

板およびシェルの曲げ解析への 境界要素法の応用に関する研究

昭和 63 年 6 月

名古屋大学図書	
和	1030239

佐 脇 豊

目 次

第 1 章 緒 論	1
1・1 数値解析法	1
1・2 境界要素法	3
1・3 板とシェルの境界要素解析	4
1・4 本研究の内容	11
本論文で使用する主な記号	14
第 2 章 弾性平板の微小および有限変形解析	17
2・1 微小変形解析	18
2・1・1 支配方程式	18
2・1・2 積分方程式と離散定式化	21
2・1・3 熱による板曲げ	27
2・1・4 直交異方性板	28
2・2 有限変形解析	32
2・2・1 基礎関係式と支配方程式	32
2・2・2 積分方程式と離散定式化	34
2・2・3 解析手順と数値解析例	38
2・3 まとめ	43
第 3 章 弾性平板およびシェルの近似有限変形 および座屈・座屈後変形解析	44
3・1 支配方程式	45
3・2 積分方程式と離散定式化	47
3・3 数値解析結果と検討	51
3・3・1 解析対象	52
3・3・2 計算結果と検討	55
3・4 まとめ	68
第 4 章 サンドイッチ平板およびシェルの近似有限変形 および座屈・座屈後変形解析	69

4・1	支配方程式	69
4・2	積分方程式と離散定式化	72
4・3	数値解析結果と検討	75
4・3・1	解析対象	75
4・3・2	計算結果と検討	77
4・4	まとめ	84
第5章	板曲げ問題の境界要素法による有効な定式化	85
5・1	支配方程式と積分方程式定式化	86
5・2	領域積分の境界積分への変換	88
5・2・1	調和微分作用素	88
5・2・2	重調和微分作用素	92
5・3	数値解析例	94
5・3・1	3次元ポテンシャル問題	94
5・3・2	弾性平板の曲げ問題	96
5・4	まとめ	98
第6章	関連する問題への応用	99
6・1	弾性床上の平板の境界解法	99
6・1・1	支配方程式と積分方程式の定式化	99
6・1・2	床反力に関する領域積分の境界積分への変換	101
6・1・3	解析手順と数値計算結果	103
6・2	非線形弾性支持平板の曲げ解析	108
6・2・1	非線形な境界条件	108
6・2・2	数値解析例	110
6・3	まとめ	115
第7章	結 論	116
	謝 辞	121
	参考文献	122

第1章 緒 論

1・1 数値解析法

近年、コンピュータの能力は、大容量化、高速化という面で飛躍的に向上しており、製品の設計、現象の解明などを目的としたコンピュータによる数値シミュレーションは、理論あるいは実験とならぶ強力な手段として認められると同時に、幅広い分野で利用されるようになってきた。このような状況に対応して、種々の力学現象や物理現象をコンピュータを利用して解明しようとする計算力学 (Computational Mechanics)、計算物理学 (Computational Physics) あるいは計算数学 (Computational Mathematics) などと呼ばれる新しい研究分野が形成されるに至った。

計算力学や計算物理学に対する道具となるソフトウェアすなわちコンピュータを利用した数値計算法としては、差分法 (Finite Difference Method : FDM) と有限要素法 (Finite Element Method : FEM) が代表的であり、その有用性は広く認められている。これらの方法では、対象とする領域を有限個の要素あるいは格子に分割して解析するので、しばしば領域型解法と呼ばれる。これに対して、境界型解法といえる方法として積分方程式法 (Integral Equation Method) があり、特に問題が対象とする領域の境界上だけで解析できるときには、境界積分方程式法 (Boundary Integral Equation Method : BIEM) あるいは境界積分法 (Boundary Integral Method) と呼ばれる。この方法は、1970年代の後半に有限要素法と類似の離散化手法を取り入れることにより“境界要素法 (Boundary Element Method : BEM)” の名が与えられて以来[1, 2]、計算力学あるいは計算物理学における有力な計算手法として、様々な工学問題や物理問題に適用されるようになってきた。以下では、まず、これらの数値解析法の歴史的および理論的背景とその特徴について概観してみる。

差分法は歴史的には比較的古くから用いられており、広い一般性を持つ数値解析法として知られている。この方法は、微分係数を格子点上の値の差 (差分) によって近似することにより、支配微分方程式を差分格子点における未知量に関する代数方程式に帰着させ、これを解くものである。この方法の考え方は比

較的単純であるが、原則として直交格子点を用いなければならないので、曲線境界などの境界形状の近似や複雑な境界条件の取り扱いが困難となる。また、差分格子点を領域全体にわたって取らなければならないので、3次元問題の解析は容易でない。しかしながら、差分法はその取り扱いが簡便であることから多用され、今日でも流体解析[3]を中心とした種々の分野で高い評価を得ている。

有限要素法[4]は、1950年代中頃、航空機の設計にはじめて利用されて以来、現在では構造解析だけでなく、熱伝導解析、流体解析、電磁界解析などの非構造分野へもその適用範囲を広げ、現在もっとも一般性のある有効な数値解析法として認められている。この解析法の考え方は、古典的なGalerkin法あるいはRayleigh-Ritz法に基づいている。すなわち、前者では、重さつき残差表示から得られる弱形式に、求めるべき関数と同種の重さ関数をとる方法を、また、後者では、支配微分方程式をEuler方程式とする汎関数の停留化条件(変分原理)を、対象とする領域を離散化した要素(有限要素)に適用し、得られた関係式を各要素ごとに重ね合わせることによって、全体の代数方程式系を構成する。有限要素法では、考える領域を適当な形状の要素で近似するので、任意境界形状の問題が解析できる。その反面、領域全体を分割しなければならないので、未知数の数が多くなり、計算容量、計算時間が増大することになる。このことは、3次元問題を対象とするときにより顕著となる。このように、有限要素法による解析システムが大型化する傾向にあることから、計算コストの低減という面からもつぎに述べる境界要素法の有用性が着目されることになってきた。

境界要素法[1, 2]は、与えられた問題の支配微分方程式を境界上の積分方程式に変換し、これを有限要素法と同様の方法で離散化して解析する数値解法である。境界積分方程式を離散化すればよいので、考えている問題の次元を1つだけ下げて取り扱うことができる。このために、領域全体を離散化する差分法や有限要素法に比較して、入力データや解くべき代数方程式の数が著しく減少し、計算時間を短縮できるという特徴を持っている。この方法は、電磁場解析や土質力学の分野においてしばしば現われる、古典的領域解法が不得意とする無限あるいは半無限領域を含む問題の解析にも適している。

1・2 境界要素法

境界要素法の理論的基礎となる積分方程式による解析法の研究は、19世紀初頭以来、多くの研究者によってなされており、これらの研究に関する歴史的な背景の概要は、文献[5]に述べられている。20世紀にはいり、1960年代になると、コンピュータの性能向上が著しくなり、これに伴って積分方程式法の数値解析的手法が発展し、種々の工学問題へ適用されるようになった。このような状況は、有限要素法においても同様であったが、この時期に境界要素法の発展が有限要素法ほど顕著でなかった1つの理由として、境界要素法では特異性を持つ積分方程式を扱わなければならなかったことが考えられる。境界要素法には、支配微分方程式と境界条件に現われる物理的意味の明確な関数に関して Greenの公式などの積分公式を適用して定式化する直接法 (Direct Method) [1] と、ポテンシャル論において用いられている単一層ポテンシャルや二重層ポテンシャルなどを用いて定式化する間接法 (Indirect Method) [6] とがある。

近年における境界要素法の発展の概要は以下のように説明される。1960年代の初期においては、ポテンシャル問題を中心に主に間接法が適用されることが多かったが、1967年にRizzo [7] が、静的弾性問題の解析においてSomigliana型の式に基づいて境界上の変位および表面力を未知量とする定式化をはじめて行って以来、直接法が多くの研究者の注目を集めることになった。初期の解法では、境界積分方程式を境界上の有限個の点で満足させる方法、すなわち境界選点法が用いられたが、1970年代後半には、有限要素法におけるアイソパラメトリック要素などの高次要素の考え方が導入され、より精度の高い効率的な解析ができるようになった。このように、境界積分方程式の数値的解法に有限要素法における“要素”の考え方を取り入れることにより、境界要素法の呼び名が与えられたこと[1, 2]はすでに述べたとおりである。1980年代にはいって、この解析方法の実用問題への応用がさかんに行われるようになってきた。すなわち、固体力学に関する構造分野だけでなく流体力学や電磁気学などの非構造分野の問題へ、静的問題から動的問題へ、あるいは線形問題だけでなく非線形問題へと、その適用範囲が拡張されてきた。

1・3 板とシェルの境界要素解析

本研究では、基本的な構造要素として種々の構造物に用いられている板およびシェルの大変形を含む面外曲げの弾性解析に直接法境界要素法を適用し、解析方法の有効性を検討することを主な目的とする。

板およびシェルは、中央面に垂直な方向の厚さが他の寸法と比較して十分に小さいので、本来は3次元物体と見なすべきものを、2次元的に取り扱うことが特徴である。したがって、板およびシェルの面外曲げ変形問題は、変形前に板およびシェルの中央面に垂直な平面は変形後も垂直であるという Kirchhoff-Love（あるいは Bernoulli-Euler）の仮定により、中央面の変数に関する2次元問題として定式化できる。このような簡単化により、板の微小曲げ問題は、中央面のたわみに関する重調和方程式を解く問題に帰着させることができるので、これまで解析的立場から、様々な解析法が提案されてきた [9]。数値解析的なアプローチとして、例えば有限要素法では、様々な考え方に基づく薄板曲げ要素による解析が行われている [10]。境界要素法による解析は、そのほとんどが微小変形に関するものであり、直接法によるものと間接法によるものの2つに分けて考えることができる。直接法では、問題の境界条件に現われる物理的意味の明確な変数、すなわち、たわみ、たわみ角、曲げモーメントおよび等価せん断力を用いて定式化が行われる。一方、間接法では、単一層ポテンシャルや二重層ポテンシャルなどを用いる定式化であり、取り扱う変数の物理的意味は必ずしも明白でない。以下では、境界要素法あるいは境界積分方程式法による板およびシェルの曲げ解析の過去の研究成果を概観してみる。

〈初期の研究〉

境界要素法による板の曲げ解析の先駆的研究は、1968年の Jaswon と Maiti [14] による間接法に基づくものである。彼らは、支配方程式に含まれる重調和関数を2つの調和関数で置き換えることにより、重調和問題を調和問題に帰着させ、古典的なポテンシャル論の考え方に基づいて積分方程式を定式化する手法を用いている。これより前の1964年に、Chicurel と Suppiger [12] が “Reflection Method” と称する一種の間接法による板曲げ解析の考え方を示していることは興味深い。この方法は、西谷 [13] が独自に考案し、2次元弾性問題の応力解析

に用いた体積法と類似の考え方に基づいている。実用問題への応用として、SegedinとBrickell[15]は凹角をもつ板の解析を、MaitiとChakrabarty[16]は多角形板の解析を間接法により行った。Glahn[18]は、Fredholm型積分方程式により、一種の直接法を用いた解析法を示した。Hansen[19]は、未知数の近似にスプライン関数を用いて積分方程式を解く方法を提案し、楕円孔のある無限板の曲げ問題を解析した。また、AltieroとSikarskie[22]、WuとAltiero[23]およびStanisicとLafayette[25]は、特殊なGreen関数を利用して積分方程式を定式化する直接法と類似の考え方に基づく解析法を示した。ここまでの研究は、静的問題に対する応用であるが、VivoliとFillipi[17]は、動的問題への応用として、間接法による板の振動に関する固有値解析の結果を実験結果との比較においてはじめて示した。

板曲げ問題の分野においては、1970年代は間接法に基づく境界要素法による解析が主流であったが、1978年と1979年に直接法による積分方程式の定式化および解析法が、Bezine[20]あるいはBezineとGamby[21]およびStern[24]により、それぞれ独立に発表された。直接法では、物理的意味のある境界変数、すなわち、板の境界上のたわみ、たわみ角、曲げモーメントおよび等価せん断力を用いて境界積分方程式を定式化している。積分方程式の定式化において、一般化Greenの公式と双一次形式の対称性を用いる考え方は両者において同様であるが、境界積分方程式の離散化の過程がそれぞれの場合で異なる。前者では、境界要素上で変数が一定となるいわゆる一定要素を用いているのに対し、後者では、これが線形に変化するいわば線形要素を用いている。このために、後者では、関数値を代表させる節点を板の角点にとらなければならないこともあるので、角点での境界積分方程式の扱いに詳しい。なお、積分方程式の核関数に関するBergmanとSchifferの著書[11]に薄板の理論を述べた節において、なめらかな境界の板に対して同様の定式化がすでに行われていた。1970年代末期になると、直接法境界要素法による板曲げ解析に関する論文[26]や境界要素法による板曲げ全般に関するレビュー[27]も発表されている。

〈最近の研究〉

先にも述べたように、1980年代になると、境界要素法による板曲げ解析の分

野においても、等方弾性薄板の解析だけでなく種々の応用解析や計算精度面での検討などが見られるようになった。例えば、精度向上のための関数近似の改善に関する研究、曲率の大きくないシェル（偏平シェル：Shallow Shell）の線形解析、計算効率改善のための研究、板あるいは板構造物の座屈あるいは安定性の問題、材料の異方性（直交異方性）を考慮した曲げ解析、弾性床上の板のたわみ解析、板の厚さ方向のせん断変形を考慮したReissner理論による板の曲げ解析、板の熱による曲げ解析、動的問題として板の振動に関する固有値解析、材料非線形問題として板の非弾性たわみ解析、そして幾何学的非線形問題である板およびシェルの有限変形解析などである。あるいは、応用解析として、以上の複数の分野を組み合わせた問題を解析した報告もある。その他にも、2平板の接触問題、内部支持のある板の解析、直接法における境界積分方程式定式化の簡単化に関する研究、積分方程式を定式化するときに必要な基本解の選択に関する研究などがある。以下では、上述のような分野別に、境界要素法の適用事例を見てみる。

等方弾性板あるいはシェルの境界要素法による解析における計算精度向上を目的とした研究には、Duら[42, 53, 89]あるいはHartmannとZotemantel[82]による境界上のたわみ分布をエルミート関数により補間するもの、あるいは、境界上の変数をスプライン関数で近似するものなどがある[48, 79, 96, 101]。田中・宮崎[70]は、直接法境界要素法において線形要素を用いたときに問題となる境界の角点で成り立つ積分方程式の導出について1つの考え方を示した。またIrschikら[37]は、既知のGreen関数を用いて積分方程式定式化を行う、いわゆるGreen関数法の応用により、多角形板の曲げ解析を行っている。このようなGreen関数法の静的および動的問題への応用に関する研究は、Irschik[108]およびKastikadelisとSapountzakis[109]により報告されている。応用解析例として、単一の平板に対する境界要素法を組み立て板構造物の変形解析に適用した報告[72]がある。境界要素法による板曲げ問題の解析に関する記事を1つの章として含む著書[36, 46, 59, 85]もいくつか出版されている。特に、文献[85]では、境界積分方程式の定式化に、従来とは異なる多価の基本解を用いることにより計算精度を向上させる方法を提案しており、線形要素以上の高次要素を用いるときに、この方法は有効であると考えられる。上述の等方弾性板に

対する研究成果は、力学的な荷重が作用する場合の解析に関するものであったが、熱モーメントによる板の曲げ解析については、著者ら [132] が直接法による解析を最初に報告した。その後、Irschik[45] がGreen関数法の応用による同様の解析を示したにすぎない。

シェルの微小変形解析については、円筒シェルに対する境界積分方程式の定式化を示したAntes[35] の報告、偏平シェルの解析を扱った TosakaとMiyake [47] の研究、Gospodinov[63]、Tepavitcharovら[64, 76] の球シェルの解析を扱った研究例がある。また、SimosとSadegh[87] は、間接法により球シェルの解析を行っている。

一方、計算効率の改善に関する研究は、Kamiya[140]、著者ら[145, 146, 147, 149]、CostaとBrebba[62]、BezineとBonneau[65]およびHartmann[71]が報告している。これらの研究では、支配微分方程式の非同次項（板の曲げ問題では、たとえば荷重項あるいは熱負荷項）と基本解の積に関する領域積分を境界積分に変換する方法について述べている。この考え方をを用いることにより、領域積分の数値計算に必要な内部セル分割を行わずに解析できるので、境界だけの分割ですみ、境界要素法としての計算効率は増すことになる。またParisとLeon [73, 80] は、板曲げ問題の支配微分方程式である重調和微分方程式を、2つの調和微分方程式に分離し、積分方程式を定式化するときに含まれる、これらの方程式の非同次項と基本解の積の領域積分を境界積分に変換する方法を提案している。著者ら[152, 156, 157]は、上述のParisらの調和微分方程式に対する変換方法を重調和微分方程式に拡張応用し、弾性床上の板の曲げ解析を行った。

境界積分方程式定式化の簡単化については、境界積分方程式の特殊な定式化に関する研究をBezine[31]が報告している。境界要素法による板曲げ解析においては、通常はたわみとその法線方向導関数に関する境界積分方程式を導出する。後者の導出にはかなり複雑な解析的手続きが必要であるので、これに代る方法として、彼は相似な2つの平板に関する考察から、基本解の法線導関数を用いずに境界積分方程式を導く1つの方法を提案した。この方法は1981年に発表されたが、その後は必ずしも一般的な方法として多用されているわけではない。彼は同年に、従来の直接法により板の内部に支持のある場合の解析法を発表している [32]。ここでは、内部支持点における未知反力を考慮し、境界積

分方程式だけでなく内部支持点について成り立つ積分方程式をも同時に解く方法を用いている。

均質等方弾性板の自由振動問題に対する境界要素法による固有値解析の先駆的研究は、先に述べたVivoliとFillipi[17]によるものである。これは間接法による解析であったが、WongとHutchinson[34]は直接法による定式化を示した。また、丹羽ら[28]は、直接法と間接法の両方法による解析法を提案し、いくつかの数値解析例を示した。板の自由振動問題に対する基本解に関する考察を行った研究もある[103]。これらの報告では、積分方程式を定式化するとき用いられている基本解は、固有値に関連する未知のパラメータを含み、しかも、Hankel関数やBessel関数などにより表される。したがって、数値計算を精度よく行うことや、解析に必要なこれらの関数の導関数を求めたりすることは容易でない。また、固有値解析は高次の非線形方程式を解かなければならない。そこで、これらの難点を避けるために、Bezine[29]は静的曲げ問題の基本解を用いる解析法を提案している。この解法では、境界積分方程式と板の領域内部について成り立つ積分方程式を連立させて境界上の未知量を消去し、内部の未知量だけについて解く方法を用いているので、積分方程式を離散化して最終的に得られる代数方程式は線形な固有値方程式となり、これから必要な固有値を容易に計算することができる。ProvidakisとBeskos[111]は、この方法を板およびシェルの強制振動解析に応用している。

Bezineが自由振動問題に用いた解法[29]は、平板の弾性座屈問題の解法にも応用することができ、Bezine[51]あるいはCostaとBrebbia[74]が同様の手法で、座屈荷重を求めている。田中・宮崎[91, 104]は、単一の平板に適用されたこの解法を、組み立て板構造物の座屈問題に応用した。また、Bezineら[66]は、薄板の座屈変形の方法が一方向に制約をうける特別な場合についての解析例をいくつか示している。薄板の安定性に関する問題の解析については、Okadaら[49]あるいはLiu[105]の報告がある。特に、Liuは、積分公式を用いることにより、問題の解析に必要な面外変位（たわみ）の2階の導関数の計算を省略できる方法を提案しており、これにより計算効率と精度を向上させている。このような手法は、著者ら[135]およびKamiya[158]が板の有限変形解析における積分方程式の定式化のときに用いたものと類似である。

異方性弾性板の微小変形解析は、WuとAltiero [33]、 著者ら[136] および Irschik[52]によるものがあり、比較的少ない。WuとAltieroは影響関数法を用いた一種の間接法により、直交異方性および一般的な異方性をもつ板の解析を行い、いくつかの解析例を厳密解との比較において示した。著者らは、直接法による直交異方性板の一般的な解析法を示し、直交異方性円板の計算結果を解析解と比較して示した。また、Irschikは、直交異方性板に対する積分方程式をGreen関数法の応用により定式化し、種々の異方性パラメータについて長方形板に対する数値解析例を示した。その他に、Zastrow[97] による異方性単純支持平板に限定して解析した報告もある。

弾性床上あるいは弾性基礎におかれた平板の曲げ解析は、取り扱う弾性床の特性により2種類に大別できる。すなわち、板のたわみに比例した反力を発生するWinklerタイプの床、あるいは、さらに床のせん断変形による反力をも考慮したPasternakタイプの床を扱う場合である。KatsikadelisとAlmenakas[54, 55]は、前者のタイプについて、固定および単純支持境界条件に対する問題を2つの異なる定式化により解析した。CostaとBrebba[68]は、これと同様の定式化であるが、積分方程式に含まれる領域積分を境界積分に変換することにより、計算効率を向上させる工夫をしている。後者のタイプの弾性床上の板の解析に対しては、Balasら[58]およびPuttonenとVarpasuo[81]の報告がある。この場合には、積分方程式を定式化するときの基本解の構成が複雑であり、両者はそれぞれ異なる方法で基本解を求めている。

これまでに取り扱った平板の曲げ理論は、板厚が板の代表寸法に比較して小さいときに成り立つと考えられるKirchhoff-Loveの仮定に基づくものであった。板厚が大きくなるときには、厳密には3次元問題として取り扱わなければならない。これに対しては、板の横せん断変形を考慮して修正したReissnerの曲げ理論により比較的精度の高い解が得られることがわかっている。Reissner曲げ理論への境界要素法の応用は、Weeen[38, 41]がはじめて報告している。彼は、この場合の基本解の導出と積分方程式の定式化について述べ、いくつかの数値解析例を示した。その他に、定式化の理論について考察したMathiak[61]の研究や種々の境界要素により同様の解析を行ったBrebbaとLong[106]の研究がある。Reissner曲げ理論に基づく板の振動解析 [102]、 偏平シェルの曲げ解析

[110]、弾性床上のReissner板の曲げ解析[112]に関する研究も報告されている。

その他の問題に対する応用としては、曲げを受けるき裂のある弾性板の応力拡大係数を評価した研究[44, 60]、2平板間の接触に関する BezineとFortuneの研究[57]、非線形弾性支持された平板の微小変形解析に関する著者らの研究[153, 154]、などがある。

〈非線形解析〉

これまでに紹介した研究は、いくつかの例外をのぞきそのほとんどが線形解析である。境界要素法の非線形曲げ解析に対する代表的な応用例は、クリープ、粘弾性、熱弾塑性などの材料非線形問題と有限変形を含む幾何学的非線形問題の解析であり、比較的少数である。

材料非線形問題への応用については、MorjariaとMukherjee[30]が平板の非弾性曲げ解析をはじめて報告した。Mukherjeeは、境界要素法のクリープと破壊への応用について述べた教科書[40]のなかで、粘塑性板の曲げについて記述している。また、MukherjeeとPoddar[94]は扁平シェルの非弾性解析についても報告している。Moshaiovら[84, 88]は、初期塑性モーメントを伴う板の弾塑性あるいは熱弾塑性曲げ解析を行った。

板およびシェルの有限変形解析は、固体力学あるいは構造力学の分野における代表的な幾何学的非線形問題の1つである。よく知られた板の有限変形理論は von Karman によるものであり、この支配微分方程式は面内の変形と面外の変形が連成する形式となるので、その解析は一般に容易でない。板の有限変形解析における von Karman 方程式に基づいた境界要素解析については、著者ら[135]、Tanaka[43, 56]、TosakaとMiyake[69, 75, 90, 92]、および YeとLiu[67]の研究が代表的である。著者らは変位だけで表される von Karman型の支配方程式に基づいた、直接法境界要素法による定式化を行った。一方、TanakaおよびTosakaらは、応力関数により表示された通常の von Karman方程式により解析した。YeとLiuは、著者らと類似の定式化に基づいた数値解析例を示した。先にも述べたように、この問題では連成方程式を解くことになるので、その解析は複雑となるが、Tosakaらは板あるいはシェルの領域内にも未知量をとる方法を用いて、非線形性の大きい問題も精度よく解析している。この方法は、彼らにより“ハイブリッド型積分方程式法”と呼ばれている。さらに、YeとLiu

[95]、Kamiya[158] は、熱負荷が作用する板の有限変形解析についても報告している。最近では、偏平シェルの過渡的応答を取り扱ったZhangとAtluri [93]の研究やFengとLi[99]の研究も報告されている。

これに対し、有限変形に関するBergerの近似支配方程式[8] に基づいた平板の曲げに対する境界要素解析も行われた。Bergerにより提案された近似支配方程式は、たわみに関する非連成の準線形微分方程式となるので、板およびシェルの曲げに関する種々の問題に広く応用されている。Berger方程式はその導出に理論的根拠が明白でないにもかかわらず、得られる解は板の面内変位が境界上で拘束されているときには、連成解のよい近似となることが知られている。著者ら[133] は、このようなBerger方程式に対する積分方程式を、微小変形解析に用いられる重調和方程式の基本解により定式化し、いくつかの数値解析例を示した。さらに、熱負荷の作用する板の解析にも対応する定式化を行い、熱変形などの比較的非線形性の大きい問題の解析もできることをはじめて示した[134]。一方、Sladekら [50]は、線形化されたBerger方程式に対する基本解を用いて境界積分方程式を定式化し、得られた数値解を解析解と比較している。著者らは、この他にも板と偏平シェルの近似有限変形・座屈後変形解析 [137, 141, 142, 144]、弾性床上の板の近似有限変形解析[150] および加熱されたサンドイッチ構造の板およびシェルの近似有限変形・座屈後変形解析[138, 139, 155] についても報告した。

1・4 本研究の内容

前節では、本研究の主題、すなわち、板およびシェルの曲げ解析に対する境界要素法の応用に関する、それぞれの適用分野における過去の研究例と現状について述べた。このように現在までの研究成果を振り返ってみると、1970年代には線形解析を中心とする基本的な問題の解析が行われたにすぎないが、1980年代にはいると、様々な応用解析が積極的になされるようになったことがわかる。このような状況のなかで、著者らは、1980年代のはじめには直接法境界要素法による一般的な取り扱いが示されていなかった、熱による板の曲げ、直交異方性板の曲げ、板およびシェルの有限変形解析に関する研究に着手した。特に、有限変形解析に関するテーマを選んだ理由は、板およびシェルの解析では

大変形を考慮する必要性が高いにもかかわらず、この種の問題に対する効果的な境界要素法の開発が行われていなかったからである。そこで、本研究では、特に直接法による境界要素法の板およびシェルの大変形すなわち有限変形問題への応用に関する研究を中心に扱い、解析方法の有効性と妥当性を明らかにすることを目的とする。

前節でも述べたように、著者らは、まず、板の有限変形理論で著名な von Karman理論に基づいた境界要素法による定式化を示した。von Karman理論では、板の面外変位（たわみ）と面内変位が連成するので、この理論に基づく解析は必ずしも容易ではない。そこで、著者らは、Bergerが提案した板の有限変形に関する近似支配方程式の境界要素解析に着目した。このわけは、Berger方程式は、見かけ上面外変位だけで表示される準線形な非連成方程式となるので、von Karman理論による連成式と比較して、境界要素法による解析が容易になると考えたからである。さらに著者らは、Berger方程式に対する境界要素法を、板およびシェルの座屈問題、弾性床上の板の曲げあるいはサンドイッチ板およびシェルの解析に拡張応用した。この他にも、境界要素法における計算効率の向上を目的として、板の曲げ問題に対する直接法境界要素法の有効利用に関する1つの考え方を示した。関連する問題への応用として、弾性床上の板の曲げ解析を行った。また、境界要素法を効果的に利用できる問題の例として、非線形弾性支持された平板の微小変形に関する研究について報告した。

本論文は、上述の一連の研究をまとめたものであり、以下のような内容で構成した。

第2章では、その前半で、有限変形解析の基礎となる、力学的負荷の作用する一様厚さの等方性弾性平板の微小変形解析に関する支配方程式に対して直接法境界要素法の取り扱いを説明する。つぎに、熱負荷の作用する板の曲げあるいは直交異方性板の曲げ問題の定式化と扱い方について述べ、その解析例を示す。後半では、von Karmanによる板の有限変形理論に基づく直接法境界要素法による定式化が、微小変形解析の拡張として行えることを示すと同時に、その解析手順についても説明する。

