安定とは如何なる大きさの  $\epsilon$  を選んでも不安定にならない場合をいう。

本節では、前節で用いた Newmark の  $\beta$  法について考える。  
 O.C. Zienkiewicz<sup>(65)</sup>らは、この方法が3点漸化法 (Three-point Recurrence Scheme) の一般形であることを重み付き残差法を用いて簡潔に証明した。そして、彼らは系が振動解をもつ場合について詳しく調べた。しかし、本題のように系が座屈した後、すなわち負の剛性を有する領域までの応答を知ろうとするためには、指数形の解をもつ場合についても調べておく必要がある。そこで、この一般化 Newmark の方法がいかなる特性をもつ積分法であるかをみなおしてみよう。

微小な時間増分に関して線形化された系の運動方程式(4.8)に対し、速度に比例する減衰項を考えると、一般的な次式の形が得られる。

$$M_{ik}\ddot{r}_k + C_{ik}\dot{r}_k + K_{ik}r_k = F_i \quad (4.12)$$

ここに、 $r_k$ は節点変位であり、 $M_{ik}, C_{ik}, K_{ik}$ はそれぞれ質量行列、減衰行列および剛性行列の成分を表し、 $F_i$ は加えられる外力の成分を表す。Newmarkは式(4.12)を積分するのに、次式を仮定した。

$$\left. \begin{aligned} \dot{r}_k^{n+1} &= \dot{r}_k^n + h(1-\delta)\ddot{r}_k^n + h\delta\ddot{r}_k^{n+1} \\ r_k^{n+1} &= r_k^n + h\dot{r}_k^n + h^2\left\{\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\ddot{r}_k^n + \beta\ddot{r}_k^{n+1}\right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

式(4.12)を時刻 $t_{n-1}, t_n, t_{n+1}$ に適用したときの3個の運動方程式と時刻 $t_{n-1}, t_n$ に用いた、式(4.9)による4個の漸化式からなる計7個の式から速度 $\dot{r}_k^{n-1}, \dot{r}_k^n, \dot{r}_k^{n+1}$ と加速度 $\ddot{r}_k^{n-1}, \ddot{r}_k^n, \ddot{r}_k^{n+1}$ を消去すれば、最終的に次の3点漸化式が得られる。ここでは、 $M_{ik}, C_{ik}, K_{ik}$ の値は $t_{n-1}, t_n, t_{n+1}$ の間で一定に保たれると仮定する。

$$\begin{aligned}
& [M_{ik} + \delta h C_{ik} + \beta h^2 K_{ik}] r_k^{n+1} + [-2M_{ik} + (1-2\delta)h C_{ik} \\
& + (\frac{1}{2} - 2\beta + \delta)h^2 K_{ik}] r_k^n + [M_{ik} - (1-\delta)h C_{ik} + (\frac{1}{2} + \beta - \delta)h^2 K_{ik}] r_k^{n-1} \\
& = h^2 \{ \beta F_i^{n+1} + (\frac{1}{2} - 2\beta + \delta) F_i^n + (\frac{1}{2} + \beta - \delta) F_i^{n-1} \} \quad (4.13)
\end{aligned}$$

収束性と安定性をこの漸化式について直接調べる代りに、 $C_{ik}$ にある条件を加えて独立なモードに展開した式について調べることができる。まず、もとの運動方程式(4.12)について、モード展開した形は次のように書ける。ここに、 $m_i, C_i, k_i$ はそれぞれ  $M_{ik}, C_{ik}, K_{ik}$  の主値に対応する。

$$m_i \ddot{y}_i + C_i \dot{y}_i + k_i y_i = f_i \quad (4.14)$$

標準的な方法に従って、系が減衰項  $C_i$  を持たないときの、自由振動の場合を考える。なぜなら、減衰項がないときは、最も厳しい条件のもとで、安定性と収束性を調べうるからである。

式(4.14)において、 $i=1, C_i=f_i=0, m_i=m, k_i=k$  と置けば、 $k$  の符号によって3種類の解を持つ。

$$y = C_1 e^{ipt} + C_2 e^{-ipt} \quad k > 0, \quad p^2 = k/m \quad \Bigg\}$$

$$\left. \begin{aligned} y &= C_3 t + C_4 & k &= 0 \\ y &= C_5 e^{st} + C_6 e^{-st} & k < 0, \quad s^2 &= -k/m \end{aligned} \right\} (4.15)$$

一方、漸化式について、一自由度で考えるとき、式(4.13)から

$y^{n+1} = \lambda y^n$  形の解が求まる。  $\lambda$  は特性方程式

$$\begin{aligned} \lambda^2(m + \beta h^2 k) + \lambda \left\{ -2m + \left(\frac{1}{2} - 2\beta + \delta\right) h^2 k \right\} \\ + \left\{ m + \left(\frac{1}{2} + \beta - \delta\right) h^2 k \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

の根である。これを  $\lambda_1, \lambda_2$  と置けば、漸化式の方の一般解は

$$y^n = A \lambda_1^n + B \lambda_2^n \quad (4.17)$$

となる。式(4.16)の根は次のように得られる。

(1)  $k > 0$  のとき、 $p^2 = k/m$  とおき

$$g = \frac{(\frac{1}{2} + \delta) p^2 h^2}{1 + \beta p^2 h^2}, \quad r = \frac{(\frac{1}{2} - \delta) p^2 h^2}{1 + \beta p^2 h^2} \quad (4.18)$$

と置けば、 $\lambda$  は次式で与えられる。

$$\lambda_{1,2} = \frac{(2-g) \pm \sqrt{(2-g)^2 - 4(1+r)}}{2} \quad (4.19)$$

もし、

$$\beta \geq \frac{1}{4} \left(\delta + \frac{1}{2}\right)^2 \quad (4.20)$$

ならば、 $\nu$ の如何にかかわらず、 $\lambda$ は複素根になる。このとき、 $\lambda$ の絶対値は次のように得られる。

$$|\lambda| = \sqrt{1+r} \quad (4.21)$$

ここで、 $\beta, \delta$ が条件(4.20)および、 $|\lambda| \leq 1$ 、根号内が正となるための条件

$$\left. \begin{aligned} \delta &\geq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \delta + \beta &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

を満足すならば、解(4.17)は無条件に安定である。また、式(4.21)から、 $\delta > \frac{1}{2}$ に対しては減衰の効果があることが分る。このときの一般解は次のように表される。

$$y^n = C_1 e^{in\theta} + C_2 e^{-in\theta} \quad (4.23)$$

ここで

$$\theta = \tan^{-1} \left[ \frac{1 - (\frac{1}{4} - \beta + \frac{\delta}{2})p^2 k^2}{p \sqrt{1 - (\frac{\delta}{2} + \frac{1}{4})^2 - \beta}} p^2 k^2 \right] \quad (4.24)$$

式(4.15)に対する  $k > 0$  のときの解と比較すれば、この近似解は厳密な振動解に対して、振幅では式(4.21)で表される量、位相では



( $\hbar \rightarrow 0$ )だけゆがめられた結果が得られることになる。しかし、このゆがみは $\hbar$ を十分小さくすればほとんど問題はない。

(2)  $k=0$ のとき、 $y$ は一次式となり近似解は厳密解に一致する。

(3)  $k < 0$ のとき、 $s^2 = -k/m$ とおけば、 $\lambda$ の特性式は

$$\begin{aligned} \lambda^2(1 - \beta s^2 \hbar^2) + \lambda \left\{ -2 - \left(\frac{1}{2} - 2\beta + \delta\right) s^2 \hbar^2 \right\} \\ + \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} + \beta - \delta\right) s^2 \hbar^2 \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

となるから、

$$\beta \geq \frac{1}{4} \left( \delta + \frac{1}{2} \right)^2 \quad (4.26)$$

に対して、すべての $\hbar$ について、 $\lambda$ は実根となる。

$$\lambda_{1,2} = \frac{(2 - \delta) \pm \sqrt{(2 - \delta)^2 - 4(1 + r)}}{2} \quad (4.19)$$

ここで、次のように置いた。

$$q = \frac{-\left(\frac{1}{2} + \delta\right) s^2 \hbar^2}{1 - \beta s^2 \hbar^2}, \quad r = \frac{-\left(\frac{1}{2} - \delta\right) s^2 \hbar^2}{1 - \beta s^2 \hbar^2} \quad (4.27)$$

この $\lambda_{1,2}$ の符号は条件

$$\delta \geq \frac{1}{2}, \quad s^2 \hbar^2 < \frac{1}{\beta} \quad (4.28)$$

について、ともに正となる。逆にいえば、条件(4.28)が満足されないときは負の入が存在し、解(4.17)はステップ毎に符号が反転するという、不安定な解を与えることになる。例として、

$\delta = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = \frac{1}{4}$  のとき、 $t=0$ における初期値が  $y=1, \dot{y}=0$  のとき、

正解は式(4.15)のオ3式から、次のように得られる。

$$y^n = \frac{1}{2}(e^{shn} + e^{-shn}) \quad (4.29)$$

一方、近似解は式(4.17), (4.19) から

$$y^n = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{2+sh}{2-sh} \right)^n + \left( \frac{2-sh}{2+sh} \right)^n \right\} \quad (4.30)$$

となり、 $sh=2$  で特異に、 $sh>2$  で入が負になり不安定になる

。以上の結果から、Newmarkの $\beta$ 法については、座屈を伴う

問題では、 $\beta = \frac{1}{4}$ ,  $\delta = \frac{1}{2}$  に置く場合には、 $h < 2/s$ にとらなければ

ならないことが分る。

## § 4.5 衝撃的な軸圧縮力を受ける円筒殻についての計算例

図2に示した円筒殻において、右端が単純支持され、左端は  $r$  方向にのみ拘束されている、 $z$  方向移動と回転は自由であるとし、左端で  $z$  方向に荷重  $P = P_0(1 - e^{-ct})$ 、または変形速度  $\dot{w} = \dot{w}_0(1 - e^{-ct})$  が加えられたときの、右端における反力と荷重端における変位と速度およびその変形様式を調べる。上述の係数  $(1 - e^{-ct})$  を用いれば、 $c$  の値と時間増分  $\Delta t$  の大きさを適当に選ぶことにより、ステップ状の入力から漸増入力までを連続な関数として系に与えることができる。軸対称殻要素にはオ2章で用いたのと同じ擬平衡形のもを、質量行列にはコンシステントタイプのもを用いる(附録)。応力波の伝播があるため、静的な場合と異なり、左右の対称性はないので、全長を40要素に分割した。その他は、§2.4の例題と同じ資料を用いた。

構成式には  $Mroz$  の式を用いた。したがって、静的な結果と比較する場合  $W/T$  が動的な場合の  $\frac{1}{2}$  に相当する。また、

$P_{cr} = 2\pi ET^2 / \sqrt{3(1-\nu^2)}$  と置いた。

(1) 荷重が印加される場合

$C = 10^6 (\text{sec}^{-1})$  とし、 $P_0/P_{cr}$  について 0.05 から 0.20 の範囲を調べた。その結果から、荷重端に印加される力によって発生する応力波が支持端へ向って伝播し、支持端で反射した波が再び荷重端に向うという行程が繰り返されるため、時間の経過とともにこれらの応力波が複雑に交錯し、全領域にわたる応力状態がその影響を受けることがわかった。すなわち、降伏、負荷、除荷の繰り返しの様子が場所ごとに異なり、塑性座屈の生ずる位置がそれに左右されることが明らかとなった。最初、 $P_0/P_{cr} = 0.05 \sim 0.15$  においては、円筒殻全体が弾性状態に保たれ、あるいは一部、とくに支持端で塑性変形がわずかに起るが、座屈するまでには至らない。次に、 $P_0/P_{cr} = 0.15 \sim 0.165$  では、支持端に生ずる塑性変形のため、はっきりと座屈が認められる。さらに、 $P_0/P_{cr} = 0.165 \sim 0.180$  では、まず荷重端で塑性変形が

始まり、応力波が支持端に到達すると、支持端にも塑性変形が生じ、両端で同じように塑性変形が進行してゆき、そのため座屈が起る。  $P_0/P_{cr} > 0.180$  では、荷重端での変形が入力と同時に始まり、ますます顕著になり、支持端ではこれに追従するよう変形が進むが荷重端に較べればはるかに小さい。これらの計算結果のうち、上述の特徴をよく表している4種類について図27, 28, 29, 30に示した。これらの図において、a図は各時刻における円筒殻母線の変形の様子を示し、b図は横軸に時間、縦軸に印加荷重  $P$ 、支持端反力  $R_e$ 、荷重印加点の変位  $W$  および速度  $\dot{W}$  を示した。これらの図から、動的な場合には静的な場合より座屈荷重がいく分低下すること。印加する荷重の大きさ、すなわち、それによって引き起される応力波の一波の大きさが座屈変形の起る場所に大きな影響を与えることがわかった。

