

報告番号 伊第 2035 号

毛管中における超流動 ^3He の A-B 相転移

高木 丈夫

主論文

毛管中における超流動 ^3He の

A-B 相転移

高木 丈夫

名古屋大学図書
和 1018957

目次

§ 1. 序	1
§ 2. 超流動 ^3He のオーダーパラメター	6
§ 3. Ginzburg-Landau 領域	9
§ 4. 壁面による境界条件	14
§ 5. オーダーパラメターの決定	18
§ 6. 議論	29
§ References	33
§ 謝辞	35
§ 補遺 1	36
§ 補遺 2	40

§ 1. 序

1960年代までに実験により確認された超流動体として、 ^4He 原子及び金属中の電子対をあげる事ができる。これらの二者のうち、前者の ^4He 原子は、 $(1s)^2$ なる電子構造を持ち、さらに原子核には、陽子及び中性子をそれぞれ2個ずつ有する質量数が4の原子である。また、電子及び核子のスピン和は、それぞれ零であり、 ^4He 原子は内部自由度を持たない Bose 粒子である事が分かる。もう一方の超流動物質である金属中の電子であるが、電子はスピン $\frac{1}{2}$ を持つ Fermi 粒子であるため、Bose 凝縮を起す際には Cooper 対を作り対の運動量が零の状態に凝縮をしていると理解されており、この電子の Cooper 対は、スピン一重項状態である波の軌道状態にあると考えられている。(最近話題の酸化物高温超伝導体の Cooper 対には、s, p, d-波諸説^が有る。) このため、電子の Cooper 対も ^4He 原子と同様に内部自由度を持たない超流体である。

He原子には、 ^4He の他に安定な同位体として ^3He が有る。この ^3He 原子は、 ^4He 原子と原子核の構成が異なり、陽子2個及び中性子1個で構成されており、その全核子のスピン和は $\frac{1}{2}$ となっている。このため、 ^3He 原子の統計性は Fermi 統計となる。 ^3He 原子の超流動転移に関しては、理論及び実験の両方向から研究がなされていたが、1972年に Oscheroff らによつて、

NMR (核磁気共鳴) により超流動転移が実験的に確認された¹⁾。この実験から、超流動 ^3He の Cooper 対の状態は、電子の Cooper 対と異なりスピン三重項状態で P 波の軌道状態を持つ事が示された。この様な Cooper 対の内部自由度のため、 ^3He のオーダーパラメーターは、スピン内部自由度と軌道内部自由度の直積で表現され、 3×3 のテンソル量として記述される²⁾。つまり、超流動 ^3He においては、自発的な対称性の破れが、ゲージ空間のみならず、スピン及び軌道空間に対しても起っているわけである。そして、この内部自由度が、 ^4He 及び超伝導では見られない、多様な超流動 ^3He の物性を産み出しているわけである。

バルクな超流動 ^3He の相図を図 1. に示す。

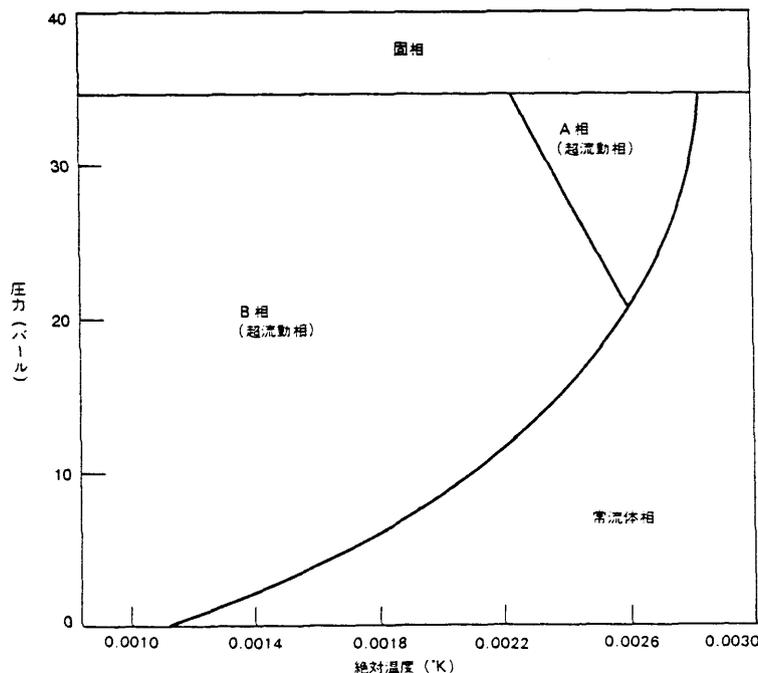


図 1. 0 度付近の ^3He の状態図

A相及びB相と称される2つの相が超流動相である。Cooper対の内部自由度を反映して、超流動相の個数は複数個となつてゐる。NMRを中心とした実験により、A相はABM状態 (Anderson-Brinkman-Morel状態) としてB相はBW状態 (Balian-Werthamer状態) に有る事が確認された。^{2)~4)} この2つの状態は内部対称性が異なるため、A-B相間の相転移は1次転移となつてゐる。また、外部磁場を印加した場合、超流動転移線に沿つて、A1相と呼ばれる、ABM状態からさらにスピン対称性の低くなつた状態が出現する。

この様な超流動相において、スピン動力学、軌道動力学、超流動性、角運動量とゲージの結合、その他の今まで未経験だつた物性が発見され、研究されて来た。これらの豊富な物性は、Cooper対の内部自由度に起因するものである。

ところが最近、実験技術の向上に伴つて、さまざまな実験が可能になりだした。先に記したのは、主にバルクな状態での興味であるが、狭い幾何形状での物性に関しても実験及び理論的な研究が始まつてゐる。

制限された空間における超流動 ^3He の興味として以下に述べる事が掲げられる。まず、超流動 ^4He に比べ、およそ100倍のコヒーレンス長 ($\sim 10\text{ nm}$) を有するため、極めて大きなサイズ効果が認められる。さらに、軌道関数に自由度が有るため、壁面により軌道関数の

異方性等が拘束される。また、その異方性が空間的に変化している場合、オーダーパラメーターのトポロジカルな性質等が問題になって来る。等である。

本論文では、上に述べた様に制限された空間内での超流動 ^3He の振舞いを考察する。幾何形状としては、鏡面壁を有する円筒形とした。これは、平行板様の制限空間では、超流動 ^3He 特有のトポロジカルな性質がうまく引き出されないためである。

この様な円筒形の境界条件下でサイズ効果を考えて行くと、バルクな系の凝縮状態のままでは必然的に空間的な特異領域が生じてしまう。内部自由度を持たない超流動体では、特異点が発生した場合、凝縮振幅をゼロとしてしか特異性を回避し得ない。ところが、内部自由度を有する超流動体では、スピン関数及び軌道関数を連続的に変化させる事により、凝縮振幅を有限に保ち、たまたま特異性を回避し得る。この事例は、B相における渦系の内部構造の問題に見られる。この系では渦の中心部において Cooper 対の内部自由度に起因するゲージ、スピン、軌道それぞれの空間の結合が生じ、バルクなB相以外のエキゾチックな凝縮状態が出現するのである。つまり、超流体のコヒーレンス長 ξ と同程度のスケールの領域では、凝縮状態は凝縮エネルギーだけでなく、空間変化に伴う勾配エネルギーによっても決定されるのである。特に、小さなサイズの

極限においては、勾配エネルギーが零となる状態のみが存在を許されるわけである。^{5)~8)}

本論文では、上記の状況と同様に、勾配エネルギーが重要な状況、円筒半径がコヒーレンス長 ξ でスケールして $\xi \leq R \leq 10^2 \xi$ の形状でのオーダーパラメターの構造及びその自由エネルギーを調べた。その結果を元にして、超流動 A-B 相間の相転移について考察し、この幾何形状においては、ある臨界半径以下で A 相が B 相に対して安定になるという結果を得た。臨界半径は弱結合極限においても 250 nm となり、実際の A-B 相境界では容易にこの数倍になる事が分った。

本論文の構成は、第2章で超流動 ^3He のオーダーパラメターの定義をし、第3章で Ginzburg-Landau 領域での自由エネルギーの表式を導入する。第4章では幾何形状に伴う境界条件を定め、第5章で具体的な計算を行なう。最後に第6章で得られた結果をもとに議論をする。

§2. 超流動 ^3He のオーダーパラメーター

超流動 ^3He の Cooper 対の状態 $\Psi_{\alpha\beta}(\hat{k})$ は、Pauli 行列 α_μ を用いて以下の様に与えられる。

$$\begin{aligned}\Psi_{\alpha\beta}(\hat{k}) &= \Delta_0 \sum_{\mu} (i\alpha_\mu\alpha_y)_{\alpha\beta} d_{\mu}(\hat{k}) \\ &= \Delta_0 \begin{bmatrix} -d_x(\hat{k}) + i d_y(\hat{k}) & d_z(\hat{k}) \\ d_x(\hat{k}) & d_x(\hat{k}) + i d_y(\hat{k}) \end{bmatrix}_{\alpha\beta} \\ &\quad \mu = \{x, y, z\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

ここで、 α と β は Cooper 対の核スピンの磁気量子数、である。また、内部自由度が存在するため、状態を記述する際に、Fermi 球面の方向を指定しなければならない。そのための単位ベクトルが \hat{k} である。 Δ_0 は凝縮振幅を示す。