第3章においては、Bergerによる近似有限変形解析の直接法境界要素法による扱いについて論じる。この章では、はじめに、横荷重と熱負荷をうける弾性

偏平シェル（平板も含む）のBerger方程式が、シェルの膜ひずみの第2不変量
を無視した形のポテンシャルエネルギーの停留条件から導かれる過程（Berger
法）について述べる。つぎに、Berger方程式に対する積分方程式の定式化は、
弾性平板の微小変形解析と同様の基本解を用いて行えることを示す。さらに、
弾性床上の平板の境界要素法による近似有限変形解析への応用についても述べ
る。最後に、シェルが熱負荷をうける場合の座屈・座屈後変形解析は、有限変
形解析と同様の手順で取り扱えることを解析例とともに示す。

第4章では、第3章で述べた解析法を、サンドイッチ構造の板およびシェルの
の曲げ解析に拡張する。ここでは、まず、サンドイッチ平板およびシェルの近
似有限変形解析に関する支配方程式の導出が、上述のBerger法を修正した方法
（修正Berger法）により行われる過程の概略を述べる。つぎに、得られた支配
方程式の積分方程式への定式化が、3章で述べた手法と類似の方法で行えるこ
とを示す。サンドイッチ平板およびシェルについても、有限変形解析と座屈後
変形解析の両者の場合を扱う。

第5章では、境界要素法における計算効率の向上を目的として、板の曲げ問
題の直接法境界要素法による効果的な取り扱いに関する1つの考え方を示す。
板曲げ問題の支配微分方程式のような非同次方程式に対する積分方程式は、境
界積分だけでなく一般に領域積分を含む形で定式化される。ここでは、このよ
うな領域積分を境界積分に変換する方法を、調和微分方程式について説明した
あと、この方法を板曲げ問題の支配微分方程式である重調和微分方程式の積分
方程式定式化に適用し、いくつかの数値解析例を示して、解析精度と有効性に
ついて検討する。

第6章においては、関連する問題への応用として、前半では、第5章の趣旨、
すなわち、計算効率の向上を目的として、5章とは別の方法で弾性床上の平板
の曲げ解析を行い、その有用性を検討する。後半では、境界要素法を効果的に
利用できる問題の例として、支配方程式は線形であるが境界条件が非線形とな
る問題について考える。具体的には、境界曲げモーメントがたわみ勾配の非線
形関数となるような非線形弾性支持された平板の解析について考え、数値解析
例を示す。

最後に、第7章において、以上の研究結果をまとめ、本研究の総括を行う。

本論文で使用する主な記号

a	:	板あるいはシェルの代表長さ
D	:	曲げ剛性
D_{ijkl}	:	弾性係数
E	:	ヤング係数（縦弾性係数）
E_{ijkl}	:	曲げ剛性係数
e_{ij}, e_{ijk}	:	交代記号
F	:	膜応力関数
G	:	せん断弾性係数
h	:	板の厚さあるいは芯材の厚さ
I_1, I_2	:	膜ひずみの第1および第2不変量
K_n	:	Kirchhoff等価せん断力
k_1	:	主曲率
L	:	微分作用素
M_{ij}	:	曲げおよびねじりモーメント
M_n	:	法線方向曲げモーメント
M_{ns}	:	境界上のねじりモーメント
M_T	:	熱による曲げモーメント
n	:	外向き法線
n_1	:	外向き法線の方向余弦 [$= \cos(x_1, n)$]
N_T	:	熱による合応力
N_{ij}	:	合応力（膜応力）
\bar{P}	:	横荷重
p_1	:	面内の境界表面力
Q_1	:	せん断力
r	:	ソース点と場の点との距離
R	:	座標原点と2次元空間の任意点間の距離
s	:	境界接線
S	:	板の側面

t	:	表面板の厚さ
T	:	温度 (基準温度からの温度差)
u_i	:	面内変位
V	:	板あるいはシェルの占める3次元領域
V_z	:	境界上のせん断力
w	:	たわみ
$(x_1, x_2, z = x_3)$:	Cartesian座標系あるいは直交曲線座標系
α	:	線膨張係数
Γ	:	板あるいはシェルの中央面の境界
Γ_1, Γ_2	:	力学のおよび幾何学的境界条件が規定された境界
ε_{ij}	:	膜ひずみ
δ, δ_1	:	Dirac デルタ関数
δ_{ij}	:	Kronecker デルタ
κ^2	:	Berger定数
Ω	:	板あるいはシェルの中央面の占める2次元領域
ν	:	Poisson比
Π	:	ポテンシャルエネルギー
ψ	:	非同次項
σ_{ij}	:	応力
∇^2	:	2次元空間における調和作用素
∇_3^2	:	3次元空間における調和作用素
∇^4	:	2次元空間における重調和作用素 ($\equiv \nabla^2 \nabla^2$)

下添え字

$()_{,1}$:	$\partial () / \partial x_1$
$()_{,n}$:	$\partial () / \partial n$ 境界上の法線方向導関数
$()_{,s}$:	$\partial () / \partial s$ 境界上の接線方向導関数
i, j, \dots	:	1, 2

(n, s, n_0 を除く繰り返し添え字について総和規約をとる)

上添え字

b	:	下表面板
c	:	芯材
f	:	表面板
ℓ	:	線形項
m	:	上下表面板の平均値
n	:	非線形項
t	:	上表面板
*	:	重さ関数およびこれに関連する関数
⌈	:	規定された値

第2章 弾性平板の微小および有限変形解析[132, 135, 136]

前章で述べたように、境界要素法あるいは境界積分方程式法による薄い弾性平板の曲げ解析では、直接法と間接法による定式化がある。直接法では、問題の境界条件に現われる変数、すなわち、たわみ、たわみ勾配、曲げモーメントおよび等価せん断力を用いて定式化が行われる。一方、間接法は、ポテンシャル論において用いられてきた単一層ポテンシャルや二重層ポテンシャルなどを用いる定式化である。本章では、弾性平板の微小変形および有限変形解析に関して、直接法に基づく境界要素法による積分方程式の定式化あるいはその解析法について述べる。

等方な弾性平板の静的微小変形問題に対しては、Bezzineら[20, 21]あるいはStern[24]が、直接法に基づく解析法と数値解析例をはじめて示した。これらは、板が横荷重を受ける場合の解析である。板が熱負荷を受けるときには、曲げモーメントとせん断力の表示および支配方程式に温度場による付加項が必要となり、境界要素法による扱いも横荷重の場合とは若干異なってくる。また、異方性板の微小変形について、WuとAltiero [33]が間接法を、Irschik [52]がGreen関数法の応用による解析法を提案しているが、直接法による解析例は示されていない。一方、幾何学的非線形問題の代表的な例である板あるいはシェルの有限変形解析の境界要素法による研究は比較的少ない。Tanaka[43, 56]、TosakaとMiyake[69, 75, 90, 92]は、有限変形解析における通常のvon Karman方程式に基づいた境界要素法による定式化と解析例を示した。これらの解析では、問題の支配方程式が応力関数を用いた定式化となっているため、板の面内変位に関する境界条件を直接に取り扱うことはできないことなどの不都合が指摘される。YeとLiu [67]は、応力関数を用いずに変位だけで表示された von Karman型の方程式により、著者ら [135]と同様の解析を行っているが、境界上の等価せん断力の表示に有限変形の項が考慮されておらず、正しい定式化になっていない。

このような状況を考慮して、本章では、以下のような内容について述べることにする。はじめに、板の微小変形解析に必要な問題設定と支配方程式について説明する。つぎに、横荷重が作用する一様厚さの等方弾性薄板について、直

接法に基づく境界要素法により積分方程式を定式化するための手順を示し、積分方程式の離散定式化について述べる。そのあとで、熱による板の曲げおよび直交異方性板の問題について、その直接法境界要素法による扱い方と解析例を示す。さらに、幾何学的非線形問題の代表的な例である板の有限変形解析について、von Karman型の支配方程式と積分方程式の定式化を微小変形解析の拡張として述べ、数値解析の手順と解析例を示す。なお、本論文では全般にわたり、繰り返し添え字については、総和をとるものとする。

2・1 微小変形解析

2・1・1 支配方程式[113]

板は厚さが他の寸法に比べて小さく、しかも板の面内の変位に比べて垂直方向に大きな変位を生じるので、板の曲げ問題では、一般的な3次元問題の扱いによるのではなく、通常2次元的に扱われる。

図2-1 に示すように板の厚さを h とし、板の中央面に x_1, x_2 軸があるように直交座標系 x_1, x_2, z をとる。板の占める3次元領域を V 、中央面が占める2次元領域を Ω 、力とモーメントの境界条件と変位の境界条件が与えられている側面をそれぞれ S_1, S_2 により表す。

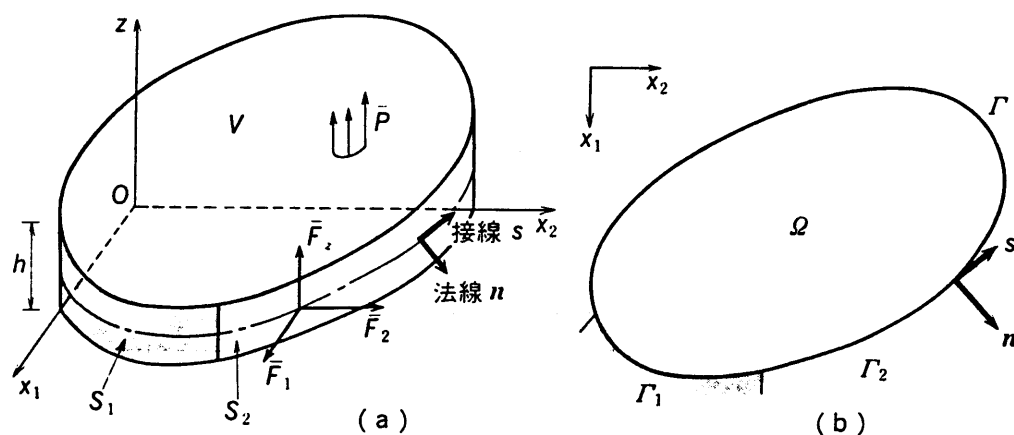


図2-1 平板の解析・記号の説明

(a) 3次元物体 (b) 中央面

中央面 Ω の境界を Γ とし、 Γ_1 、 Γ_2 をそれぞれ側面 S_1 、 S_2 に対応する境界とする。板は剛体変位を生じないように支持されており、つぎのような外力が作用していると考える。

Ω 内に板に垂直な荷重 \bar{p}

S_1 上に F_1 、 F_2 、 F_z

板はその厚さが他の寸法に比べて十分に小さく、Kirchhoff-Love の仮定が成り立つとすれば、板の変位 U_1 、 W は、中央面の変位 u_1 、 w によりつぎのように近似することができる。

$$U_1(x_1, x_2, z) = u_1(x_1, x_2) - z w_{,1}(x_1, x_2)$$

$$W(x_1, x_2, z) = w(x_1, x_2) \quad (2-1)$$

このように近似すれば、すべてのひずみ成分を考えることは必要がなくなり、上述の外力が作用するとき、薄板に関する仮想仕事の原理はつぎのようになる。

$$\int_V \sigma_{1j} \delta E_{1j} dV - \int_\Omega \bar{p} \delta W d\Omega - \int_{S_1} (F_1 \delta U_1 + F_z \delta W) d\Gamma dz = 0 \quad (2-2)$$

ここで、 δU_1 、 δW は仮想変位、 δE_{1j} は仮想ひずみ、 σ_{1j} は応力である。式(2-1)を式(2-2)に代入し、板の厚さ方向に積分すればつぎの式が得られる。

$$\begin{aligned} & - \int_\Omega [N_{1j,j} \delta u_1 + (Q_{1,1} + \bar{p}) \delta w] d\Omega + \int_{\Gamma_1} [(p_1 - \bar{p}_1) \delta u_1 \\ & + \{ (V_z + M_{ns,s}) - (V_z + \bar{M}_{ns,s}) \} \delta w - (M_n - \bar{M}_n) \delta w_{,n}] d\Gamma \\ & - \sum [(M_{ns} - \bar{M}_{ns}) \delta w] + \int_{\Gamma_2} [p_1 \delta u_1 + (V_z + M_{ns,s}) \delta w \\ & - M_n \delta w_{,n}] d\Gamma - \sum [M_{ns} \delta w] = 0 \end{aligned} \quad (2-3)$$

上記の諸式で、 $()_{,1}$ は x_1 方向、 $()_{,n}$ 、 $()_{,s}$ はそれぞれ境界における法線方向、接線方向の偏微分を表す。また、 $[]$ は境界上の不連続量を表し、それらの総和はすべての不連続点についてとられる。ここで用いた板厚方向の積分量は、図2-2を参照して、つぎのように定義される。

$$N_{1j} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{1j} dz, \quad M_{1j} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{1j} z dz \quad (2-4)$$

$$\bar{p}_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{F}_1 dz, \quad V_z = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{F}_z dz \quad (2-5)$$

ただし、 N_{1j} は合応力、 M_{1j} は曲げおよびねじりモーメント、 \bar{p}_1 、 V_z は境界

における x_1, z 方向の外力を表す。また、これらの量の間にはつぎのような関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} Q_1 &= M_{1j,j}, & p_1 &= N_{1j}n_j \\ M_n &= M_{1j}n_1n_j, & M_{ns} &= -e_{ijk}M_{ik}n_kn_j \\ V_z &= Q_1n_1 \end{aligned} \quad (2-6)$$

ただし、 M_n, M_{ns} はそれぞれ境界での曲げモーメントとねじりモーメントを、 n_1 は法線 n の方向余弦を、 e_{ijk} は、 i, j, k が 1, 2, 3 の偶置換のとき 1、奇置換のとき -1、その他のとき 0 となる交代記号を表す。

式(2-3) から、つぎのような支配方程式と境界条件が得られる。

$$N_{1j,j} = 0 \quad (2-7)$$

$$M_{1j,j} + \bar{p} = 0 \quad (2-8)$$

力とモーメントの境界条件 (Γ_1 上) :

$$p_1 = \bar{p}_1, \quad V_z + M_{ns,s} = \bar{V}_z + \bar{M}_{ns,s}, \quad M_n = \bar{M}_n \quad (2-9)$$

変位の境界条件 (Γ_2 上) :

$$u_1 = \bar{u}_1, \quad w = \bar{w}, \quad w_{,n} = \bar{w}_{,n} \quad (2-10)$$

板の微小変形解析では上記の支配微分方程式と境界条件を、面内変形と曲げ変形 (面外変形) に対応して、つぎの 2 組に分けて扱うことができる。

$$N_{1j,j} = 0; \quad p_1 = \bar{p}_1, \quad u_1 = \bar{u}_1 \quad (2-11)$$

$$M_{1j,j} + \bar{p} = 0; \quad V_z + M_{ns,s} = \bar{V}_z + \bar{M}_{ns,s}, \quad M_n = \bar{M}_n, \quad w = \bar{w}, \quad w_{,n} = \bar{w}_{,n} \quad (2-12)$$

このようにできるのは面内変形と面外変形が互いに非連成だからである。前者

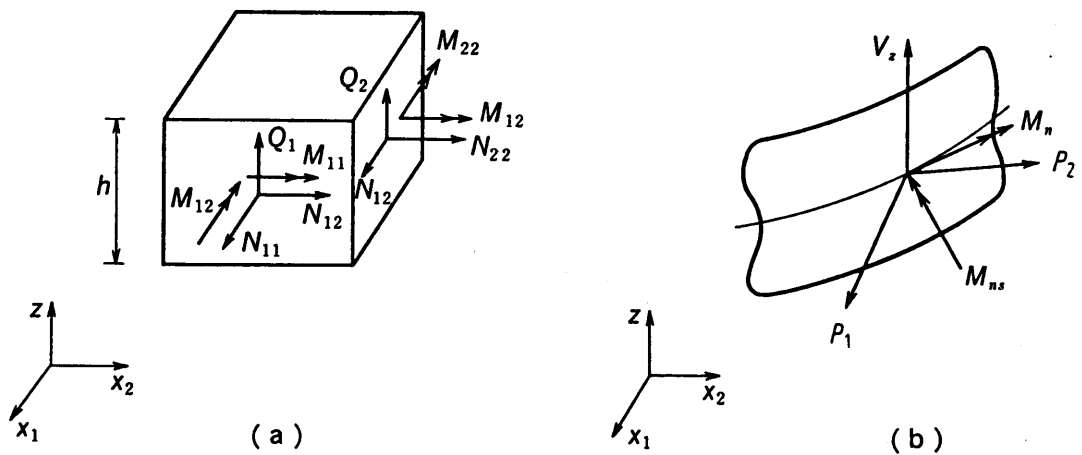


図2-2 合応力と合モーメント
(a) 板要素 (b) 境界

は2次元弾性問題の平面応力状態に対応するので、曲げ問題だけを考えるときは後者だけを用いればよい。有限変形は面内変形と面外変形が連成するので、両者を同時に扱うことになる。これについては2・2節で述べる。

これまでに用いた面外変形に関する量を、たわみ w によって表すとつぎのようである。

$$M_{ij} = -D [\nu \delta_{ij} w_{,kk} + (1-\nu) w_{,ij}] \quad (2-13)$$

$$V_z = -D \nabla^2 w_{,n} \quad [\nabla^2 \equiv \partial^2 / \partial x_1 \partial x_1] \quad (2-14)$$

$$M_{ns} = -D (1-\nu) w_{,ns} \quad (2-15)$$

$$M_n = -D [(1-\nu) w_{,ij} n_i n_j + \nu \nabla^2 w] \quad (2-16)$$

ここで、 ν はPoisson比、 δ_{ij} はKronecker デルタ、 D はYoung係数を E としてつぎのように定義される板の曲げ剛性である。

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2-17)$$

式(2-9)₂で与えられる境界での合せん断力はKirchhoffの等価せん断力と呼ばれ、つぎのように K_n で表す。

$$K_n = V_z + M_{ns,s} \quad (2-18)$$

また、式(2-13)を用いれば、式(2-12)₁はつぎのように書くことができる。

$$D \nabla^4 w = \bar{p} \quad (2-19)$$

ここで、 ∇^4 は2次元空間の重調和微分作用素である。

板の曲げ問題で通常用いられる境界条件は、4種類の境界変数 K_n 、 M_n 、 w 、および $w_{,n}$ のうちの2つによってつぎのように与えられる。

$$\text{単純支持: } w = 0, \quad M_n = 0 \quad (2-20)$$

$$\text{固定支持: } w = 0, \quad w_{,n} = 0 \quad (2-21)$$

$$\text{自由: } M_n = 0, \quad K_n = 0 \quad (2-22)$$

あるいは、これらの量が互いに関係する形として境界条件を与えることもできる。これについては、6章で具体例を述べる。

2・1・2 積分方程式と離散定式化[20, 21, 24]

薄板の解析では、Kirchhoff-Loveの仮定に基づき板の厚さにわたる等価な積

分量を用いて2次元的に扱うことをこれまでに示した。直接法境界要素法では、境界条件式(2-20)～(2-22)に現われる量を用いて積分方程式を定式化する。直接法による積分方程式定式化の方法はいくつかある。たとえば、相反定理を用いた力学的考察に基づいた定式化、あるいは重さ付き残差法による定式化などである。ここでは、領域内で成り立つ支配方程式に重さ関数 w^* を掛けて積分した表示、すなわち

$$\int_{\Omega} (-D \nabla^4 w + \bar{p}) w^* d\Omega = 0 \quad (2-23)$$

をもとにする方法について述べる。

重調和作用素に関する一般化Greenの公式

$$\int_{\Omega} (w^* \nabla^4 w - \nabla^2 w \nabla^2 w^*) d\Omega = \int_{\Gamma} (w^* \nabla^2 w_{,n} - w^*_{,n} \nabla^2 w) d\Gamma \quad (2-24)$$

および双一次形式

$$L(w, w^*) = (1-\nu) (w_{,11} w^*_{,22} + w_{,22} w^*_{,11} - 2 w_{,12} w^*_{,12}) \quad (2-25)$$

を用い、さらに式(2-14)～(2-16)および式(2-18)の関係を考慮すれば、つぎの式が導かれる。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [w^* \nabla^4 w - \nabla^2 w \nabla^2 w^* + L(w, w^*)] d\Omega &= \frac{1}{D} \int_{\Gamma} (w^*_{,n} M_n - w^* K_n) d\Gamma \\ &\quad + \Sigma [w^* M_{ns}] \end{aligned} \quad (2-26)$$

上式の w と w^* を入れかえた式を作り、 $L(w, w^*)$ が w と w^* に関して対称に表されていることを利用すれば次式を得ることができる。

$$\begin{aligned} D \int_{\Omega} (w^* \nabla^4 w - w \nabla^4 w^*) d\Omega \\ = - \int_{\Gamma} [K_n w^* - M_n w^*_{,n} - K_n^*(w^*) w + M_n^*(w^*) w_{,n}] d\Gamma \\ + \Sigma [w^* M_{ns} - w M_{ns}^*(w^*)] \end{aligned} \quad (2-27)$$

ここで、 K_n^* 、 M_n^* 、 M_{ns}^* は Kirchhoff の等価せん断力、曲げモーメントおよびねじりモーメントの表示を w^* について記述したものである。

直接法境界要素法では、重さ関数 w^* としてつぎの微分方程式を満たす解を用いるのが普通である。

$$\nabla^2 w^*(P, Q) + \delta(P, Q) = 0 \quad (2-28)$$

ここで、 $\delta(P, Q)$ はDiracのデルタ関数である。このような解 w^* は重調和方程式の基本解と呼ばれ、点 Q に単位集中荷重が作用するときの点 P のたわみを表す。式(2-28)の解はつぎのように与えられる。

$$w^*(P, Q) = -\frac{1}{8\pi} r^2(P, Q) \log r(P, Q) \quad (2-29)$$

ただし、 r は点 P と Q の距離を表す。

$$r(P, Q) = |\overline{PQ}| \quad (2-30)$$

式(2-28)を式(2-27)に代入すればつぎの式を得る。

$$\begin{aligned} Dc(P)w(P) = & -\int_{\Omega} w^*(P, Q') \overline{p}(Q') d\Omega + \int_{\Gamma} \{K_n^*[w^*(P, Q)]w(Q) \\ & -M_n^*[w^*(P, Q)]w_{,n}(Q) + w_{,n}^*(P, Q)M_n[w(Q)] \\ & -w^*(P, Q)K_n[w(Q)]\} d\Gamma - \Sigma \{w(A_1)M_{n_s}^*[w^*(P, A_1)] \\ & -M_{n_s}[w(A_1)]w^*(P, A_1)\} \quad (Q' \in \Omega, Q \in \Gamma) \end{aligned} \quad (2-31)$$

ここで、係数 $c(P)$ は1であり、 A_1 は M_{n_s} が不連続になる境界点である。 $*$ をつけた関数 $w_{,n}^*$, K_n^* , M_n^* および $M_{n_s}^*$ は、記号を図2-3のように定義すれば、つぎのように表される。

$$w_{,n}^* = -\frac{1}{8\pi} (2\log r + 1) r \cos(\beta - \alpha) \quad (2-32)$$

$$\begin{aligned} M_n^*(w^*) = & \frac{D}{8\pi} [(2\log r + 1)(1 + \nu) \\ & + 2(1 - \nu) \cos^2(\beta - \alpha) + 2\nu] \end{aligned} \quad (2-33)$$

$$K_n^*(w^*) = \frac{D}{8\pi r} [4\cos(\beta - \alpha) + (1 - \nu) \{2\cos\beta - 4\sin^2\beta \cos\beta \cos^3\alpha\} \\ + (1 - \nu)(2\sin\beta - 4\cos^2\beta \sin\beta \sin^3\alpha)] \quad (2-34)$$

$$M_{n,s}^*(w^*) = -\frac{D(1 - \nu)}{8\pi} \sin[2(\beta - \alpha)] \quad (2-35)$$

積分方程式(2-31)を境界上で成り立つ式に帰着させるために、点Pを境界に近づける。このような極限において、式(2-31)の境界積分は特異積分になるので、これをCauchyの主値積分と解釈すれば、なめらかな境界について $c(P)=1/2$ とおいた式が得られる。したがって係数 $c(P)$ を点Pの位置に関連づけて、

$$c(P) = 1 \quad (P \in \Omega), \quad c(P) = 1/2 \quad (P \in \Gamma) \quad (2-36)$$

と定義すれば、式(2-31)は、点Pの位置に関係なく一般的な式と見なすことができる。なめらかでない境界では、 $c(P)$ の値は点Pの位置する境界の幾何学形状に依存する。

境界上のねじりモーメントは式(2-15)で示したように、

$$M_{n,s}(w) = -D(1 - \nu) \partial(w, n) / \partial s \quad (2-37)$$

で表されるから、 w, n の接線方向の変化率によって計算される。したがって、点Pを境界上にとったとき、式(2-31)は右辺の領域積分を除き、境界上の関数

$$w, w, n, K_n \quad \text{および} \quad M_n$$

の関係として表すことができる。これらの4つの関数のうち2つは、境界条件

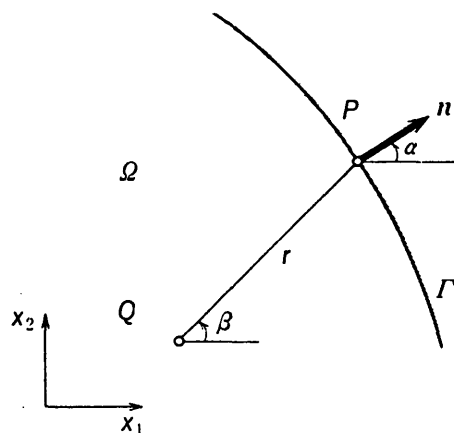


図2-3 記号の説明

(2-20)～(2-22)によって指定されるので、これらを定めるためにはさらに独立な境界積分方程式が必要になる。新しい積分方程式を得るには、境界点Pに関する式(2-31)を、その点で外向き法線 n_0 方向に微分する方法が用いられ、つぎのようになる。

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}Dw_{,n_0}(P) = & - \int_{\Omega} w_{,n_0}^*(P, Q') \bar{p}(Q') d\Omega \\
 & + \int_{\Gamma} \{ K_{n,n_0}^*[w^*(P, Q)] [w(Q) - w(P)] - M_{n,n_0}^*[w^*(P, Q)] w_{,n}(Q) \\
 & + w_{,nn_0}^*(P, Q) M_n[w(Q)] - w_{,n_0}^*(P, Q) K_n[w(Q)] \} d\Gamma \\
 & - \Sigma [w(A_1) M_{ns,n_0}^*[w^*(P, A_1)] - M_{ns}^*[w(A_1)] w_{,n_0}^*(P, A_1)] \quad (2-38)
 \end{aligned}$$

ここで、*をつけた関数は、記号を図2-4のように定義すれば、つぎのように表される。

$$w_{,n_0}^* = \frac{1}{8\pi} (2\log r + 1) r \cos(\beta - \theta) \quad (2-39)$$

$$w_{,nn_0}^* = \frac{1}{8\pi} [(2\log r + 1) \cos(\theta - \alpha) + 2\cos(\beta - \alpha) \cos(\beta - \theta)] \quad (2-40)$$

$$\begin{aligned}
 M_{n,n_0}^*(w^*) = & - \frac{D}{8\pi r} [2(1+\nu) \cos(\beta - \theta) + 4(1-\nu) \\
 & [\cos(\beta - \alpha) \cos(\theta - \alpha) - \cos^2(\beta - \alpha) \cos(\beta - \theta)]] \quad (2-41)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{n,n_0}^*(w^*) = & - \frac{D}{8\pi r^2} [-4\cos(\alpha - \theta) + 8\cos(\beta - \alpha) \cos(\beta - \theta) \\
 & + (1-\nu) \{ \cos^3\alpha (2\cos\theta - 16\cos^2\beta \sin^2\beta \cos\theta \\
 & + 12\cos\beta \sin\beta \sin\theta - 16\cos\beta \sin^3\beta \sin\theta) \\
 & + \sin^3\alpha (2\sin\theta - 16\cos^3\beta \sin\beta \cos\theta \\
 & + 12\cos\beta \sin\beta \cos\theta - 16\cos^2\beta \sin^2\beta \sin\theta) \}] \quad (2-42)
 \end{aligned}$$

$$M_{ns,n_0}^*(w^*) = - \frac{D(1-\nu)}{8\pi r} \sin(\beta - \theta) \cos[2(\beta - \alpha)] \quad (2-43)$$