## (2) 変形速度が印加される場合

$C=10^6$  (sec<sup>-1</sup>) とし、 $\dot{W}_0$  について 5 m/sec から 40 m/sec までについて調べた。その結果、いずれの場合でも荷重端での塑性変形が支持端のそれより大きく成長し座屈に至ることがわかった。

この変形過程においては、最初荷重端で塑性域が出現し、それが支持端まで伝わり、局所的には負荷と除荷の過程が何度も繰返されるが、全体として塑性域が拡大される。この段階までは、まだ軸方向応力が主に塑性変形の成長に関与しているだけである。その後、殻の両端の近くでバルジが半径方向に張り出し始め、その部分の塑性変形は周方向応力成分の関与とともに進行し、他の部分では除荷が起る。更にバルジは荷重端で特に顕著に外側に突き出てくる。この変形過程は、応力波の伝播について考慮しなければ、ほとんど静的な過程と同様である。しかし、塑性域の拡大および境界以外での除荷の過程は、静的な場合のように単純でなく、弾性状態と塑性状態を複雑に繰返しながら、徐々に除荷される。例として、 $\dot{W}_0$  の値が 15

m/sec と 40 m/sec の場合の結果を図 31, 32 に示す。

## § 4.6 結 論

本章の結論として、次の点があげられる。

- (1) 動的荷重を受けて塑性座屈する円筒殻の過渡応答を解析することを前提に、擬平衡形要素を用いた運動方程式の定式化を示した。その有限要素法における公式は、各時間増分 $\Delta t$ について等価塑性荷重 $P_i^p$ に関する反復計算を含み、通常の変位法と同じ形式に表示したので、簡便で扱い易い形に得られた。このとき、準静的でしかも変形が単調に漸増する場合には、 $P_i^p$ の反復計算を各ステップで行う必要はなく、数ステップ毎に行うように計算量を軽減する方法が考えられている。しかし、本章で扱ったような過渡応答を調べるときには、応力波の高周波成分のために小刻みな負荷と除荷の過程が繰返される事が予想される。それゆえ、変形様式に与えるこのような効果が重要と考えられる場合には、各ステップごとに、 $P_i^p$ の反復計算を取り入れて、十分な $P_i^p$ の収束が得られてから、次のステップへ移



らなければならない。

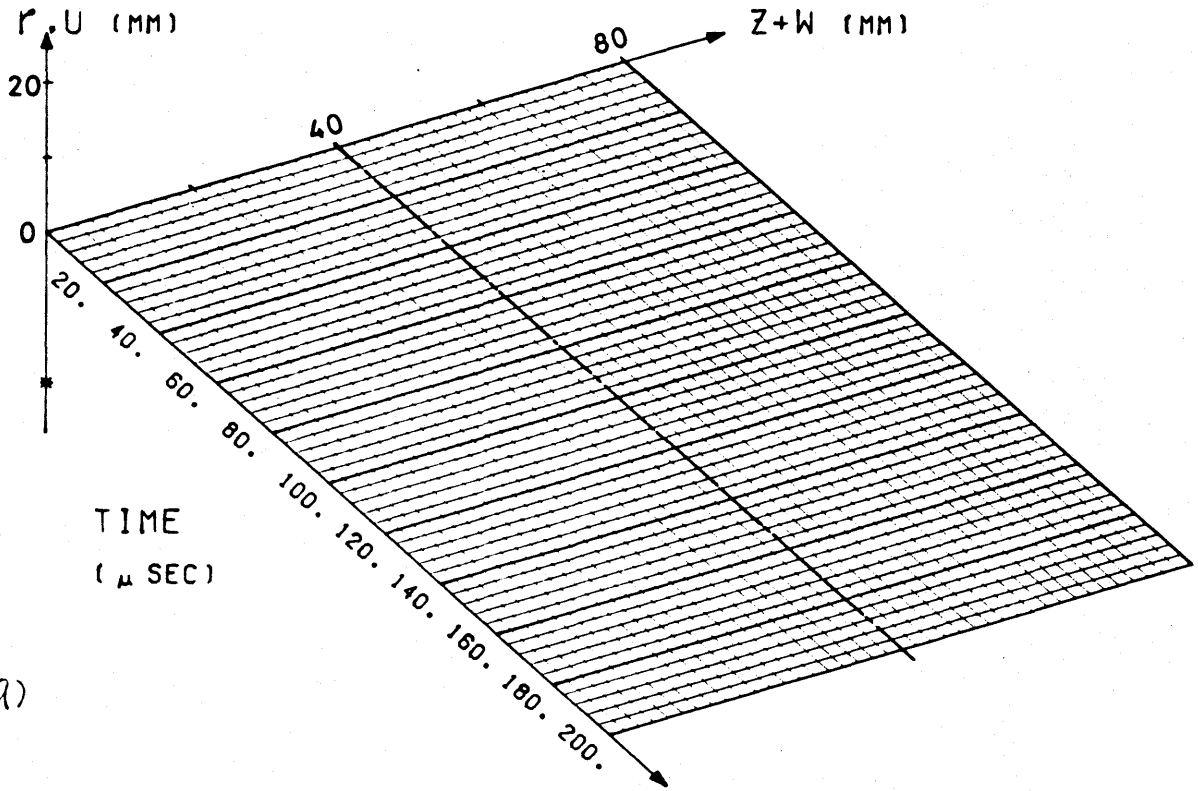
(2) 簡便で、線形振動の問題では無条件に安定な Newmark の積分法を非線形の問題でも有効に用いることができる。しかし、座屈を伴う場合には、すなわち線形化した運動方程式をモード分解したときに負の剛性をもつ成分が現れる場合には、時間増分が  $\Delta t = 2/S$  で特異、 $\Delta t > 2/S$  で不安定になるので注意を要する。

このような方法を用いて扱った例題から、次のような結論が得られた。

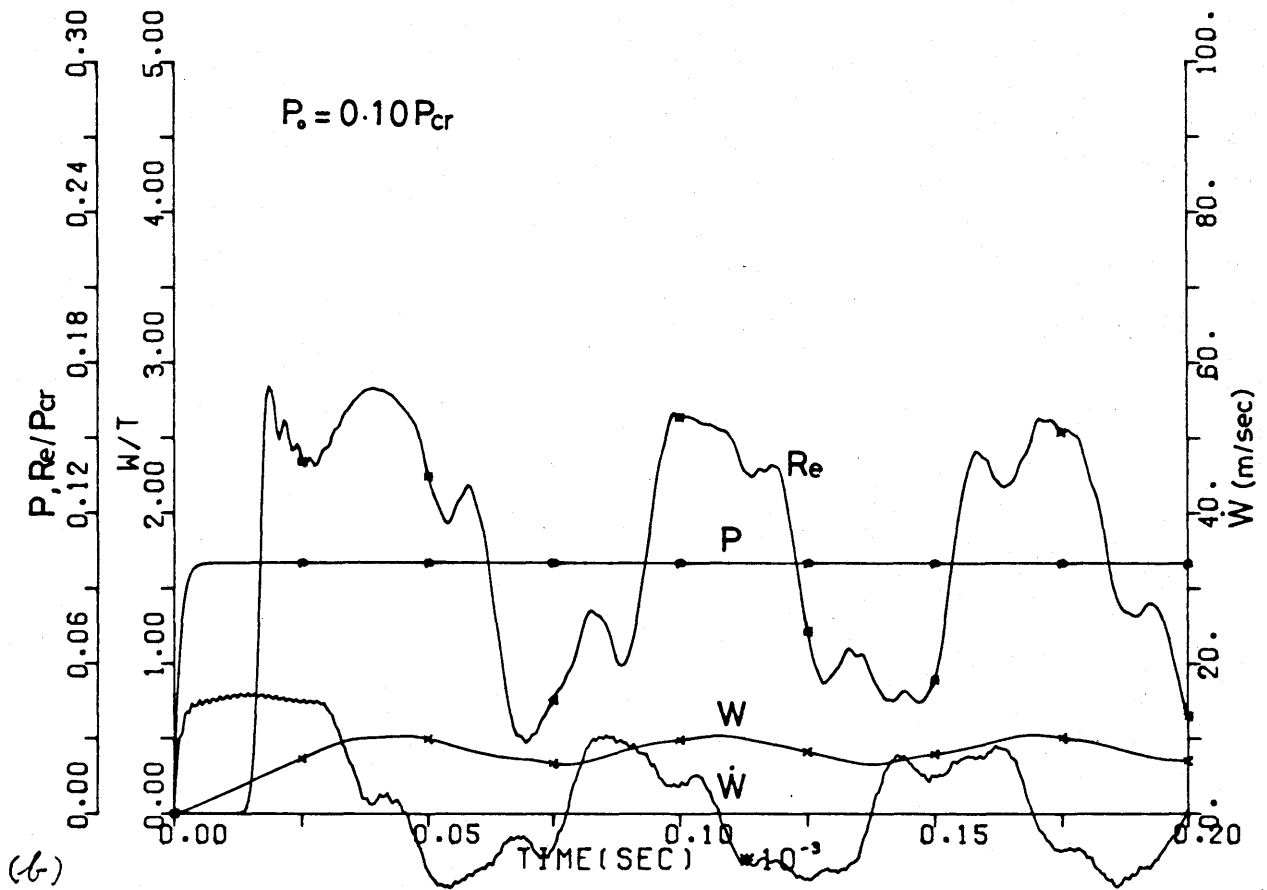
(3) ステップ状の荷重が印加される場合には  $P_0/P_{cr} \geq 0.15$  で塑性座屈が起るので、静的な場合の  $P_{max}/P_{cr} = 0.1649$  よりいく分低下する。塑性座屈が生ずる位置も、 $P_0/P_{cr} = 0.15 \sim 0.165$  では支持端側、 $P_0/P_{cr} = 0.165 \sim 0.180$  では両端、そして  $P_0/P_{cr} > 0.180$  では荷重端側と変化し、 $P_0/P_{cr}$  に関して3種類に分れることが明らかになった。

(4) ステップ状の変形速度が印加される場合には、変形速度の如何にかかわらず荷重端でのみ塑性座屈が起る。これは軸変形と曲げ変形の伝わる速度の差によるものと思われる。すなわち、軸変形は早く支持端に伝わるが、座屈に到るほどの影響はない。このことは、反力 $R_e$ の曲線が荷重 $P$ に比べてすぐに減衰しないことから分る。したがって、曲げ変形がゆるやかに伝わるため、荷重端側でのみ座屈が起るものと推察される。

DEFORMATION CURVES



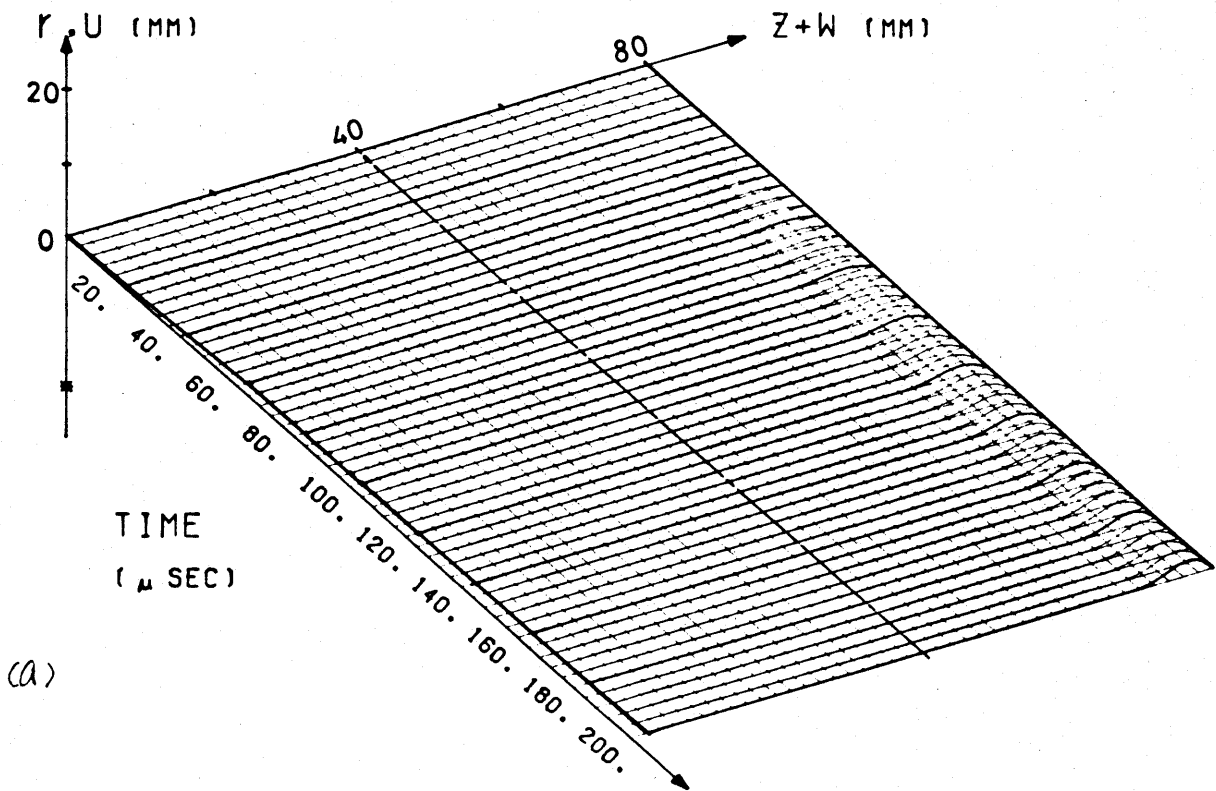
(a)