Cooper 対がスピン三重項状態であるため (2.1) に示される様に、 $\Psi_{\alpha\beta}(\hat{k})$ は、対称行列 $(i\alpha_\mu\alpha_y)_{\alpha\beta}$ で展開され、その展開係数が複素ベクトル $d_{\mu}(\hat{k})$ である。 $d_{\mu}(\hat{k})$ は以下の様に規格化されている。

$$|d_{\mu}(\hat{k})|^2 = 1 \quad (2.2)$$

また、 $d_{\mu}(\hat{k})$ はスピンの回転変換に対して、ベクトルとして振舞う。(補遺1. 参照)

さらに、 $d_{\mu}(\hat{k})$ ベクトルを、軌道運動量 \hat{k}_j ($j = x, y, z$) に対して展開する事により、オーダーパラメターの、 (3×3) テンソル表現 $d_{\mu j}$ を得る。

$$\bar{\Psi}_{\alpha\beta}(\hat{k}) = \Delta_0 \sum_{\mu j} d_{\mu j} (i\sigma_{\mu} \sigma_y)_{\alpha\beta} \hat{k}_j \quad (2.3)$$

また、 $d_{\mu j}$ を凝縮振幅 Δ_0 まで含めて、

$$A_{\mu j} \equiv \Delta_0 d_{\mu j} \quad (2.4)$$

と再定義する。以後、主に (2.4) の表現を用いるが、特に予告しない限り、スピン空間の添字にはギリシア文字を、また軌道空間の添字にはラテン文字を使う。

オーダーパラメターの、スピン及び空間回転に対する変換性は、それぞれの空間での回転操作を示す行列を、 $R_{\mu\nu}^{(s)}$, $R_{jk}^{(o)}$ とすると、

$$A'_{\mu j} = \sum_{\mu' j'} R_{\mu\mu'}^{(s)} R_{jj'}^{(o)} A_{\mu' j'} \quad (2.5)$$

であり、ギリシア添字及びラテン添字ともベクトルとして振舞う。

以後、オーダーパラメターの添字に関しては、同じ添字に対して和を取るものとする。

オーダーパラメーター $A_{\mu j}$ の 9 成分はそれぞれ複素数であり、原理的には 9 個の独立した超流動成分が存在し得る。しかし、現実の超流動相においては、ある対称性を満足する状態が実現している。特にバルクな状況では、本質的に ABM 状態と BW 状態の 2 つの異なる対称性を有する相のみが現われる。一方、バルクでない状況においては、境界条件と Cooper 対の内部自由度により、バルクの状態とは異なる状態も出現する。

補遺 2. に、代表的な凝縮状態のオーダーパラメーターの構造と特徴を示した。参考にされたい。

§3. Ginzburg-Landau 領域

Ginzburg-Landau 領域 (GL 領域) では、凝縮エネルギー密度はスピン及び軌道空間における回転に対して不変な、2次と4次の項で記述される。超流動 ^3He のオーダーパラメーターは、(3×3)のテンソル量であるため、これらの項は(スカラー量)は、(3×3)のテンソルから得られる縮約で与えられ、凝縮エネルギー密度は、その線形結合で与えられる。以下、直交座標系における凝縮エネルギー密度: f_{cond} を示す。²⁾⁹⁾

$$\begin{aligned}
 f_{\text{cond}} = & -\alpha A_{\mu j}^* A_{\mu j} \\
 & + \beta_1 A_{\mu i}^* A_{\mu i}^* A_{\nu j} A_{\nu j} + \beta_2 A_{\mu i}^* A_{\nu i}^* A_{\mu j} A_{\nu j} \\
 & + \beta_3 A_{\mu i}^* A_{\mu j}^* A_{\nu i} A_{\nu j} + \beta_4 A_{\mu i}^* A_{\nu j}^* A_{\mu i} A_{\nu j} \\
 & + \beta_5 A_{\mu i}^* A_{\nu j}^* A_{\nu i} A_{\mu j}
 \end{aligned}$$

(3.1)

ここで、係数 $\alpha \sim \beta_5$ は

$$\alpha = \frac{N(0)}{3} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right), \quad \beta_0 = \frac{7 \zeta(3) N(0)}{240 (\pi k_B T_c)^2},$$

$$\beta_1 = -(1 + 0.18) \beta_0, \quad \beta_2 = (2 - 0.058) \beta_0,$$

$$\beta_3 = -(2 + 0.78) \beta_0, \quad \beta_4 = (2 - 0.28) \beta_0,$$

$$\beta_5 = (2 - 0.558) \beta_0.$$

(3.2)

で与えられる。ここで $N(0)$ は Fermi 面上での状態密度であり、 δ はパラマグノンパラメーターと称されるものである。GL 領域において、 δ は圧力依存性を持ち、これに伴い4次の凝縮エネルギー密度の項が変調される。^{10) 11)}

バルクな系での、polar, ABM, planar, BW 状態の凝縮エネルギー密度を示す。実際のバルクな系では、polar 及び planar 状態は確認されていないが、サイズ効果等を考える際には重要な役割りをする。

$$f_{\text{cond}}^{(\text{polar})} = -\frac{1}{4} \frac{\alpha^2}{\beta_{12345}} = -\frac{1}{3-1.28} \frac{\alpha^2}{4\beta_0} \quad (3.3)$$

$$f_{\text{cond}}^{(\text{ABM})} = -\frac{1}{4} \frac{\alpha^2}{\beta_{345}} = -\frac{1}{2-1.058} \frac{\alpha^2}{4\beta_0} \quad (3.4)$$

$$f_{\text{cond}}^{(\text{planar})} = -\frac{1}{4} \frac{\alpha^2}{\beta_{14} + \beta_{235}/2} = -\frac{1}{2-0.558} \frac{\alpha^2}{4\beta_0} \quad (3.5)$$

$$f_{\text{cond}}^{(\text{BW})} = -\frac{1}{4} \frac{\alpha^2}{\beta_{14} + \beta_{235}/3} = -\frac{1}{1.67-0.338} \frac{\alpha^2}{4\beta_0} \quad (3.6)$$

ここで、 β_{235} 等は $\beta_{235} = \beta_2 + \beta_3 + \beta_5$ を意味する。

ところで、パラマグノンパラメター： δ は、理論及び実験からその値を決定し切れない。そのため、現象論的に、BW状態とABM状態の自由エネルギーを比較すると、

$$0 < \delta < 0.46 \quad (3.7)$$

の領域でBW状態が安定となり、GL領域低圧側でB相が出現する事が理解される。

一方、空間的にオーダーパラメターが変化している場合には、系の自由エネルギーに勾配エネルギーが加わる。GL領域において勾配エネルギー密度は、デカルト座標系 (x, y, z) で以下の様に与えられる。

$$\begin{aligned} f_{\text{grad}} = & K_1 \partial_i A_{\mu i}^* \partial_j A_{\mu j} + K_2 \partial_j A_{\mu i}^* \partial_j A_{\mu i} \\ & + K_3 \partial_j A_{\mu i}^* \partial_i A_{\mu j} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$K_1 = K_2 = K_3 = K = \alpha \xi^2 = \alpha \xi_0^2 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-1} \quad (3.9)$$

ここで ξ_0 はコヒーレンス長であり、

$$\xi_0 = \left\{ \frac{750}{160} \right\}^{1/2} \frac{\hbar V_F}{\pi k_B T_c} \sim 10 \text{ nm} (10^2 \text{ \AA}) \quad (3.10)$$

で与えられる。GL領域でのコヒーレンス長の温度変化は (3.9) から分る様に

$$\xi(T) = \frac{\xi_0}{\sqrt{1-(T/T_c)}} \quad (3.11)$$

である。以後の章では、主に円筒座標系 (r, φ, z) でオーダパラメータを記述するため勾配エネルギー密度を円筒座標で書き変えると以下の様になる。¹²⁾

$$\begin{aligned} f_{\text{grad}} = & K_1 A_{\mu j, j}^* A_{\mu k, k} + K_2 A_{\mu j, k}^* A_{\mu j, k} + K_3 A_{\mu j, k}^* A_{\mu k, j} \\ & + \frac{2}{r} \text{Re} \left\{ K_1 (A_{r\varphi}^* A_{\varphi j, j} - A_{\varphi\varphi}^* A_{rj, j} + A_{\mu r}^* A_{\mu j, j}) \right. \\ & + K_3 (A_{rj}^* A_{\varphi\varphi, j} - A_{\varphi j}^* A_{r\varphi, j} + A_{\mu r}^* A_{\mu\varphi, \varphi} - A_{\mu\varphi}^* A_{\mu\varphi, r}) \\ & + K_2 (A_{rj}^* A_{\varphi j, \varphi} - A_{\varphi j}^* A_{rj, \varphi} + A_{\mu r}^* A_{\mu\varphi, \varphi} - A_{\mu\varphi}^* A_{\mu r, \varphi}) \\ & + \frac{1}{r^2} \left[(K_1 + K_3) \left\{ |A_{r\varphi}|^2 + |A_{\varphi\varphi}|^2 + A_{\mu r}^* A_{\mu r} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 2 \text{Re} (A_{r\varphi}^* A_{\varphi r} - A_{r r}^* A_{\varphi\varphi}) \right\} \right. \\ & \left. + K_2 \left\{ A_{rj}^* A_{rj} + A_{\varphi j}^* A_{\varphi j} + A_{\mu r}^* A_{\mu r} + A_{\mu\varphi}^* A_{\mu\varphi} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 4 \text{Re} (A_{r\varphi}^* A_{\varphi r} - A_{r r}^* A_{\varphi\varphi}) \right\} \right] \quad (3.12) \end{aligned}$$