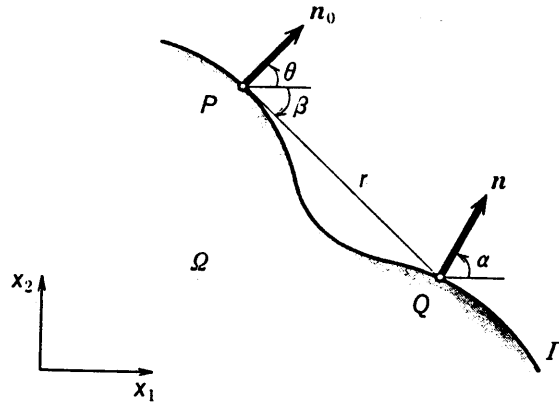


図2-4 記号の説明

これで境界上における w , $w_{,n}$, K_n , M_n に関する2つの積分方程式(2-31), (2-38)が得られたことになる。つぎに、これらの積分方程式を数値的に解くための離散化表示について述べる。境界 Γ を有限個の境界要素により分割し、上述の4つの関数を内挿関数によって近似する。境界要素上の節点におけるこれらの関数値により構成される列ベクトルをつぎのようにおく。

$$\{w\}, \{w_{,n}\}, \{K_n\}, \{M_n\}$$

各節点について式(2-31), (2-38)書き下したものをまとめれば形式的につぎのような方程式系を得る。

$$[A_1] \{w\} + [B_1] \{w_{,n}\} + [C_1] \{K_n\} + [D_1] \{M_n\} = \{E_1\} \quad (2-44)$$

$$[A_2] \{w\} + [B_2] \{w_{,n}\} + [C_2] \{K_n\} + [D_2] \{M_n\} = \{E_2\} \quad (2-45)$$

ここで、 $[A_1], \dots, [D_1]$ ($i=1,2$)は各節点と境界要素との関係として与えられる係数マトリックス、 $\{E_1\}$ は非同次項による領域積分に関する列ベクトルである。なめらかな境界上に節点をとれば、4つの関数のうち2つが境界条件により与えられるので、他の2つが未知となる。上式をこれらの未知量に関する連立1次方程式とみなして解くことができる。なお、横荷重に対応する領域積分は領域にわたって数値的に行わなければならない。ただし、この種の領域積分を境界積分に変換する方法も考えられており、これについては、5章で詳細に述べる。

2・1・3 熱による板曲げ[132]

これまで横荷重による等方性板の曲げ問題に対する境界要素法による解析法について述べてきた。これは最も基本的なものであり、この解析法を拡張、応用することにより、その他の類似の問題を扱うことができる。ここでは、その1つの例として、横荷重ではなく不均一な温度分布による板の曲げ問題の境界要素解析について考え、その定式化の手順と留意点を述べる。さらに、数値解析例を示すことにより、解析法の有用性と妥当性について検討する。

板が温度場 $T(x_1, x_2, z)$ の作用下にあるとき、板に作用する曲げモーメント、ねじりモーメントはつぎのようになる。

$$M_{1j}^T = M_{1j} - \frac{M_T}{1-\nu} \delta_{1j} \quad (2-46)$$

ここで、 M_T は温度 T による曲げモーメントであり、板の線膨張係数を α としてつぎのように定義される。

$$M_T = \int_{-h/2}^{h/2} E \alpha T z dz \quad (2-47)$$

式(2-6)、(2-18)を用いれば、境界上での曲げモーメント、Kirchhoff等価せん断力はつぎのようになる。

$$M_n^T = M_n - \frac{M_T}{1-\nu}, \quad K_n^T = K_n - \frac{M_{T,n}}{1-\nu} \quad (2-48)$$

また、支配方程式は曲げモーメントのつりあい条件から導出される。

$$D \nabla^4 w + \frac{\nabla^2 M_T}{1-\nu} = 0 \quad (2-49)$$

上式を式(2-19)と比べれば、 $\nabla^2 M_T / (1-\nu)$ が等価な横荷重とみなせる。ただし、モーメントと等価せん断力の表示が式(2-48)のように変更されるので、横荷重の単純なおきかえで積分方程式を得ることはできない。モーメントと等価せん断力の表示に熱モーメントによる項が追加されることを考慮して、等方性板の重調和作用素に関する一般化Greenの公式(2-27)と、 $\nabla^2 M_T$ に対して調和作用素に関する(任意の微分可能な関数 f と g について成り立つ)つぎの形のGreenの公式

$$\int_{\Omega} (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (2-50)$$

を用いれば、なめらかな境界の板に対してつぎの式を得る。

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \left[D \nabla^2 (w^*) + \frac{M_T}{(1-\nu)} (\nabla^2 w^*) \right] d\Omega \\ & + \int_{\Gamma} [w_{,n} M_n^*(w^*) - w K_n^*(w^*) + K_n^T w^* - M_n^T w_{,n}^*] d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2-51)$$

ここで、*のついた関数は温度の作用を受けない板に用いられたものと同じであり、 w^* は式(2-29)で示される重調和方程式の基本解、その他の関数は式(2-32)～(2-34)で与えられるものである。このような定式化を行えば、境界積分に現われる関数はすべて境界条件として与えられることになる。したがって、2・1・2節で示した式(2-31)と同様な積分方程式が導出できる。解析には式(2-38)に対応するたわみの導関数の式も必要である。

例題として、つぎのような温度場にある全周固定の薄い円板の曲げ問題を考える。

$$T(x_1, x_2, z) = [T_0 + T_1(1 - R^2/a^2)](1 + 2z/3h) \quad (R^2 = x_1^2 + x_2^2) \quad (2-52)$$

ここで、 a は円板の半径、 T_0 、 T_1 は定数であり、 $T_1/T_0 = 1$ とする。解析は円板の境界を32の境界要素に分割し、境界要素上で関数値が一定となる、いわゆる一定要素を用いて行った。この例題ではPoisson比を0.3として計算した。図2-5は半径方向のたわみ分布を示す。実線は、文献[114]で与えられる解析解、○印は、板の内部で成り立つ積分方程式より求められる境界要素法による解(BEM解)である。図からわかるように、BEM解を解析解と比較すると、両者はよい一致を示している。とくに円板の中央部付近では、BEM解は解析解ときわめてよく一致している。

2・1・4 直交異方性板[136]

つぎに、等方性板の曲げ問題に対する境界要素法の考え方を直交異方性板の

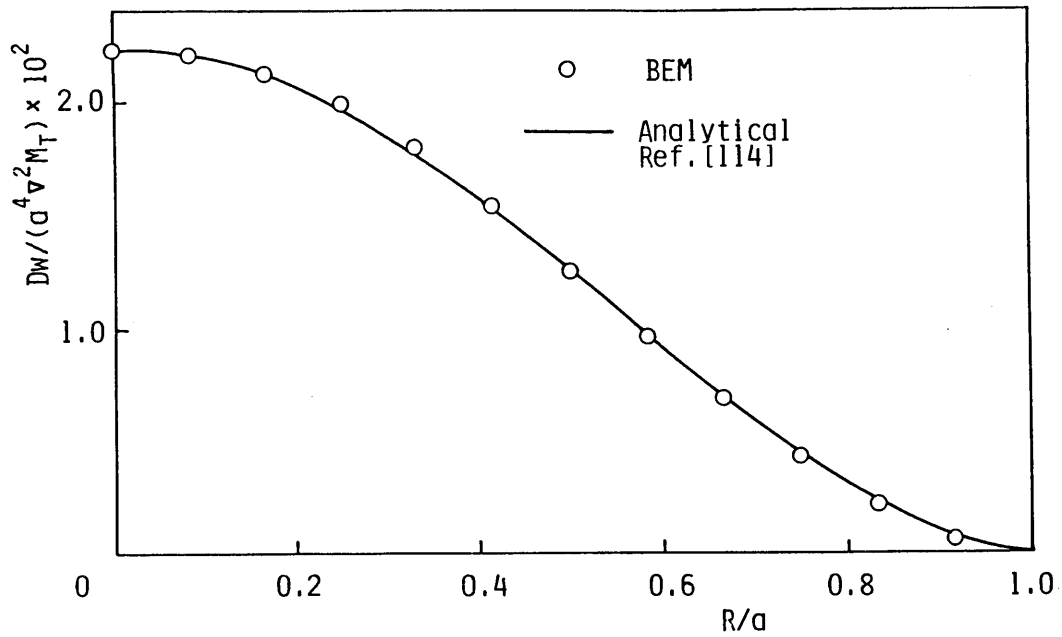


図2-5 加熱円板のたわみ

曲げ解析に応用することを考える。直交異方性板の支配方程式は、板の曲げおよびねじり剛性が方向によって異なるので、等方性板のそれと比べて複雑となる。ここでは、直交異方性を有する薄板の微小変形解析に対しても、これまでに示した等方性板と同様な考え方で境界要素法による扱いができること、そしてこれによる有効な解析が可能であることを示す。

異方性主軸を座標軸 x_1, x_2 方向に一致させれば、曲げモーメント、ねじりモーメントおよび支配方程式はつぎのようになる。

$$M_{11} = -(D_{11}W_{,11} + D_{12}W_{,22}), \quad M_{22} = -(D_{12}W_{,11} + D_{22}W_{,22}), \quad M_{12} = -2D_{66}W_{,12} \quad (2-53)$$

$$D_{11}W_{,1111} + 2(D_{16} + 2D_{66})W_{,1122} + D_{22}W_{,2222} = \bar{p} \quad (2-54)$$

ここで、 D_{11}, \dots, D_{66} は曲げあるいはねじり剛性である。式(2-53)に示した曲げおよびねじりモーメントの表示に関連する変更以外は、式(2-6)に示したすべての関係式が成り立つ。

Bettiの相反定理あるいは式(2-54)の左辺で示される微分作用素に関する一般化Greenの公式を適用することにより、つぎの関係式を得ることができる。

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (w \nabla_A^4 w^* - w^* \nabla_A^4 w) d\Omega \\
&= \int_{\Gamma} [w^* K_n - w^*_{,n} M_n + w_{,n} M_n^* (w^*) - w K_n^* (w^*)] d\Gamma \\
&\quad + \Sigma [w^* M_{ns} - w M_{ns}^* (w^*)]
\end{aligned} \tag{2-55}$$

ただし、微分作用素 ∇_A^4 は

$$\nabla_A^4 f = D_{11} f_{,1111} + 2(D_{12} + 2D_{66}) f_{,1122} + D_{22} f_{,2222} \tag{2-56}$$

を表す。式(2-55)の右辺の微分作用素は別にして、式の左辺は等方性板について成り立つ式(2-27)と形式的に同様である。ここで、 w^* として

$$\nabla_A^4 w^* + \delta = 0 \tag{2-57}$$

を満たす基本解をとれば、計算に必要な積分方程式の導出は等方性板に関するものとまったく同様にできる。ただし、式(2-57)で与えられる基本解は、文献[115]で示されるように、曲げ、ねじり剛性の相対的な値によって異なった関数形になり、しかも複雑な表示である。したがって、式(2-55)に含まれる w^* 以外の*付きの関数の計算にも注意を要する。ここで示した直交異方性板の境界要素法による扱いでは異方性主軸を座標軸と一致するようになっているが、

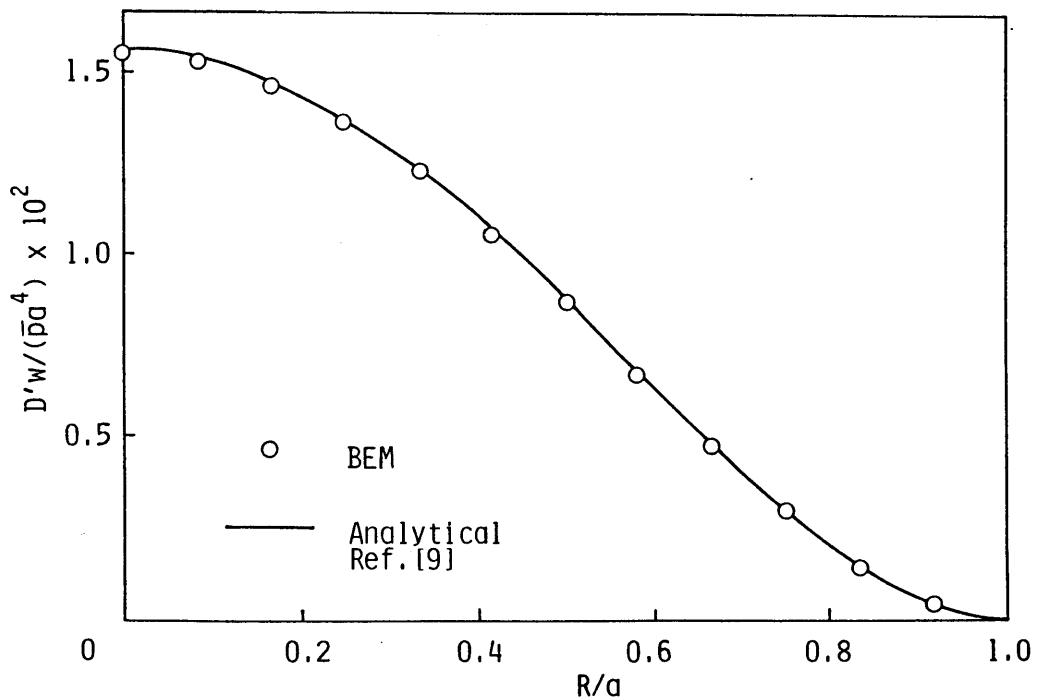


図2-6 直交異方性円板のたわみ
 $\langle D' = [3D_{11} + 2(D_{12} + D_{66}) + 3D_{22}] / 8 \rangle$

これは常に可能であるから、一般的な扱いであるといえる。

例題として、一様分布荷重をうけ、全周の境界が固定された半径 a の直交異方性円板を考える。異方性を示すパラメータとしては、つぎのようにのよう選んだ。

$$D_{22}/D_{11} = 16, \quad (D_{12} + 2D_{66})/\sqrt{D_{11}D_{22}} = 1.5$$

計算には 32 個の一定境界要素を用いた。たわみ分布と境界上の法線方向曲げモーメントの結果を図 2-6, 2-7 に示した。図において、○印は境界要素法による解 (BEM 解)、実線は文献 [9] で与えられる解析解であり、両者を比較した。たわみ分布については、境界要素法による値は解析解とよく一致しており、ここで示した定式化による解析法の妥当性を示している。本解析例では、境界上の法線方向曲げモーメントは対称性をもつので、図 2-7 では x_1 軸から x_2 軸の方向へ反時計まわりにすすむ円周上のデータだけを表示した。境界要素法による計算結果も完全に対称性が保たれているので、この部分のデータだけを比較すればよい。図 2-7 からわかるように、境界要素法により計算された境界上のモーメントの値は、解析解と比較的よく一致している。

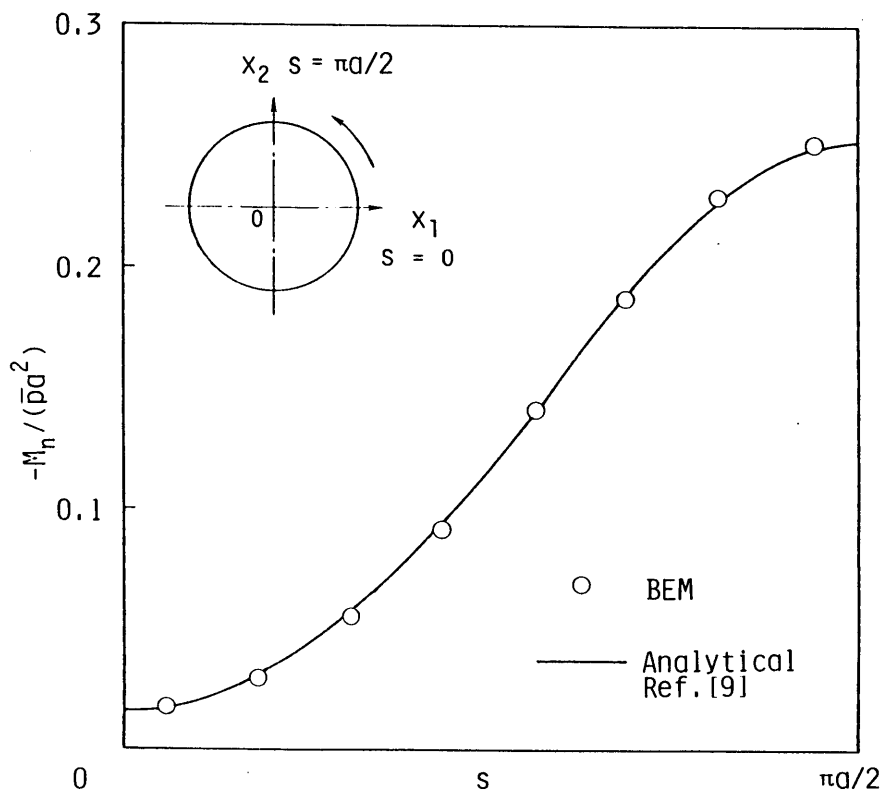


図2-7 直交異方性円板の境界上のモーメント

2・2 有限変形解析[135]

固体力学あるいは構造力学の分野において、はりとともに板の有限変形解析は最もよく知られた幾何学的非線形問題である。ここでは、境界要素法による板の有限変形解析のための定式化を、Kirchhoff-Loveの仮定に基づく von Karman型の支配微分方程式について行う。

2・2・1 基礎関係式と支配方程式

前節では、板の面内変形と曲げ変形が連成しない場合について、曲げ変形に関してだけ説明と定式化を行った。有限変形においては両者が連成する形式であり、同時に扱う必要がある。ここでは、定式化に必要な基礎関係式、支配方程式および境界条件について列記する。以下の式で、線形項と非線形項の区別が必要な変数について、上添え字 l と n により線形および非線形項を示す。

(I) 基礎関係式：

(1) 膜ひずみ：

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^l + \varepsilon_{ij}^n \quad (2-58)$$

$$\varepsilon_{ij}^l = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2-59)$$

$$\varepsilon_{ij}^n = \frac{1}{2}w_{,i}w_{,j} \quad (2-60)$$

(2) 合応力(膜力)：

$$N_{ij} = N_{ij}^l + N_{ij}^n \quad (2-61)$$

$$N_{ij}^l = D_{ijkl} \varepsilon_{kl}^l \quad (2-62)$$

$$N_{ij}^n = D_{ijkl} \varepsilon_{kl}^n \quad (2-63)$$

(3) 面内境界表面力：

$$p_i = N_{ij}n_j = p_i^l + p_i^n \quad (2-64)$$

$$p_i^l = N_{ij}^l n_j \quad (2-65)$$

$$p_i^n = N_{ij}^n n_j \quad (2-66)$$

(4) 曲げおよびねじりモーメント：

$$M_{ij} = E_{ijkl} w_{,kl} \quad (2-67)$$

(5) せん断力 :

$$Q_1 = Q_1^i + Q_1^n \quad (2-68)$$

$$Q_1^i = M_{1j,j} \quad (2-69)$$

$$Q_1^n = N_{1j} W_{,j} \quad (2-70)$$

(6) 境界での法線方向およびねじりモーメント :

$$M_n = M_{1j} n_1 n_j \quad (2-71)$$

$$M_{ns} = -e_{1j} M_{1k} n_k n_j \quad (2-72)$$

(7) 境界でのせん断力 :

$$V_z = Q_1 n_1 = V_z^i + V_z^n \quad (2-73)$$

$$V_z^i = M_{1j,j} n_1 \quad (2-74)$$

$$V_z^n = N_{1j} W_{,j} n_1 \quad (2-75)$$

(8) 境界でのKirchhoff等価せん断力 :

$$K_n = V_z + M_{ns,s} = K_n^i + K_n^n \quad (2-76)$$

$$K_n^i = Q_1^i n_1 + M_{ns,s} \quad (2-77)$$

$$K_n^n = Q_1^n n_1 \quad (2-78)$$

式(2-72)の e_{1j} は交代記号、式(2-62)および(2-67)における D_{1jks} と E_{1jks} は弾性係数および曲げ剛性係数であり、0でない成分はつぎのようである。

$$D_{1111} = D_{2222} = Eh/(1-\nu^2), \quad D_{1122} = D_{2211} = Eh/(1-\nu), \quad D_{1212} = D_{1221} = D_{2112} = D_{2121} = Gh \quad (2-79)$$

$$E_{1111} = E_{2222} = -D, \quad E_{1122} = E_{2211} = -\nu D, \quad E_{1212} = E_{1221} = E_{2112} = E_{2121} = -D(1-\nu)/2 \quad (2-80)$$

(II) 支配方程式 :

$$N_{1j,j} = 0 \quad (2-81)$$

および

$$M_{1j,1j} + (N_{1j} W_{,j})_{,1} + \bar{p} = 0 \quad (2-82)$$

あるいは

$$-D \nabla^4 w + Q_{1,1}^n + \bar{p} = 0 \quad (2-83)$$

なお、式(2-81)を恒等的に満たす応力関数を用いて表される適合条件式と式(2-83)は、板の有限変形の von Karman 方程式と呼ばれる。ここでは、式(2-81)~(2-83)を von Karman 型方程式と呼ぶことにする。

(Ⅲ)境界条件：

(1)力とモーメントの境界条件(Γ_1 上)：

$$p_i = \bar{p}_i \quad (i=1,2), \quad M_n = \bar{M}_n, \quad K_n = \bar{K}_n \quad (2-84)$$

(2)変位の境界条件(Γ_2 上)：

$$u_i = \bar{u}_i \quad (i=1,2), \quad w = \bar{w}, \quad w_{,n} = \bar{w}_{,n} \quad (2-85)$$

2・2・2 積分方程式と離散定式化

支配方程式(2-81)～(2-83)と境界条件(2-84)、(2-85)で示される板の有限変形問題について、微小変形における扱いを参考にして積分方程式を定式化する。簡単のために以下では、板の境界はなめらかとする。定式化の方法はいくつか考えられるが、ここでは、つぎの積分表示からはじめる。

$$\int_{\Omega} N_{ij}(u_k, w)_{,j} u_i^* d\Omega = 0 \quad (2-86)$$

および

$$\int_{\Omega} [-D \nabla^4 w + Q_1^n(u_k, w)_{,1} + \bar{p}] w^* d\Omega = 0 \quad (2-87)$$

ここで用いた重み関数 u_i^* と w^* は、それぞれ弾性平面応力および微小たわみにおける基本解であり、次式によって定義される。

$$N_{ij}^*[u_k^*(P, Q)]_{,j} + \delta_m(P, Q) = 0 \quad (2-88)$$

および

$$\nabla^4 w^*(P, Q) + \delta(P, Q) = 0 \quad (2-89)$$

式(2-88)の解は2次元無限弾性体のKelvin解であり、点Qでm方向に作用する単位集中力による点Pでの状態を表し、式(2-89)の解は、微小変形解析で述べたように2次元重調和方程式の基本解である。

2・2・1節で示したように、合応力や等価せん断力などが線形項と非線形項の和で表されることを考慮して、式(2-86)、(2-87)を部分積分すれば、つぎのようになる。

$$\int_{\Omega} u_i N_{ij}^*(u_k^*)_{,j} d\Omega + \int_{\Gamma} [p_i(u_k, w) u_i^* - u_i p_i^*(u_i^*)] d\Gamma = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* w_{,i} w_{,j} d\Omega \quad (2-90)$$

および

$$\begin{aligned}
 & -D \int_{\Omega} w \nabla^4 w^* d\Omega + \int_{\Omega} \bar{p} w^* d\Omega - \int_{\Gamma} [M_n(w) w_{,n}^* - w_{,n} M_n^*(w^*) + K_n(u_k, w) w^* \\
 & - w K_n^*(w^*)] d\Gamma = \int_{\Omega} Q_1^n(u_k, w) w_{,1}^* d\Omega \quad (2-91)
 \end{aligned}$$

上式の境界積分は、非線形項を含めてすべて境界条件に現われる関数によって定式化されている。ただし、*のついた基本解に関する関数はすべて線形問題における量であり、これらのうち式(2-91)の関数は、すでに式(2-32)～(2-34)で示した。式(2-90)に含まれる*のついた関数はつぎのようになる。

$$u_{km}^* = \frac{1}{8\pi G(1-\nu')} \left[(3-4\nu') \log \frac{1}{r} \delta_{km} + r_{,k} r_{,m} \right] \quad (2-92)$$

$$p_{km}^* = -\frac{h}{4\pi(1-\nu')r} \left\{ r_{,n} [(1-2\nu') \delta_{km} + 2r_{,k} r_{,m}] - (1-2\nu')(r_{,m} n_k - r_{,k} n_m) \right\} \quad (2-93)$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{1jm}^* &= D_{1jks} (u_{km,s}^* + u_{sm,k}^*) / 2 \\
 &= -\frac{h}{4\pi(1-\nu')r} [2r_{,m} r_{,1} r_{,j} + (1-2\nu') (\delta_{m1} r_{,j} + \delta_{mj} r_{,1} - \delta_{1j} r_{,m})] \quad (2-94)
 \end{aligned}$$

ここで、 r は2点 P 、 Q 間の距離、 $r_{,1}$ は点 Q での r の x_1 方向導関数、 ν' は $\nu' = \nu/(1+\nu)$ 、 u_{km}^* と p_{km}^* は点 Q での m 方向の単位面内力による点 P での u_k と p_k の成分である。

このような基本解を用いて、最終的につぎの積分方程式を得る。

$$\begin{aligned}
 & -c(P)u_1(P) + \int_{\Gamma} \{p_k[u_m(Q)]u_{k1}^*(P, Q) - u_k(Q)p_{k1}^*[u_m^*(P, Q)]\} d\Gamma \\
 & = -\int_{\Omega} \sigma_{k11}^*[u_m^*(P, Q')]w_{,k}(Q')w_{,1}(Q')d\Omega \quad (Q \in \Gamma, Q' \in \Omega) \quad (2-95)
 \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
 & Dc(P)w(P) + \int_{\Omega} \bar{p}(Q')w^*(P, Q')d\Omega - \int_{\Gamma} \{M_n[w(Q)]w^*(P, Q)_{,n} \\
 & - w(Q)_{,n}M_n^*[w^*(P, Q)] - K_n[u_k(Q), w(Q)]w^*(P, Q) + w(Q)K_n^*[w^*(P, Q)]\} d\Gamma \\
 & = \int_{\Omega} Q_k^n[u_k(Q'), w(Q')]w^*(P, Q')_{,k}d\Omega \quad (Q \in \Gamma, Q' \in \Omega) \quad (2-96)
 \end{aligned}$$

ここで、係数 $c(P)$ の値は点 P の位置に依存してつぎのように決める。

$$c(P) = 1 \quad (P \in \Omega), \quad c(P) = \frac{1}{2} \quad (P \in \Gamma) \quad (2-97)$$

さらに、微小変形の場合と同様に、式(2-96)を境界上の点 P で法線 n_0 方向に微分したつぎの式が必要になる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} D w_{,n_0}(P) + \int_{\Omega} \bar{p}(Q') w^*_{,n_0}(P, Q') d\Omega - \int_{\Gamma} \{ M_n[w(Q)] w^*_{,n_0}(P, Q) \\ & - w(Q)_{,n} M_n^*[w^*(P, Q)] - K_n[u_k(Q), w(Q)] w^*_{,n_0}(P, Q) \\ & + w(Q) K_n^*[w^*(P, Q)] \} d\Gamma \\ & = \int_{\Omega} Q_k^n [u_k(Q'), w(Q')] w^*_{,k n_0}(P, Q') d\Omega \quad (P, Q \in \Gamma, Q' \in \Omega) \end{aligned} \quad (2-98)$$

式(2-95)、(2-96)、および(2-98)は、8つの量

$$p_i, M_n, K_n, u_i, w \quad \text{および} \quad w_{,n} \quad (i=1,2)$$

による連立積分方程式を構成している。上の8つの量のうち、4つは境界条件により規定され、他の4つが積分方程式により決定されることになる。なお、これらの積分方程式の右辺に現われる非線形項 N_{ij}^n 、 Q_i^n はいずれも u_k と w の1階の導関数で表されるので、これらの計算は比較的容易である。本章の前文で述べたように、YeとLiu[67]は、式(2-96)、(2-98)に相当する積分方程式の定式化において、板の境界上の等価せん断力 K_n の表示に非線形項を考慮しておらず、さらに領域積分項にたわみの2階の導関数を含む形式をとっている。本定式化と比べて導関数が高階となり、積分方程式の特異性の度合いが高くなることが問題点として指摘できる。

Q_i^n の計算に必要な板の領域内の点 P での面内合応力 N_{ij} の表示式はつぎのように与えられる。

$$\begin{aligned} N_{ij}(P) &= \int_{\Gamma} [D_{ijk}^*(P, Q) p_k(Q) - S_{ijk}^*(P, Q) u_k(Q)] d\Gamma \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} T_{ijk}^*(P, Q') w_{,k}(Q') w_{,i}(Q') d\Omega \\ &\quad + \frac{Gh}{8(1-\nu')} (2w_{,i}(P) w_{,j}(P) + w_{,k}(P) w_{,k}(P) \delta_{ij}) \quad (P, Q' \in \Omega, Q \in \Gamma) \end{aligned} \quad (2-99)$$