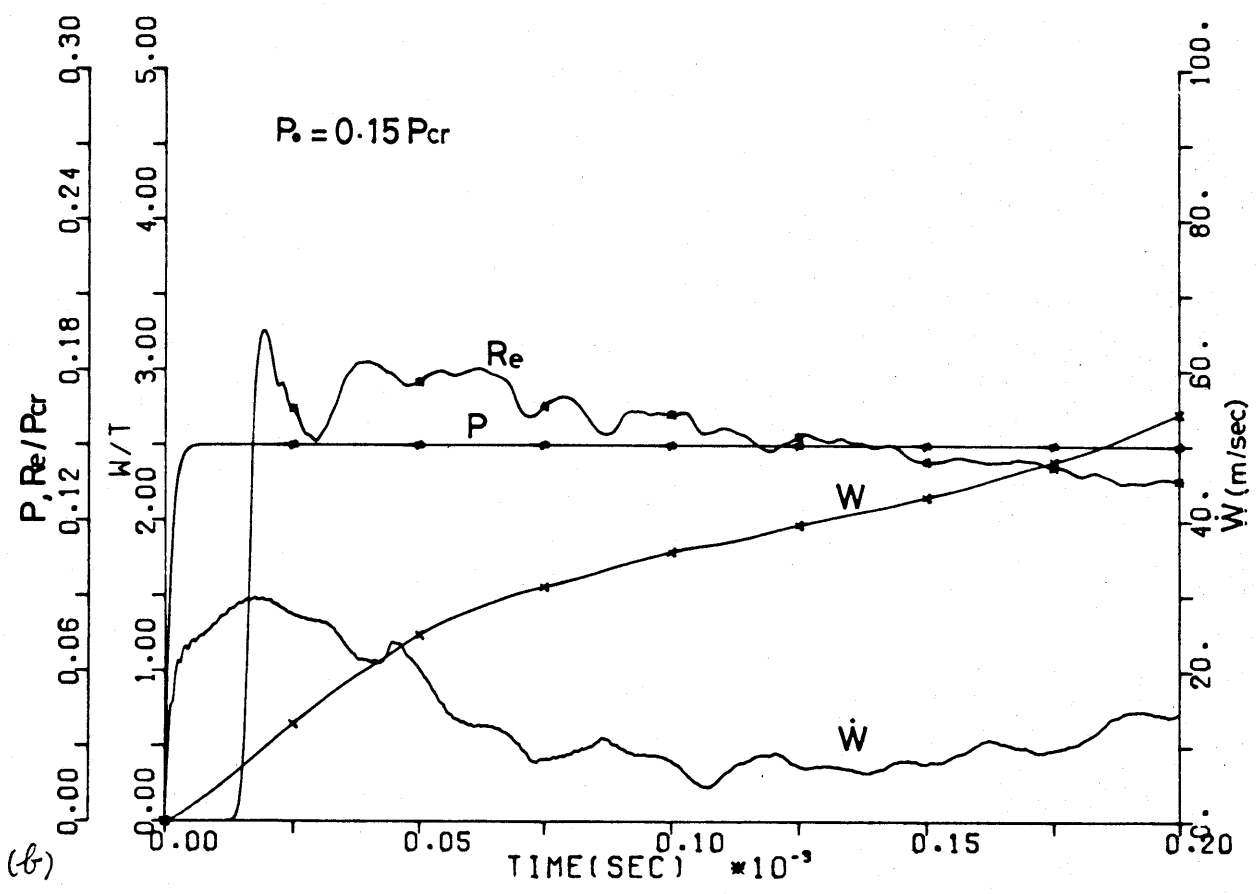
(b)

図27. 荷重が印加された場合の円筒殻母線の変形と過渡応答  $P, Re, W, \dot{W}$  vs  $t$ , ( $P/P_{cr} = 0.1$ ,  $\hbar = 0.5 \mu sec$ ,  $C = 10^6 (sec^{-1})$ )

DEFORMATION CURVES



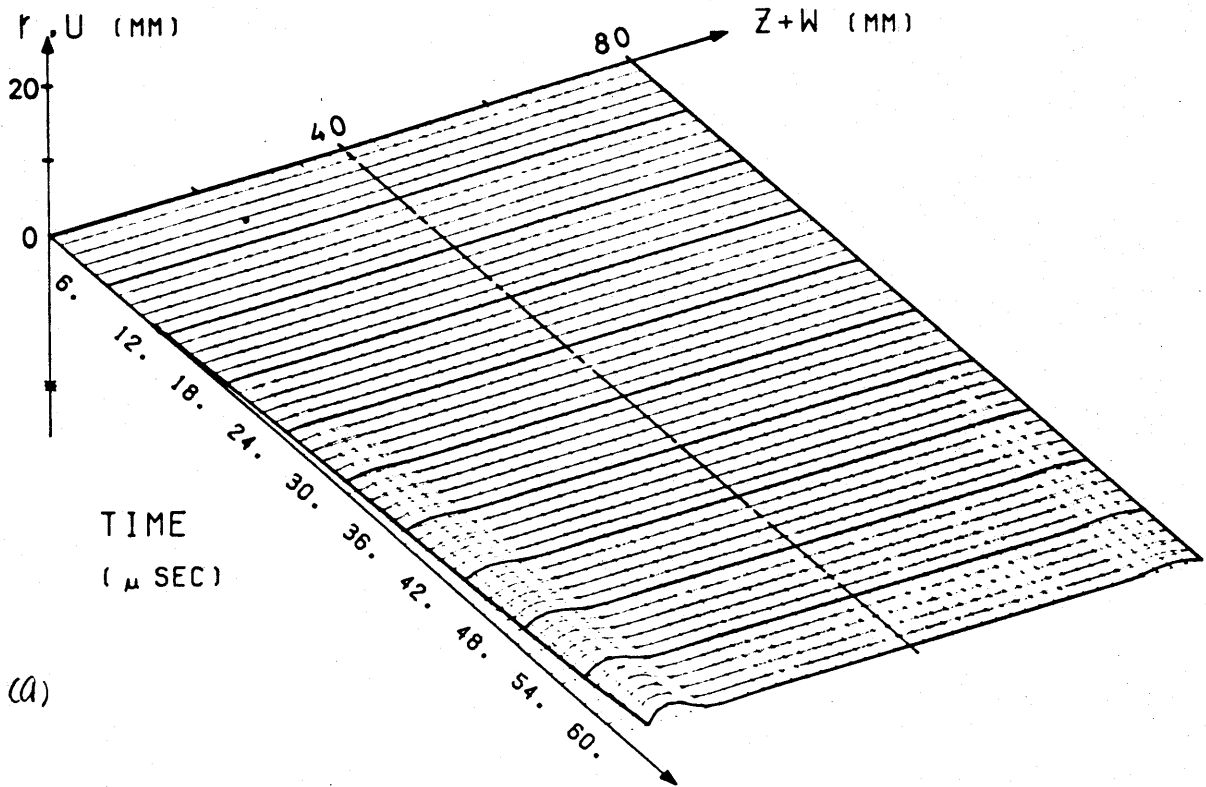
(a)



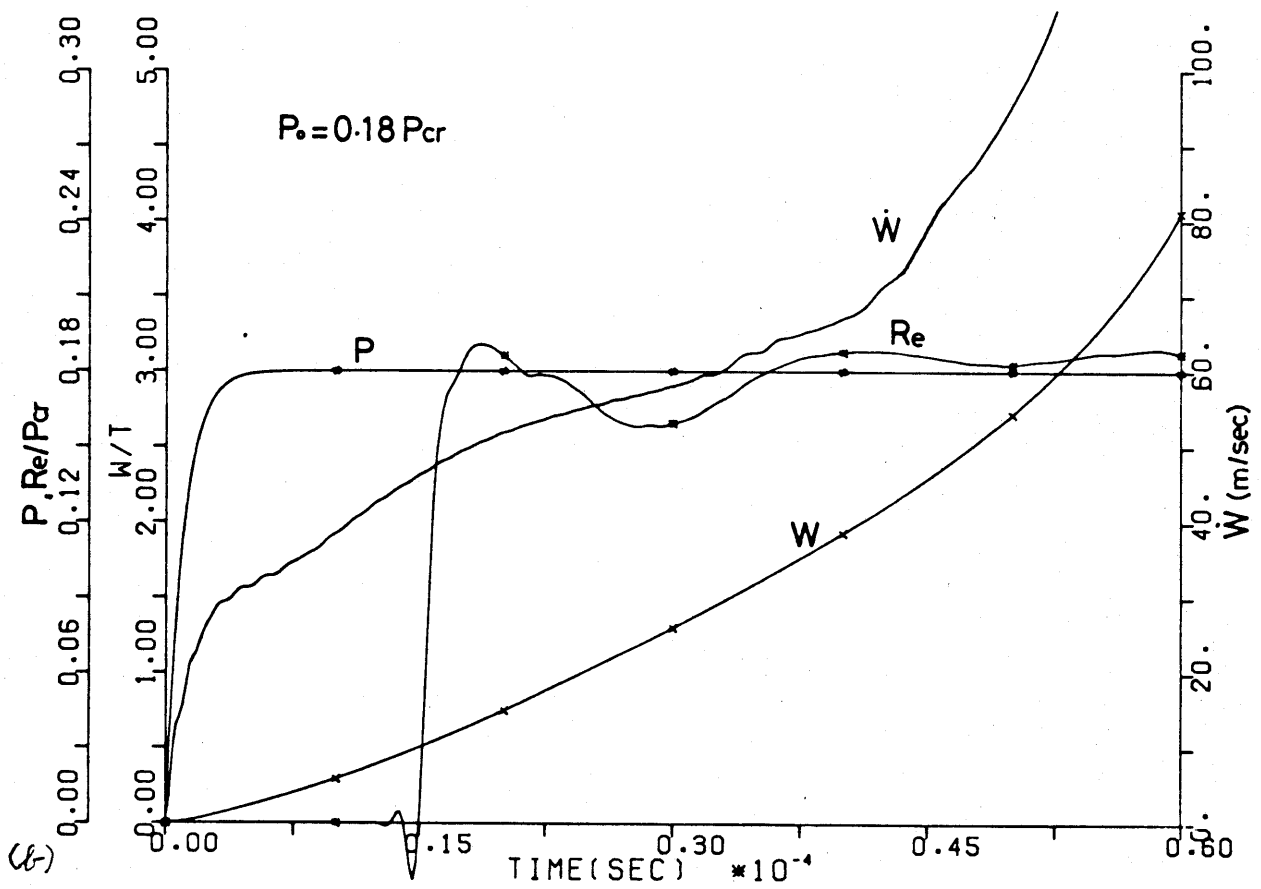
(b)