ここで $A_{\mu j, k}$ は、 k 座標による偏微分を表わしそれぞれの座標についての陽な形は

$$A_{\mu j, r} = \partial_r A_{\mu j}, \quad A_{\mu j, \varphi} = \frac{1}{r} \partial_\varphi A_{\mu j},$$

$$A_{\mu j, z} = \partial_z A_{\mu j} \quad (3.13)$$

となる。 φ 座標に関する表式に注意されたい。

オーダーパラメータ： $A_{\mu j}(r)$ に対し、空間変化を円筒対称と仮定し、さらに渦の無い状態を考えると、オーダーパラメータは“ r ”座標にのみ依存し、 $A_{\mu j}(r)$ に対する一次元問題となる。

§ 4. 壁面による境界条件

超流動 ^3He の P 波 Cooper 対は壁による特有の境界条件に従う。以後壁は鏡面反射を行なうと仮定して議論を進める。

鏡面壁の近傍では、P 波 Cooper 対のうち、壁の法線方向の運動量を有する軌道成分が鏡面反射により破壊される。一方、波動関数が面内に広がっている Cooper 対は壁面上まで残る。つまり、壁面上でのオーダーパラメーターに対する境界条件は、壁の法線ベクトルを s として、

$$s_j A_{\mu j}(\text{wall}) = 0 \quad (4.1)$$

で与えられる。これから、A 相 (ABM 状態) 及び B 相 (BW 状態) での壁面近傍での状態は、A 相においては $\hat{s} \parallel \hat{s}$ とする事により Cooper 対はバルクの状態の振幅のままで壁面上においても存在できるが、B 相においては、3 個の軌道成分のうち \hat{s} 方向の 1 個を失なう事になる。つまり、壁の近傍では、およそコヒーレンス長さの領域で planar 的な状態が出現し、planar 状態の異方性軸が \hat{s} と平行になっているわけである。

さて、毛管 ($R = 1 \sim 10^2 \xi$) でのオーダーパラメーターを調べる前に、それより少し大きな半径の円筒容器

中 ($R = 10^2 \sim 10^3 \xi$) でのオーダーパラメータを復習する。これは、オーダーパラメータを求める際に変分法を用いるが、サイズ効果を考えるときに、それを変分の最初の試行関数として選ぶためである。

まず、 $R \leq 10^3 \xi$ の容器径では双極子固定に伴うエネルギー利得よりも、それにより生ずるオーダーパラメータの勾配エネルギーの損失の方が大きくなるため、一般に双極子エネルギーは無視できる。つまり、双極子エネルギーよりも、勾配エネルギーが小さくなる様な織目構造を作る様になる。A相とB相の織目構造を図2(a),(b)に示す。13)

異方性軸の

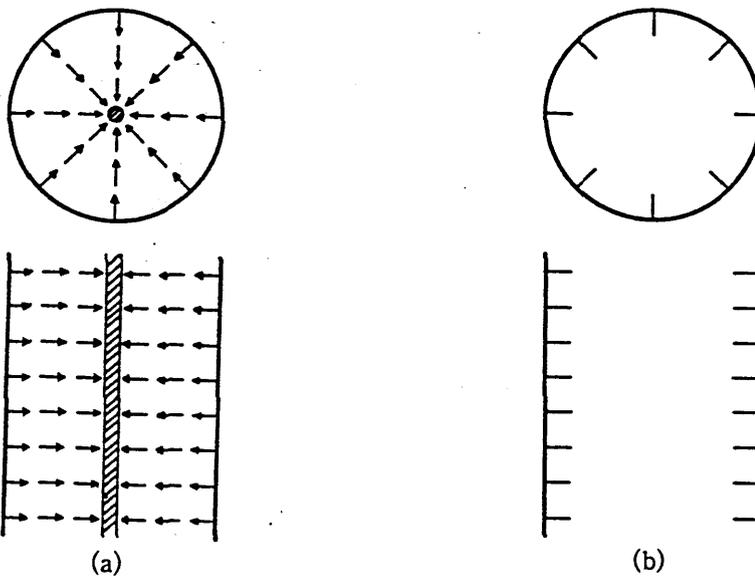


図2.

$R = 10^2 \sim 10^3 \xi$ でのオーダーパラメータの様子。(a)がA相であり、この様な織目の構造は“radial-disgyration”と呼ばれる。(b)はB相で、壁の近くで planar 状態の異方性軸 (director) が見られる。

図2(a)がA相の場合である。 ξ ベクトルは、壁面では境界条件(4.1)に従うため壁面に垂直になり、円筒中心部で特異的になる。つまり、中心部ではオーダーパラメータ(ξ ベクトル)の空間的勾配が発散し、ABM状態のままの存在が不可能になっている。特異的領域の大きさは、コヒーレンス長 ξ と同程度であり、この領域中では凝縮振幅がゼロとなるが、ABM状態以外のエキゾチックな状態が出現し、特異性を回避している。また、A相の円筒容器中の織目構造として特異性を持たない、Mermin-Ho構造と称されるものも有る。¹⁴⁾(図3、参照)しかし、この構造は容器径が、 $R \geq 10^3 \xi$ のときに安定になる構造であり、我々がこれから調べる様なサイズにおいては類似な構造は出現しないと考えられる。

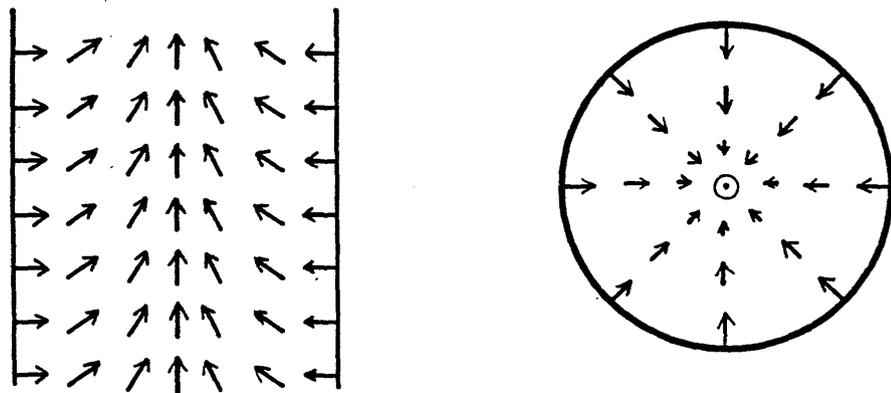


図3、

Mermin-Ho構造と呼ばれるABM状態の織目構造である。 $R > 10^3 \xi$ で radial-digyraton に代り出現する構造である。

図2 (b) は、B相における円筒容器内での様子である。B相においては、スピン関数と軌道関数の相対的な回転自由度に起因する、 \hat{n} ベクトルと φ で記述される異方性が存在する。(補遺2、(A2.15)参照)しかし、この異方性は、核磁気の大極子相互作用($\sim \mu\text{K}$ のオーダー)により発生するものであり、最終的なサイズ効果を考える際のエネルギースケールである凝縮エネルギー($\sim \text{mK}$ のオーダー)に比べ無視できる。つまりBW状態は、狭い領域においては \hat{n} ベクトルに伴う不要な勾配エネルギーを発生させずに、完全等方的状態 $\varphi=0$ (A2.14参照)にあると考えてよい。そのため、図2 (b)では、壁面でBW状態がplanar状態になっている異方性のみを示した。planar状態になっている領域は壁面から($\sim \xi$)のオーダーであり、planar状態の持つ異方性をディレクター(director)で示している。

容器径が $R=10^2\sim 10^3\xi$ での様子を復習したが、さらに容器径が $R=1\sim 10^2\xi$ と小さくなると特異的な領域の断面積が占める割合が大きくなり、その内部構造等が重要になる。A相においては、中心部の特異的な領域が、またB相においては、サイズが小さくなるに従ってplanar状態のディレクターが中心部に集中するため、図2 (a)と同様な特異的な領域が生じその領域が、それぞれの相の自由エネルギーの決定の際に大きく影響を与える。

§ 5. オーダーパラメターの決定

特異的な領域を含む系のオーダーパラメターを決定するに当り、変分法を用いる。その際、系は円筒対称な状態にあると仮定し、オーダーパラメターは動径座標“ r ”のみの関数であるとする。また変分径路として、容器径の小さな極限で連続的に polar 状態に接続するものを採用する。これは、サイズが小さい極限では、軸方向以外の軌道成分は壁により破壊されて、純粹な polar 状態が出現すると予想されるからである。実際の変分径路は、A相では、 $ABM \leftrightarrow \text{polar}$ を結ぶものとし、B相では、 $BW \leftrightarrow \text{planar} \leftrightarrow \text{polar}$ を結ぶものとした。それぞれの径路は、A相及びB相の特徴的な対称性を保存し、また、状態をユニタリー状態のままとする事を付け加える。

5.1a A相での試行関数と自由エネルギー

A相での変分径路を、円筒座標を用いて

$$A_{\mu_j}(r) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & iU(r) & u(r) \end{pmatrix}_{\mu_j} \quad \mu_j = \{r, \varphi, z\}$$

(5.1)