ここで、*をつけた関数はつぎのようである。

$$D_{ijk}^* = -\sigma_{ijk}^* / h \quad (2-100)$$

$$S_{ijk}^* = \frac{Gh}{2\pi(1-\nu')r^2} \{2r_{,n} [(1-2\nu')\delta_{ij}r_{,k} + \nu'(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) - 4r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \\ 2\nu'(n_i r_{,j}r_{,k} + n_j r_{,i}r_{,k}) + (1-2\nu')(2n_k r_{,i}r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) \\ -(1-4\nu')n_k \delta_{ij}\} \quad (2-101)$$

および

$$T_{ijk}^* = -\frac{Gh}{2\pi(1-\nu')r^2} [8r_{,i}r_{,j}r_{,k}r_{,i} + (1-4\nu')\delta_{ij}\delta_{k} \\ -(1-2\nu')(2\delta_{ij}r_{,k}r_{,i} + 2\delta_{ki}r_{,i}r_{,j} + \delta_{ik}\delta_{ji} + \delta_{ii}\delta_{jk}) \\ -2\nu'(\delta_{ik}r_{,j}r_{,i} + \delta_{jk}r_{,i}r_{,i} + \delta_{ii}r_{,j}r_{,k} + \delta_{ji}r_{,i}r_{,k})] \quad (2-102)$$

なお、式(2-99)の領域積分は $1/r^2$ の特異性をもち、通常の積分では評価できないので、Cauchyの主値積分として計算される。

式(2-95)、(2-96)および(2-98)を数値的に解くために、微小変形解析で示したように板の境界を境界要素に分割すれば、この要素の節点における

$$u_i, p_i, w, w_{,n}, K_n \quad \text{および} \quad M_n$$

に関する離散方程式が得られる。これらの節点値で構成される列ベクトルを

$$\{u_i\}, \{p_i\}, \{w\}, \{w_{,n}\}, \{K_n\}, \{M_n\}$$

とすれば、離散方程式はつぎのようになる。

$$[A_1] \{u_i\} + [B_1] \{u_2\} + [C_1] \{p_i\} + [D_1] \{p_2\} = \{N_1\} \quad (2-103)$$

$$[A_2] \{u_i\} + [B_2] \{u_2\} + [C_2] \{p_i\} + [D_2] \{p_2\} = \{N_2\} \quad (2-104)$$

$$[E_1] \{w\} + [F_1] \{w_{,n}\} + [G_1] \{K_n\} + [H_1] \{M_n\} = \{N_3\} \quad (2-105)$$

$$[E_2] \{w\} + [F_2] \{w_{,n}\} + [G_2] \{K_n\} + [H_2] \{M_n\} = \{N_4\} \quad (2-106)$$

ここで、式(2-103)、(2-104)は式(2-95)から、また式(2-105)、(2-106)は式(2-96)、(2-98)から導出されたものである。 $[A_1], \dots, [H_2]$ などはすべて内挿関数と基本解の積を各要素ごとに積分した量として定義される係数マトリックス、右辺は非線形項と非同次項による列ベクトルである。

これまでに示した境界積分方程式を解くとき、右辺の非線形項の関数値を領域内であらかじめ仮定し、これからはじめた反復計算による方法が一般的である。境界積分方程式は増分形で表示することも容易であり、このときの扱いも上記と同様にできる。

境界積分方程式を上述のように離散化するとき、考えている境界節点を含まない他の境界要素あるいは内部セルに関する積分は通常の数値積分により評価される。しかし、考えている境界節点を含む境界要素に関する積分は、被積分関数（積分核）の特異性のために特異積分となり、ここではこのような積分はCauchyの主値の意味において解析的に評価される。また、領域内の点について成り立つ積分方程式の離散化のときに特異積分が問題となるのは、その点を含む内部セルに関する積分であり、これについては三角形あるいは四角形内部セルの特異積分に用いられる準解析的な積分法を用いる[40, 67]。

2・2・3 解析手順と数値解析例

境界積分方程式(2-95)、(2-96)、(2-98)を解くための反復計算の手順を説明する。面内および曲げ変形に関する離散方程式(2-103)、(2-104)および(2-105)、(2-106)は形式的につぎのように書ける。

$$\text{面内変形: } [A]\{x\} = \{h_1\} + \{n_1(w_{,1})\} \quad (2-107)$$

および

$$\text{曲げ変形: } [B]\{y\} = \{h_2\} + \{n_2(N_{1,j}, w_{,1})\} \quad (2-108)$$

ここで、 $[A]$ 、 $[B]$ は係数マトリックス、 $\{x\}$ 、 $\{y\}$ は境界変数により構成される未知量ベクトル、 $\{h_1\}$ 、 $\{h_2\}$ は非同次項をまとめたベクトル、 $\{n_1\}$ 、 $\{n_2\}$ は非線形項のベクトルであり、それぞれ、内部変数 $(N_{1,j}, w_{,1})$ および $w_{,1}$ の関数となっている。

反復計算の過程はつぎのように説明できる。 t 番目の反復計算の過程における境界変数を $x^{(t)}$ 、 $y^{(t)}$ 、内部変数を $N_{1,j}^{(t)}$ 、 $w_{,1}^{(t)}$ などで示す。式(2-107)の右辺ベクトルに適当なたわみの値を仮定して面内変形の式

$$[A]\{x^{(t+1)}\} = \{h_1\} + \{n_1(w_{,1}^{(t)})\} \quad (2-109)$$

を解けば、領域内の $u_1^{(t)}$ と $N_{1,j}^{(t)}$ が得られる。つぎに、これらの値に基づいて曲げ変形に関するつぎの式を解く。

$$[B]\{y^{(t+1)}\} = \{h_2\} + \{n_2(N_{1,j}^{(t)}, w_{,1}^{(t)})\} \quad (2-110)$$

これから得られた解 $x^{(t+1)}$ より領域内の $w^{(t+1)}$ と $w_{,1}^{(t+1)}$ の値が計算される。 $t = 0, 1, 2 \dots$ として必要な解の精度が得られるまで、すなわち、 ε を充分小さな定数として、つぎの収束条件が満たされるまで反復計算を続ける。

$$\int_{\Omega} |w^{(t+1)} - w^{(t)}| d\Omega < \varepsilon \quad (2-111)$$

ここで説明した計算手順の流れ図を図2-8に示す。

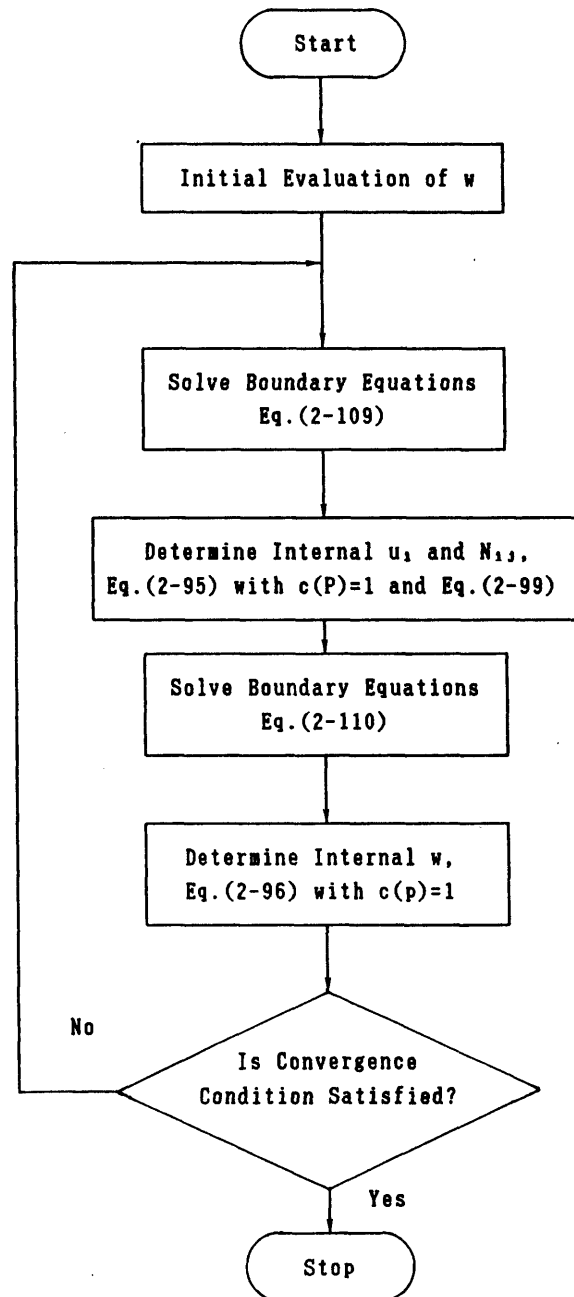


図2-8 流れ図

式(2-109)、(2-110)においてマトリックス $[A]$ 、 $[B]$ およびベクトル $\{h_1\}$ 、 $\{h_2\}$ は、板の材料の物性値と幾何学形状だけに依存するので、これらは一度計算して記憶させておけば、反復計算のつど計算する必要がなく、計算時間を短縮することができる。

これまでに述べた境界要素法による弾性平板の有限変形解析のための定式化および解析手順の有効性を検討するために、他の方法でも解を得ることができる問題を考える。例題として、一様分布荷重をうける半径 a の円板（軸対称問題）を考える。境界条件としては、つぎの2つの場合を扱う。

- (1) 面内の変位を拘束した固定支持

$$w = 0, \quad w_{,n} = 0, \quad u_1 = 0$$

- (2) 面内の変位を自由とした固定支持

$$w = 0, \quad w_{,n} = 0, \quad \bar{p}_1 = 0$$

この例題では、一定要素を用い、境界要素数を24および32、領域積分を評価するための内部セルの数をそれぞれ48および144として計算した。このような場合の分割の仕方をそれぞれ図2-9(a)と(b)に示す。なお、Poisson比

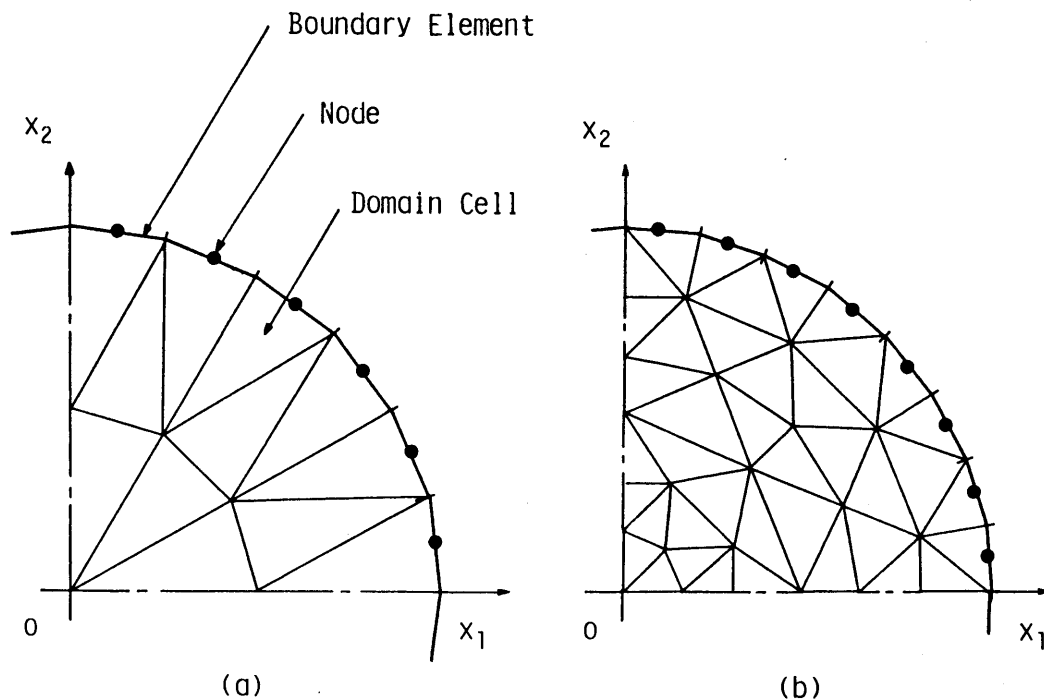


図2-9 円板の要素分割

は0.3として計算した。境界要素における積分では1次元Gauss 4点(7次)積分を、内部セルでの積分では2次の三角形領域積分を用いた。荷重と円板の中央に生じる最大たわみ(記号 w_{max} で表す)の関係を、境界条件(1)と(2)についてそれぞれ図2-10と2-11に示す。これらの図において、●印と○印はそれぞれ境界要素数/内部セル数を24/48および32/144とした場合の境界要素法による解(BEM解)、実線はRunge-Kutta-Gill(RKG)法による計算結果、細線で表した直線は微小変形を仮定した場合の線形解である。ここで例題として扱う軸対称問題などにおけるRKG法による解(RKG解)は、比較的精度の高いことが知られており、これとBEM解を比較することにより、計算結果の精度を検討することができる。図からわかるように、いずれの境界条件においても、境界要素数および内部セル数を増した場合、すなわち、要素を細分割したときのBEM解(○印)は、粗く要素分割した場合の解(●印)と比較して、RKG解とよりよく一致している。このような計算結果から、境界要素数および内部セル数を増すことにより、より精度の高いBEM解が得られることがわかる。

2・3 まとめ

直接法境界要素法による弾性平板の微小および有限変形解析について述べた。本章の内容は以下のように要約することができる。

(1) 横荷重が作用する一様厚さの等方性弾性薄板の微小変形解析に関する支配方程式を、直接法境界要素法により積分方程式に定式化する方法について説明した。

(2) 横荷重による等方性板の曲げ問題に対する境界要素法による解析法を拡張応用することにより、不均一な温度場のもとにある板の曲げ問題を境界要素解析するときの定式化の手順とその留意点について述べた。数値解析例として、放物面状温度分布の温度場にある円板の熱による曲げ問題を考え、半径方向のたわみ分布について、境界要素法による結果を解析解と比較してその精度を検

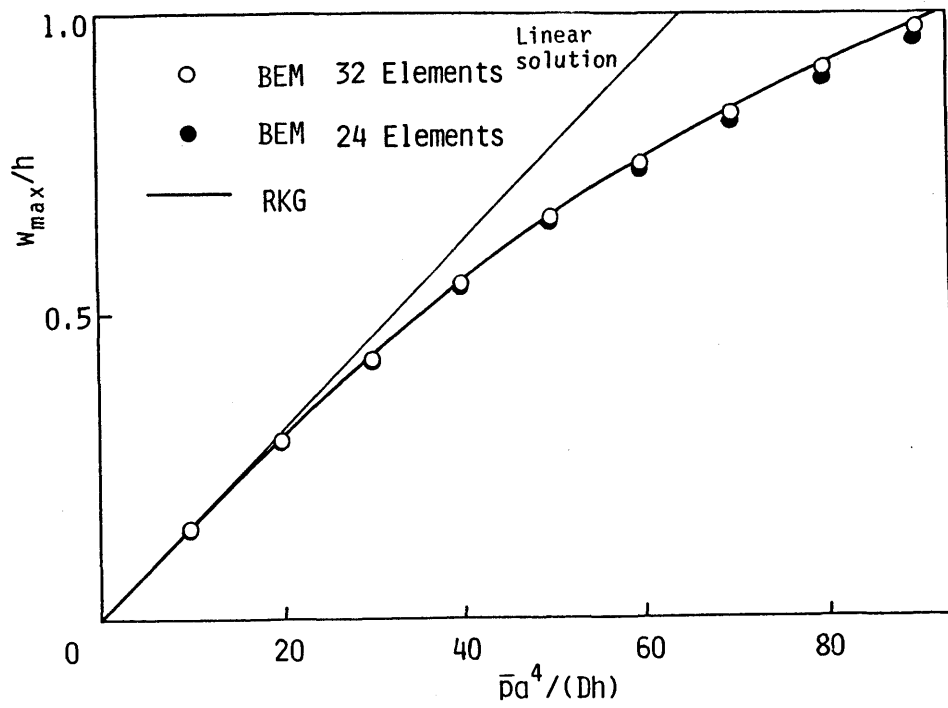


図2-10 円板の最大たわみ
(境界上で面内の変位を拘束した固定支持)

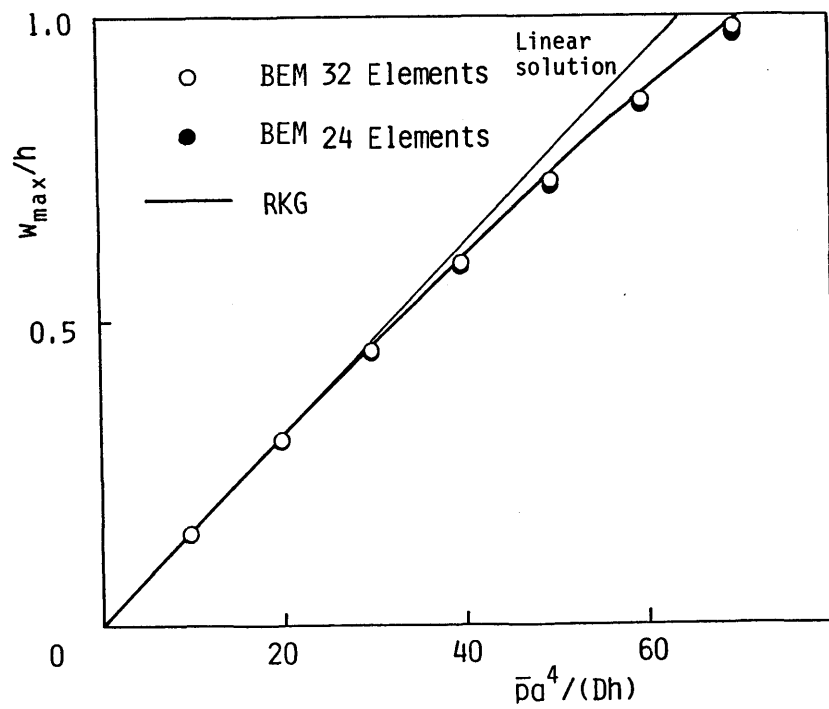


図2-11 円板の最大たわみ
(境界上で面内の変位を自由とした固定支持)

討し、定式化および解析法の有用性を示した。

(3) 直交異方性板の微小変形解析にも等方性板と同様の考え方を応用することにより、直接法境界要素法による一般的な取り扱いが可能なことを示した。例題として、一様分布荷重の作用する直交異方性円板の曲げ問題を解析し、半径方向のたわみ分布と境界上の法線方向曲げモーメントの境界要素法による計算値を解析解と比較した。その結果両者はよく一致し、定式化の妥当性を示すことができた。

(4) von Karmanによる板の有限変形理論に基づく直接法境界要素法による積分方程式の定式化は、微小変形解析の考え方を拡張することにより行えること示した。定式化と解析手順の有効性を検討するために、一様分布荷重をうける円板を考え、板の境界での面内変位を拘束する場合としない場合について解析した。円板の中央における最大たわみに関する境界要素解をRKG解と比較し、境界要素数が解に及ぼす影響を調べた。この結果、いずれの境界条件においても、境界要素数を増すことにより、より高い精度の境界要素解が得られることがわかった。

第3章 弾性平板およびシェルの近似有限変形および 座屈後変形解析[133, 134, 137, 141, 142, 144, 150]

前章の後半、すなわち2・2節で、弾性平板の有限変形に関するvon Karman型の支配微分方程式に対する境界要素法による扱いを述べた。この支配微分方程式は、面内変形と曲げ変形が連成する形となっており、したがって、その解析は複雑である。本章では、Berger[8]による有限変形に関する簡単化された非連成の近似支配方程式（Berger方程式と呼ばれる）の境界要素解析について検討する。この種の研究は、著者らによりはじめて扱われ、その後、わずかにSladekら[50]が、線形化されたBerger方程式に対する基本解を用いた解析法を示したにすぎない。

Berger方程式は、もともと横荷重をうける一様等方な弾性薄板の有限変形問題において、板の全ポテンシャルエネルギーの表示に現われる膜ひずみの第2不変量が無条件に無視したうえで、その停留条件を用いて導かれた。このようにして得られた支配微分方程式は、Berger定数と呼ばれる外部負荷に依存するパラメータを含んだ、見かけ上たわみだけで表される準線形な非連成方程式となるので、von Karman型の連成式に比べ解析が容易になる。この方程式は、静的問題だけでなく動的問題、偏平（曲率の小さい）シェルやサンドイッチ板などの問題に広く応用された[118~124]。Berger方程式の解は、板の境界で面内変位が拘束されているとき、厳密解のよい近似になることが知られている。

ここでは、横荷重と熱負荷をうける弾性シェル（偏平シェルに限定し、平板も含む）のBerger方程式が、シェルの膜ひずみの第2不変量は無視したポテンシャルエネルギーの停留条件から導出される過程を簡単に説明する。Berger方程式に対する積分方程式は、2・1節で述べた薄板の微小変形解析で用いた重調和方程式に対する基本解により定式化できることを示す。解析例として、横荷重あるいは熱負荷をうける球シェルおよび正方形シェルの考える。熱負荷をうけると、シェルに作用する熱の温度分布に依存して2つの変形モード、すなわち有限変形モードと座屈変形モードが生じる。座屈後変形解析も有限変形解析と同様の式で扱えるので、この場合の解析例も示す。その他の問題への応用として、弾性床上にある平板の近似有限変形解析についても述べる。

3・1 支配方程式[8]

偏平弾性シェル（以下では簡単のためにシェルという）のBerger方程式は、シェルの膜ひずみの第2不変量を見捨てたポテンシャルエネルギーの停留条件から導かれる。シェルは等方弾性で十分に薄く、その曲率半径はシェルの厚さに比べて十分大きいとし、厚さ h はシェルの領域内で一定とする。座標系としては、図3-1に示すように、シェルの中央面に主曲率 k_1 、 k_2 の方向と一致するように x_1 軸、 x_2 軸をとり、これらに直交する方向が z 軸となるように直交曲線座標系を考える。シェルの占める2次元領域を Ω 、その境界を Γ とする。シェルが既知の分布横荷重 $\bar{p}(x_1, x_2)$ と温度場 $T(x_1, x_2, z)$ をうけるとき、その全ポテンシャルエネルギー Π はKirchhoff-Loveの仮定に基づきつぎのように表される[9]。

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2}D \int_{\Omega} \left\{ (\nabla^2 w)^2 + \frac{12}{h^2} I_1^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{12}{h^2} I_2 + w_{,11}w_{,22} - w_{,12}^2 \right] \right\} d\Omega \\ - \int_{\Omega} \left[\bar{p}w + \frac{1}{1-\nu} (I_1 N_T - M_T \nabla^2 w) \right] d\Omega + (\text{Boundary terms}) \end{aligned} \quad (3-1)$$

ここで

$$I_1 = u_{1,1} + u_{2,2} + \frac{1}{2}(w_{,1}^2 + w_{,2}^2) - (k_1 + k_2)w \quad (3-2)$$

$$I_2 = (u_{1,1} + \frac{1}{2}w_{,1}^2)(u_{2,2} + \frac{1}{2}w_{,2}^2) - \frac{1}{4}(u_{1,2} + u_{2,1} + w_{,1}w_{,2})^2 \quad (3-3)$$

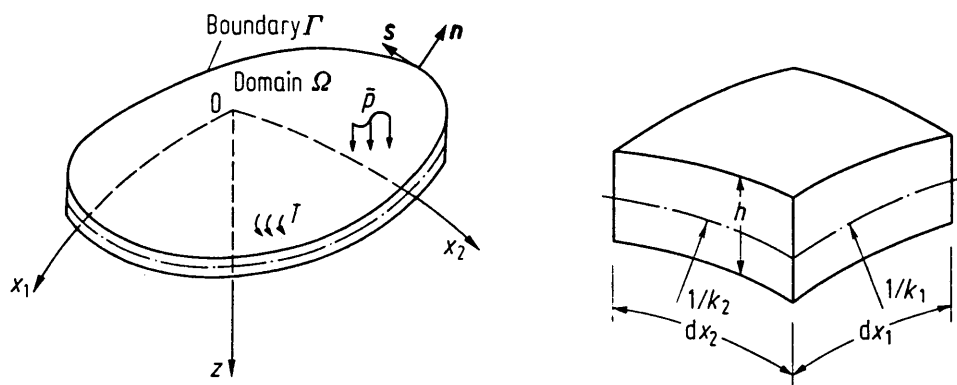


図3-1 浅いシェルとその要素・座標系と記号の説明

は膜ひずみの第1および第2不変量であり、また、

$$M_T = \int_{-h/2}^{h/2} E \alpha T z dz, \quad N_T = \int_{-h/2}^{h/2} E \alpha T dz \quad (3-4)$$

は熱による合モーメントと合応力である。

式(3-1)で表される全ポテンシャルエネルギーの停留条件を考えると、たわみ w と面内変位 u_1, u_2 に関する連成方程式 (von Karman 方程式) が得られる。ここでは Berger の仮定に従い、式(3-1)において膜ひずみの第2不変量 I_2 を無視したうえで停留条件を用いれば、つぎの式を得る。

$$D \nabla^4 w - D \kappa^2 (\nabla^2 w + k_1 + k_2) + \frac{\nabla^2 M_T}{1-\nu} = \bar{p} \quad (3-5)$$

および付加条件

$$I_1 - \frac{(1+\nu)N_T}{Eh} \equiv \frac{\kappa^2 h^2}{12} = \text{constant} \quad (3-6)$$

ここで κ^2 は Berger 定数と呼ばれ、外部荷重あるいは温度場に依存する定数であるが、式(3-5)はたわみ w に関して見かけ上線形となっている。言い換えれば、式(3-5)の第2項が変形と外部作用との間の非線形関係を表している。

ここでは、Berger 定数 κ^2 はつぎのように評価する。式(3-6)の両辺をシェルの占める2次元領域 Ω にわたり積分すれば、指定された荷重に対して $\kappa^2 h^2 / 12$ が定数であることを考慮して、つぎのように書くことができる。

$$\int_{\Omega} \frac{\kappa^2 h^2}{12} d\Omega = \int_{\Omega} \left[u_{1,1} + u_{2,2} + \frac{1}{2}(w_{,1}^2 + w_{,2}^2) - (k_1 + k_2)w - \frac{(1+\nu)N_T}{Eh} \right] d\Omega = \frac{\kappa^2 h^2}{12} \Omega_A \quad (3-7)$$

ここで、 Ω_A は領域 Ω の面積を表す。したがって、Berger 定数 κ^2 は、式(3-7)より、つぎのように表される。

$$\kappa^2 = \frac{12}{h^2 \Omega_A} \int_{\Omega} \left[u_{1,1} + u_{2,2} + \frac{1}{2}(w_{,1}^2 + w_{,2}^2) - (k_1 + k_2)w - \frac{(1+\nu)N_T}{Eh} \right] d\Omega \quad (3-8)$$

先にも述べたように、Berger 方程式の解は、板の境界で面内変位が拘束されていれば、厳密解のよい近似になることが知られている。板の境界で面内変位

を拘束する条件

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0 \quad (\text{境界 } \Gamma \text{ 上})$$

を用いると、式(3-8)はさらに簡単になり、つぎのように表される。

$$\kappa^2 = \frac{12}{h^3 \Omega_A} \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2}(w_{,1}^2 + w_{,2}^2) - (k_1 + k_2)w - \frac{(1+\nu)N_T}{Eh} \right] d\Omega \quad (3-9)$$

したがって定数 κ^2 は、たわみ w と熱による合応力 N_T の分布を領域 Ω にわたって数値積分することにより得られる。

3・2 積分方程式と離散定式化

Berger式(3-5)において、左辺第2項が追加される以外は、線形問題における式(2-19)あるいは式(2-49)と同様であるから、この項を非線形項として右辺に移項すれば、つぎのようになる。

$$D \nabla^4 w + \frac{\nabla^2 M_T}{1-\nu} = \bar{P} + D \kappa^2 (\nabla^2 w + k_1 + k_2) \quad (3-10)$$

上式に、等方性板の重調和作用素 ∇^4 に対する一般化Greenの公式(2-27)と熱による合モーメント M_T にかかる調和作用素 ∇^2 に関するGreenの公式(2-50)を適用すれば、シェルの境界がなめらかなとき、つぎの式が得られる。

$$\begin{aligned} D \int_{\Omega} w^* \left(\nabla^4 w + \frac{\nabla^2 M_T}{1-\nu} \right) d\Omega &= D \int_{\Omega} \left[w (\nabla^4 w^*) + \frac{M_T}{1-\nu} \nabla^2 w^* \right] d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma} [w^* K_n'^T(w) - w^*_{,n} M_n^T(w) + w_{,n} M_n^*(w^*) - w K_n^*(w^*)] d\Gamma \end{aligned} \quad (3-11)$$