28.  $P_0/P_{cr} = 0.15, h = 0.5 \mu sec, c = 10^6 (sec^{-1})$

DEFORMATION CURVES



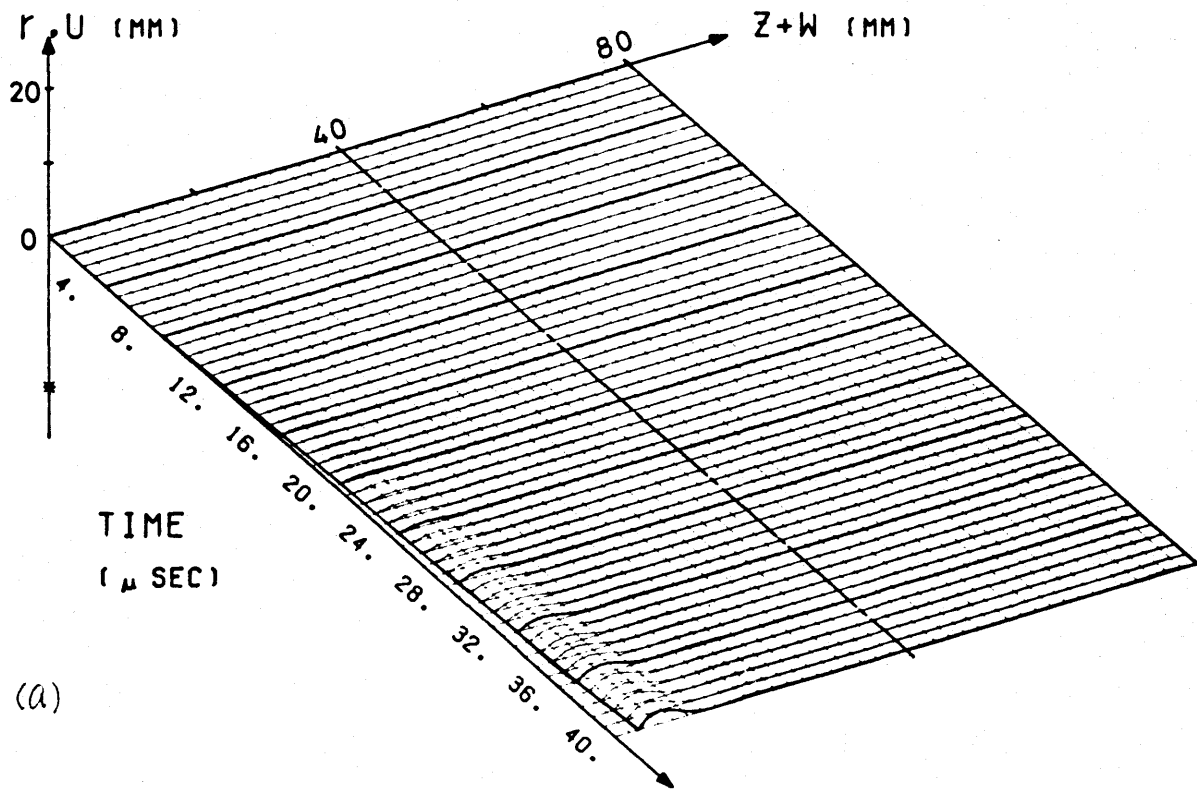
(a)



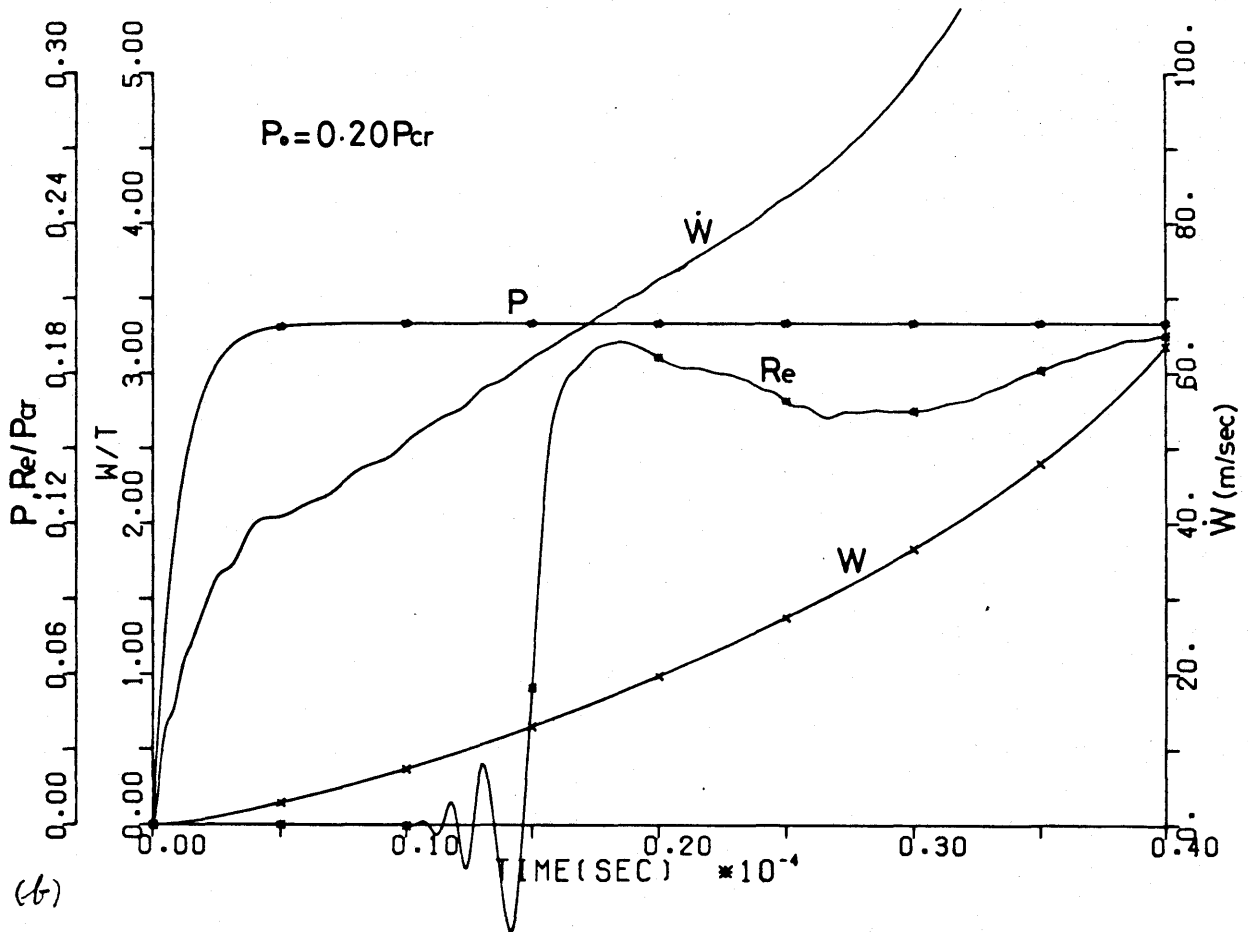
(b)

29.  $P_0/P_{cr} = 0.18, k = 0.2 \mu\text{sec}, C = 10^6 (\text{sec}^{-1})$

DEFORMATION CURVES



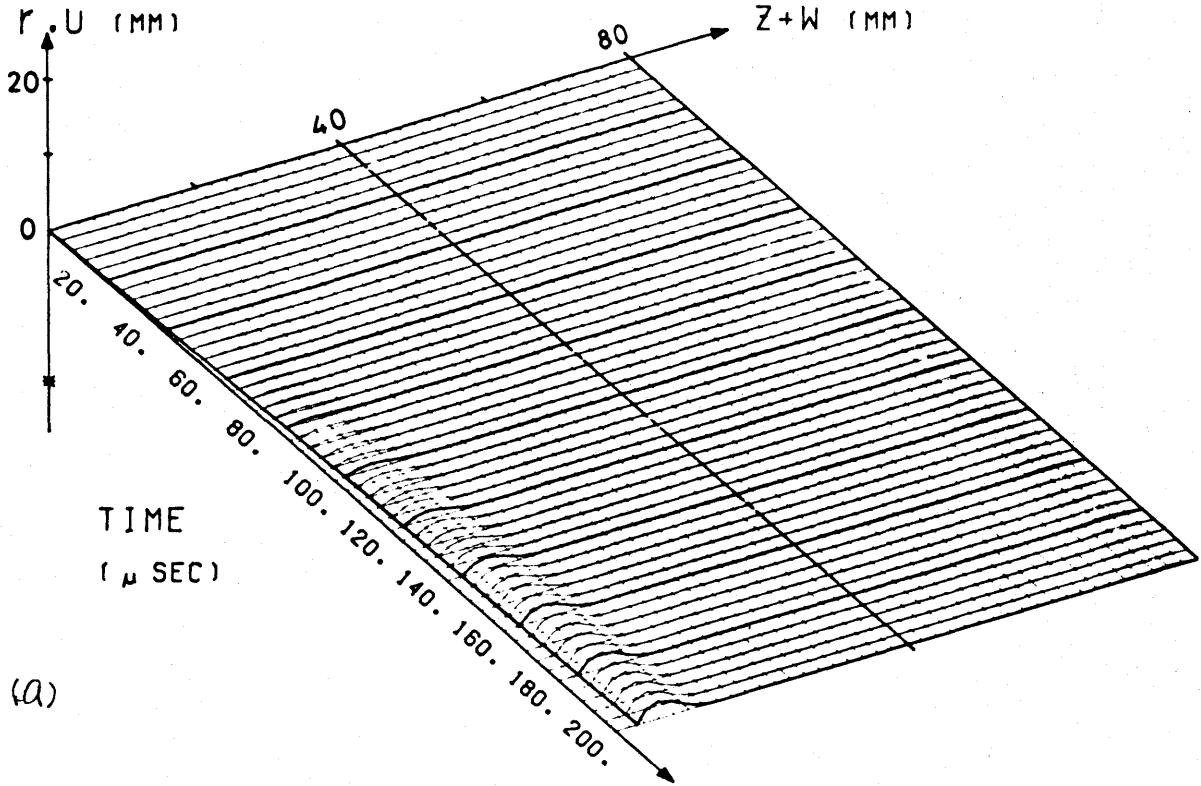
(a)



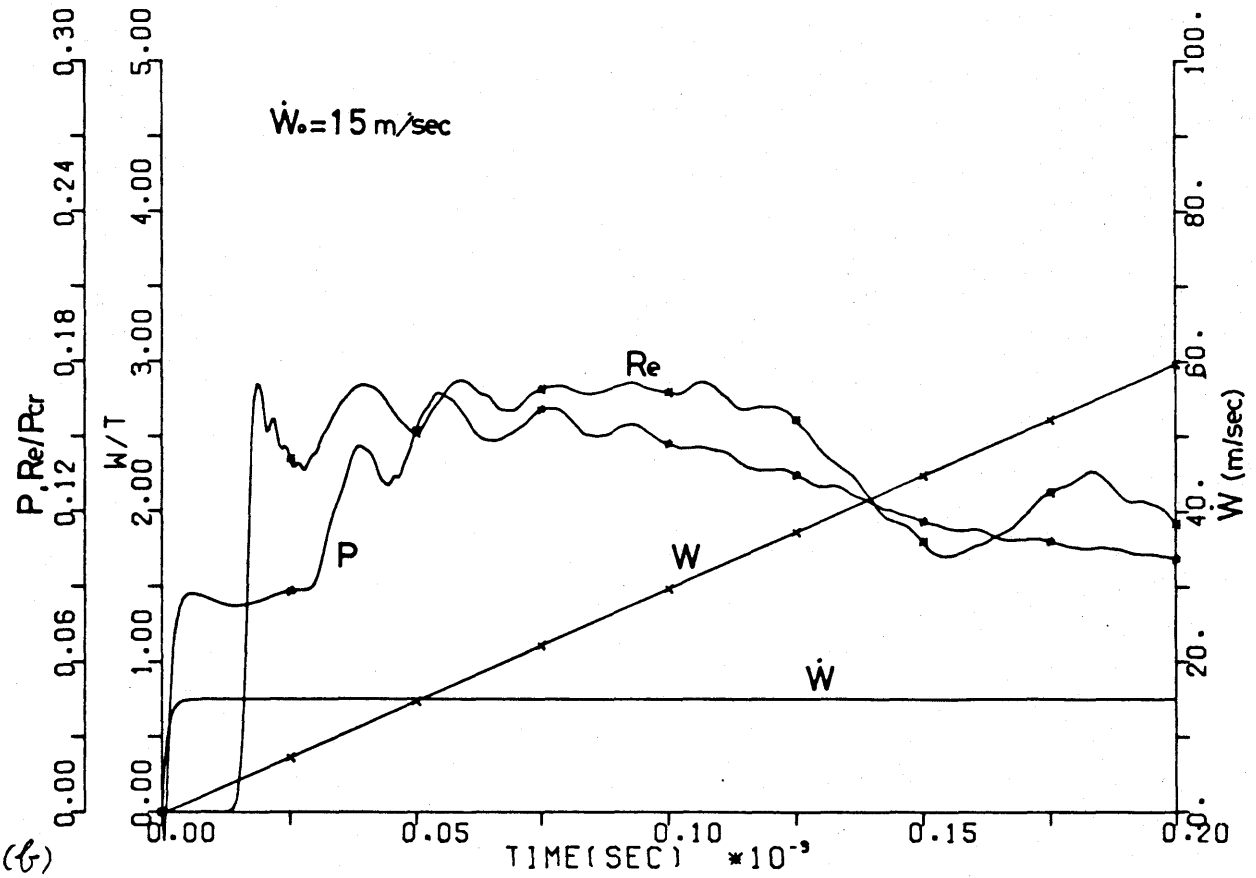
(b)