と採る。(5.1)において

$$U(r) = u(r) = \text{const} \quad (5.2)$$

とすると、図2(a)で示した織目構造となる。(5.1)において、 \underline{d} ベクトルをz軸方向に採ったのは、変分径路に含まれる、ABM及びpolar状態とも、 \underline{d} ベクトルとして1成分のみを有し、それが軌道空間と分離しているためである。つまり、この系では、双極子エネルギーが無視され、 \underline{d} ベクトルに起因する勾配エネルギーを最小とする様に \underline{d} の方向が決まる。 \underline{d} は軌道成分と分離しているため、空間的に一様な \underline{d} の織目構造が作られる。このときの \underline{d} の方向は縮退している(磁場等がない限り)が、円筒座標系を用いたため、 \underline{d} の一様性を表現するのにz軸に平行に配位させたものである。(5.1)の試行関数をGLの自由エネルギーの表式(3.1)と(3.2)に代入して、単位長さ当りの自由エネルギーの表式

$$\begin{aligned} F^A = 2\pi \int_0^R dr & \left[r \left\{ -\alpha(u^2 + v^2) + \beta_{12}(u^2 - v^2)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \beta_{345}(u^2 + v^2)^2 \right\} \right. \\ & \left. + \alpha \xi^2 \left\{ r(\dot{u}^2 + \dot{v}^2) - 2v\dot{u} + \frac{1}{r}v^2 \right\} \right] \end{aligned}$$

$$(5.3)$$

を得る。第1項目の $\{ \}$ が凝縮エネルギー ε 、第2項目の $\{ \}$ が勾配エネルギーを表わす。勾配エネルギーの最後の項から、勾配エネルギーの発散を回避するための条件、

$$U(r=0) = 0 \quad (5.4)$$

が得られる。これは、 $u(r)$ は原点まで polar 状態の成分のため残る事が可能であるが、同時に $U(0) \neq 0$ なら、中心部の状態は ABM 的になり、図2(a) で示した様な特異点が生ずる事による。

5.1a B相での試行関数と自由エネルギー

B相での変分径路 ε

$$A_{\mu_j}(r) = \begin{pmatrix} w(r) & 0 & 0 \\ 0 & U(r) & 0 \\ 0 & 0 & u(r) \end{pmatrix}_{\mu_j} \quad \mu_j = \{r, \varphi, z\} \quad (5.5)$$

と選ぶ。

$$u(r) = U(r) = w(r) = \text{const}$$

のときは、完全等方的な BW 状態である。 $u(r)$, $v(r)$, $w(r)$ のパラメターのうち、任意の2個が残った状態が planar 状態で、任意の1個が残った状態が polar 状態であるが、系の対称性から、サイズの小さな極限では $u(r)$ のみが polar 状態として残ると考えられる。

(5.5) の試行関数から A 相の時と同様に、単位長当りの自由エネルギーは、

$$\begin{aligned}
 F^B = 2\pi \int_0^R dr \left[r \left\{ -\alpha(u^2+v^2+w^2) + \beta_{14}(u^2+v^2+w^2)^2 \right. \right. \\
 \left. \left. + \beta_{235}(u^4+v^4+w^4) \right\} \right. \\
 \left. + \alpha\xi^2 \left\{ r(\dot{u}^2+\dot{v}^2+3\dot{w}^2) + 2(w-v)(\dot{w}+\dot{v}) \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{4}{r}(v-w)^2 \right\} \right]
 \end{aligned}$$

(5.6)

A 相の時と同様に、勾配エネルギーの発散回避のため

$$v(0) - w(0) = 0 \quad (5.7)$$

の条件が得られる。この条件の意味するところは、planar 状態的な異方性軸で、中心部に特異点を作らないという事である。中心部での凝縮状態としては、BW 状態と polar 状態を重ね合わせた状態のみが許される。

5.2 毛管径が小さな極限でのオーダーパラメター

毛管径が小さく、コヒーレンス長 ξ と同程度になっ
た際には勾配エネルギーが零の状態が出現する。これ
は、オーダーパラメターがコヒーレンス長 ξ と同程
度のスケールで変化する際に、一般に凝縮エネルギー
と同程度の勾配エネルギーが要求されて凝縮状態が破
壊されるためである。この様な事情は、内部自由度を
有する超流動 ^3He において顕著である。

さて、(5.3) と (5.7) から勾配エネルギーの零
となる解を探すと、A相及びB相において、

イ) A相の場合、

$$\begin{cases} u(r) = \text{const} \\ v(r) = ar \quad (a: \text{const}) \end{cases} \quad (5.8)$$

ロ) B相の場合

$$\begin{cases} u(r) = \text{const} \\ v(r) = 0 \\ w(r) = 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

なる解が得られる。(5.8) 及び (5.9) の範囲で凝
縮エネルギーを最小にする様に定数を定める事により、
それぞれ以下の様な解が得られる。

1) A相の場合

$$u(r) = \sqrt{\frac{4\beta_{12345} - 3(\beta_{345} - \beta_{12})}{8\beta_{12345}^2 - 6(\beta_{345} - \beta_{12})^2}} \quad (5.10)$$

$$v(r) = \frac{r}{R} \sqrt{\frac{3\beta_{12345} - 3(\beta_{345} - \beta_{12})}{4\beta_{12345}^2 - 4(\beta_{345} - \beta_{12})^2}} \quad (5.11)$$

2) B相の場合

$$u(r) = \sqrt{\frac{1}{2\beta_{12345}}} \quad (5.12)$$

$$v(r) = 0 \quad (5.13)$$

$$w(r) = 0 \quad (5.14)$$

A相の解は、 $r=R$ の壁面近くでは ($u(R) \approx u(r)$ という意味で) ABM状態に近い状態であり、 $r=0$ の中心部では polar状態に収束している。この解の自由エネルギーは、polar状態 (空間的に一様な) に比べて、非常に低くなっている。(図5. 参照) この事が、毛管中での超流動 ^3He の振舞いに決定的な影響を与える。

一方のB相の解は、空間的に一様な polar状態である。両者の自由エネルギーを比較すると、弱結合極限においても、A相が安定であり、バルクの系とは異なっている事が解る。次の関心事は、このA相の優位性がどこまで続くか? いわゆるサイズ効果の影響である。
 R を変化させたとき

5.3 数値計算による結果.

毛管径を $\xi \leq R \leq 35\xi$ とし、オーダーパラメターの空間変化と凝縮エネルギーを数値計算により得た。

図4. に毛管径を変えて得られた、A相とB相における、弱結合極限 ($\delta = 0$)でのオーダーパラメターの様子である。

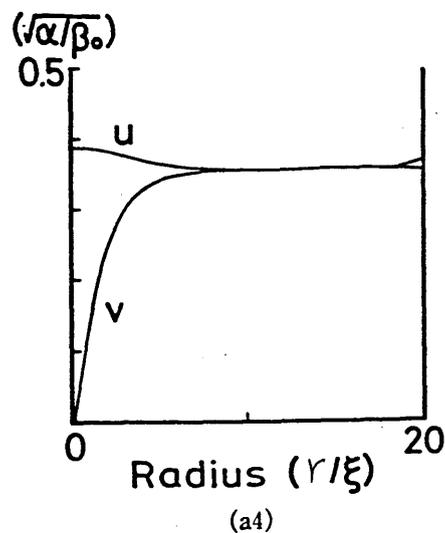
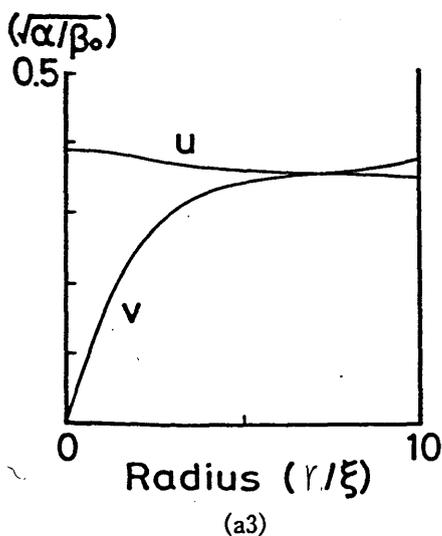
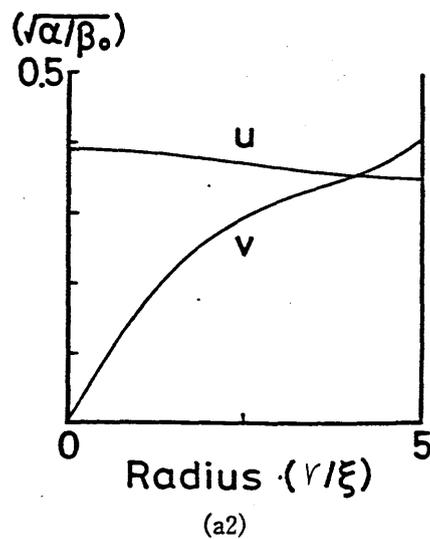
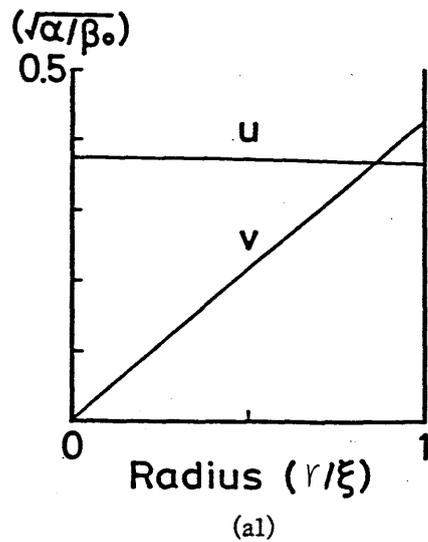