ここで、*を付した関数は重み関数およびこれに関連する関数である。また、 $K_n'^T(w)$ および $M_n^T(w)$ は、シェルが温度場の作用をうけるときの等価せん断力と法線曲げモーメントであり、熱による板の曲げで示した式(2-48)と同様に、つぎのように表される。

$$K_n'^T(w) = K_n'(w) - \left(\frac{M_T}{1-\nu} \right)_{,n}, \quad M_n^T(w) = M_n(w) - \frac{M_T}{1-\nu} \quad (3-12)$$

直接法境界要素法では、積分方程式の境界積分項に現われる変数は物理的意味

をもたせるのが普通であるが、式(3-11)の境界変数のうち K_n^{*T} は、非線形項まで含めた表示 $K_n^T [= K_n^i + K_n^n - M_{T,n}/(1-\nu)]$ とはなっていないことに注意する必要がある。このように、式(3-11)では等価せん断力は正しい表示とはなっていないので、自由端の境界条件 ($w=0$ 、 $K_n^T=0$) を取り入れることはできない。なお、境界が角点をもつ場合には、式(2-27)で示したようにねじりモーメント $M_{n,n}$ の不連続による寄与が式(3-11)に追加される。

重さ関数 w^* として、微小変形解析と同様に式(2-28)で定義される重調和方程式に対する基本解(2-29)、すなわち

$$w^* = -(1/8\pi) r^2(P, Q) \log r(P, Q) \quad (3-13)$$

を用いる。ただし、 r は2点 P, Q の距離である。式(3-11)に式(3-13)を代入し、境界積分の特異積分をCauchyの主値により評価すればつぎの積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} Dc(P)w(P) = & - \int_{\Gamma} \{w^*(P, Q)K_n^{*T}[w(Q)] - w_{,n}^*(P, Q)M_n^T[w(Q)] \\ & + w_{,n}(Q)M_n^*[w^*(P, Q)] - w(Q)K_n^*[w^*(P, Q)]\} d\Gamma \\ & - \int_{\Omega} \left[\{D\kappa^2[\nabla^2 w(Q')] + \bar{p}(Q')\} w^*(P, Q') - \frac{M_T}{1-\nu}(Q') \nabla^2 w^*(P, Q') \right] d\Omega \\ & (Q \in \Gamma, \quad Q' \in \Omega) \end{aligned} \quad (3-14)$$

ここで、係数 $c(P)$ は式(2-36)で示したように、点 P の位置に依存する。

$$c(P) = 1 \quad (P \in \Omega), \quad c(P) = 1/2 \quad (P \in \Gamma) \quad (3-15)$$

式(3-14)で、*をつけた関数 $w_{,n}^*$, M_n^* , K_n^* は式(2-32)~(2-34)で示したものと同様である。境界上のたわみの法線方向導関数に対するもう1つの積分方程式は、式(3-14)を法線 n_0 の方向に微分してつぎのように得られる。

$$\begin{aligned} 1/2 Dw_{,n_0}(P) = & - \int_{\Gamma} \{w_{,n_0}^*(P, Q)K_n^{*T}[w(Q)] - w_{,nn_0}^*(P, Q)M_n^T[w(Q)] \\ & + w_{,n}(Q)M_{n,n_0}^*[w^*(P, Q)] - w(Q)K_{n,n_0}^*[w^*(P, Q)]\} d\Gamma \\ & - \int_{\Omega} \left[\{D\kappa^2[\nabla^2 w(Q')] + \bar{p}(Q')\} w_{,n_0}^*(P, Q') - \frac{M_T}{1-\nu}(Q') \nabla^2 w_{,n_0}^*(P, Q') \right] d\Omega \\ & (P, Q \in \Gamma, \quad Q' \in \Omega) \end{aligned} \quad (3-16)$$

ここで、*をつけた関数は式(2-39)～(2-42)で示したものと同様である。これらの積分方程式(3-14)および(3-16)は、有限変形のみならず座屈・座屈後変形解析における板あるいはシェルの境界値 w , $w_{,n}$, M_n^T , K_n^{*T} を定めるために用いられる。

積分方程式(3-14)および(3-16)を数値的に解析するために、境界 Γ と領域 Ω をそれぞれ境界要素と領域内部セルに分割すれば、前章と同様に境界未知量に関するベクトル $\{w\}$, $\{w_{,n}\}$, $\{M_n^T\}$, $\{K_n^{*T}\}$ により構成されるつぎの離散方程式が得られる。

$$[E_1']\{w\} + [F_1']\{w_{,n}\} + [G_1']\{M_n^T\} + [H_1']\{K_n^{*T}\} = \{N_3'\} \quad (3-17)$$

$$[E_2']\{w\} + [F_2']\{w_{,n}\} + [G_2']\{M_n^T\} + [H_2']\{K_n^{*T}\} = \{N_4'\} \quad (3-18)$$

これらの離散方程式の係数マトリックス $[E_1']$, ..., $[H_2']$ は、式(2-105), (2-106)と同様であり、右辺ベクトル $\{N_3'\}$, $\{N_4'\}$ は支配方程式(3-5)の非線形項と非同次項に関する領域積分である。これらの非線形項はBerger定数 κ^2 を含んでいるので、先に述べたようにたわみ w と合応力 N_T の分布を領域について数値積分することにより得られる。右辺ベクトルに適なたわみの値を仮定して式(3-17)、(3-18)を解けば、4つの境界値 w , $w_{,n}$, M_n^T , K_n^{*T} のうち境界条件で指定されない2つの未知量を決定することができる。仮定するたわみの初期値としては、線形解を用いるのが便利であり、解の非線形性が大きくないところではこれで充分である。反復計算は適当な外部荷重あるいは温度の増分毎に行われ、各ステップにおいて収束条件が満たされるまで繰り返される。ここでは収束条件として、(t)番目と(t+1)番目のたわみの近似値 $w^{(t)}$, $w^{(t+1)}$ に対して、つぎの条件を用いる。

$$\int_{\Omega} |w^{(t+1)} - w^{(t)}| d\Omega < \varepsilon \quad (3-19)$$

上式で ε は充分小さな定数である。ここで説明した反復計算の過程を図3-2に流れ図として示した。式(3-17)と(3-18)の係数マトリックスは、2章でも述べたように板あるいはシェルの物性値と幾何学形状で決定されるので、反復計算のつど計算する必要はない。

これまでに示した近似有限変形解析の、その他の問題に対する応用として、たわみに比例した反力を及ぼす Winkler 型の弾性床上の薄い平板の曲げ問題を考える。弾性床のばね定数を k とし、板に横荷重 \bar{p} のみが作用するとすれば、支配方程式はつぎのように表される。

$$D \nabla^4 w - D \kappa^2 \nabla^2 w + k w = \bar{p} \quad (3-20)$$

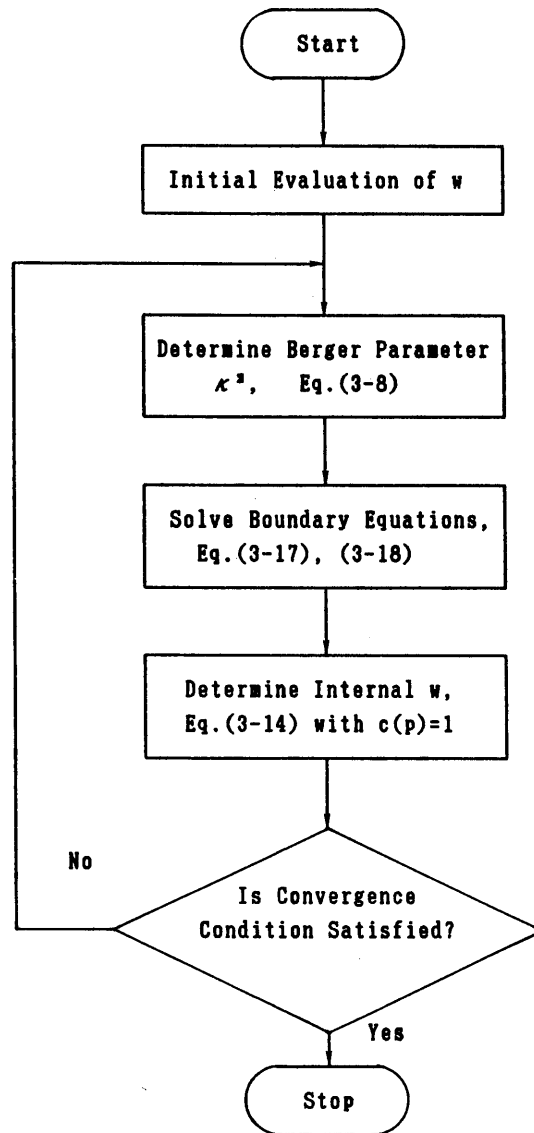


図3-2 流れ図

このような形式の微分方程式を積分方程式に変換するときに用いる基本解として、つぎの式で定義される2種類の関数 w^* , \hat{w}^* のうちの1つを考えることができる。1つは、式(2-28)と同様の

$$\nabla^4 w^*(P, Q) + \delta(P, Q) = 0 \quad (3-21)$$

であり、もう1つは

$$[\nabla^4 + (k/D)] \hat{w}^*(P, Q) + \delta(P, Q) = 0 \quad (3-22)$$

である。式(3-21)、(3-22)の解は解析的に求めることができる。しかしながらすでに示したように、積分方程式には基本解だけでなく、これに関連する関数を含む。式(3-22)で定義される基本解 \hat{w}^* に対するこれらの関数は、式(3-21)で定義される w^* に対するものより複雑となるし、 \hat{w}^* を用いたとしても非線形項に関する領域積分はなくなる。このような理由から、ここではこれまでと同様に重調和方程式に対する基本解 w^* を用いる。このとき床からの反力 $k w$ は、式(3-20)の非線形および非同次項と組み合わせて考える。したがって、式(3-14)と(3-16)において熱に関する効果を除き、領域積分項をそれぞれつぎの形に置き換えた積分方程式が得られる。

$$-\int_{\Omega} \{D \kappa^2 \nabla^2 w(Q') + k w(Q') + \bar{p}(Q')\} w^*(P, Q') d\Omega \quad (3-23)$$

および

$$-\int_{\Omega} \{D \kappa^2 \nabla^2 w(Q') + k w(Q') + \bar{p}(Q')\} \hat{w}^*_{, no}(P, Q') d\Omega \quad (3-24)$$

積分方程式の離散定式化は、式(3-17)、(3-18)と同様の形式となる。ここでは、反力 $k w$ の項も非線形項と同様に反復計算の過程で処理されるところが異なるだけで、その他の手順は前述の過程と同じである。

3・3 数値解析結果と検討

これまでに述べた近似有限変形解析における積分方程式の定式化と計算手順の有効性を既存の結果と比較しながら検討するために、ここでは比較的単純な

幾何学形状の平板あるいはシェルの数値解析例を取り扱う。

3・3・1 解析対象

板あるいはシェルに関する幾何学的非線形問題における変形モードとして、つぎの2種類の型を考えることができる。

- (1) その1つは、いわゆる有限変形である。有限変形モードでは、板あるいはシェルは、荷重あるいは熱負荷がかかりはじめると同時にたわみはじめる。変形の最初の段階では、たわみと荷重の関係はほぼ線形であり、徐々に非線形となる。
- (2) もう1つは、熱負荷による座屈後変形である。このモードでは、板あるいはシェルは、それ以下の温度では変形しないある特定の温度（座屈温度）で座屈し、つづいて座屈後変形を生じる。

以上の2種類の変形モードに対して、場の支配方程式は同じであり、異なるのは外部荷重あるいは温度の分布である。

有限変形モードの計算結果は前節で述べた手順で得られる。すなわち、境界積分方程式(3-14)、(3-16)においてすべての非線形項を無視して、比較的小さな荷重あるいは低い温度で線形解を計算し、このようにして得られた解を反復計算の初期値として用いる方法である。また、非線形性の大きいところでは、前述の方法で得られた非線形解を、荷重あるいは温度をわずかに増したつぎのステップの初期値として用いることができる。このような増分解法により、非線形性の大きな問題においても反復計算により解が得られる。一方、座屈後変形解析に対しては座屈温度がまえもって決められないので、試行錯誤法などを用いたある種の洞察が必要となる。しかしながら、ほとんどの場合、有限変形解析と同様の増分解法を用いることができる。すなわち、特定の有限変形解析で得られた解を反復計算の初期値として座屈後変形解析を行い、これを出発点として、いくつかの温度分布に対して増分解法を適用することができる。座屈温度は、このようにして得られたいくつかの解から逆に外挿することにより得られる。

計算例として、半径 a の円板および球シェルと一辺の長さが $2a$ の正方形板およびシェルの曲げ問題を解析する。境界条件は、面内変位 u_1, u_2 は板あるいはシェルの境界で拘束されており、面外変形に関しては、つぎの2つの場合を考える。すなわち、

$$\text{固定支持: } w = 0, \quad w_{,n} = 0 \quad \dots\dots\dots (A)$$

$$\text{単純支持: } w = 0, \quad M_{,n} = 0 \quad \dots\dots\dots (B)$$

であり、それぞれの条件を記号(A)および(B)で区別する。外部荷重あるいは温度分布としては、つぎのような場合を扱う。

(1)有限変形モードでは、静的な一様分布荷重

$$\bar{p} = \text{constant} \quad \dots\dots\dots (I)$$

が作用するか、あるいは円板と球シェルおよび正方形板とシェルに対して、温度場

$$T(R, z) = \{T_0 + T_1 [1 - (R/a)^2]\} (1 + 2z/3h) \quad (R^2 = x_1^2 + x_2^2)$$

$$T(x_1, x_2, z) = \{T_0 + T_1 [1 - (x_1/a)^2] [1 - (x_2/a)^2]\} (1 + 2z/3h) \quad \dots\dots\dots (II)$$

を受ける。ここで、 T_0 と T_1 は定数である。荷重および熱負荷の作用する場合を、それぞれ番号(I)および(II)で区別する。

(2)座屈後変形モードでは、円板および正方形板のみを扱い、それぞれに対して、温度場

$$T(R, z) = T_0 + T_1 [1 - (R/a)^2]$$

$$T(x_1, x_2, z) = T_0 + T_1 [1 - (x_1/a)^2] [1 - (x_2/a)^2] \quad \dots\dots\dots (III)$$

を受ける。この場合を番号(III)で表す。

有限変形モードと座屈後変形モードの温度分布の違いは、前者では温度が z 方向（板あるいはシェルの厚さ方向）に直線的に変化し、後者では一定であることである。この差異により、有限変形モードでは変形の最初の段階から熱による曲げモーメント M_T が生じるのに対し、座屈後変形モードではこの値が常に0である。なお、すべての計算例において、板厚と代表長さの比（ a/h ）は20、Poisson比 ν は0.3とする。

座標系の原点は、円板および球シェルではその中心にとり、正方形板およびシェルではその中央とし、座標軸は各辺と平行となるようにとる。Berger定数や非線形項に関する領域積分を計算するため必要な内部セルおよび境界要素の分割を行う必要があるが、この例では、円板および球シェルと正方形板およびシェルの境界要素／内部セルの数は、それぞれ32／144と40／100とする。このような座標軸のとり方と境界および領域の分割の仕方は、円板および球シェルについては前章の図2-9(b)で示したものと同様であり、正方形板およびシェルについては図3-3に示すとうりである。本解析では、境界要素上および内部セル内の関数値が一定となる一定要素を用いた。したがって、境界節点は境界要素の中央点に、内部節点は内部セルの重心に配置される。境界および領域における積分は2章と同様のGauss積分法を用いる。なお、四角形内部セルの積分には、2次元の2点（3次）Gauss積分法を適用する。

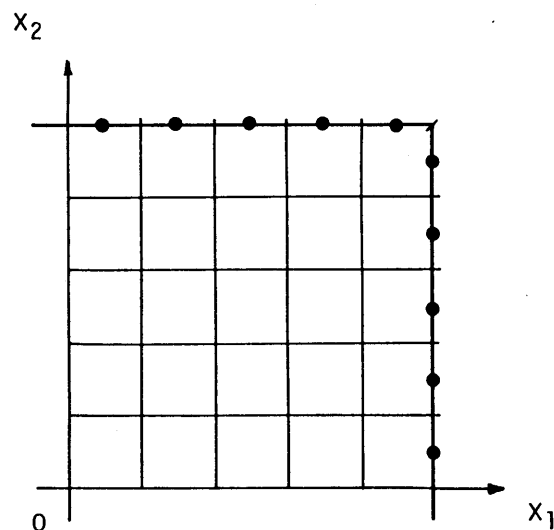


図3-3 正方形板およびシェルの要素分割

3・3・2 計算結果と検討

本解析では、荷重あるいは温度と最大たわみの関係、領域内のたわみとたわみ勾配の分布および境界におけるたわみ勾配、法線曲げモーメントなどの値について調べる。本解析法による解（BEM解）は、円板および球シェルの問題（軸対称問題）については Runge-Kutta-Gill法による解（RKG解）あるいは Palの近似解法による解[118]と比較検討する。これらの解は、いずれも Berger方程式を用いて得られた結果である。また、円板および正方形板については、von Karmanの連成方程式による解（円板ではRKG法、正方形板ではエネルギー法による）とも比較して調べる。境界条件として、円板および球シェルの問題では固定支持〔境界条件(A)〕および単純支持〔境界条件(B)〕を、正方形板およびシェルの問題では固定支持〔境界条件(A)〕を考える。

円板および球シェルの問題における荷重あるいは温度と最大たわみの関係を図3-4～3-10に示す。これらの図において、Berger方程式のBEM解を有限変形モードでは記号○あるいは△、座屈変形モードでは記号●で、対応するRKG解を実線と破線で、またvon Karman型方程式による連成解を一点鎖線で表す。

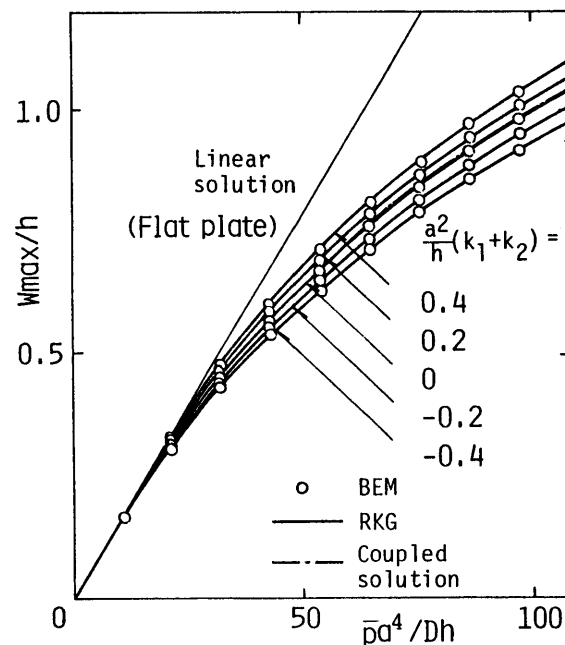


図3-4 一様分布荷重の作用する球シェルの最大たわみ〔境界条件(A)〕

板およびシェルの中央における最大たわみと外部負荷の関係を表した図においては、平板に対する微小変形解（線形解）を細い実線で示す。

図3-4と図3-5は、一様分布荷重(I)を受ける場合の最大たわみと荷重の関係を境界条件(A)と(B)に対して、全曲率($k_1 + k_2$)をパラメータにして書いたものである。図3-4に示す固定支持境界条件(A)の場合には、BEM解とRKG解はいずれの曲率においてもきわめてよく一致している。平板に対する連成解も対応するBEM解とよく一致する。一方、単純支持境界条件(B)では、図3-5からわかるように、BEM解はRKG解と比較していずれの曲率においてもいく分小さく計算されている。平板に対する連成解は、変形が比較的小さい場合には、BEM解と比較して小さく、変形が大きくなるとその逆の傾向を示しているが、実用的に問題となるような違いはみられず、Berger方程式による非連成解が連成解のよい近似となっていることがわかる。

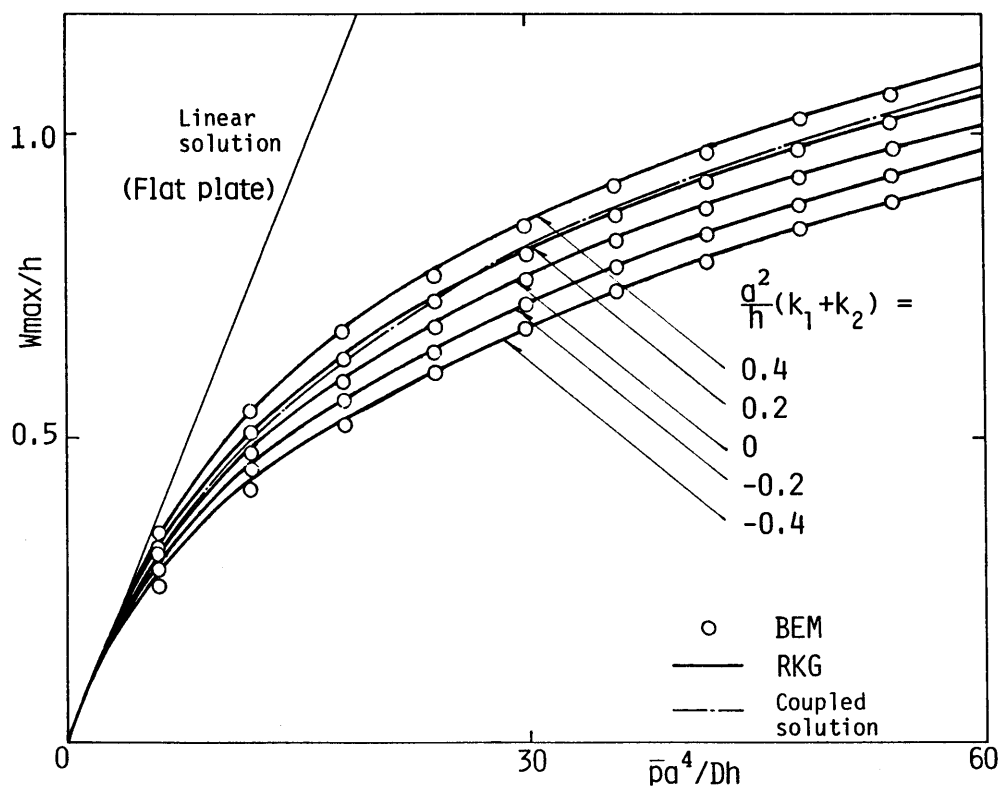


図3-5 一様分布荷重の作用する球シェルの最大たわみ[境界条件(B)]

図3-6は、固定支持境界条件(A)、温度場(II)において温度パラメータ T_1/T_0 を変化させたときの円板の中心の最大たわみと温度の関係である。BEM解とRKG解はいずれの温度パラメータ T_1/T_0 に対してもよく一致している。非連成解と連成解との差異は温度パラメータ T_1/T_0 の大きさと変形状態に依存することがわかる。しかしながら、この差異は実際には大きいことはなく、Berger方程式による解は、非線形性の大きいところでも連成解のよい近似となっている。

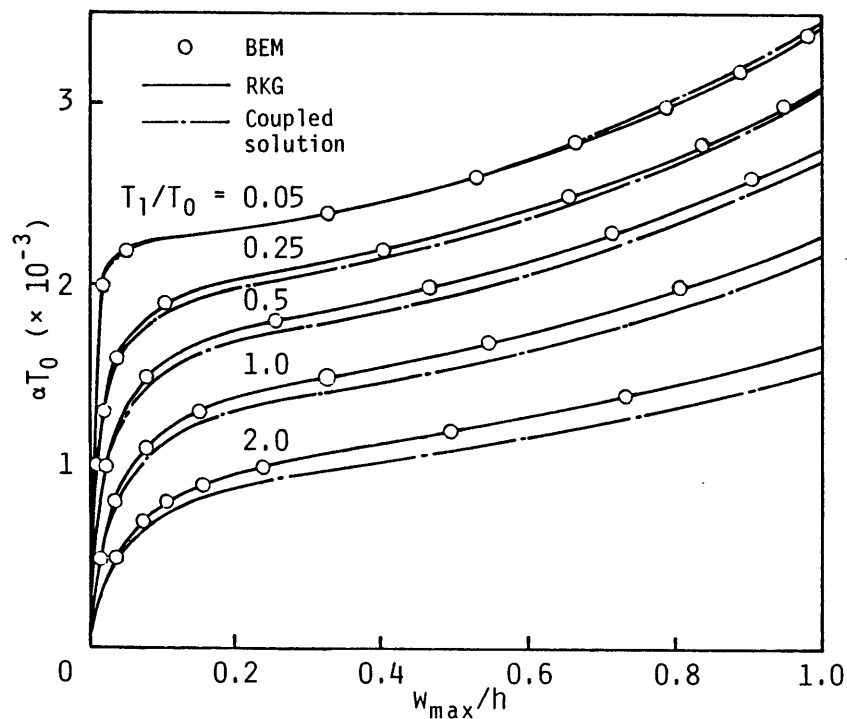


図3-6 加熱円板の最大たわみ[境界条件(A)]

温度場(II)すなわち有限変形モードにおいて全曲率を変化させたときの最大たわみと温度の関係を境界条件(A)と(B)に対して、それぞれ図3-7と図3-8に示す。これらの問題では、温度パラメータ $T_1/T_0 = 1$ の場合について計算を行った。図3-7 に示す固定支持境界条件(A)のとき、BEM解とRKG解はいずれの曲率においても比較的良好に一致している。この図には、比較のために平板に対する連成解を一点鎖線で示してある。この図にみられるように、境界条件(A)では、全曲率の符号に依存して、面外変位の変化している。一方、図3-8 に示す単純支持境界条件(B)のときには、両者はいく分差異を生じているが、これは本質的ではないと考えられる。

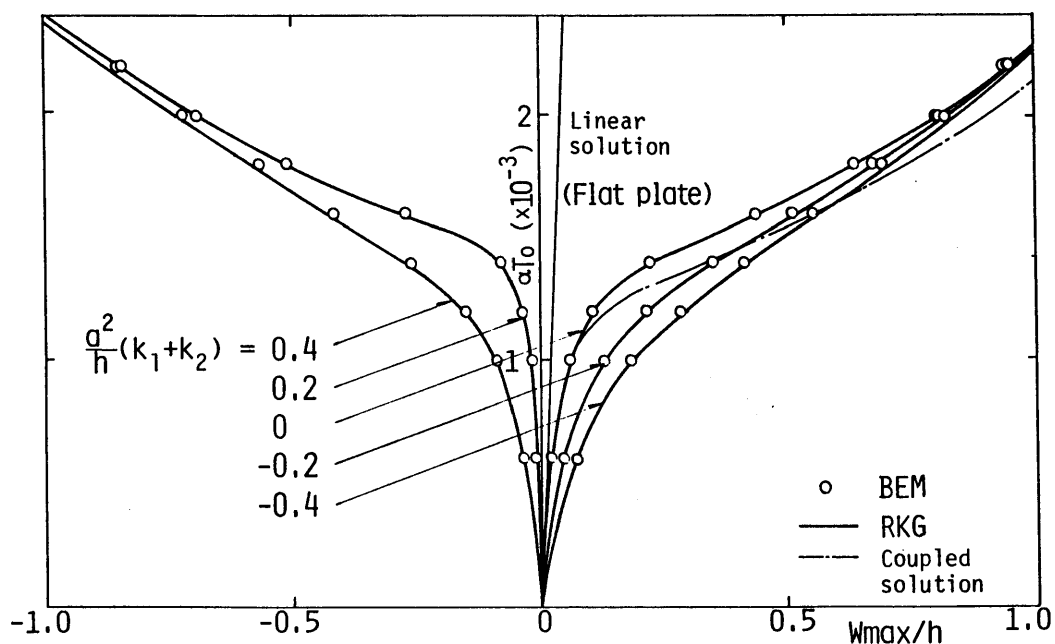


図3-7 加熱球シェルの最大たわみ[境界条件(A), $T_1/T_0 = 1$]