30.  $P_0/P_{cr} = 0.20, \tau = 0.1 \mu sec, C = 10^6 (sec^{-1})$

DEFORMATION CURVES



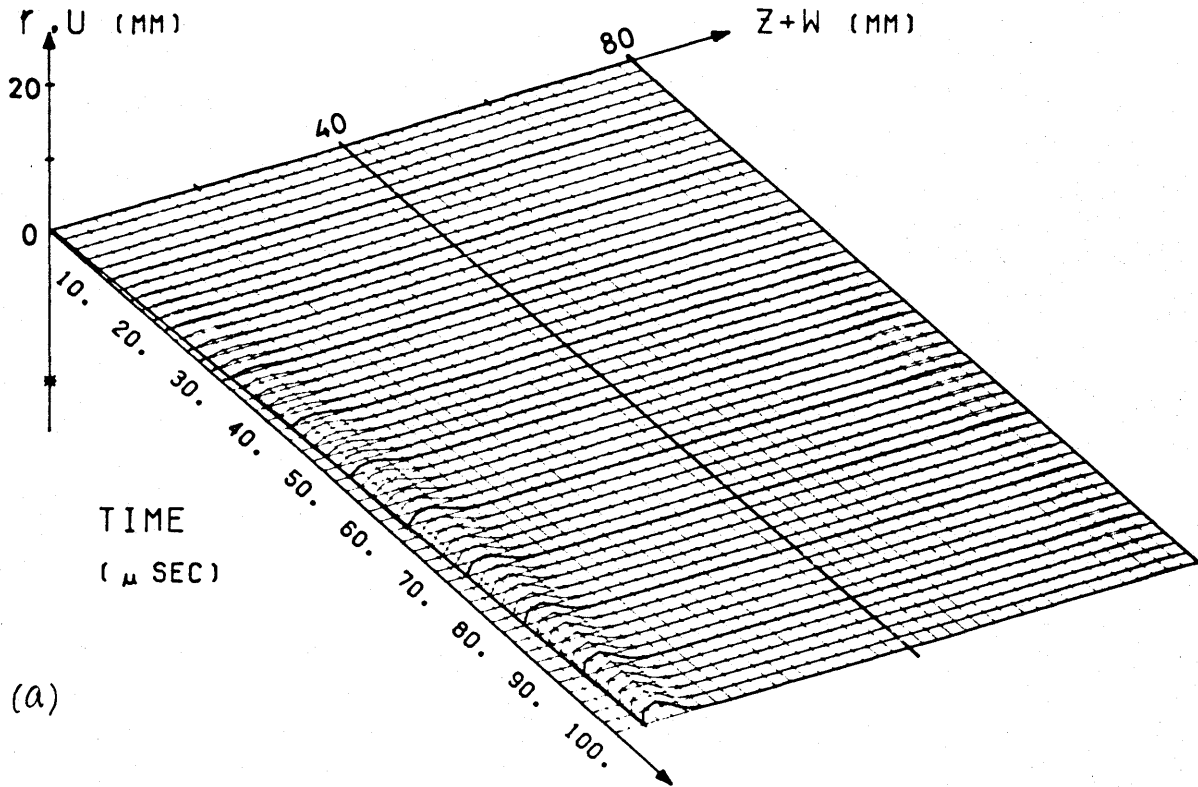
(a)



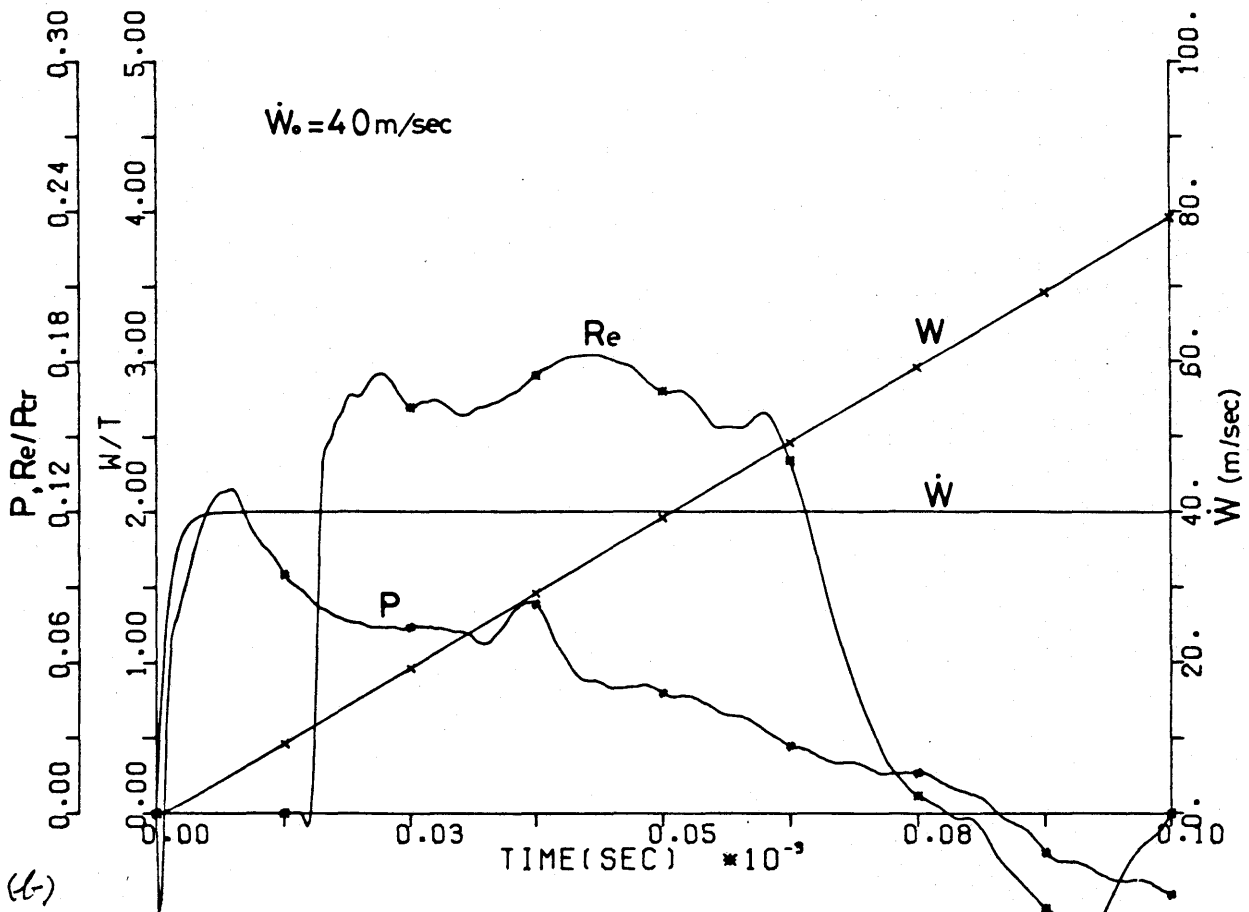
(b)

図31. 速度が印加された場合の円筒殻母線の変形と過渡応答  $P, Re, W, \dot{W}$  vs  $t$ , ( $\dot{W}_0 = 15 \text{ m/sec}$ ,  $h = 0.5 \mu\text{sec}$ ,  $C = 10^6 (\text{sec}^{-1})$ )

DEFORMATION CURVES



(a)



(b)

32.  $\dot{W}_0 = 40$  m/sec,  $h = 0.25 \mu$ sec,  $C = 10^6$  (sec $^{-1}$ )



## 第 5 章 総括

航空機の不時着時とか自動車の衝突時には、機体や車体には非常に大きな力が衝撃的に作用する。この時に、構造要素の一部を破壊しやすくして大きなエネルギーの大部分を吸収し、人体や重要な機器に及ぶ損傷を最小限に食い止めようとする設計法が注目されている。その構造要素の例に円筒殻がある。比較的細長い円筒殻は軸方向に圧縮するとちょうちん状に潰れる座屈様式を示す。これは連続塑性座屈と呼ばれており、その特長は、比較的小さな荷重で多段にわたる座屈を繰返すので最終的には大きな変形量となることである。これは衝撃エネルギーを吸収するための理想の構造要素の一つといえる。

そこで本研究では、この円筒殻が軸圧縮を受けたときの連続塑性座屈現象を解析した。その結果、次の事項が明らかになった。

才2章において、(1)コンプリメンタリ仮想仕事の原理に基づく擬平衡形要素を用いた定式化を示した。そして従来、板や殻の弾塑性問題への応用は困難と考えられていた、応力仮定の Hybrid 法もこの擬平衡形要素を用いることで可能となることを示した。(2)数値計算例から円筒殻の連続塑性座屈の初期座屈は弾性座屈臨界値の15~18%という極めて低い値で起ることと、座屈によって生ずるバルジ変形は円筒殻の支持端の近くに来ることが示された。そして殻の内部に生ずる応力分布と塑性域の分布の変遷の様子が詳細に解明できた。

才3章において、(1)接触問題を扱うのに拘束条件付き仮想仕事の原理を用いる定式化を示した。そしてこの方法が塑性大変形を伴う2次元接触問題で、接触面の状態が変化し、かつその位置が移動するような場合も合理的に扱えることを示した。(2)連続塑性座屈の初期座屈後の変形には殻端での接触条件ならびに接触の位置とその動きが大きく影響することと、円筒殻の

もつ剛性が初期座屈で失われたあと、バルジ変形の進行と共に再び剛性を回復し、また喪失する現象が数値計算例によって初めて確認された。

才4章において、(1)動的な荷重を受けて塑性座屈する円筒殻の過渡応答を解析するために前述の擬平衡形要素を用いた運動方程式の定式化を示した。(2)運動方程式を直接数値積分する方法として *Newmark* の方法は非線形問題にも有効に用いることができることが確認された。ただし、振動解に対しては無条件に安定であるが、指数解に対しては条件付き安定であることが示された。(3)計算例から円筒殻にステップ状の軸荷重が印加される場合には、塑性座屈変形の生ずる位置が荷重( $P_0$ )の大きさによって、 $P_0/P_{cr}=0.15\sim 0.165$  では支持端、 $P_0/P_{cr}=0.165\sim 0.18$  では両端、そして  $P_0/P_{cr} > 0.18$  では荷重端と変化し、 $P_0/P_{cr}$  に関して3種類に分れることが明らかになった。一方、ステップ状の変形速度が印加される場合には変形速度の如何にかかわらず、い

つも荷重端でバルジ変形が形成される。

## 文献

- (1) 滝、西村：薄肉断面曲線梁の曲げ剛性について、日本航空宇宙学会誌、才26巻才291号、1978
- (2) 滝、小松、西村：円筒殻の塑性大変形の擬平衡形要素による解析、日本航空宇宙学会誌、才27巻才310号、1979
- (3) Y.Taki, T.Komatsu and T.Nishimura : Analysis of Large Plastic Deformation in Cylindrical Shell by Using Pseudo-Equilibrium Hybrid Element, Trans. of the JSASS, Vol.22, No.57, 1979
- (4) 滝、宮入、小松、西村：擬平衡形軸対称殻要素、名城大学理工学部研究報告、才19号、1979
- (5) 滝、西村：塑性大変形を伴う接触問題の解析、日本航空宇宙学会誌、(受理)
- (6) 滝、小松、西村：円筒殻の塑性大変形の擬平衡形要素による解析才2報(動的応答)、日本航空宇宙学会誌、(受理)
- (7) Y.Taki and T.Nishimura : Analysis of Progressive Plastic Buckling in Cylindrical Shell as Contact Problem, AIAA Journal (being published)
- (8) W.H.Horton and S.C.Bailey : Structural Instability, Final Report, AFOSR 68-1194, 1961
- (9) S.P.Timoshenko and J.M.Gere : Theory of Elastic Stability, 2nd Edition, McGraw-Hill, New York, 1961
- (10) W.Fairbrain : An Account of the Construction of the Britannia and Conway Tubular Bridges, London, 1849
- (11) R.Lorenz : Achsensymmetrische Verzerrungen in Dünnwandigen Hohlzylindern, Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure, Vol.52, No.43, P.1766, 1908