図4. (続く)

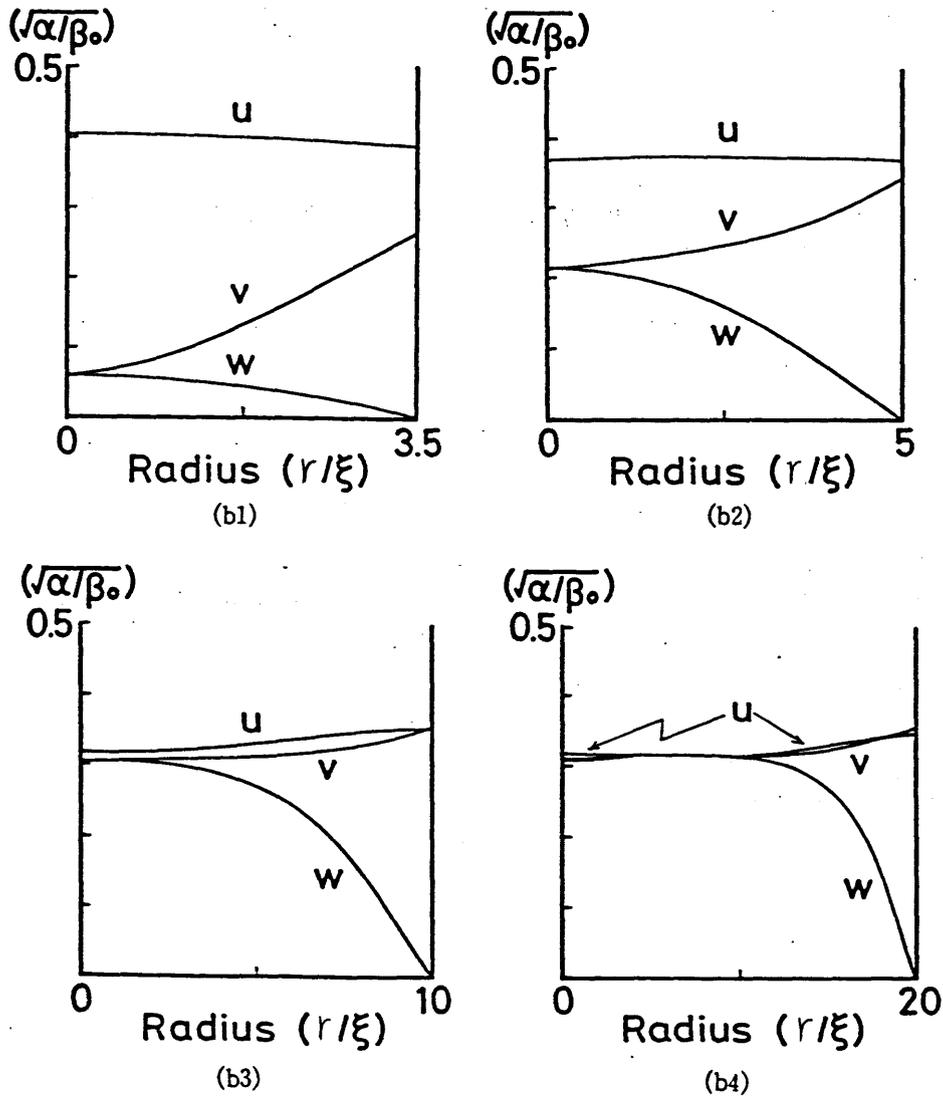


図4、毛管内でのオーダーパラメーターの空間変化。
 (a1)~(a4) がA相、(b1)~(b4) がB相のものである。グラフの横軸が毛管の動径方向を示し、左端が毛管の中心点 ($r=0$) を、右端が壁面 ($r=R$) を意味する。変数 u, v, w はA相では(5.1)に、B相では(5.5)に準じている。

(a4) の右端及び (b4) の左端にやや乱れた部分が見えるが、数値計算の誤差と思われる。

A相においては、管径が ξ の場合、管径が小さい極限で解析的に求めた解 (5.10), (5.11) と一致している。管径が大きくなるに従って、中心部で polar 状態、壁面で $u=v$ の通常の ABM 状態となる。これは、図2(a)に示す radial-disgyration の織目構造そのものである。また凝縮状態が ABM 状態からずれているのは、中心近傍の ξ 程度の領域であり、毛管断面積に対して占める割合は小さい。しかも、半径が ξ の図4.(a1)を見ても解る様に、管径が小さな極限においてすらも毛管断面積に対して大きな割合を占める、壁面近傍で ABM 状態となっている。これらの事から A 相には大きなサイズ効果は現われない事が解る。

一方、B相においては、管径が 3ξ 以下では純 polar 状態 ($u \neq 0, v=w=0$) が出現する。図4.(b1)に見える様に、管径が大きくなるに従って他の成分が混じり始める。このとき中心部は polar 状態のまま壁面で planar 状態が成長する。さらにサイズが大きくなると図4.(b2)を見ると中心では、planar に近い BW 状態であり壁面ではほぼ完全な planar 状態となっている。図4.(b4)では図2(b)で示した様な形状であり、中心部で BW 状態、壁面で planar 状態である。B相においてオーダーパラメーターが BW 状態からずれるのは基本的に壁面近傍において発生する planar 状態の部分であり、毛管断面積に占める割合は極めて大きい。また、 δ の値を変化させて強結合効果を入れると planar 状態

のエネルギーが、他の状態 (BW 及び ABM 状態) に比べ安定化せず ((3.3) ~ (3.6) 参照) 自由エネルギー的に不利になる。以上 B 相の場合をまとめると、管径が大きくなるに従い、凝縮状態はエネルギーの高い、polar 状態から BW 状態まで変化する事。及び、状態が BW からずれる断面積が大きい事から、サイズ効果は極めて大きく、しかも長く尾を引く事が結論される。

毛管中での A 相及び B 相の相対的な安定性を論ずるために、平均自由エネルギー密度を毛管の半径の関数として図 5 に示す。

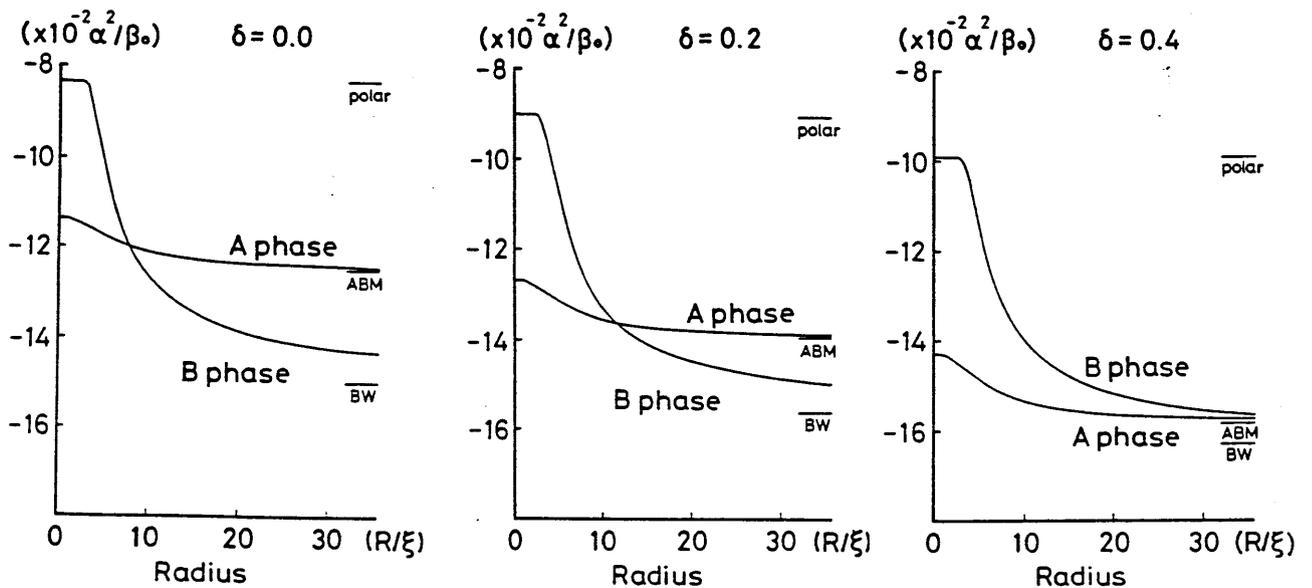


図 5、パラマグノンパラメター $\delta = 0.0, 0.2, 0.4$ に対する、毛管半径を定めた際の平均自由エネルギー密度。グラフ中の右端のレベルはバルクの系での自由エネルギー密度。