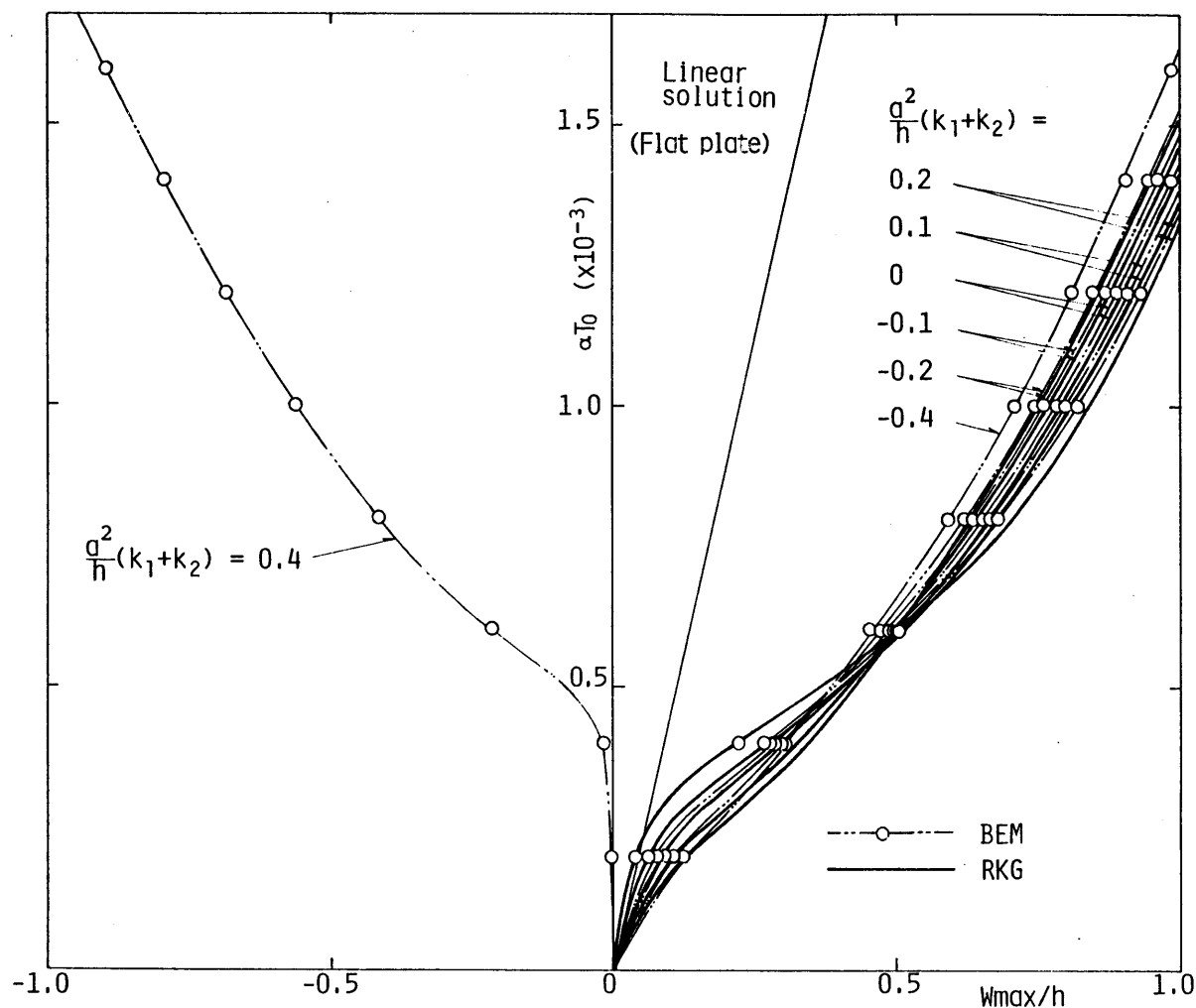


図3-8 加熱球シェルの最大たわみ[境界条件(B), $T_1/T_0 = 1$]

温度場(Ⅲ)すなわち座屈モードにおける最大たわみと温度の関係を、境界条件(A)および(B)に対して、それぞれ図3-9と3-10に示す。これらの図において、座屈モードにおけるBEM解を●印で、文献[118]で与えられるPalの近似解を破線で表す。また、対応する温度パラメータにおける有限変形モードの関係も比較のために示してある。いずれの境界条件においても、温度パラメータ $T_0/T_1 = 2$ のとき、BEM解とPalの近似解はわずかに差異がみられるが、その他の条件では、両者はおおむねよい一致を示す。

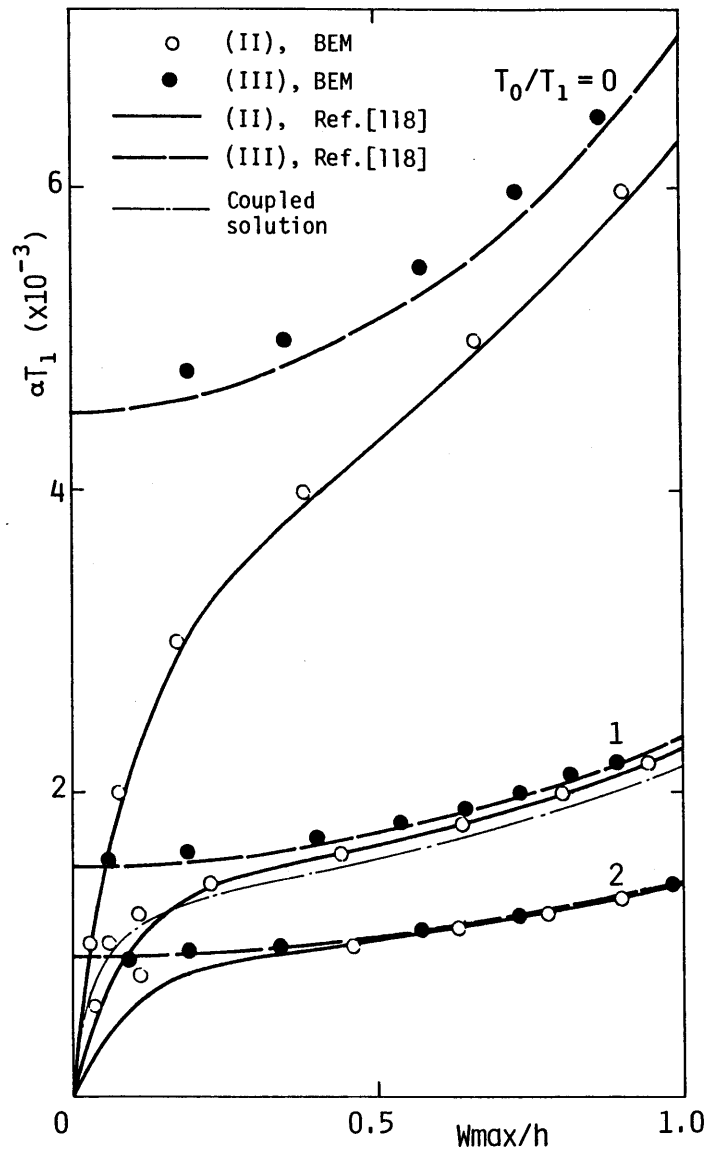


図3-9 加熱円板の座屈後変形[境界条件(A)]

特定の荷重あるいは温度において、境界条件(A)において全曲率を変化させたときの領域内の半径方向たわみおよびたわみ勾配の分布を、それぞれ図3-11、3-12および図3-13、3-14に示す。これらの図で記号Rは、円板および球シェルの中心からの半径方向の距離である。図3-11と3-13は無次元荷重 $\bar{p} a^4 / D h = 8.7$ とした場合、図3-12と3-14は温度パラメータ $T_0 / T_1 = 1$ 、温度 $\alpha T_0 = 1.8 \times 10^{-3}$ とした場合の計算結果である。これらの図において△印で示すBEM解は、非線形項やBerger定数を評価するための内部セルの重心における

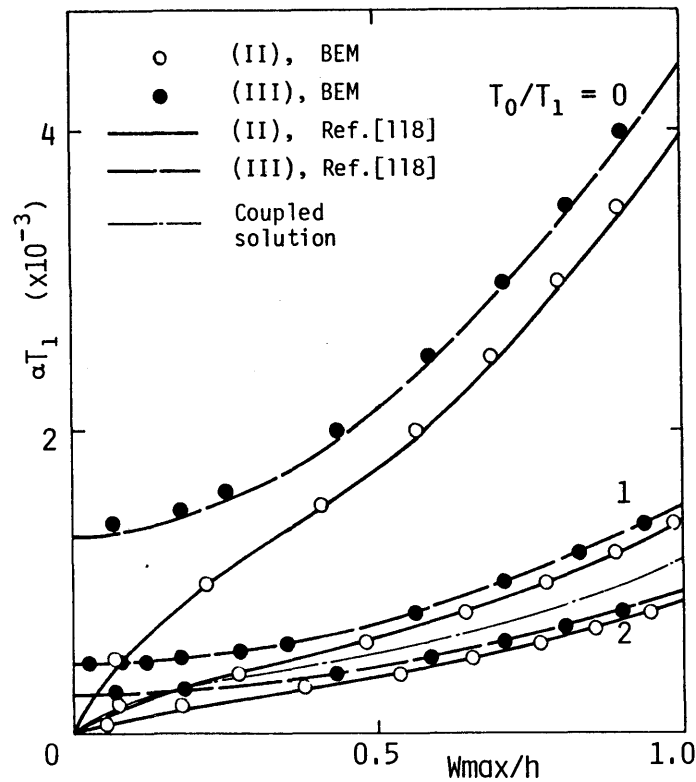


図3-10 加熱円板の座屈後変形[境界条件(B)]

る値を示しており、この重心は同一半径上に分布していないことや内部セルの分割が必ずしも軸対称性を反映していないことなどのために、この値は○印で示した同一半径上のBEM解の分布とは多少異なるところもある。図3-11と3-12に示す半径方向たわみ分布は、いずれの曲率、外部負荷に対しても、BEM解は、実線および破線で示される、RKG法による解ときわめてよく一致している。図3-13、3-14に示すたわみ勾配の分布において、一部のBEM解はRKG解と相違を生じているが、一般に境界要素法では高い計算精度が得られない境界近傍において、たわみ勾配はBEM解はRKG解と比較的よく一致している。

上述の荷重あるいは温度に対する境界における法線曲げモーメント M_n の値を表3-1に示す。それぞれの外部負荷条件において、BEM解とRKG解を比較した結果、両者の解はきわめてよい一致を示していることがこの表からわかる。

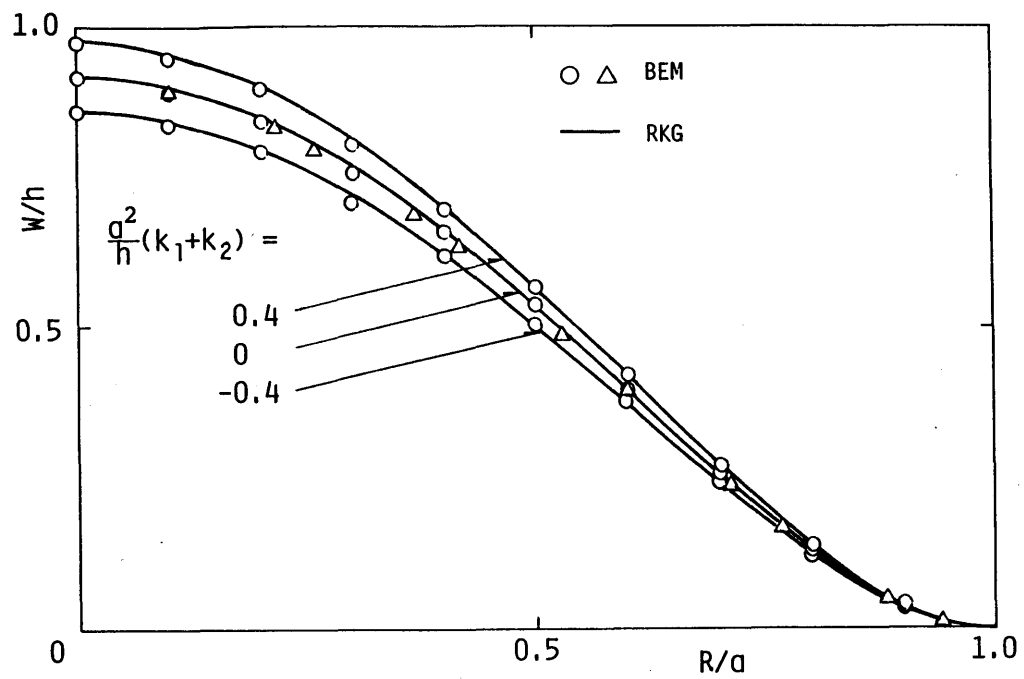


図3-11 一様分布荷重の作用する球シェルのたわみ[境界条件(A), $\bar{p}a^4/Dh = 8.7$]

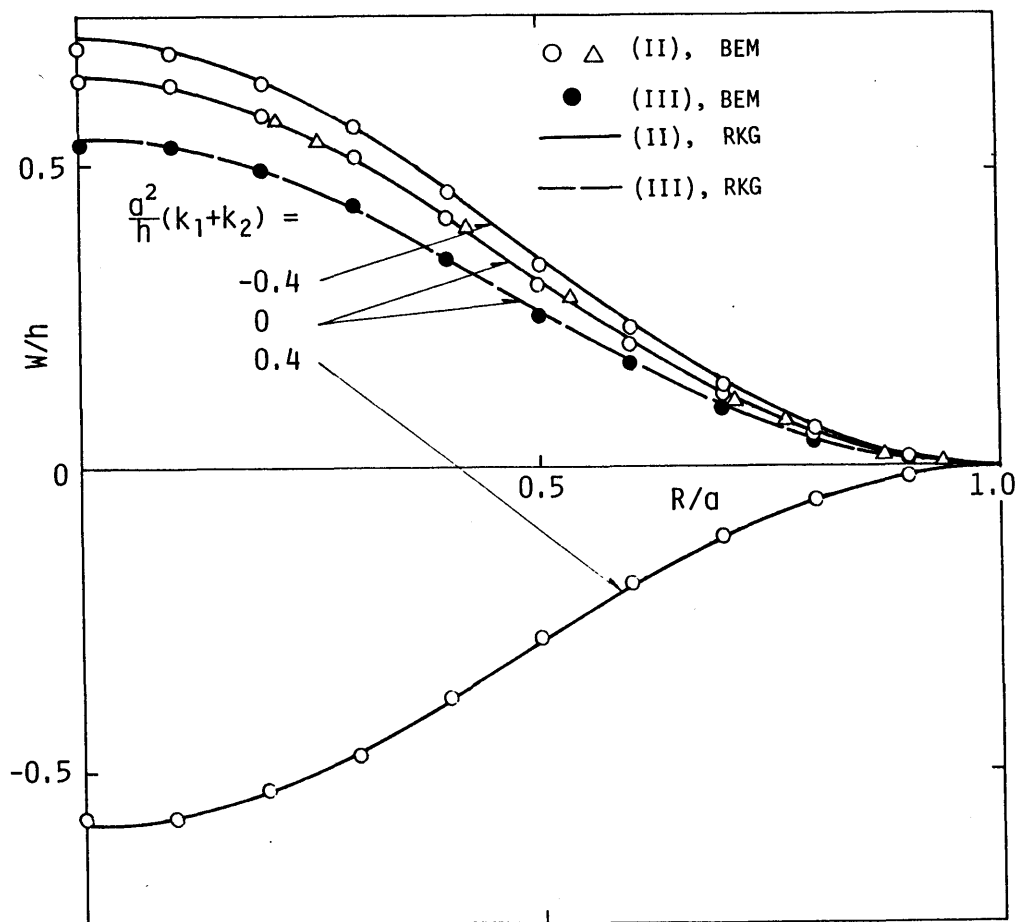


図3-12 加熱球シェルのたわみ[境界条件(A), $\alpha T_0 = 1.8 \times 10^{-3}$, $T_1/T_0 = 1$]

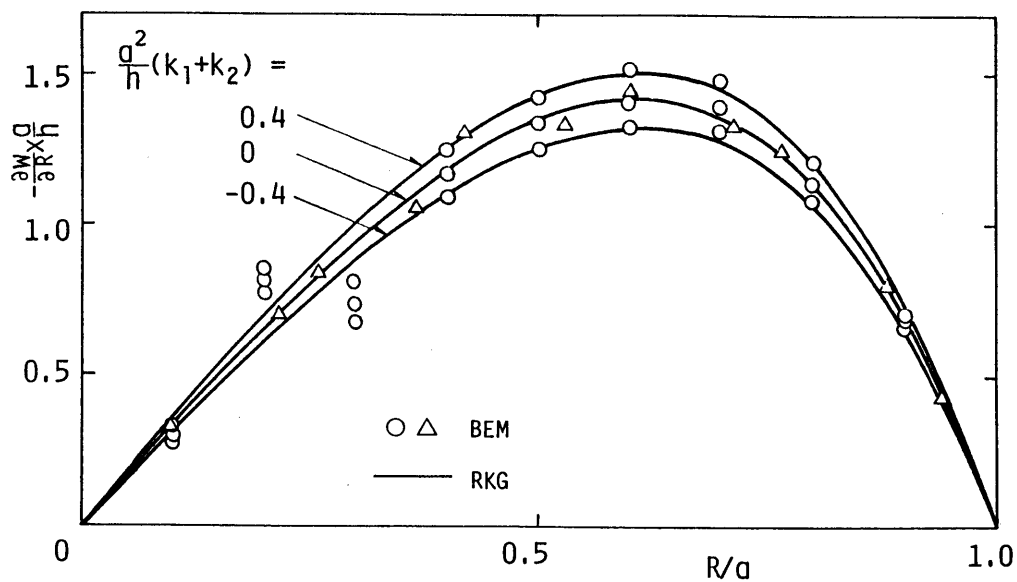


図3-13 一様分布荷重の作用する球シェルのたわみ勾配[境界条件(A), $\bar{p}a^4/Dh = 87$]

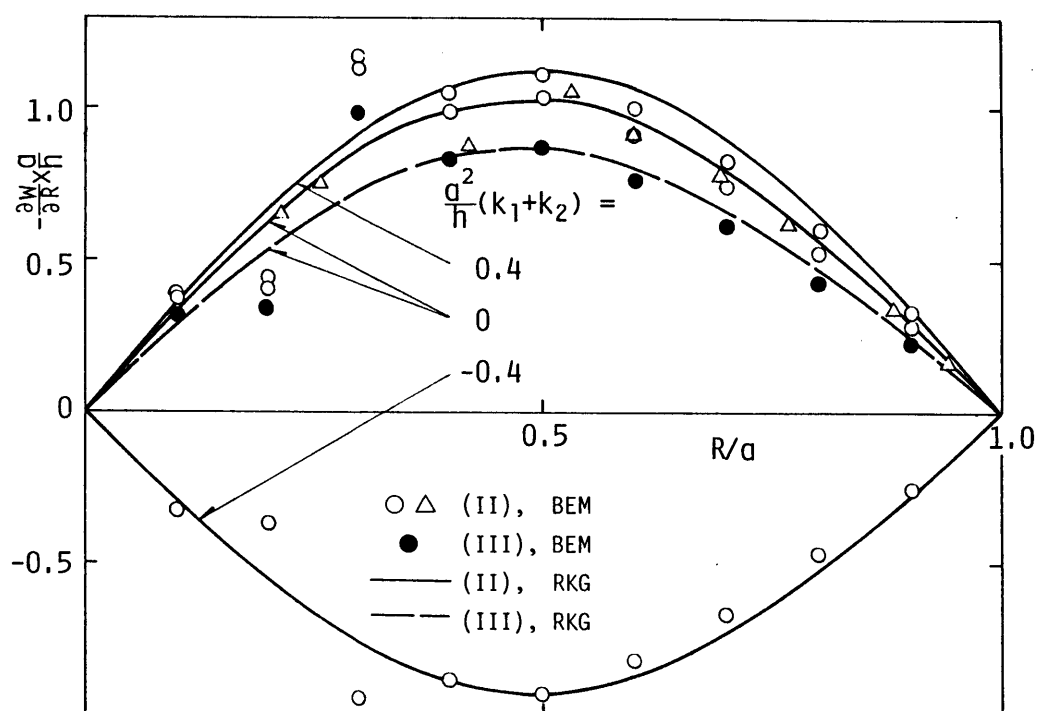


図3-14 加熱球シェルのたわみ勾配[境界条件(A), $\alpha T_0 = 1.8 \times 10^{-3}$, $T_1/T_0 = 1$]

表3-1 円板および球シェルの法線曲げモーメント Da^2M_n/h [境界条件(A)]

Parameter		$\bar{p}a^4/Dh=87$		$\alpha T_0=1.8 \times 10^{-3}, T_1/T_0=1$			
Load Condition		(I)		(II)		(III)	
Method		RKG	BEM	RKG	BEM	RKG	BEM
Total Curvature	0.4	-9.094	-9.119	2.038	2.049		
	0.0	-8.678	-8.711	-3.536	-3.555	-2.304	-2.319
	-0.4	-8.253	-8.287	-4.101	-4.133		

つぎに、正方形板あるいはシェルの問題において、固定支持境界条件(A)の場合で全曲率を変化させたときの荷重あるいは温度と最大たわみの関係を図3-15および3-16に示す。後者の図において、Berger方程式のBEM解を有限変形モードでは実線で、座屈変形モードでは破線で示し、また、平板に対する von Karman型方程式による連成解を両変形モードについて一点鎖線で表す。最大たわみの分布は、他の解法による解とは比較してないが、定性的に円板および球

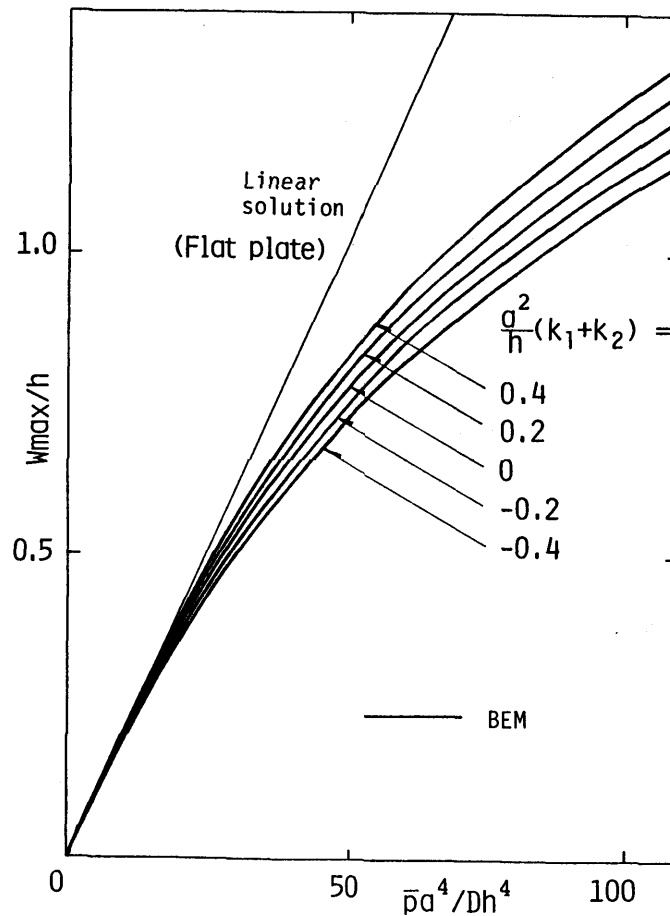


図3-15 一様分布荷重の作用する正方形シェルの最大たわみ[境界条件(A)]

シェルの場合と類似の挙動を示している。図3-16からわかるように、Berger方程式による非連成解の座屈温度は、連成解のそれより低く評価されている。また、特定の荷重あるいは温度におけるたわみとたわみ勾配の分布を図3-17と3-18に示す。これらの図においても、実線および破線は、それぞれ有限変形モードと座屈変形モードにおけるBEM解を表す。図3-17は無次元荷重 $\bar{p} a^4 / D h = 30$ としたとき、図3-18は温度パラメータ $T_0 / T_1 = 1$ 、温度 $\alpha T_0 = 1.6 \times 10^{-3}$ としたときの結果である。また、境界における法線曲げモーメント M_n の値を表3-2に示す。これらの図あるいは表には、比較の対象となるその他の解法による解は示していないが、BEM解は予想されるなめらかな分布を示していることがわかる。

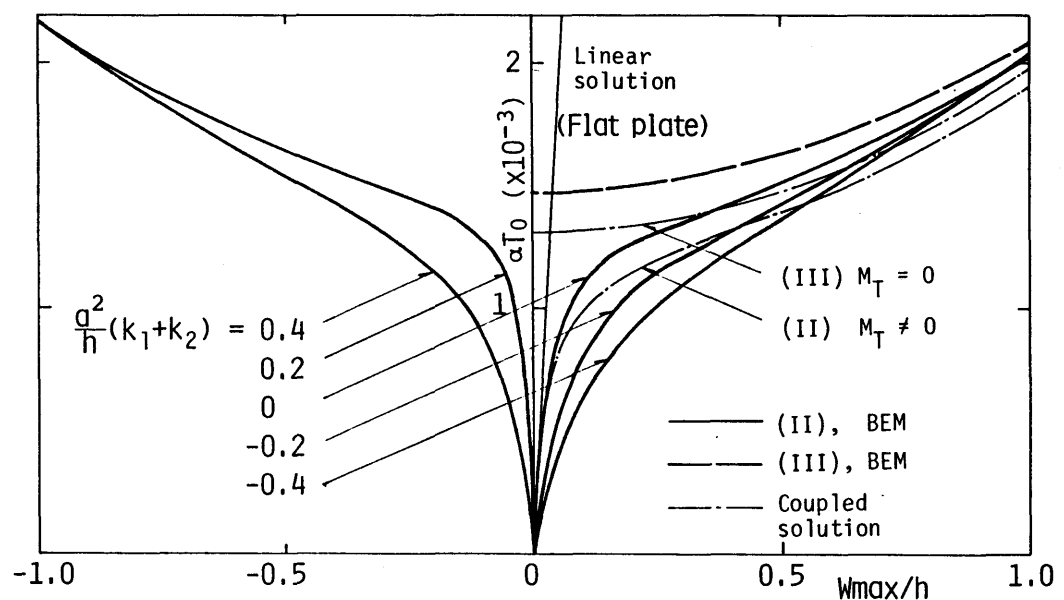


図3-16 加熱正方形シェルの最大たわみ[境界条件(A), $T_1 / T_0 = 1$]

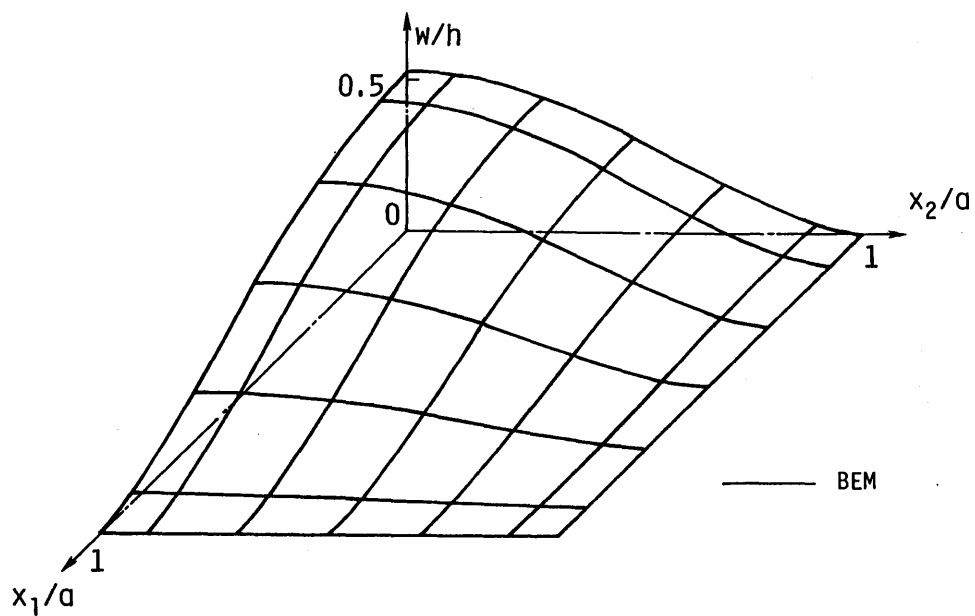


図3-17 一様分布荷重の作用する正方形板のたわみ[境界条件(A), $\bar{p}a^4/Dh = 30$]