- (12) S.P.Timoshenko : Einige Stabilitätsproblem der Elastizitätstheorie, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Vol.58, No.4, P.378, 1910
- (13) A.Robertson : The Strength of Tubular Struts, Proceedings of the Royal Society, London, Series A, Vol.121, No.788, P.558, 1928
- (14) E.E.Lundquist : Strength Tests of Thin-Walled Duralumin Cylinders in Compression, NACA Report 473, 1933
- (15) L.H.Donnel : A New Theory for the Buckling of Cylinders Under Axial Compression and Bending, Transactions of the ASME, Vol.56, P.795, 1934
- (16) T. von Karman and H.S.Tsien : The Buckling of Thin Cylindrical Shells under Axial Compression, Journal of Aeronautical Sciences, Vol.8, P.303, 1941
- (17) Y.C.Fung and E.E.Sechler : Instability of Thin Elastic Shells, Proceedings of the First Symposium on Naval Structural Mechanics, Stanford University, edited by J.N.Goodier and N.J.Hoff, Pergamon Press, P.115, 1958
- (18) W.F.Thielmann : New Developments in the Nonlinear Theories of the Buckling of Thin Cylindrical Shells, Aeronautics and Astronautics, Proceedings of the Durand Centennial Conference, edited by N.J.Hoff and W.G.Vincenti, Pergamon Press, London
- (19) N.J.Hoff : The Perplexing Behaviour of Thin Circular Cylindrical Shells in Axial Compressions, SUDAAR No.256, Stanford University, Department of Aeronautics and Astronautics, 1966
- (20) L.R.Herrmann : Finite Element Bending Analysis for Plates, Proceedings of the ASCE, Vol.93, No.EM5, P.13, 1967

- (21) 鷺津久一郎：弾性学の変分原理概論、コンピュータによる構造工学講座Ⅱ-3-A、日本鋼構造協会編、培風館、1972
- (22) T.H.H.Pian : Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distribution, AIAA Journal, Vol.2, No.7, P.1333, 1964
- (23) 吉田、雨宮、増田：立体構造解析のための薄板有限要素法、土木学会論文集才211号、P.19, 1973
- (24) T.H.H.Pian : Formulation of Finite Element Methods for Solid Continua, Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design, edited by R.H.Gallagher, Y.Yamada and J.T.Oden, The University of Alabama Press, P.49, 1971
- (25) R.T.Severn and P.R.Taylor: The Finite Element Method for Flexure of Slabs when Stress Distributions are Assumed, Proceedings, Institute for Civil Engineers, Vol.34, P.153, 1966
- (26) T.H.H.Pian, P.Tong, C.H.Luk and R.L.Spilker : Elastic Plastic Analysis by Assumed Stress Hybrid Model, Proceedings of the 1974 International Conference on FEM in Engineering, at Australia, P.419, 1974
- (27) K.Washizu : Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Second Edition, Pergamon Press, Oxford, 1975
- (28) S.P.Timoshenko and S.Woinowsky-Krieger : Theory of Plates and Shells, 2nd Edition, McGraw-Hill, 1959
- (29) 成岡、丹羽、山田、白石：構造力学(Ⅲ)、板の力学、丸善、1970
- (30) 林 毅 編：軽構造の理論と其の応用(上)、日本科学技術連盟、1966
- (31) H.Isakson, H.Armen and A.Pifko : Discrete-Element Methods for the Plastic Analysis of Structures, Report NASA CR-803, 1967

- (32) H.Armen, H.S.Levie and A.B.Pifko : Plasticity Theory and Finite Element Applications, Advances in Computational Method in Structural Mechanics and Design, edited by J.T.Oden, Huntsville, P.393, 1972
- (33) Z.Mröz : On the Description of Anisotropic Workhardening, Journal Mech. Phys. Solid, Vol.15, P.163, 1967
- (34) Z.Mröz : An Attempt to Describe the Behaviour of Metals under Cyclic Loads Using a More General Workhardening Model, Acta. Mechanica, Vol.7, P.199, 1969
- (35) H.Arman, H.Levine, A.Pifko and A.Levy : Nonlinear Analysis of Structures, Report NASA CR-2351, 1974
- (36) 山田嘉昭 : 材料および幾何学非線形問題の数値解析、日本航空宇宙学会誌、才21巻才239号、1973
- (37) 西村、滝 : 歪硬化材料の有限増分塑性理論とそのアルゴリズム、才17回構造強度に関する講演会、日本航空宇宙学会、P.165、1975
- (38) 安藤良夫ほか : 有限要素法による軸対称かくの弾塑性大たわみ解析、日本機械学会論文集、才37巻才303号、P.2069、1971
- (39) Y.C.Fung : Foundation of Solid Mechanics, Prentice-Hall Inc., New Jersey, U.S.A., 1965
- (40) O.C.Zienkiewicz : The Finite Element Method, 3rd edition, McGraw-Hill, London, P.450, 1977
- (41) 山田、岩田 : 有限要素法による不安定現象の解析、日本鋼構造協会才9回大会研究集会論文集、P.57、1975
- (42) 平田隆 : 外圧を受ける部分球殻の非線形座屈解析、日本鋼構造協会才9回大会研究集会論文集、P.71、1975
- (43) 菊地文雄 : 荷重増分法の適用に関する若干の考察、CAS研究報告、P.31、1975



- (44) C.K.Chan and I.S.Tuba : A Finite Element Method for Contact Problems of Solid Bodies-Part I. Theory and Validation, Int. Journal Mech. Sci., Vol.13, P.615, 1971
- (45) 大手敏：有限要素法による弾性接触応力の解析、日本機械学会論文集、才38巻才313号、P.2210, 1972
- (46) 葛、山地：接触問題の有限要素法に関する研究、日本機械学会誌、才76巻才651号、P.348, 1973
- (47) R.Gaertner : Investigation of Plane Elastic Contact Allowing for Friction, Computers and Structures, Vol.7, P.59, 1977
- (48) 半谷、国田、本間：移動境界を持つ弾性接触問題の有限要素解析、日本鋼構造協会才11回大会研究集会論文集、P.65, 1977
- (49) 丸井英男：有限要素法による弾性接触問題の解析、日本鋼構造協会才11回大会研究集会論文集、P.253, 1977
- (50) H.Petersson : Application of the Finite Element Method in the Analysis of Contact Problem, Proceedings of the International Conference on Finite Elements in Nonlinear Solids and Structural Mechanics, Geilo, Norway, Vol.2, P.845, Aug., 1977
- (51) L.R.Herrmann : Nonlinear Finite Element Analysis of Frictional Systems, Proceedings of the International Conference on Finite Elements in Nonlinear Solids and Structural Mechanics, Geilo, Norway, Vol.2, P.825, Aug., 1977
- (52) B.Fredriksson, G.Rydholm and P.Sjöblom : Variational Inequalities in Structural Mechanics with Emphasis on Contact Problems, Proceedings of the International Conference on Finite Elements in Nonlinear Solids and Structural Mechanics Geilo, Norway, Vol.2, P.863, Aug., 1977
- (53) L.R.Herrmann : Finite Element Analysis of Contact Problems, Proceedings of the ASCE, Vol.104, No.EM5, P.1043, 1978

- (54) T.J.R.Hughes, R.L.Taylor, J.L.Sackman, A.Curnier and W. Kanoknukulchai : A Finite Element Method for a Class of Contact-Impact Problems, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 8, P.249, 1976
- (55) T.J.R.Hughes, R.L.Taylor, J.L.Sackman and W.Kanoknukulchai : Finite Element Formulation and Solution of Contact-Impact Problems in Continuum Mechanics-IV, SESM Report No.76-4, University of California, Berkeley, July, 1976
- (56) T.J.R.Hughes, R.L.Taylor and W.Kanoknukulchai : A Finite Element Method for Large Displacement Contact and Impact Problems, Formulations and Computational Algorithms in Finite Element Analysis, MIT Press, Cambridge, P.468, 1977
- (57) N.M. Newmark : A Method Of Computation for Structural Dynamics, Proceedings of the ASCE, Vol.85, No.EM3, P.67, 1959
- (58) R.E.Nickell : On the Stability of Approximation Operator in Problems of Structural Dynamics, Int. J. Solids Structures, Vol.7, P.301, 1971
- (59) K.J.Bathe and E.L.Wilson : Stability and Accuracy of Direct Integration Methods, In. J. Earthquake Eng. and Structural Dynamics, Vol.1, P.283, 1973
- (60) J.H.Argyris and D.W.Scharpf : Finite Elements in Time and Space, Aero. J. of Roy. Aeron. Soc., Vol.73, P.1041,1969
- (61) R.W.H.Wu and E.A.Witmer : Nonlinear Transient Responses of Structures by the Spatial Finite Element Method, AIAA Journal Vol.11, P.1110, 1973
- (62) J.C.Houbolt : A Recurrence Matrix Solution for the Dynamic Response of an Elastic Aircraft, J.Aero.Sci., Vol.17, P.540, 1950

- (63) 清水、渡辺、山本：構造解析のための直接積分法について、  
機械学会講演論文集、NO.740-12、1974
- (64) M.Geradin : A classification and Discussion of Integration  
Operators for Transient Structural Response, AIAA paper  
#74-105 (AIAA 12th Aerospace Science Meeting, Jan.,) 1974
- (65) O.C.Zienkiewicz : The Finite Element Method, 3rd Edition,  
McGraw-Hill, London, P.569, 1977
- (66) 山本、山田：マトリックス構造解析の誤差論、コンピュー  
タによる構造工学講座 II-5-13、培風館、P.149、1972
- (67) 戸川隼人：マトリックスの数値計算、オーム社、P.270、1971
- (68) G.B.Warburton : The Influence of the Finite Element Method  
on Developments in Structural Dynamics, Energy Methods in  
Finite Element Analysis edited by R.Glowinski, E.Y.Rodin  
and O.C.Zienkiewicz, John Wiley & Sons, P.59, 1979
- (69) T.J.R.Hughes and W.K.Lui : Implicit-Explicit Finite Elements  
in Transient Analysis : Stability Theory, Journal of Applied  
Mechanics, Transactions of the ASME, Vol.45, P.371, 1978
- (70) T.J.R.Hughes, T.K.Caughey and W.K.Lin : Finite Element  
Methods for Nonlinear Elastodynamics which Conserve Energy,  
Journal of Applied Mechanics, Transaction of the ASME,  
Vol.45, P.366, 1978
- (71) C.A.Felippa and K.C.Park : Computational Aspects of Time  
Integration Procedures in Structural Dynamics Part 1 :  
Implementation, Journal of Applied Mechanics, Transactions  
of the ASME, Vol.45, P.595, 1978

## 附 録 : 擬平衡形軸対称殻要素

塑性大変形問題を有限要素法で解くための、コンプリメンタリ仮想仕事の原理を基礎にした擬平衡形軸対称殻要素の撓み性 (*flexibility*) 行列、変形-変位関係、ひずみ-変形関係、剛性行列、幾何学剛性行列およびコンシステント質量行列の誘導を示す。

### 1. 撓み性行列

基準座標系に円筒座標  $r, \varphi, z$  をとり (図 1-a)、曲線  $AB$  を  $z$  軸まわりに回転して得られる曲面を軸対称殻要素  $AB$  とする。要素  $AB$  の中央曲面上に局所座標系  $s, \varphi, r$  をとる。ここで、応力の代わりに微小部分の断面に作用する断面力と曲げモーメントの増分  $N_s, N_\varphi, Q, M_s, M_\varphi$  を図 1-b に示すように定義する。荷重状態が軸対称であれば、内力の分布は  $\varphi$  に依存しない。分布荷重を省略するとき、平衡式は次のように表される。