図5、 から毛管中における A-B相の安定性に関しての臨界半径が読み取れる。この臨界半径をパラマグノンパラメーターの関数として計算した結果を図6、に示す。

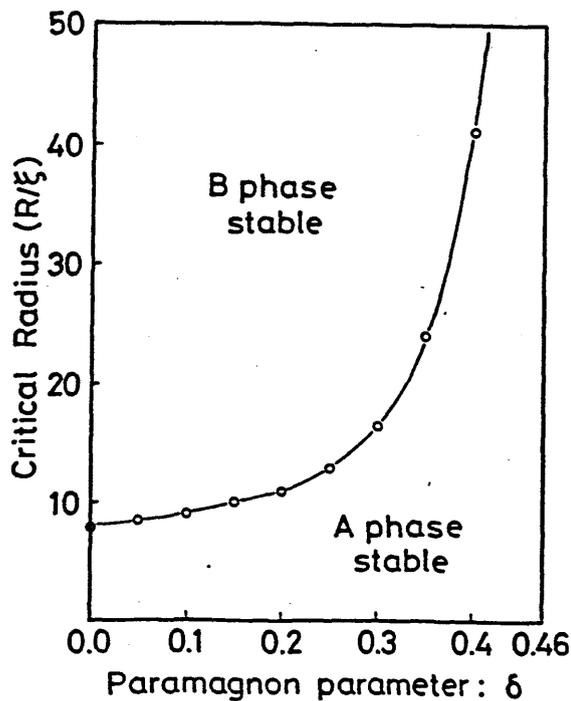


図6、

毛管中での A-B相の安定性。 $\delta \geq 0.46$ において、バルクの状態で A相が安定になるため、臨界半径はここで発散する。

§ 6. 議論

§ 5、においてサイズ効果により A 相が安定化する事が示された。そこで、実験による検証のための、核磁気共鳴 (NMR) スペクトルを考えよう。

実験系の配置は、毛管軸方向に十分強い定常磁場 H_0 ($H_0 > 50 \text{ gauss}$) が印加されているとする。また、毛管径は双極子コヒーレンス長 ($\sim 10 \mu\text{m}$) より十分小さい。よって空間的にスピン状態が変化するスピン波モードはエネルギー的に出現しない事を注意する。さらに NMR を考えるためには、今まで無視して来た双極子エネルギーまで考慮する必要がある。

まず A 相について考える。A 相の対称性として重要なのは、スピン関数と軌道関数は双極子相互作用でのみ結合している事である。そのため、スピン状態を表わす \underline{d} ベクトルは、まずその方向を定常磁場により拘束される。考えている系では $H_0 \parallel \hat{z}$ であるため、 \underline{d} ベクトルは、円筒断面内に拘束される。この後に、双極子相互作用のエネルギーを最小にする様に、円筒断面内の方向を決定するのだが、軌道関数が円筒対称性を持つためその方向が定まらない。この事から、この系においては縦共鳴の生じない事が結論される。なぜなら、縦共鳴は \underline{d} ベクトルを H_0 回りに回転させ

るモードであるが、それに対するポテンシャル場が無い
ためである。横共鳴に関しては、 $\underline{l} \parallel \underline{d}$ の領域は、
 $\omega = \sqrt{\omega_L^2 + \Omega_{ABM}^2}$ の正の共鳴振動数シフトを与えるが、
 $\underline{l} \perp \underline{d}$ の領域は、 $\omega = \sqrt{\omega_L^2 - \Omega_{ABM}^2}$ の負のシフトを与え
る。ここで ω_L は Larmor 振動数で、 Ω はバルクな A
相の縦共鳴振動数である。(図 6. 参照)

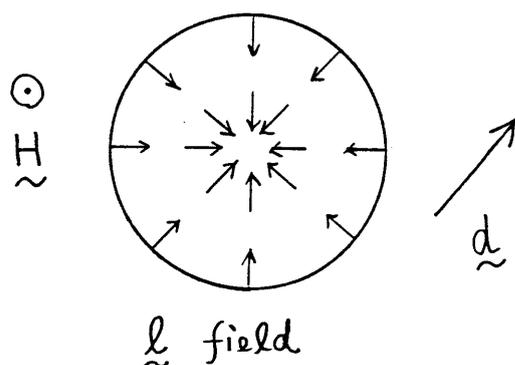


図 6.

\underline{d} は紙面上に拘束され
一様である。また、 \underline{d} は
紙面内の方向について縮
退している。

ところが、スピン波モードが禁止されているため、共
鳴は局所的な共鳴振動数を毛管断面に渡って平均した
所で生じる。(一様モード) 結局、平均操作によ
りシフトは消えて、共鳴は ω_L で生じる。

一方、B 相においては一般にスピン空間と軌道空間
が結合しているため、サイズ効果による NMR の計算
は平行板の場合を除いて困難である。ところが、毛管
の半径が 3λ 以下では、純 polar 状態となる。この状
況で軸方向に定常磁場があると、オーダーパラメター
は、バルクの状況でのそれと同じになり、縦共鳴は現

われず、横共鳴は $\omega = \sqrt{\omega_L^2 + \Omega^2}$ に従い共鳴振動数にシフトが見られる。ここでの Ω は双極子エネルギーの作るポテンシャル場である。³⁾

超流動 ^3He の A-B 転移に関して、超流動相の発見以来ミステリーとなっていた事に、相転移の際の核生成メカニズムが不明な点があげられる。¹⁵⁾¹⁶⁾ これは、コヒーレンス長が大きい事に伴い表面エネルギーが高く、過熱または、過冷した超流体中での核生成が、極めて困難な事である。ところが現実には、 $A \rightarrow B$ 転移は著しい過冷が見られ、記憶効果も見られるものの、 $B \rightarrow A$ 転移は、ほとんど過熱が見られず、転移温度の再現性も良い。¹⁷⁾ この転移の非対称を説明する一つの仮説として、今まで議論して来たサイズ効果による A 相の安定化が考えられる。つまり、装置の壁面等での不完全部分(細穴、傷)の部分では常に A 相が実現していて、A 相の核生成を担っていると考えたと、 $B \rightarrow A$ 転移がスムーズである説明がつく。また Leggett が転移の際の核生成の臨界半径を 500 nm と見積った。¹⁸⁾ 我々の計算では、サイズ効果による A 相の安定化は弱結合極限でも $R_c = 8\xi$ であり、コヒーレンス長 ξ_0 が A 相の出現する領域では、 $\xi_0 \sim 30 \text{ nm}$ 程有る事から、 $T = 0.9 T_c$ では $\xi = \xi_0 / \sqrt{0.1} \sim 100 \text{ nm}$ であり、 $R_c \approx 800 \text{ nm}$ となる。つまり、Leggett の見積った核生成の臨界半径を越え、ここから相転移の際に A 相が発達する事が

可能と思われる。現在、国内外の超低温実験グループで、A-B転移に関する色々な試みがなされている。核生成の問題であるだけに、狭い空間でのオーダーパラメータ変化、まさに超流動 ^3He のトポロジー及び内部自由度に結び付いた恰好の問題である。これからも理論面からこの問題にアプローチして行きたいと考える。

References

- 1) D.D. Osheroff, R.C. Richardson and D.M. Lee Phys. Rev. Lett. 28, (1972) 885.
- 2) A.J. Leggett, Rev.Mod.Phys. 47, (1975) 331.
- 3) A.J. Leggett, Ann. Phys. 85, (1974) 11.
- 4) J.C. Wheatley, Rev. Mod. Phys. 47, (1975) 415.
- 5) P.J. Hakonen, M. Krusius, M.M. Salomaa, J.T. Simola, Yu.M. Bunkov, V.P. Mineev, and G.E. Volovik, Phys.Rev.Lett. 51, (1983) 1362.
- 6) M.M. Salomaa and G.E. Volovik, Phys.Rev.B 31, (1985) 1258.
- 7) T. Ohmi, T. Tuneto and T. Fujita, Prog.Theor.Phys. 70, (1983) 647.
- 8) Y. Hasegawa, Prog.Theor.Phys. 73, (1983) 1258.
- 9) V. Ambegaokar, P.G. de Gennes, and D. Rainer, Phy.Rev.A 9, (1974) 2676.
- 10) P.W. Anderson and W.F. Brinkman, Phys.Rev.Lett. 30, (1973) 1108.
- 11) Y. Kuroda, Prog.Theor.Phys. 53, (1975) 349.
- 12) L.J. Buchholtz and A.L. Fetter, Phy.Rev.B 15, (1977) 5225.
- 13) K. Maki and T. Tsuneto, J.Low Temp.Phys. 27, (1977) 635.
- 14) N.D. Mermin and T.L. Ho Phys.Rev.Lett. 35, (1976) 594.
- 15) D.D. Osheroff and M.C. Cross, Phys.Rev.Lett. 38, (1977) 905.
- 16) R. Kaul and H. Kleinert, J.Low Temp.Phys. 38, (1980) 539.

- 17) R.L. Kleinberg, D.N. Paulson, R.A. Webb and J.C. Wheatley, J.Low Temp.Phys. 17, (1974) 521.
- 18) A.J. Leggett, Phys.Rev.Lett. 53, (1984) 1096.

§ 謝辞.