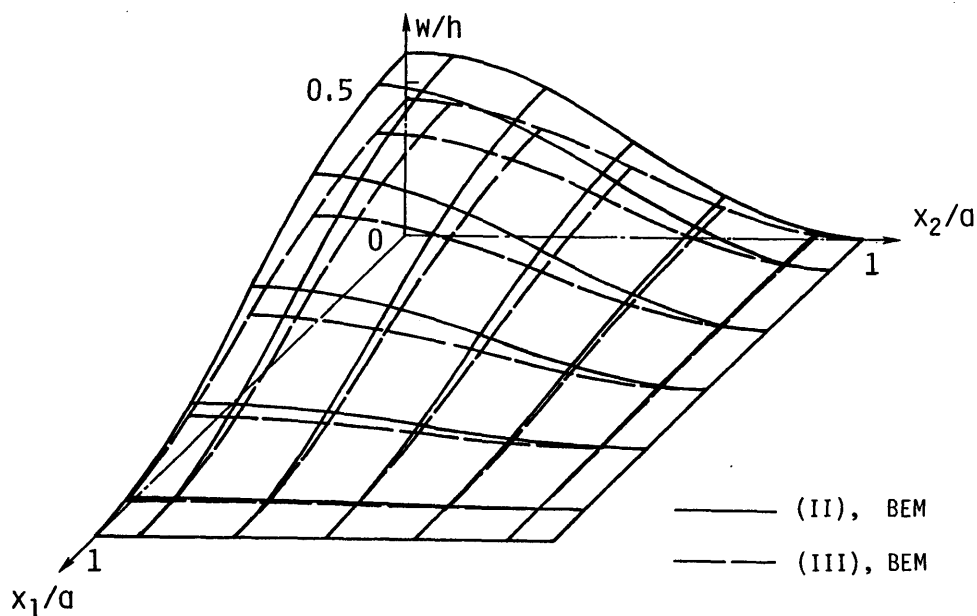


図3-18 加熱正方形板のたわみ[境界条件(A), $\alpha T_0 = 1.6 \times 10^{-3}$, $T_1/T_0 = 1$]

表3-2 正方形板の法線曲げモーメント Da^2M_n/h ($x_1/a=1$) [境界条件(A)]

Load Condition	Parameter	x_2/a				
		0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
(I)	$\bar{p}a^4/Dh=30$	-5.633	-4.984	-3.702	-1.905	-0.239
(II)	$\alpha T_0=1.6 \times 10^{-3}$	-4.349	-3.534	-2.211	-0.933	-0.431
(III)	$T_1/T_0=1$	-2.696	-2.088	-1.115	-0.213	-0.098

最後に、弾性床上の平板の近似有限変形解析の例として、一様分布荷重(I)を受ける固定円板〔境界条件(A)〕を考え、この問題における荷重と最大たわみの関係を図3-19に示す。図において、種々の大きさの無次元弾性床パラメータ $\lambda (\equiv k a^4 / D)$ に対するBEM解を○印で表す。比較のために対応するSinhaの解[121]を実線で示す。無次元弾性床パラメータ λ を変化させても両者はきわめてよく一致している。このように、弾性床上の平板の有限変形解析においても、これまでと同様な解析法で精度の高い解が得られることがわかる。

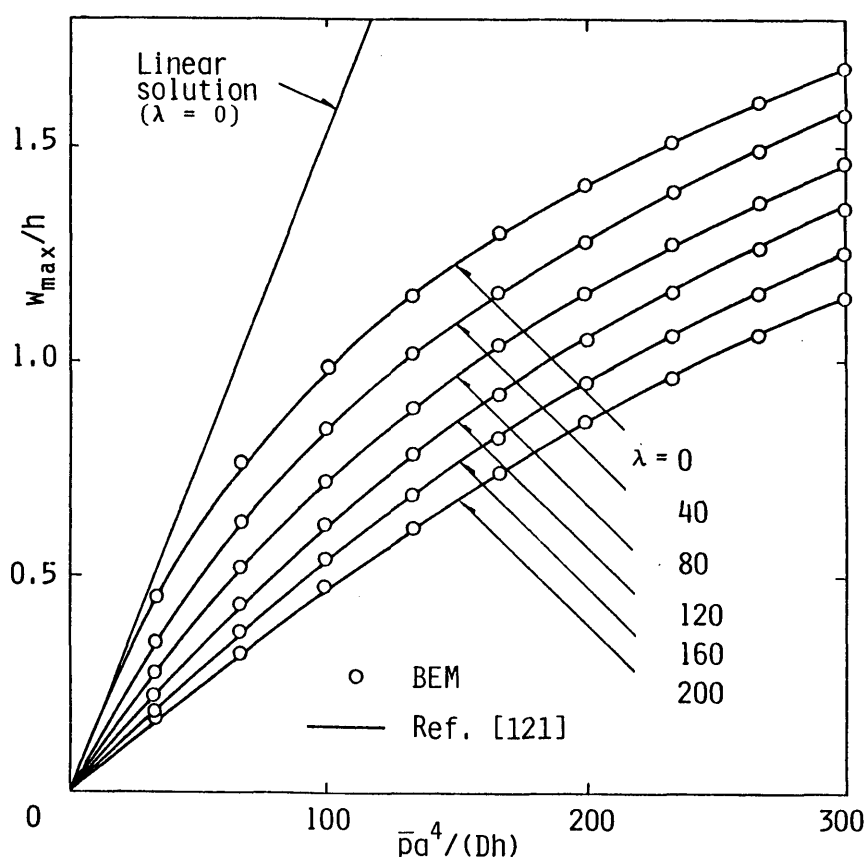


図3-19 一様分布荷重の作用する弾性床上の円板の最大たわみ〔境界条件(A)〕

3・4 まとめ

Berger法に基づく弾性平板およびシェルの近似有限変形解析と座屈および座屈後変形解析を、直接法境界要素法により行った。本章はつぎのようにまとめることができる。

- (1) 弾性偏平シェル（平板を含む）の膜ひずみの第2不変量を無視したポテンシャルエネルギーの停留条件から導出されるBerger方程式に対する積分方程式が、弾性平板の微小変形解析と同様の基本解を用いて定式化されることを示した。
- (2) 数値解析例として、横荷重あるいは熱負荷の作用をうける円板および球シェルと正方形板およびシェルの曲げ問題を考えた。円板および球シェルについては、中央における最大たわみ、半径方向のたわみ分布およびたわみ勾配分布に関するBEM解を、対応するRKG解と比較した。その結果、有限変形モードおよび座屈変形モードのいずれのモードにおいても、一部の結果を除いて両者はよく一致した。正方形板およびシェルについても同様の解析を行った。これらのBEM解も、円板および球シェルと同様の傾向を示すことがわかった。
- (3) 弾性床上の平板の有限変形解析にも、Berger方程式に基づく直接法境界要素法を適用し、このような問題にも本解析法が有効であることを数値解析例により示した。
- (4) ここでは、他の解法でも解析できる比較的簡単な境界条件、形状の板あるいはシェルの解析例を示したが、本解析法は任意の境界条件、形状の問題に対しても容易に拡張することができる。

第4章 サンドイッチ平板およびシェルの近似有限変形 および座屈後変形解析[138, 139, 155]

前章では、Bergerによる弾性平板およびシェルの近似有限変形問題に対する境界要素法の応用について検討し、その有効性を示した。本章では、前章で示した解析法の拡張として、工学上重要な構造要素であるサンドイッチ構造の平板およびシェル（以下では、単にサンドイッチ平板およびシェルということにし、シェルは偏平シェルに限定する）の近似有限変形問題を境界要素法により解析する方法について述べる。

前章でも述べたように、いわゆるBerger法は均質等方性平板のみならず種々の問題に広く応用されている。3層からなるサンドイッチ平板およびシェルの変形挙動は均質等方性平板のそれとは本質的に異なるので、Berger法はそのままでは適用できない。そこで提案されたのは均質等方性平板およびシェルの膜ひずみの代りに、各々の表面板の膜ひずみの平均値を用いる方法である[123]。この考え方は、荷重あるいは熱負荷をうける等方性あるいは直交異方性サンドイッチ平板およびシェルの問題などにも応用された[122, 124]。

ここでは、荷重および熱負荷をうける有限変形のもとにある3層構造のサンドイッチ平板およびシェルの近似支配方程式を、修正されたBerger法により導出する過程の概要についてまず説明する。そのあとで、Berger型の近似支配方程式の積分方程式への変換が、前章で述べたのとほぼ同様な方法で行えることを示す。数値解析例として、一様分布荷重および上下表面板に温度差を伴う熱負荷により曲げられるサンドイッチ平板およびシェルの問題を扱う。さらに、座屈後変形解析への応用についても解析例を示す。

4・1 支配方程式[123]

サンドイッチ平板およびシェルの近似支配方程式は前章と同様に、Bergerの仮定に基づきポテンシャルエネルギーの停留条件を用いて導かれる。図4-1に示すように直交曲線座標系 x_1, x_2, z をとり、曲率 k_1, k_2 の中央面に対し対称な3層の偏平サンドイッチシェル（平板を含む）を考える。 x_1, x_2 軸は主曲率 k_1, k_2 の方向となるように、そして z 軸は下向きが正となるように定め

る。サンドイッチシェルの占める2次元領域とその境界をそれぞれ Ω および Γ で表し、境界 Γ はなめらかであるとする。サンドイッチシェルは、荷重と熱負荷の下におかれているものとする。簡単のために、サンドイッチシェルの解析では、つぎのような幾何学的小および力学的な仮定を導入する。すなわち、上下表面板の厚さ t は同じであり、芯材の厚さ h に比べて十分に薄く、その曲げ剛性は無視する。芯材はせん断変形だけに、表面板は十分に薄く曲げ変形だけに応答する。表面板の面内の変位および応力はその厚さ方向に変化しない。芯材および表面板は等方弾性体であり、たわみ w はサンドイッチシェルの全厚さ方向に変化しない。

このような仮定に従えば、既知の分布横荷重 \bar{p} と、上下表面板の厚さ方向に変化しない温度分布 T^t 、 T^b のもとでのサンドイッチシェルの全ポテンシャルエネルギー Π は、つぎのように表される。

$$\begin{aligned} \Pi = \int_{\Omega} \left\{ \frac{E^s t}{1 - (\nu^s)^2} [(I_1^s)^2 - 2(1 - \nu^s) I_2^s + \frac{1}{4}(d_{,1}^2 + e_{,2}^2 + 2\nu^s d_{,1} e_{,2}) \right. \\ \left. + \frac{1}{8}(1 - \nu^s)(d_{,2} + e_{,1})^2] - \frac{2E^s \alpha^s t}{1 - \nu^s} [T^s I_1^s + \frac{1}{4}T^s(d_{,1} + e_{,2})] \right. \\ \left. + \frac{1}{2}G^c h \left[\left(\frac{d}{h} - w_{,1}\right)^2 + \left(\frac{e}{h} - w_{,2}\right)^2 \right] - \bar{p}w \right\} d\Omega + (\text{Boundary terms}) \end{aligned} \quad (4-1)$$

ここで、 E^s 、 ν^s および α^s は、それぞれ表面板のヤング係数、Poisson比お

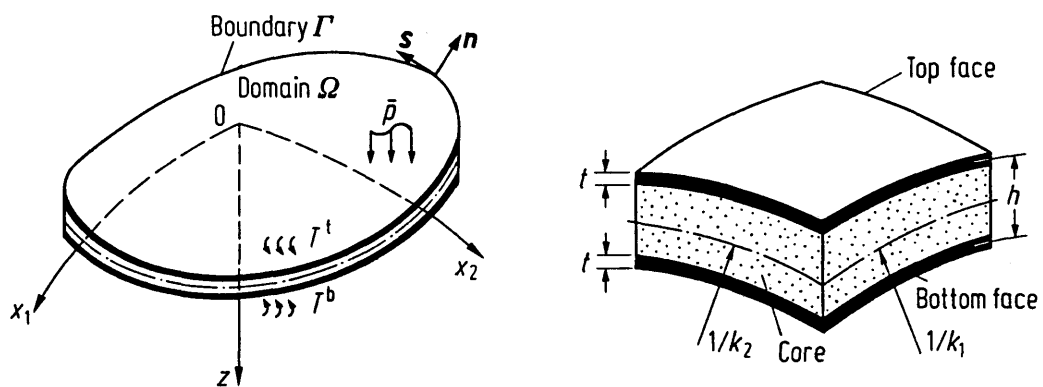


図4-1 サンドイッチシェルとその要素

座標系と記号の説明

よび線膨張係数であり、 G^0 は芯材のせん断係数である。また、 d 、 e および T^m 、 T^d はそれぞれ上下表面板の面内変位の差および温度の平均値と差を表しており、つぎのように与えられる。

$$d = u_1^t - u_1^b, \quad e = u_2^t - u_2^b \quad (4-2)$$

および

$$T^m = \frac{1}{2}(T^t + T^b), \quad T^d = T^t - T^b \quad (4-3)$$

I_1^m と I_2^m は膜ひずみの第1および第2不変量であり、上下表面板の面内変位の平均値を u_1^m 、 u_2^m としてつぎのように定義される。

$$I_1^m = u_{1,1}^m + u_{2,2}^m + \frac{1}{2}(w_{,1}^2 + w_{,2}^2) - (k_1 + k_2)w \quad (4-4)$$

$$I_2^m = (u_{1,1}^m + \frac{1}{2}w_{,1}^2)(u_{2,2}^m + \frac{1}{2}w_{,2}^2) - \frac{1}{4}(u_{1,2}^m + u_{2,1}^m + w_{,1}w_{,2})^2 \quad (4-5)$$

上添字 f 、 t 、 b および m は、それぞれ表面、上表面、下表面および両表面の平均量であることを表す。

サンドイッチシェルの全ポテンシャルエネルギー Π を最小にするための変分計算を行えば、通常の連成支配方程式を導くことができる。この式はたわみと表面板の4つの面内変位に関して連成したものとなり、一般に解析が容易でない。

ここでは、Bergerが均質等方弾性板の有限変形解析で用いた仮定にしたがい、上下表面板の膜ひずみの平均値に関する第2不変量 I_2^m を無視して、上述と同様の変分計算を行えば、 w 、 d および e に関する3つの微分方程式とつぎの恒等式を得る。

$$I_1^m - (1 + \nu^f) \alpha^f T^m = \text{constant} \quad (4-6)$$

これらの式は、表面板および芯材がともに等方な場合にはさらに簡単になり、 w 、 d および e に関する方程式から、面内変位の差 d と e に関する項を消去して、最終的にたわみ w だけで表されるつぎの式を得ることができる。

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{2E^f t}{1-(\nu^f)^2} [I_1^m - \alpha^f(1+\nu^f)T^m] + G^c h \right\} \nabla^4 w \\
& - \frac{4G^c}{h} [I_1^m - \alpha^f(1+\nu^f)T^m] (\nabla^2 w + k_1 + k_2) - \alpha^f G^c (1+\nu^f) \nabla^2 T^d \\
& - \frac{2G^c [1-(\nu^f)^2]}{E^f t h} \bar{p} + \nabla^2 \bar{p} + \frac{2E^f t}{1-(\nu^f)^2} [I_1^m - \alpha^f(1+\nu^f)T^m] \nabla^2 (k_1 + k_2) = 0
\end{aligned} \tag{4-7}$$

ここで、式(4-6)の定数はつぎのように表される。

$$I_1^m - (1+\nu^f)\alpha^f T^m \equiv \frac{h^2 \kappa^2}{4} \tag{4-8}$$

ここで、 κ^2 は式(3-6)に含まれる均質等方性弾性板のBerger定数に相当するものであり、ここでも3章と同様に積分形で表す。 κ^2 は指定された荷重に対して領域 Ω 内で一定であるので、式(4-8)の両辺を積分してつぎのようになる。

$$\int_{\Omega} [I_1^m - (1+\nu^f)\alpha^f T^m] d\Omega = \frac{h^2 \kappa^2}{4} \Omega_A \tag{4-9}$$

ここで、 Ω_A は領域 Ω の面積である。境界で面内変位が拘束されているとき、式(4-9)はつぎの積分形に帰着される。

$$\kappa^2 = \frac{2}{\Omega_A h^2} \int_{\Omega} [w_{,1}^2 + w_{,2}^2 - 2w(k_1 + k_2) - 2(1+\nu^f)\alpha^f T^m] d\Omega \tag{4-10}$$

したがって、Berger定数 κ^2 はたわみと指定された温度分布によって数値的に計算される。

このように、サンドイッチシェルの全ポテンシャルエネルギーにおける膜ひずみの第2不変量を見捨てることによって、面内変位差を含まないたわみだけで表示された非連成方程式を得ることができ、これにより境界要素法のための積分方程式の定式化およびこれに関連する計算が容易となる。

4・2 積分方程式と離散定式化

サンドイッチシェルの支配方程式(4-7)を積分方程式に変換するために、この式のたわみに関する重調和作用素の項が支配的となることを考慮してつぎの

ように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} \nabla^4 w - \frac{\kappa^2}{A\kappa^2+1}(\nabla^2 w + k_1 + k_2) \\ - \frac{\kappa^2}{D_s(A\kappa^2+1)}[\bar{p} - A\nabla^2 \bar{p} + B\nabla^2 T^d - AD_s\kappa^2(k_1 + k_2)] = 0 \end{aligned} \quad (4-11)$$

ただし

$$D_s = \frac{E^* t h^3}{2[1-(\nu^*)^2]}, \quad A = \frac{D_s}{G^* h}, \quad B = \frac{D_s(1+\nu^*)}{h}$$

近似支配方程式(4-11)は、均質等方性平板およびシェルに対して導かれた式に比べて幾分複雑な形となっているが、変形の非線形性は式(4-8)で定義された Berger 定数 κ^2 だけにあるので、3章と同様の方法で積分方程式を定式化することができる。

2章で示した重調和作用素 ∇^4 に対する一般化 Green の公式(2-27)と調和作用素 ∇^2 に関する Green の公式(2-50)を適用し、重さ関数として式(2-29)により示された重調和方程式に対する基本解

$$w^* = -(1/8\pi) r^2(P, Q) \log r(P, Q) \quad (4-12)$$

を用いれば、3章と同様の手順によりつぎの積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} c(P)w(P) = & - \int_{\Gamma} \{K_n^*(Q)w^*(P, Q) - M_n^*(Q)w_{,n}^*(P, Q) + \\ & + M_n^*[w^*(P, Q)]w_{,n}(Q) - K_n^*[w^*(P, Q)]w(Q)\} d\Gamma \\ & - \int_{\Omega} \left[\frac{\kappa^2}{A\kappa^2+1} \{[\nabla^2 w^*(P, Q')]w(Q') + w^*(P, Q')(k_1 + k_2)\} \right. \\ & \left. + \frac{1}{D_s(A\kappa^2+1)} \{\bar{p}(Q') - A\nabla^2 \bar{p}(Q') + B\nabla^2 T^d(Q') - AD_s\kappa^2\nabla^2(k_1 + k_2)\} w^*(P, Q') \right] d\Omega \\ & (Q \in \Gamma, Q' \in \Omega) \end{aligned} \quad (4-13)$$

および

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}w_{,no}(P) = & - \int_{\Gamma} \{K_n^*(Q)w_{,no}^*(P, Q) - M_n^*(Q)w_{,nno}^*(P, Q) + \\
& + M_n^*,_{no} [w^*(P, Q)] w_{,n}(Q) - K_n^*,_{no} [w^*(P, Q)] w(Q)\} d\Gamma \\
& - \int_{\Omega} \left[\frac{\kappa^2}{A\kappa^2+1} \{ [\nabla^2 w_{,no}^*(P, Q')] w(Q') + w_{,no}^*(P, Q') (k_1 + k_2) \} \right. \\
& \left. + \frac{1}{D_s(A\kappa^2+1)} \{ \bar{p}(Q') - A\nabla^2 \bar{p}(Q') + B\nabla^2 T^d(Q') - AD_s \kappa^2 \nabla^2 (k_1 + k_2) \} w_{,no}^*(P, Q') \right] d\Omega \\
& (P, Q \in \Gamma, Q' \in \Omega)
\end{aligned} \tag{4-14}$$

ただし

$$c(P) = \begin{cases} 1 & (P \in \Omega) \\ \frac{1}{2} & (P \in \Gamma) \end{cases}$$

ここで

$$K_n^* = K_n^i(w) + \frac{\kappa^2}{A\kappa^2+1} w_{,n} \tag{4-15}$$

$$M_n^* = M_n^i(w) + \frac{\kappa^2}{A\kappa^2+1} w \tag{4-16}$$

積分方程式(4-13)と(4-14)が、境界要素法によるサンドイッチシェルの近似有限変形解析に必要な式である。なお、これらの積分方程式において*をつけた関数は式(2-32)～(2-34)および(2-39)～(2-42)で示した微小変形解析で用いたものと同様である。式(4-13)と(4-14)の境界変数のうち K_n^* と M_n^* は、このままではサンドイッチシェルの等価せん断力と法線モーメントの正しい表示になっていない。

サンドイッチシェルの積分方程式(4-13)と(4-14)に対する離散化方程式は式(3-17), (3-18)と同様の形式となり、境界未知量に関するベクトル $\{w\}, \{w_{,n}\}, \{M_n^*\}, \{K_n^*\}$ により、つぎのように書くことができる。

$$[E_1'']\{w\} + [F_1'']\{w_{,n}\} + [G_1'']\{M_n^*\} + [H_1'']\{K_n^*\} = \{N_3''\} \tag{4-17}$$

$$[E_2'']\{w\} + [F_2'']\{w_{,n}\} + [G_2'']\{M_n^*\} + [H_2'']\{K_n^*\} = \{N_4''\} \tag{4-18}$$

ここでも非線形項を含む右辺ベクトルの値を適当に仮定して解けば、境界条件で指定されない2つの未知量を定めることができる。初期値としては線形解を用い、たとえば式(3-19)と同様のたわみに関する収束条件が満たされるまで、反復計算を繰り返す。式(4-17)と(4-18)の係数マトリックスは、前章でも述べたようにサンドイッチシェルの物性値と幾何学形状で決まるので、反復計算のつど計算する必要はない。

4・3 数値解析結果と検討

上述の近似有限変形解析に関する積分方程式と計算手順の有用性を調べるために、比較的簡単な幾何学形状のサンドイッチ平板およびシェルについて、その数値解析例を示す。

4・3・1 解析対象

サンドイッチ平板およびシェルについての幾何学的非線形問題においても、均質等方性板およびシェルのそれと同様に2種類の変形モードを考えることができる。すなわち

- (1) 荷重あるいは熱負荷による有限変形モード
- (2) 熱負荷による座屈変形モード

であり、両モードに対して、支配方程式は同じである。温度分布は、有限変形モードでは上下表面板において異なり、座屈変形モードでは同じである。

計算手順としては、初期値として、有限変形解析では線形解を、座屈変形解析では有限変形解析で得られた解を使用し、3章で述べた均質等方性板およびシェルに対して用いたものと同様の増分解法を適用して、与えられた収束条件を満たすまで反復計算を行う。

計算例題として、半径 a のサンドイッチ円板および球シェルと一辺の長さが $2a$ の正方形板およびシェルの曲げ問題を考える。サンドイッチシェルの寸法に関するパラメータと材料定数は、文献[122]で与えられるのと同様に以下のように選ぶ。

$$t = 0.635\text{mm}, \quad h = 17.13\text{mm}, \quad a = 254\text{mm}$$

$$\nu^f = 0.3, \quad E^f = 0.72 \times 10^5 \text{MPa}, \quad G^c = 0.414 \times 10^2 \text{MPa} (\equiv G_{0.^\circ} \text{とする})$$

境界条件としては、面内変位 u_1, u_2 はサンドイッチシェルの境界で拘束されており、面外変位に関しては、固定支持すなわち

$$w = 0, \quad w_{,n} = 0$$

の条件だけを取り扱うことにする。外部荷重あるいは温度分布として、つぎのような場合を考える。

(1) 有限変形モードでは、静的な一様分布荷重

$$\bar{p} = \text{constant} \quad \dots\dots\dots (I)$$

が作用する場合と、サンドイッチ円板および球シェルと正方形板およびシェルの上表面板に対して、

$$T^t(R, z) = T_0 + T_1 [1 - (R/a)^2] \quad (R^2 = x_1^2 + x_2^2)$$

$$T^t(x_1, x_2, z) = T_0 + T_1 [1 - (x_1/a)^2] [1 - (x_2/a)^2]$$

および両シェルの下表面板に対して、

$$T^b = 2T^t \quad \dots\dots\dots (II)$$

となる温度場にある場合である。ここで、 T_0 と T_1 は定数である。荷重および熱負荷の作用する場合をそれぞれ番号 (I) および (II) で区別して表す。

(2) 座屈変形モードでは、サンドイッチ円板と正方形板のみを考え、それぞれに対して、上表面板の温度分布は (1) と同様であり、下表面板の温度分布は両平板に対して、

$$T^b = T^t \quad \dots\dots\dots (III)$$

とする。この場合を番号(Ⅲ)で表す。

有限変形モードでは上下表面板の温度分布は異なるのに対し、座屈変形モードではそれらは同じである。

座標軸のとり方、境界要素および内部セルの分割の仕方は3章で説明したものと同様であり、境界要素／内部セルの数はサンドイッチ円板および球シェルに対して32／144、正方形板およびシェルに対して40／100とする。数値計算は一定要素を用いて行い、したがって境界節点は境界要素の中央に、内部節点はセルの重心にとる。境界および領域における積分には、3章と同様のGauss積分法を適用する。

4・3・2 計算結果と検討

ここでも3章と同様に、荷重あるいは温度と最大たわみの関係、領域内のたわみとたわみ勾配の分布について調べる。

サンドイッチ円板における荷重あるいは温度と最大たわみの関係を、芯材のせん断弾性係数 G^o をパラメータにして図4-2, 4-3に描く。最大たわみ分布については、 $G^o = G_o^o / 5$ 、 $G^o = G_o^o$ 、 $G^o = 5 G_o^o$ の3種類の場合について計算を行った。このうちの $G^o = G_o^o$ の場合の領域内のたわみとたわみ勾配の分布を図4-4, 4-5に示す。これらの図において、Berger方程式の境界要素法による解(BEM解)を、有限変形モード(1)では記号○あるいは△で、座屈変形モード(2)では●あるいは▲で示し、それぞれのモード対応するRunge-Kutta-Gill法による解(RKG解)を実線と破線で表す。また、最大たわみ分布を表す図では、参考のために微小変形解(線形解)を細い実線で示す。一様分布荷重(I)が作用するとき、図4-2 からわかるように、いずれの G^o の値に対しても、BEM解はRKG解とおおむね一致している。図4-3 からわかるように、いずれの G^o の場合においても温度場(Ⅱ)が作用するときの有限変形モードでは、非線形性のかなり大きいところまでBEM解はRKG解とよく一致している。また、温度場(Ⅲ)で生じる座屈変形モードにおいても両者はきわめてよい一致を示す。たわみ分布およびたわみ勾配の分布も、いずれの負荷条件(I)、(Ⅱ)、(Ⅲ)においても、BEM解はRKG解とよく一致していることが、図4-