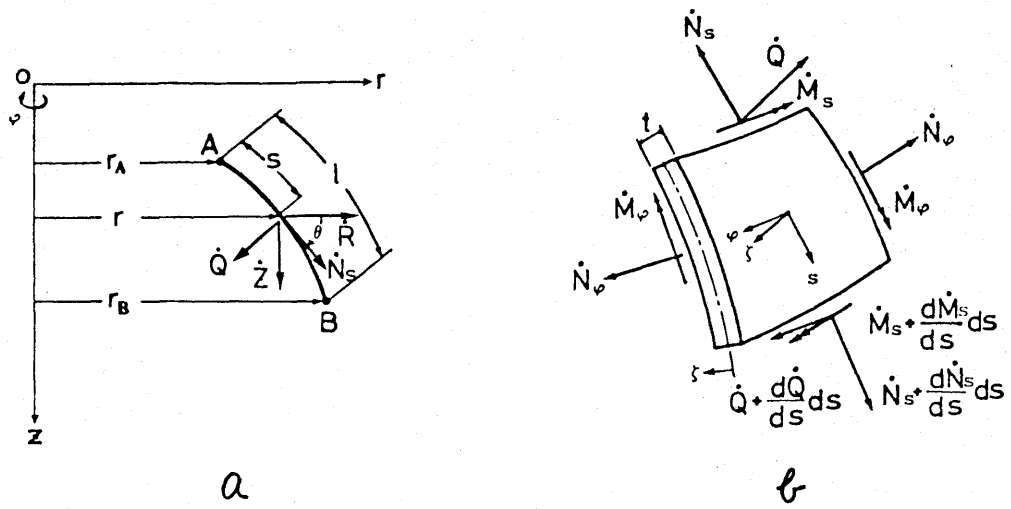


図1. 軸対称殻要素の座標系と内力

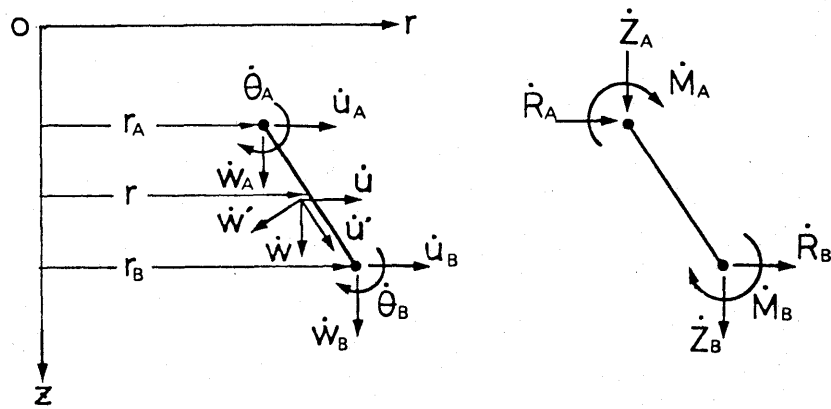


図2. 軸対称殻要素の節点変位, 節点力

$$\frac{d}{ds}(r\dot{R}) - \dot{N}_g = 0 \quad (1-a)$$

$$\frac{d}{ds}(r\dot{Z}) = 0 \quad (1-b)$$

$$\frac{d}{ds}(r\dot{M}_s) - \dot{M}_g \cos \theta - r\dot{Q} = 0 \quad (1-c)$$

ここで  $\dot{R}$ ,  $\dot{Z}$  は次式で与えられる  $r, z$  方向の断面合力である (図 1)。

$$\dot{N}_s = \dot{R} \cos \theta + \dot{Z} \sin \theta \quad (2-a)$$

$$\dot{Q} = -\dot{R} \sin \theta + \dot{Z} \cos \theta \quad (2-b)$$

ドット記号( $\dot{\quad}$ )はいずれも微小増分量を表す。

要素内において、 $\dot{N}_g, \dot{M}_g$  および  $dr/ds = \cos \theta$  が一定であると仮定すれば、式 (1-a), (1-b), (1-c) は簡単に積分され、そして式 (2-a), (2-b) を用いれば次のように表される。

$$r\dot{N}_s = \eta l \dot{N}_g \cos \theta + C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta \quad (3-a)$$

$$r\dot{Q} = -\eta l \dot{N}_g \sin \theta - C_1 \sin \theta + C_2 \cos \theta \quad (3-b)$$

$$r\dot{M}_s = -\frac{1}{2} \eta^2 l^2 \dot{N}_g \sin \theta - \eta l C_1 \sin \theta + \eta l C_2 \cos \theta + C_3 + \eta l \dot{M}_g \cos \theta \quad (3-c)$$

ここで  $\eta = (s/l) - \frac{1}{2}$ ,  $l$  は要素長であり、積分定数  $C_1, C_2, C_3$  は  $\eta=0$  における  $r\dot{R}, r\dot{Z}, r\dot{M}_s$  の値を示す。これより、要素内の増分応力  $\dot{\sigma}_{ij}$  の代りに、一般化増分応力の 0 でない成分  $\dot{\sigma}_i$  ( $i=1\sim 4$ ) を次のように選ぶ。

$$\dot{\sigma}_1 = \dot{N}_s, \quad \dot{\sigma}_2 = \dot{N}_y, \quad \dot{\sigma}_3 = \dot{M}_s, \quad \dot{\sigma}_4 = \dot{M}_y \quad (4)$$

式(3)の 5 個の未定定数から作られる 5 個の独立な量に次の量を選んで、部材力増分と定義する。

$$\left. \begin{aligned} \dot{S}_1 &= l\dot{N}_y, & \dot{S}_2 &= (r\dot{N}_s)_{mid} = C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta \\ \dot{S}_3 &= (r\dot{Q})_{mid} = -C_1 \sin \theta + C_2 \cos \theta \\ \dot{S}_4 &= (r\dot{M}_s)_{mid} = C_3, & \dot{S}_5 &= l\dot{M}_y \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

このとき、 $\dot{\sigma}_i$  はこの  $\dot{S}_j$  の関数として与えられる。

$$\dot{\sigma}_i = B_{ij} \dot{S}_j \quad (i=1\sim 4, j=1\sim 5) \quad (6)$$

この  $B_{ij}$  を行列形でかくと、次のようになる。

$$B = \begin{pmatrix} \eta \cos \theta / r & 1/r & 0 & 0 & 0 \\ 1/l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\eta^2 l \sin \theta / 2r & 0 & \eta l / r & 1/r & \eta \cos \theta / r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/l \end{pmatrix}$$

一般化増分応力  $\dot{\sigma}_i$  に対応する一般化増分ひずみ  $\dot{\epsilon}_i$  ( $i=1\sim 4$ ) は次式で与えられる。

$$\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_s, \quad \dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}_\varphi, \quad \dot{\epsilon}_3 = \dot{\kappa}_s, \quad \dot{\epsilon}_4 = \dot{\kappa}_\varphi \quad (7)$$

$\dot{\epsilon}_s, \dot{\epsilon}_\varphi$  は各々  $s, \varphi$  方向の中央面の増分ひずみ、 $\dot{\kappa}_s, \dot{\kappa}_\varphi$  は曲率の変化量を表す。ヤング率を  $E$ 、ポアソン比を  $\nu$ 、殻の厚さを  $t$  とすれば、弾性法則は次式で表される。

$$\dot{\epsilon}_i = H_{ij} \dot{\sigma}_j \quad (i, j = 1\sim 4) \quad (8)$$

この  $H_{ij}$  の成分は、行列形では次のように表される。

$$H = \frac{1}{Et} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12/t^2 & -12\nu/t^2 \\ 0 & 0 & -12\nu/t^2 & 12/t^2 \end{pmatrix}$$

式(6),(8)を用いるとき、要素の変形増分  $\dot{\delta}_i$  ( $i=1\sim 5$ ) は部材力増分の項  $\dot{S}_j$  で表される。

$$\dot{\delta}_i = F_{ij} \dot{S}_j, \quad F_{ij} = \int_{V_n} H_{ke} B_{ki} B_{ej} dV \quad (9)$$

この  $F_{ij}$  を撓み性行列の成分という。



$$|F = \frac{l}{Etr_m} \left\{ \begin{array}{ll} I_2 \cos^2 \theta + (r_m/l)^2 + 3I_4 (l \sin \theta / t)^2 & \cdot \quad \cdot \\ I_1 \cos \theta - \nu (r_m/l) & I_0 \quad \cdot \\ -(b/t^2) I_3 l^2 \sin \theta & 0 \quad (12/t^2) I_2 l^2 \\ -(b/t^2) I_2 l \sin \theta & 0 \quad (12/t^2) I_1 l \\ -(b/t^2) \{ I_3 l \cos \theta \sin \theta - \nu (r_m/l) \sin \theta \} & 0 \quad (12/t^2) I_2 l \cos \theta \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ (12/t^2) I_0 & \cdot \\ (12/t^2) \{ I_1 \cos \theta - \nu (r_m/l) \} & (12/t^2) \{ I_2 \cos^2 \theta + (r_m/l)^2 \} \end{array} \right. \text{SYM}$$

$$\text{ここに } r_m = (r_A + r_B)/2, \quad k = (r_B - r_A)/(r_B + r_A) \quad (10)$$

$$I_n = r_m \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\eta^n}{r} d\eta = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2kn} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{2k} I_{n-1} & n: \text{奇数} \\ -\frac{1}{2k} I_{n-1} & n: \text{偶数} \end{array} \right. \quad (11)$$

$$I_0 = \frac{1}{2k} \log \frac{1+k}{1-k}$$

と置いてある。

## 2. 変形 - 変位関係およびひずみ - 変形関係

要素 AB について、その境界、すなわち節点 A, B 上での節点力増分  $\dot{R}_i$  は式 (3-a), (3-b), (3-c) を用いて、部材力増分  $\dot{S}_j$  で表しうる。

$$\dot{R}_i = A_{ij} \dot{S}_j \quad (i=1\sim 6, j=1\sim 5) \quad (12)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \dot{R}_1 &= r_A \dot{R}_A, & \dot{R}_2 &= r_A \dot{Z}_A, & \dot{R}_3 &= r_A \dot{M}_A \\ \dot{R}_4 &= r_B \dot{R}_B, & \dot{R}_5 &= r_B \dot{Z}_B, & \dot{R}_6 &= r_B \dot{M}_B \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

と置いてある。また  $A_{ij}$  の行列形は次のように表しうる。

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & -\cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\theta & -\cos\theta & 0 & 0 \\ -l\sin\theta/8 & 0 & -l/2 & 1 & -\cos\theta/2 \\ 1/2 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ l\sin\theta/8 & 0 & -l/2 & -1 & -\cos\theta/2 \end{bmatrix}$$

境界上における節点力増分のなす仮想仕事は、部材力増分のなす仕事と等しくなければならないので、次の関係が成り立つ。

$$\dot{R}_i \delta r_i = \dot{S}_j \delta s_j \quad (i=1\sim 6, j=1\sim 5) \quad (14)$$

ここで、 $\delta r_i$  は仮想節点変位である。

$$\left. \begin{aligned} \delta r_1 &= \delta u_A, & \delta r_2 &= \delta w_A, & \delta r_3 &= \delta \theta_A \\ \delta r_4 &= \delta u_B, & \delta r_5 &= \delta w_B, & \delta r_6 &= \delta \theta_B \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式(12)を式(14)へ代入すれば

$$\delta \Delta_j = a_{ji} \delta r_i, \quad \text{ここに } a_{ji} = A_{ij} \quad (16)$$

となる。すなわち  $a$  は  $A$  の転置である。これが変形-変位関係である。

次にひずみ-変形関係について、図2の要素  $AB$  の中央面上における  $s, \varphi$  方向の変位増分を各々  $\dot{u}', \dot{w}'$  とすれば、一般化増分ひずみ  $\dot{\epsilon}_{ij}$  は

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_s &= \frac{d\dot{u}'}{ds} & \dot{\kappa}_s &= -\frac{d^2\dot{w}'}{ds^2} \\ \dot{\epsilon}_\varphi &= \frac{1}{r} (\dot{u}' \cos \theta - \dot{w}' \sin \theta) & \dot{\kappa}_\varphi &= -\frac{\cos \theta}{r} \frac{d\dot{w}'}{ds} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

と書ける。 $\dot{u}', \dot{w}'$  をそれぞれ  $s$  (すなわち  $\eta$ ) に関して1次と3次の多項式で与えるとき、次の関係が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}' &= \left(\frac{1}{2} - \eta\right) \dot{u}'_A + \left(\frac{1}{2} + \eta\right) \dot{u}'_B, \quad \left(-\frac{1}{2} \leq \eta \leq \frac{1}{2}\right) \\ \dot{w}' &= \left(2\eta^3 - \frac{3}{2}\eta + \frac{1}{2}\right) \dot{w}'_A + \left(-2\eta^3 + \frac{3}{2}\eta + \frac{1}{2}\right) \dot{w}'_B \\ &\quad + \left(\eta^3 - \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{4}\eta + \frac{1}{8}\right) \dot{\theta}'_{Al} + \left(\eta^3 + \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{4}\eta - \frac{1}{8}\right) \dot{\theta}'_{Bl} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