本論文をまとめるに当り、たくさんの方々に御世話になりました。学会、研究会で会うたびに有益な議論をして下さいました。海老沢丕道氏、大見哲巨氏、永井克彦氏、原純一郎氏、芦田正巳氏、藤田利光氏に感謝します。実験データ及び話題を提供して下さいました。平井章氏、水崎隆雄氏、児玉隆夫氏そして京都大理学部と大阪市大理学部の超低温実験グループのみなさんに感謝します。

研究室においては、有益な議論をして下さいました三宅和正氏、黒田義浩氏、山田一雄氏、そして石川正勝氏に感謝します。

最後に、素晴らしい研究環境を与えて下さいました〆研の皆様には謝意を表します。

§補遺1. $S = 1/2$ の Fermi 粒子の Cooper 対とそのオーダパラメーター

$S = 1/2$ の Fermi 粒子が Cooper 対を作るとき、対の全スピンは、ゼロ（一重項状態）と 1（三重項状態）の 2 つの場合が考えられる。ここで、4 元ベクトル d_μ を考え、オーダパラメーター: $\Psi_{\alpha\beta}$ を

$$\Psi_{\alpha\beta} = \Delta_0 (i\alpha_\mu \alpha_2)_{\alpha\beta} d_\mu$$

$$\mu = \{0, 1, 2, 3\} \quad (A1.1)$$

と書く。さて、 $\Psi_{\alpha\beta}$ の交換性を考えよう。オーダパラメーター $\Psi_{\alpha\beta}$ は、 $S = 1/2$ のスピノール ξ_1, ξ_2 の直積

$$\Psi_{\alpha\beta} = \xi_1 \otimes \xi_2 \equiv \xi_1 \tilde{\xi}_2 \quad (A1.2)$$

の様に書かれる。ここで、 ξ_1 と ξ_2 は (2×1) の行列であり $\tilde{\xi}_2$ は ξ_2 の転置行列の意味である。スピノール ξ_1, ξ_2 に対して、ユニタリ行列: $U \in SU(2)$ を用いて回転変換を行なうと、

$$\xi_1' = U \xi_1, \quad \xi_2' = U \xi_2 \quad (A1.3)$$

となり、変換後のオーダパラメーター: $\Psi'_{\alpha\beta}$ は

$$\begin{aligned}\Psi'_{\alpha\beta} &= \xi'_1 \otimes \xi'_2 = U_{\xi_1} (\widetilde{U}_{\xi_2}) = U(\xi_1, \widetilde{\xi}_2) \widetilde{U} \\ &= U \Psi_{\alpha\beta} \widetilde{U}\end{aligned}\quad (\text{A1.4})$$

となる。ここで、 \hat{n} 軸回りに角度 φ の回転を与える行列、 $U(\hat{n}, \varphi)$ を陽に書くと、

$$\begin{aligned}U(\hat{n}, \varphi) &= e^{-i\frac{\varphi}{2} \hat{n} \cdot \underline{\sigma}} \\ &= \alpha_0 \cos \frac{\varphi}{2} - i (\hat{n} \cdot \underline{\sigma}) \sin \frac{\varphi}{2}\end{aligned}\quad (\text{A1.5})$$

となる。さて、 $U(\hat{n}, \varphi)$ の転置行列は、

$$\begin{aligned}\widetilde{\alpha}_0 &= \alpha_0, \quad \widetilde{\alpha}_j = -\alpha_2 \alpha_j \alpha_2 \quad (j=1,2,3)\end{aligned}\quad (\text{A1.6})$$

を利用して、

$$\begin{aligned}\widetilde{U}(\hat{n}, \varphi) &= \alpha_0 \cos \frac{\varphi}{2} + i \alpha_2 (\hat{n} \cdot \underline{\sigma}) \alpha_2 \sin \frac{\varphi}{2} \\ &= \alpha_2 \left[\alpha_0 \cos \frac{\varphi}{2} + i (\hat{n} \cdot \underline{\sigma}) \sin \frac{\varphi}{2} \right] \alpha_2 \\ &= \alpha_2 U^{-1}(\hat{n}, \varphi) \alpha_2\end{aligned}\quad (\text{A1.7})$$

となる。これから、交換後のオーダ-パラメータ $\Psi'_{\alpha\beta}$

は以下の様になる。

$$\begin{aligned}
 \Psi' &= U \Psi \tilde{U} \\
 &= U [\Delta_0 (i\alpha_\mu \alpha_2) d_\mu] \tilde{U} \\
 &= \Delta_0 U (i\alpha_\mu \alpha_2) (\alpha_2 U^{-1} \alpha_2) d_\mu \\
 &= \Delta_0 i (U \alpha_\mu U^{-1}) \alpha_2 d_\mu
 \end{aligned}$$

(A1.8)

この結果から分る事は。

1) $\mu = 0$ のとき。

(A1.8) から、変換後のオーダパラメータ $\Psi'_{\alpha\beta}$ は、

$$\Psi'_{\alpha\beta} = \Delta_0 i \alpha_2 d_0 \quad (\text{A1.9})$$

となり、 d_0 成分は回転不変である。つまり、 d_0 成分はスピナー重項状態を記述する。 d_0 の張る空間は、

$$\Delta_0 d_0 (i\alpha_2) = \Delta_0 d_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A1.10})$$

の様に反対称行列で表現され、一重項のスピノ関数の反対称性を反映する。また、軌道関数は対称関数で展開される。

□) $\mu = j$ ($j = 1, 2, 3$) のとき.
 (A1.8) から、交換後のオーダーパラメター
 $\Psi'_{\alpha\beta}$ は、

$$\Delta_0 i (U \alpha_j U^{-1}) \alpha_2 d_j \quad (\text{A1.11})$$

となる。上式において $(U \alpha_j U^{-1})$ はスピン基底の回転を表わす。これにより、 d_j は回転に対してベクトル的に振る舞う事がわかる。つまり、 d_j はスピン三重項状態の Cooper 対を記述している。 d_j の張る空間は、

$$\Delta_0 \left[d_x \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + d_y \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + d_z \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \quad (\text{A1.12})$$

であり、対称行列で表現され、三重項スピン関数の対称性を反映する。軌道空間に対しては、反対称な軌道関数により展開される。

§補遺2. 超流動 ^3He のオーダーパラメーターと凝縮状態.

超流動 ^3He のCooper対はスピン三重項状態のP波対であるため、スピン及び軌道空間においてそれぞれ3個の自由度を持つ。そのため、オーダーパラメーターは (3×3) のテンソル量となる。内部自由度の無い超流体である。超流動 ^4He 及び一般的な超伝導のオーダーパラメーターは1個の複素変数として表わされるが、超流動 ^3He の場合は9個の複素変数となる。

Cooper対の波動関数は、

$$\Psi_{\alpha\beta}(\hat{k}) = \Delta_0 \sum_{\mu} (i\sigma_{\mu}\alpha_{\gamma})_{\alpha\beta} d_{\mu}(\hat{k}) \quad (\text{A2.1})$$

と表現される。ここで σ_{μ} はPauli行列の μ 成分であり、 \hat{k} はFermi面の方向を示すベクトルである。(A2.1)の様な表示は (2×2) の行列で表現されるため、行列表示と称される。一方、超流体の異方性及び、トポロジジーを扱うときには、必ずしもこの表示は便利でない。それは、Pauli行列を用いた、 $SU(2)$ の表現が、回転その他の3次元空間での変換を認識しにくいからである。そのために、ベクトル表示と称される表現を使用する。これは、 $SU(2)$ の表現空間の部分空間が、 $SO(3)$ の表現空間と一致する事から、スピン状態を

回転に対してベクトル的に変換する量で表わしたものである。事実 (A2.1) の d_μ はスピン回転に対してベクトル的に変換する。(A1.11 参照)

(A2.1) の $d_\mu(\hat{k})$ をさらに P-波の軌道関数

$$Y_1^{\pm 1}(\theta, \varphi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (\hat{k}_x \mp i \hat{k}_y) \quad (A2.2)$$

$$Y_1^0(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \hat{k}_z \quad (A2.3)$$

に対して展開して、

$$\Psi_{\alpha\beta}(\hat{k}) = \Delta_0 d_{\mu j} (i\alpha_\mu \alpha_\beta)_{\alpha\beta} \hat{k}_j \quad (A2.4)$$

を得る。(A2.4) の展開係数 $d_{\mu j}$ がベクトル表示のオーダパラメータである。また、ギャップの大きさ Δ_0 まで含めて

$$A_{\mu j} \equiv \Delta_0 d_{\mu j} \quad (A2.5)$$

の様に定義し直し、主に論文内で用いている。上式のギリシア添字とラテン添字は、それぞれスピン及び軌道空間での変換に対してベクトル的に振る舞う。つまり、状態 $A_{\mu j}$ にスピン及び軌道空間での回転 $R_{\mu\mu}^{(s)}$, $R_{jj}^{(o)}$ を与えて得られる状態 $A_{\mu' j'}$ は

$$A_{\mu'j'} = R_{\mu'\mu}^{(s)} R_{jj'}^{(o)} A_{\mu j} \quad (\text{A2.6})$$

$$= R_{\mu'\mu}^{(s)} A_{\mu j} \widetilde{R}_{jj'}^{(o)} \quad (\text{A2.6}')$$

の様に記述される。

ここで、多少の例を示してベクトル \underline{d} の記述する、Cooper 対のスピン状態を考えてみる。ここでは簡単のために、軌道空間については無視する。(A2.1) を陽に書き下すと、

$$\Psi_{\alpha\beta} = \Delta_0 \begin{pmatrix} -dx + idy & dz \\ dz & dx + idy \end{pmatrix}_{\alpha\beta} \quad (\text{A2.7})$$

となる。 $|\uparrow\uparrow\rangle$ の凝縮対を作るためには、ベクトル \underline{d} を

$$\underline{d} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}}, 0 \right) \quad (\text{A2.8})$$

とすれば良い。また、 $\frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\rangle$ の凝縮対を作るには

$$\underline{d} = (0, 0, 1) \quad (\text{A2.9})$$

とすれば良い。これを、 $l=1$ の球面調和関数と比べてみるとその類似性が良くわかる。

スピン空間

軌道空間

$$|m\rangle : \underline{d} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-i}{\sqrt{2}}, 0 \right) \iff l_z = +1 : Y_1^1 = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (-\hat{k}_x - i\hat{k}_y)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\rangle : \underline{d} = (0, 0, 1) \iff l_z = 0 : Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \hat{k}_z$$

$$|M\rangle : \underline{d} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-i}{\sqrt{2}}, 0 \right) \iff l_z = -1 : Y_1^{-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (\hat{k}_x - i\hat{k}_y)$$

これらの例から分る様に、スピン空間における、ベクトル \underline{d} の基底は、軌道角運動量空間での基底 \hat{k}_j と同じ役割りをするのである。これにより、我々は空間的な方向認識を、 $SU(2)$ の行列ではなく、より直感的で分かりやすい、 $SO(3)$ のベクトルで表現できるのである。

§§. 超流動 ^3He のユニタリー状態.

オーダーパラメター

$$\Psi_{\alpha\beta} = \Delta_0 (i\alpha_\mu \alpha_\nu)_{\alpha\beta} d_\mu \quad (\text{A2.10})$$

から、2次のスカラーを作ると.

$$\begin{aligned} (\Psi^\dagger \Psi) &= |\Delta_0|^2 (\alpha_\mu \alpha_\nu)^\dagger (\alpha_\lambda \alpha_\nu) d_\mu^* d_\lambda \\ &= |\Delta_0|^2 \alpha_\nu \alpha_\mu \alpha_\lambda \alpha_\nu d_\mu^* d_\lambda \\ &= |\Delta_0|^2 \alpha_\nu (\delta_{\mu\lambda} + i \varepsilon_{\mu\lambda\nu} \alpha_\nu) \alpha_\nu d_\mu^* d_\lambda \\ &= |\Delta_0|^2 [d_\mu^* d_\mu + i (\alpha_\nu \alpha_\nu \alpha_\nu) \varepsilon_{\mu\lambda\nu} d_\mu^* d_\lambda] \\ &= |\Delta_0|^2 [|\underline{d}|^2 - i \alpha_\nu (\underline{d}^* \times \underline{d})_\nu] \end{aligned} \quad (\text{A2.11})$$

これから Cooper 対のスピン分極は.

$$\underline{d}^* \times \underline{d} = 2i \operatorname{Re}(\underline{d}) \times \operatorname{Im}(\underline{d}) \neq 0 \quad (\text{A2.12})$$

のとき生ずる。外部磁場、及び渦のないときはスピン分極は発生しない。この様に、スピン分極のない状態をユニタリー状態と称する。

ユニタリー状態の範囲内で凝縮エネルギーを考えるとき、凝縮エネルギーが極小値をとる状態が4種類存在する。それぞれの状態と、そのオーダーパラメータを以下に示す。

i) BW状態 (isotropic state)

完全に等方的な状態。つまりスピン及び軌道関数の同時回転に対して不変である状態は

$$R_{\mu'\mu} A_{\mu j} \tilde{R}_{jj'} = A_{\mu j} \quad (\text{A2.13})$$

を満足する。この様な $A_{\mu j}$ は単位行列のスカラー倍であり、規格化条件と合わせて、

$$A_{\mu j} = \frac{\Delta_0}{\sqrt{3}} \delta_{\mu j} \quad (\text{A2.14})$$

と書かれる。一般のBW状態は、上式に対して、スピン回転を与えたもので

$$A_{\mu j}^{(\text{BW})} = \frac{\Delta_0}{\sqrt{3}} R_{\mu\mu'}^{(s)}(\hat{n}, \varphi) \delta_{\mu' j} = \frac{\Delta_0}{\sqrt{3}} R_{\mu j}^{(s)}(\hat{n}, \varphi) \quad (\text{A2.15})$$

と記述される。ここで \hat{n}, φ はそれぞれスピン回転の軸と回転角である。BW状態は、スピン及び軌道成分を、 $S_z = 0, \pm 1, L_z = 0, \pm 1$ と全て

均等に含むため、スピンの及び軌道関数はそれぞれ等方的である。しかし、両空間の相対的な回転の自由度が残されており、それがスピン回転行列、 $R_{\mu\mu'}^{(s)}(\hat{n}, \varphi)$ で表現される。BW状態の持つ異方性は、この \hat{n} と φ で記述される。また、この回転行列により、スピン及び軌道空間が本質的に結合されている。

弱結合極限では、他のユニタリー状態と比べてBW状態が最も凝縮エネルギーが低く、GL領域においては低互側（弱結合が良い近似となる）で出現する事が分かる。

ii) planar 状態 (two dimensional state)

BW状態のオーダーパラメーター (A2.14) から \hat{k}_z 方向の軌道成分を除いて再度規格化すると、

$$A_{\mu j} = \frac{\Delta_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mu j} \quad (\text{A2.16})$$

を得る。これから軌道関数は $(\hat{k}_x + \hat{k}_y)$ に比例した形になり、Fermi 面上のギャップ形状は、

$$|\Delta(\hat{k})|^2 = |\Delta_0|^2 (k_x^2 + k_y^2) = |\Delta_0|^2 \sin^2 \theta$$

$$(\text{A2.17})$$

となる。(A2.17) から分る様に, Fermi 球の南極と北極でギャップは消去している。また, スピン成分は, d_z 成分を失ったため, (A2.7) から分る様に $|\uparrow\rangle$ と $|\downarrow\rangle$ 成分のみとなる。この様に, 適当なスピン量子化軸を選ぶ事により, スピン成分が $|\uparrow\rangle$ と $|\downarrow\rangle$ のみとなる状態を, ESP 状態 (Equal Spin Pairing) と称する。

一般の planar 状態は (A2.16) に対して, 任意のスピン及び軌道関数に対する回転を与えた事で, 以下の様に記述される。

$$A_{\mu j}^{(\text{planar})} = \frac{\Delta_0}{\sqrt{2}} R_{\mu\mu'}^{(s)} R_{jj'}^{(o)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mu'j'} \quad (\text{A2.18})$$

この様に, planar 状態は, スピンと軌道関数の両方に異方性を持ち, しかも両者が結合している事が解る。また, 弱結合極限での凝縮エネルギーは ABM 状態と同じで縮退しているが, 強結合効果を考えると, ABM 状態に比べ不利になる。

最後に, BW 状態から planar 状態への移行は, BW 状態から軌道成分の 1 個を除く事により可能である事, つまり, planar 状態は BW 状態から対称性が低くな, た状態である事がわかる。

iii) ABM 状態 (axial state)

ABM 状態のオーダーパラメータは、スピン空間と軌道空間が分離された形で

$$A_{\mu j}^{(ABM)} = \frac{\Delta_0}{\sqrt{2}} d_{\mu} (\hat{m} + i\hat{n})_j \quad (A2.19)$$

で与えられる。スピン状態はベクトル d_{μ} で記述され、 d_{μ} は軌道関数に依存しない。つまり、 d_{μ} と軌道関数とは因数分解された形になっている。 \underline{d} を x - y 平面内に選ぶと、(A2.17) から解る様にスピン状態は $|M\rangle$ と $|W\rangle$ で記述され、ABM状態も ESP 状態である事が解る。軌道関数の方は、軌道角運動量ベクトル \underline{l} に対して

$$\hat{m} \times \hat{n} = \underline{l} \quad (A2.20)$$

なる直交する単位ベクトル、 \hat{m} と \hat{n} を用いて記述される。Fermi 球面上でのギャップ形状は、

$$|\Delta(\hat{k})|^2 = A_{\mu j}^* A_{\mu j} = |\Delta_0|^2 \sin^2(\underline{l} \wedge \hat{k}) \quad (A2.21)$$

であり、planar 状態と同じである。

弱結合極限では、凝縮エネルギーにおいて、ABM 状態と planar 状態は縮退していて、BW 状態より

高い状態にあるが、パラマグノンによる強結合効果が加わると、ABM状態が安定化し planar 状態との縮退が解け、ついには BW 状態に代り ABM 状態が安定化し出現する。

また、ABM 状態の対称性は、BW 及び planar 状態と異なるため、これらの状態間の転移は一般に 1 次転移的である。

iv) polar 状態

4 個のユニタリー状態の中で、最も対称性が低く、 d ベクトルと軌道関数は因数分離されていて軌道関数は適当に量子化軸を選ぶと、球面調和関数 Y_l^m で記述される。polar 状態のオーダーパラメータは、 \hat{p} を軌道空間における定ベクトルとして

$$A_{mj} = \Delta_0 d_\mu p_j \quad (A2.22)$$

で与えられる。スピン関数は ABM 状態と同じであり ESP 状態である。ギャップ形状は

$$|\Delta(\hat{k})|^2 = |\Delta_0|^2 \cos^2(\hat{p} \cdot \hat{k}) \quad (A2.23)$$

の様に、 \hat{p} を南北方向に採ると、南道上でギャップが消える。

また、polar状態は、planar 及び ABM状態の軌道成分から1成分を除く事により移行できるため、これらの状態から対称性の低くなる、た状態と考えられる。また凝縮エネルギーは他のユニタリー状態に比べ最も高い。

最後に4個のユニタリー状態の特徴を表にまとめる。

	BW	planar	ABM	polar
スピン状態	等方的	ESP	ESP	ESP
軌道状態	等方的	$Y_1' + Y_1^{-1}$	Y_1'	Y_1^0
スピン軌道	結合	結合	分離	分離
ギャップの節	なし	点状	点状	線状
軌道ゲージ場	分離	分離	結合	分離

(表 A2.1)

軌道関数として、最も典型的なものを示した。