この  $\dot{u}', \dot{w}', \dot{\theta}'$  と基準座標系  $(r, z)$  における  $\dot{u}, \dot{w}, \dot{\theta}$  の間には、

座標変換則(19) が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} \dot{u}' \\ \dot{w}' \\ \dot{\theta}' \end{pmatrix}_{A(\text{or } B)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{A(\text{or } B)} \quad (19)$$

それゆえ、式(17)は

$$\dot{\xi}_i = E_{ij} r_j \quad (i=1\sim 4, j=1\sim 6) \quad (20)$$

と表しうる。この  $E_{ij}$  の行列表示は次のようである。

$$E = \begin{pmatrix} -\cos \theta / l & -\sin \theta / l \\ \{(\frac{1}{2} - \eta) + (2\eta^3 - \frac{1}{2}\eta)\sin^2 \theta\} / r & -(2\eta^3 - \frac{1}{2}\eta)\sin \theta \cos \theta / r \\ 12\eta \sin \theta / l^2 & -12\eta \cos \theta / l^2 \\ (6\eta^2 - \frac{3}{2})\cos \theta \sin \theta / r l & -(6\eta^2 - \frac{3}{2})\cos^2 \theta / r l \\ 0 & \cos \theta / l \\ -(\eta^3 - \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{4}\eta + \frac{1}{8})l \sin \theta / r & \{(\frac{1}{2} + \eta) - (2\eta^3 - \frac{1}{2}\eta)\sin^2 \theta\} / r \\ -(6\eta - 1) / l & -12\eta \sin \theta / l^2 \\ -(3\eta^2 - \eta - \frac{1}{4})\cos \theta / r & -(6\eta^2 - \frac{3}{2})\cos \theta \sin \theta / r l \\ \sin \theta / l & 0 \\ (2\eta^3 - \frac{1}{2}\eta)\sin \theta \cos \theta / r & -(\eta^3 + \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{4}\eta - \frac{1}{8})l \sin \theta / r \\ 12\eta \cos \theta / l^2 & -(6\eta + 1) / l \\ (6\eta^2 - \frac{3}{2})\cos^2 \theta / r l & -(3\eta^2 + \eta - \frac{1}{4})\cos \theta / r \end{pmatrix}$$

一方、変形 - 変位関係は式(16)で与えられているが、別の観方

をすれば、要素の変位からその剛体変位成分を差し引いたものであるともいえる。軸対称殻では、 $z$ 方向にその成分を有するだけであるから、次のように書ける。

$$\dot{A}_i = a'_{ij} \dot{r}_j^* \quad (i, j = 1 \sim 5) \quad (21)$$

ここで、次のように置いた。

$$\left. \begin{aligned} \dot{r}_1^* &= \dot{u}_A, & \dot{r}_2^* &= \dot{u}_B, & \dot{r}_3^* &= \dot{w}_A - \dot{w}_B \\ \dot{r}_4^* &= \dot{\theta}_A, & \dot{r}_5^* &= \dot{\theta}_B \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$a' = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & -l \sin \theta / 8 & l \sin \theta / 8 \\ -\cos \theta & \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & -\sin \theta & -\cos \theta & -l/2 & -l/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos \theta / 2 & -\cos \theta / 2 \end{pmatrix}$$

この逆は

$$\dot{r}_i^* = (a')^{-1}_{ij} \dot{A}_j, \quad \text{ここで } \delta_{ji} = (a')^{-1}_{jk} a'_{ki} \quad (23)$$

$$(a')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\cos \theta / 2 & -\sin \theta / 2 & l \sin \theta / 8 & -l \tan \theta / 2 \\ 1 & \cos \theta / 2 & -\sin \theta / 2 & l \sin \theta / 8 & l \tan \theta / 2 \\ 0 & -\sin \theta & -\cos \theta & 0 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/\cos \theta \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & -1/\cos \theta \end{pmatrix}$$

となる。したがって、式(23)を用いて式(20)を書き換えれば

$$\dot{\epsilon}_i = D_{ij} \Delta_j \quad (i=1\sim 4, j=1\sim 5) \quad (24)$$

となる。この  $D_{ij}$  の行列表示は

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1/l & 0 & 0 & 0 \\ 1/r & \eta \cos \theta / r & (2\eta^3 - \frac{3}{2}\eta) \sin \theta / r & \eta^2 l \sin \theta / 2r & \eta l \tan \theta / r \\ 0 & 0 & 12/l^2 & 1/l & 0 \\ 0 & 0 & (6\eta^2 - \frac{3}{2}) \cos \theta / r l & \eta \cos \theta / r & 1/r \end{pmatrix}$$

となる。

### 3. 幾何学剛性行列

前節で述べたとおり、部材の変形は変位より剛体変位分を除いたものであるから、薄肉殻の軸対称変形では、これらは次の5個の量となる。(1)半径方向の広がり、(2)要素節点間長さの伸び、(3)要素の  $r$ - $z$  面内での相対回転、(4)節点Aの回転、(5)節点Bの回転。式に表せば次のようになる。

$$\Delta_i^* = \Delta_i^*(r_j) \quad (i=1\sim 5, j=1\sim 6) \quad (25)$$

$\Delta_i^*(r_j)$  のそれぞれは次のように表しうる。

$$\begin{aligned}
 \Delta_1^* &= (r_A + r_B + u_A + u_B) / 2 \\
 \Delta_2^* &= l' = \sqrt{(r_{BA} + u_{BA})^2 + (z_{BA} + w_{BA})^2} \\
 \Delta_3^* &= (H) = \tan^{-1}(z_{BA} + w_{BA} / r_{BA} + u_{BA}) \\
 \Delta_4^* &= \theta_A - \theta_B \\
 \Delta_5^* &= \theta_A + \theta_B
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

ここで、次の記号を用いた。

$$\begin{aligned}
 r_{BA} &= r_B - r_A, & z_{BA} &= z_B - z_A \\
 u_{BA} &= u_B - u_A, & w_{BA} &= w_B - w_A
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

この5種類の変形に対応する部材力を  $S_j^*$  とすれば、 $\delta \Delta_j^*$  に対する仮想仕事は  $S_i \delta \Delta_i$  と同じものでなければならぬから

$$S_i \delta \Delta_i = S_j^* \delta \Delta_j^* \quad (i, j = 1 \sim 5)
 \tag{28}$$

となる。これより、両者の間には、

$$\begin{aligned}
 S_1^* &= S_1, & S_2^* &= S_2, & S_3^* &= l S_3 \\
 S_4^* &= -\frac{l}{8} \sin \theta \cdot S_1 + S_4 \\
 S_5^* &= -\frac{l}{2} \cdot S_3 - \frac{1}{2} \cos \theta \cdot S_5
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

の関係がある。式(26)から幾何学剛性  $K_{ik}^G = (\partial^2 \Delta_j^* / \partial r_i \partial r_k) S_j^*$  を求

めると、その行列形は次のようになる。

$$K^G = \begin{bmatrix} C_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \text{SYM} \\ C_6 & C_5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ -C_4 & -C_6 & 0 & C_4 & \cdot & \cdot \\ -C_6 & -C_5 & 0 & C_6 & C_5 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ここで、次の記号を用いた。

$$\left. \begin{aligned} C_4 &= \frac{S_2}{l} \sin^2 \theta + \frac{S_3}{l} \sin 2\theta \\ C_5 &= \frac{S_2}{l} \cos^2 \theta - \frac{S_3}{l} \sin 2\theta \\ C_6 &= -\frac{S_2}{2l} \sin 2\theta - \frac{S_3}{l} \cos 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

および

$$l = \sqrt{r_{BA}^2 + z_{BA}^2}, \quad \sin \theta = z_{BA}/l, \quad \cos \theta = r_{BA}/l$$

$S_j^*$  は式(29)により、 $S_j$  で書き換えてある。

#### 4. 質量行列

図2に対応する軸対称殻要素のコンシステント質量は



$$M_{ik} \ddot{r}_k \delta r_i = \int_w \rho \ddot{u}_j \delta u_j dV, \quad u_j = G_{ji} r_i \quad (31)$$

から求まる。ここに  $\rho$  は密度、 $(\dot{\quad})$  は時間微分量 ( $d/dt$ )、また  $(\quad)$  は局所座標系に関する量を表すとす。  $\delta u_j$  を

$$\delta u_1' = \delta u', \quad \delta u_2' = \delta w' \quad (32)$$

と置き、  $\delta r_i'$  を

$$\left. \begin{aligned} \delta r_1' &= \delta u_A', & \delta r_2' &= \delta w_A', & \delta r_3' &= \delta \theta_A' \\ \delta r_4' &= \delta u_B', & \delta r_5' &= \delta w_B', & \delta r_6' &= \delta \theta_B' \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

と置く。変位  $u', w'$  を式(18)と同様に1次と3次の多項式と仮定する。その分布様式が時間に無関係であるとすれば、

$$\ddot{u}_j = G_{ji} \ddot{r}_i \quad (j=1,2, \quad i=1\sim 6) \quad (34)$$

となる。ここで、 $G_{ij}$  の行列形は次のようになる。

$$G = \left[ \begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} - \eta & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 2\eta^3 - \frac{3}{2}\eta + \frac{1}{2} & (\eta^3 - \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{4}\eta + \frac{1}{8})l & \\ \hline \frac{1}{2} + \eta & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & -2\eta^3 + \frac{3}{2}\eta + \frac{1}{2} & (\eta^3 + \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{4}\eta - \frac{1}{8})l & \end{array} \right]$$

式(34)を式(31)へ代入し、積分すれば  $M_{ik}$  が求まる。その行

列表示は

$$M' = pqt \left[ \begin{array}{ccc|c} (3r_A + r_B)/12 & \cdot & \cdot & \\ 0 & (10r_A + 3r_B)/35 & \cdot & \\ 0 & (15r_A + 7r_B)l/420 & (r_A + r_B)l^2/168 & \\ (r_A + r_B)/12 & 0 & 0 & \\ 0 & 9(r_A + r_B)/140 & (6r_A + 7r_B)l/420 & \\ 0 & -(7r_A + 6r_B)l/420 & -(5r_A + 3r_B)l^2/840 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \text{SYM} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ (r_A + 3r_B)/12 & \cdot & \cdot & \\ 0 & (3r_A + 10r_B)/35 & \cdot & \\ 0 & -(7r_A + 15r_B)l/420 & (3r_A + 5r_B)l^2/840 & \end{array} \right]$$

となる。基準系への変換には式(19)の座標変換式を用いれば

よい。

## 謝 辞

本研究の遂行に際し、基礎理論の展開から数値計算に至るまで直接の御指導を頂いた名古屋大学西村融教授に深く感謝の意を表したい。

また、本論文の原稿を校閲して頂き、貴重な示唆を頂いた名古屋大学大橋義夫教授、ならびに数値計算やプログラミングに關して御尽力頂いた名古屋大学二宮市三教授、名古屋大学大型計算機センターの秦野竊世、津田知子の両氏に厚く感謝の意を表します。

また、広い視野から終始変らぬ御指導と御鞭達を頂いた、元名城大学教授土井武夫先生と名城大学官入武夫教授の暖い御励しに、西村研究室の舟橋祥子さんをはじめとする関係各位の多大な援助に厚く感謝する次第である。

## 発表論文

- (1) 滝佳弘、西村融：薄肉断面曲線梁の曲げ剛性について、日本航空宇宙学会誌、才26巻才291号、1978
- (2) 滝佳弘、小松建昭、西村融：円筒殻の塑性大変形の擬平衡形要素による解析、日本航空宇宙学会誌、才27巻才310号、1979
- (3) Y.Taki, T.Komatsu and T.Nishimura : Analysis of Large Plastic Deformation in Cylindrical Shell by Using Pseudo-Equilibrium Hybrid Element, Trans. of the JSASS, Vol.22, No.57, 1979
- (4) 和田均、滝佳弘、高村東作、西村融：混合要素を用いた板、かくの増分法による幾何学非線形解析、日本機械学会論文集A編、才46巻才404号、1980
- (5) H.Wada, Y.Taki, T.Takamura and T.Nishimura : Nonlinear Analysis of Plates and Shells by the Incremental Procedure Using a Mixed Model of the Finite Element Method, Bulletin of JSME, Vol.23, No.186, 1980
- (6) 滝佳弘、西村融：塑性大変形を伴う接触問題の解析、日本航空宇宙学会誌、(受理)
- (7) 滝佳弘、小松建昭、西村融：円筒殻の塑性大変形の擬平衡形要素による解析才2報(動的応答)、日本航空宇宙学会誌、(受理)