4, 4-5からわかる。なお、これらの図で記号Rはサンドイッチ円板の中心からの半径方向の距離である。

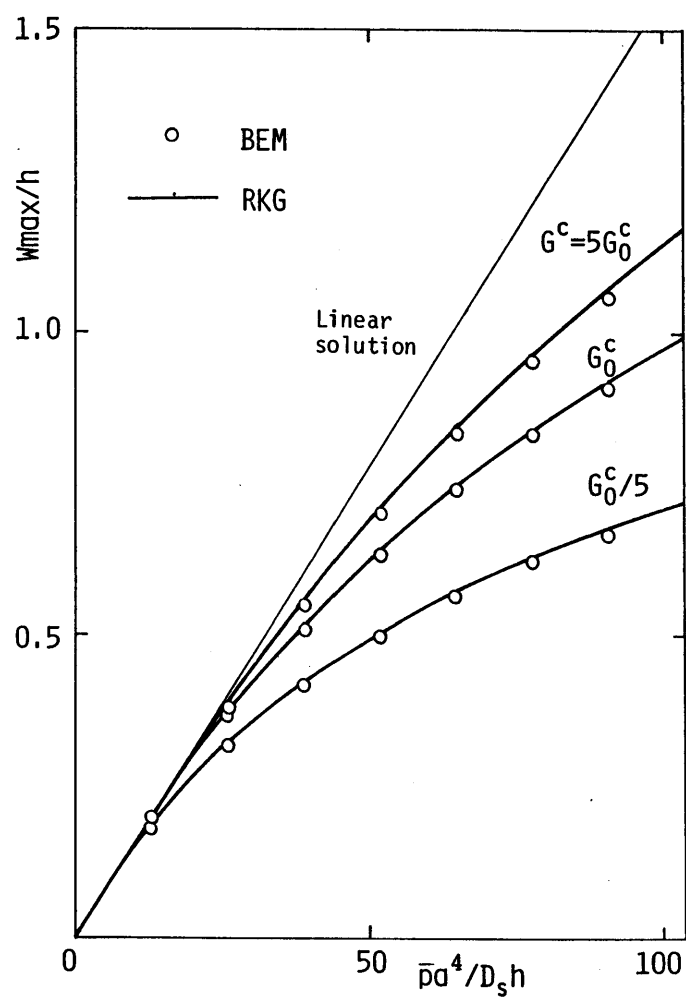


図4-2 一様分布荷重の作用するサンドイッチ円板の最大たわみ

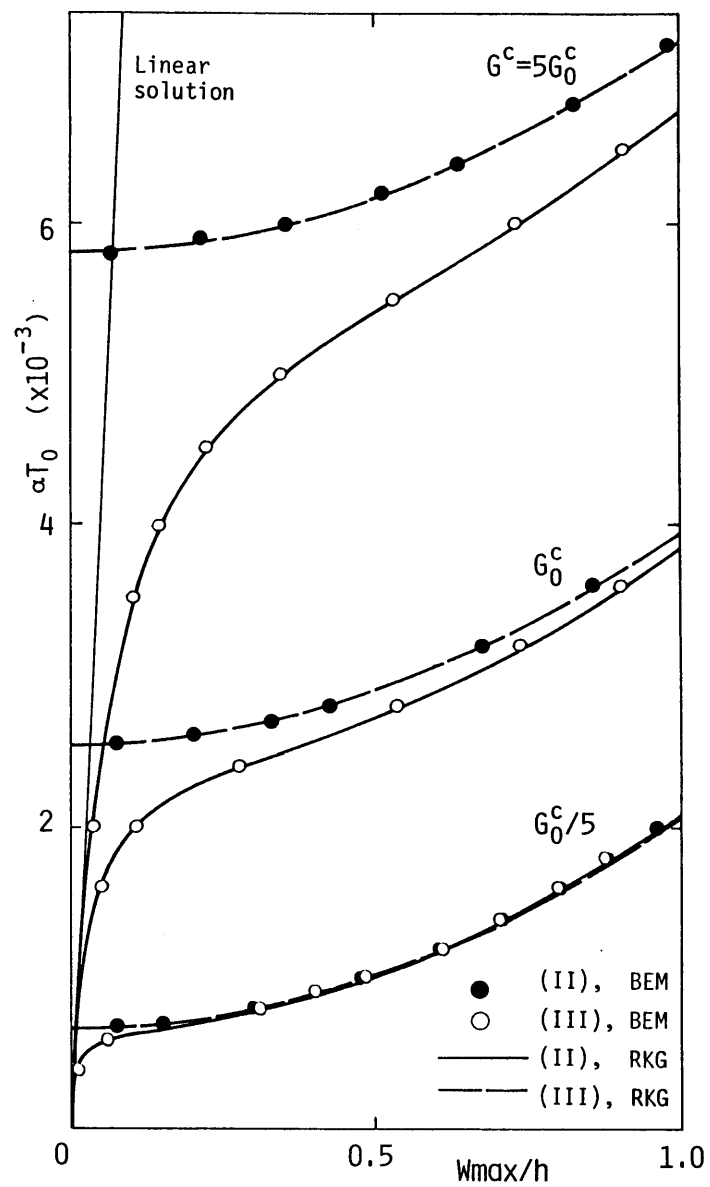


図4-3 加熱サンドイッチ円板の最大たわみ

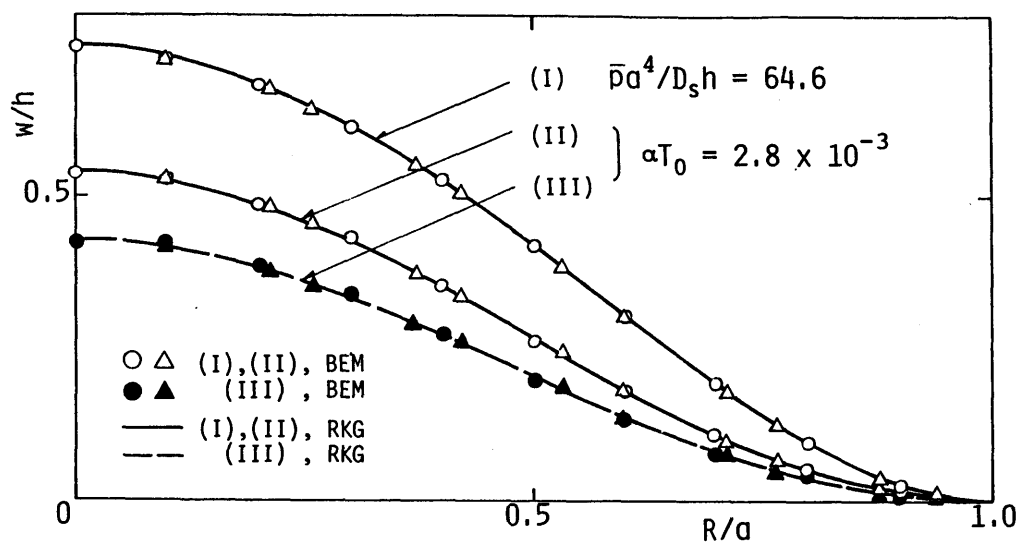


図4-4 サンドイッチ円板のたわみ ($G^\circ = G_0^\circ$)

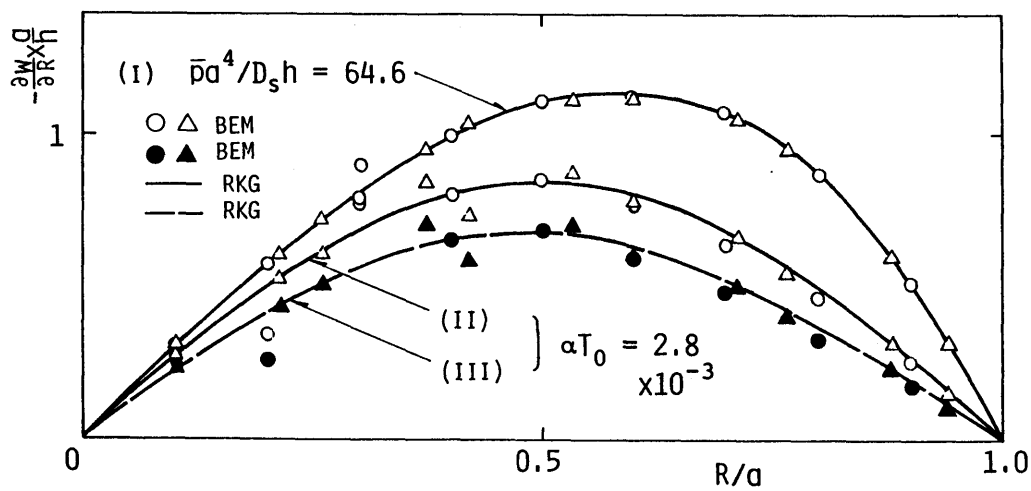


図4-5 サンドイッチ円板のたわみ勾配 ($G^\circ = G_0^\circ$)

一様分布荷重(I)あるいは温度場(II)が作用するサンドイッチ球シェルと正方形シェルの有限変形モードにおける最大たわみの分布を、全曲率($k_1 + k_2$)をパラメータとして図4-6, 4-7と図4-8, 4-9に示す。これらの計算は、 $G^\circ = G_{0^\circ}$ についてだけ行った。これらの図においてはこれまでと異なり、有限変形

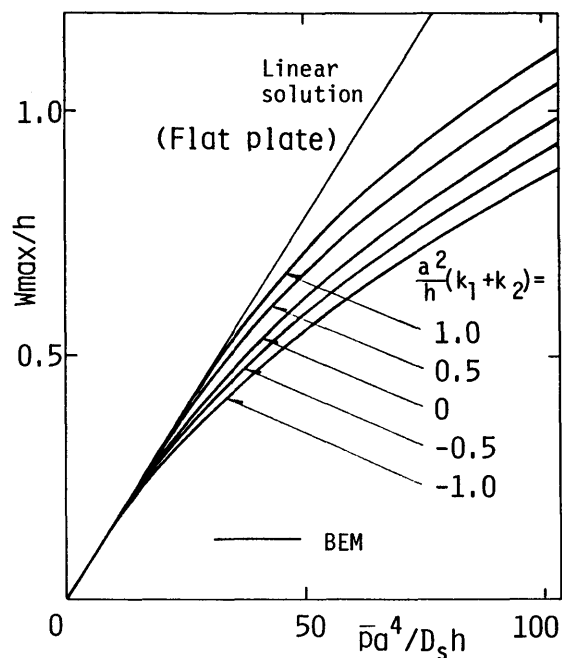


図4-6 一様分布荷重の作用するサンドイッチ球シェルの最大たわみ ($G^\circ = G_{0^\circ}$)

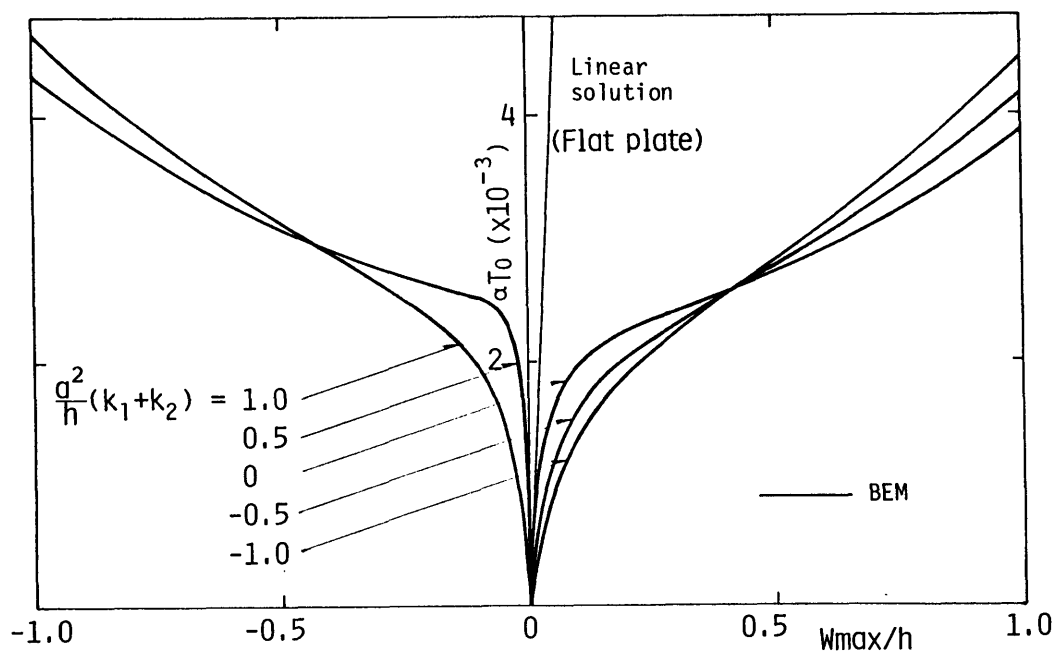


図4-7 加熱サンドイッチ球シェルの最大たわみ ($G^\circ = G_{0^\circ}$)

モードにおけるBEM解を実線で表してある。また、図4-9では、サンドイッチ正方形板の境界要素法による熱座屈の計算結果を破線で示してある。図4-7と4-9より、球シェルと正方形シェルの熱による有限変形では、シェルの全曲率の符号に依存して、面外変形（たわみ）の方向が相反していることがわかる。これも等方均質シェルが示す現象と同様である。

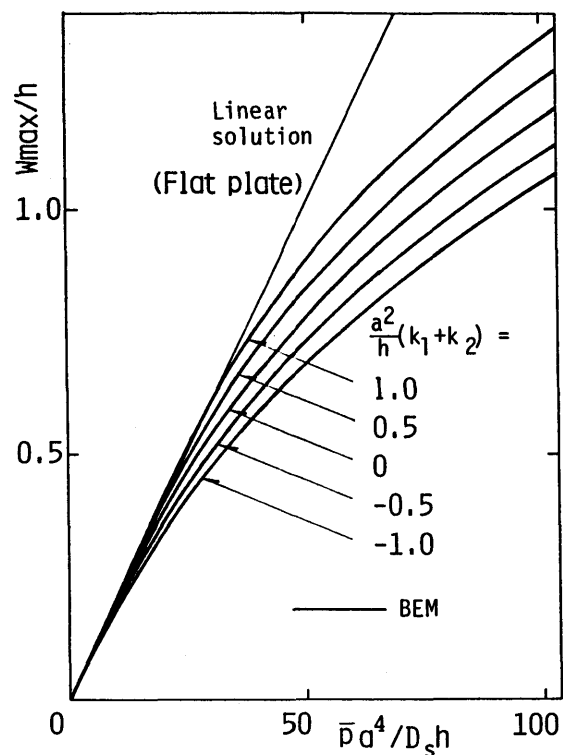


図4-8 一様分布荷重の作用するサンドイッチ正方形シェルの最大たわみ ($G^\circ = G_0^\circ$)

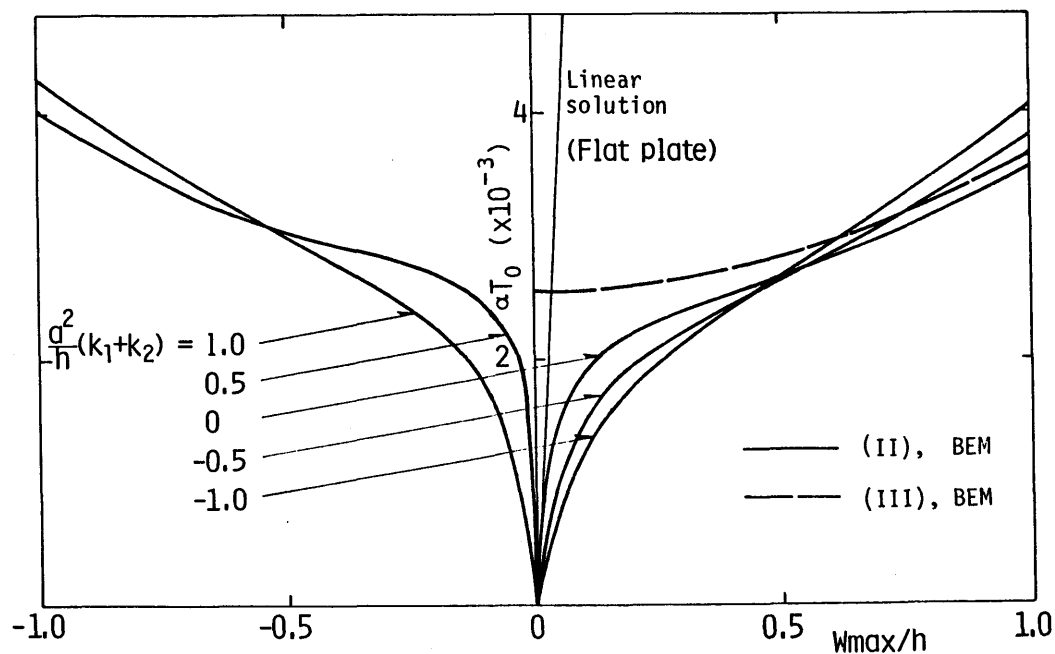


図4-9 加熱サンドイッチ正方形シェルの最大たわみ ($G^\circ = G_0^\circ$)

図4-10と4-11は、特定の温度分布におけるサンドイッチ正方形板の有限変形モードと座屈変形モードにおけるたわみとたわみ勾配の分布である。これらの図においても、実線および破線は、それぞれ有限変形モードおよび座屈モードにおけるBEM解である。これらの計算結果は、3章で述べた均質等方性板およびシェルの結果と同様の傾向を示し、有限変形モードにおけるたわみは座屈モードにおけるものと比較して大きく計算される。

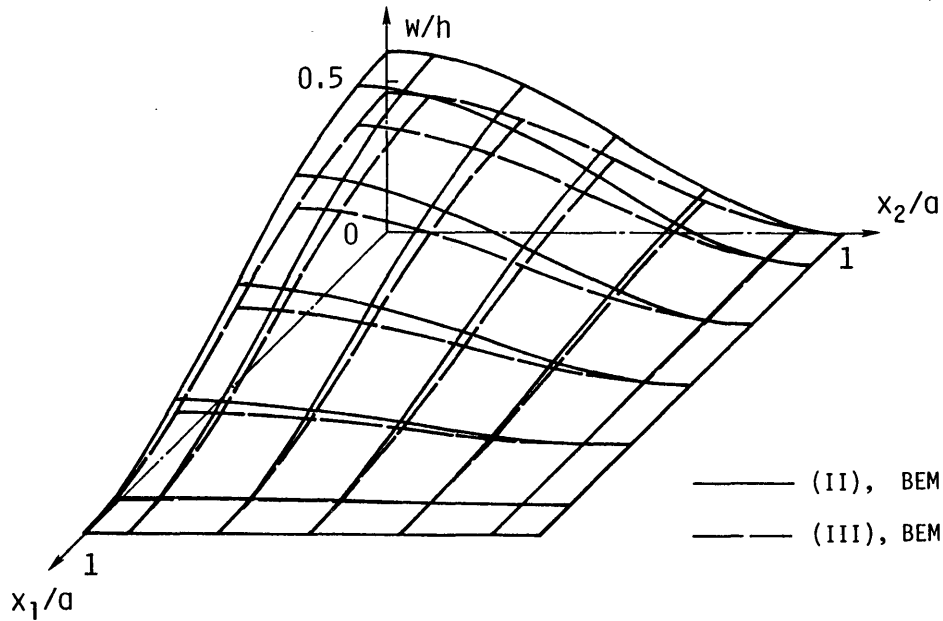


図4-10 加熱サンドイッチ正方形板のたわみ ($\alpha T_0 = 2.8 \times 10^{-3}$, $G^c = G_0^c$)

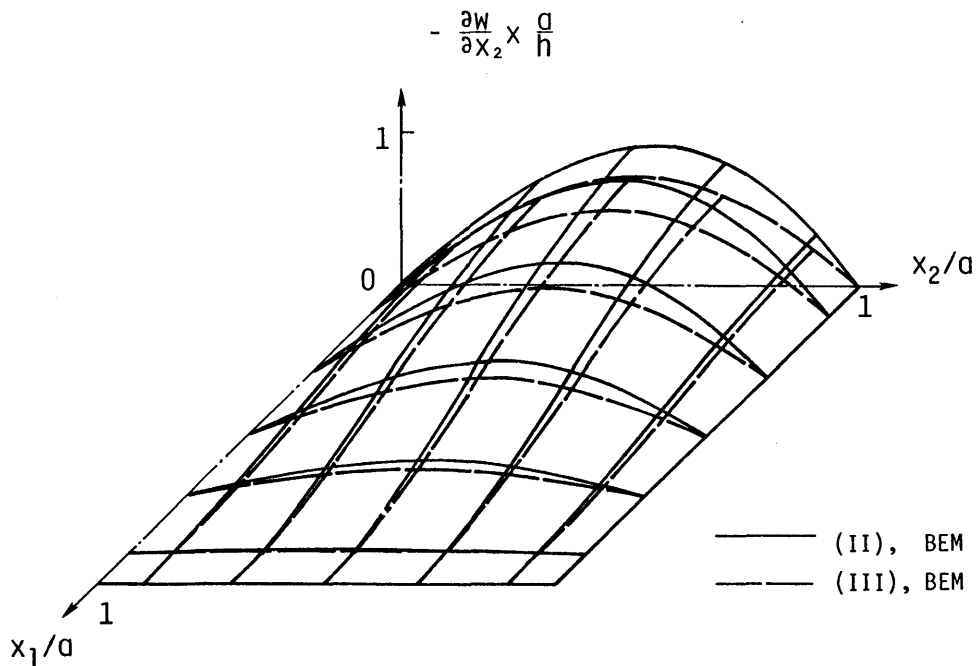


図4-11 加熱サンドイッチ正方形板のたわみ勾配 ($\alpha T_0 = 2.8 \times 10^{-3}$, $G^c = G_0^c$)

Berger法に基づくサンドイッチ平板およびシェルの有限変形解析と座屈後変形解析に対し、境界要素法を適用した。本章の内容は以下のようにまとめることができる。

(1) Berger法を修正した方法により導かれたサンドイッチ平板およびシェルの有限変形解析に関する近似支配方程式に対する積分方程式が、3章で述べた方法と同様の考え方で定式化されうることを示した。

(2) 数値解析例として、横荷重あるいは熱負荷の作用するサンドイッチ円板および球シェルとサンドイッチ正方形板およびシェルの曲げ解析を行った。サンドイッチ円板については、板の中心における最大たわみ、半径方向たわみ分布とたわみ勾配の分布について計算し、BEM解を対応するRKG解と比較して、その解析精度について検討した。有限変形モードおよび座屈変形モードのいずれの変形モードにおいても、両者はよく一致した。サンドイッチ球シェルと正方形板およびシェルについてはBEM解だけを示した。得られた計算結果から、3章で示した均質等方性球シェルおよび正方形シェルと類似の傾向がみられることがわかった。

(3) ここでは限られた問題への適用例を示したにすぎないが、サンドイッチ板およびシェルの有限変形解析のように支配方程式が比較的複雑になる問題にも、均質等方性板およびシェルに対する境界要素法と同様の考え方を適用できる可能性を示すことができた。

第5章 板曲げ問題の境界要素法による有効な 定式化[145, 146, 147, 149, 151]

本章では、板の曲げ問題において直接法境界要素法を有効に利用するための積分方程式定式化の方法について述べる。一般に支配方程式が非線形あるいは非同次な問題に対する積分方程式は、境界積分のみならず領域積分をも含んだ形で定式化される。これに対し、線形かつ同次な問題の積分方程式は考える領域の境界上だけで定式化され、このことは有限要素法などの領域型数値解法と比べて、境界要素法のもつ大きな長所となっている。ところが、積分方程式が領域積分を含めた形で導出されれば、その計算をなんらかの方法で行わなければならない。第2～4章では領域積分の評価は数値積分で行っており、有限要素法と同様に領域を部分領域（内部セル）に分割するための入力データが、境界を分割するのとは別に必要となる。領域積分を境界積分に変換できれば、境界要素法の計算手法としての有用性は飛躍的に増す。

この種の研究は、たとえば、一定重力加速度による力や固定軸まわりの遠心力など、比較的単純な物体力を伴う静弾性問題について実行されている[127～130]。また、弾性体が熱的負荷をうける場合の定常熱応力場におけるみかけの物体力は、温度場がLaplace方程式を満たすので、数学的に厳密に境界表示ができる。なお、熱発生を伴う熱応力解析の温度分布に関連して、1階の導関数についてのGreenの公式によって領域積分を境界積分に変換する方法が提案されている[131]。ここでの変換法はその方法と違い、基本解に関する調和作用素について成り立つGreenの公式を用いて行う。

ここでは、まず、調和微分方程式(Laplace方程式)の非同次形(2次元および3次元)について、これを随伴形の微分方程式の基本解によって積分方程式として定式化したときに、非同次項によって生じる領域積分を境界積分に変換する方法を具体的に示す。これについては分布熱源のある物体の熱伝導問題を例として考えることができる。つぎに、分布横荷重をうける平板の微小たわみ問題(2次元重調和微分方程式の非同次形)が、同様の考え方で境界積分だけで定式化できることを示す。この種の変換は、微分方程式の特解を利用することと密接に関連するが、任意の非同次項についてこれを求めることは困難であり、本法は数値計算としての統一的な取り扱いの1つの方法である。

5・1 積分方程式の定式化

2次元あるいは3次元領域をそれぞれ Ω 、 Ω_3 、境界を Γ 、 Γ_3 とし、両空間ともに領域点を小文字 p 、 q 、境界点を大文字 P 、 Q によって区別して表す(図5-1)。適当な境界条件のもとで、2次元領域 Ω 内の支配微分方程式が直交座標系 x_1 、 x_2 に関して、

$$L(u) = -\psi \quad (5-1)$$

のように与えられるものとする。 L は微分作用素、 u は未知関数、 ψ は与えられた関数であって非同次項を表す。

ここで、別の関数を v^* として、つぎのような積分表示

$$\int_{\Omega} L[u] v^* d\Omega$$

に微分作用素 L の最高次の階数だけGauss-Greenの積分定理(部分積分)を適用すればつぎのようになる[1]。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} L(u) v^* d\Omega = & \int_{\Omega} u L^*(v^*) d\Omega \\ & + \int_{\Gamma} [G(v^*) H(u) - G(u) H^*(v^*)] d\Gamma \end{aligned} \quad (5-2)$$

ここで、 $*$ は随伴作用素を表し、 G と H は部分積分によって現われる微分作用素である。関数 v^* として式(5-1)の随伴微分方程式の基本解、すなわち p を Ω 内のソース点、 $\delta(p, q)$ をDiracのデルタ関数としてつぎの方程式

$$L^*[v^*(p, q)] = -\delta(p, q) \quad (5-3)$$

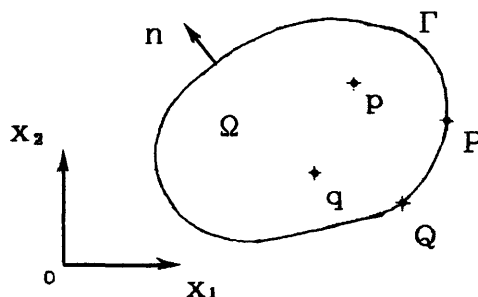


図5-1 記号の説明
(2次元の場合)

を満たす関数をとれば、式(5-2)はつぎのようになる。

$$u(p) = \int_{\Gamma} \{G[v^*(p, Q)]H[u(Q)] - G[u(Q)]H^*[v^*(p, Q)]\} d\Gamma \\ + \int_{\Omega} \psi(q) v^*(p, q) d\Omega \quad (5-4)$$

上式で領域内点 p をなめらかな境界上の点 P に近づけた極限において右辺第1項の特異積分を計算すれば、あとで考える調和あるいは重調和微分作用素について形式的につぎのようになる。

$$\frac{1}{2}u(P) = \int_{\Gamma} \{G[v^*(P, Q)]H[u(Q)] - G[u(Q)]H^*[v^*(P, Q)]\} d\Gamma \\ + \int_{\Omega} \psi(q) v^*(P, q) d\Omega \quad (5-5)$$

境界要素法は境界 Γ と領域 Ω を有限の大きさの要素に離散化して、通常境界上の未知量に関して連立1次方程式を解く方法である。このとき式(5-5)の右辺第2項の領域積分

$$B(P) = \int_{\Omega} \psi(q) v^*(P, q) d\Omega \quad (5-6)$$

がなければ、完全に境界だけで扱えることになる。式(5-4)についても同様に Ω 内のソース点について

$$B(p) = \int_{\Omega} \psi(q) v^*(p, q) d\Omega \quad (5-7)$$

となる。これらの項は支配微分方程式(5-1)の非同次項 ψ によって生じたものである。

微分作用素として2次元および3次元の調和作用素

$$L = \partial^2 / \partial x_1 \partial x_1 = \nabla^2 \quad \text{あるいは} \quad \nabla_3^2$$

および2次元重調和作用素

$$L = \nabla^2 \nabla^2 \equiv \nabla^4$$

を考えるものとする。ここでも、繰り返し添え字については総和規約を用いることにする。以上の3つの問題をそれぞれ 2DH (2-Dimensional Harmonic), 3DH (3-Dimensional Harmonic) および 2DBH (2-Dimensional BiHarmonic) と

表して区別する。これらの微分作用素に対して基本解 $v^*(p, q)$ はよく知られており、つぎのように表される。

$$v^*(p, q) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r(p, q)} \equiv a \log r(p, q) & (2DH) \\ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r(p, q)} \equiv \frac{b}{r(p, q)} & (3DH) \\ -\frac{1}{8\pi} r^2(p, q) \log r(p, q) \equiv c r^2(p, q) \log r(p, q) & (2DBH) \end{cases} \quad (5-8)$$

ただし、 $a = -1/2\pi$ 、 $b = 1/4\pi$ 、 $c = -1/8\pi$ である。ここで、 $r(p, q)$ は点 p と q の距離を表す。

$$r(p, q) = |\overline{pq}| \quad (5-9)$$

5・2 領域積分の境界積分への変換

5・2・1 調和微分作用素

調和微分作用素、すなわち Laplace 微分作用素のとき、その非同次微分方程式は Poisson 方程式と呼ばれる。非同次項が簡単な表示であれば Poisson 方程式の特解は容易に求められ Laplace 問題に変換されるが、ここではコンピュータによる統一的な計算手法として非同次項を扱う。この方程式について式(5-5)はつぎのようになる。

$$\frac{1}{2}u(P) = \int_{\Gamma} \left\{ u_{,n}(Q) v^*(P, Q) - u(Q) v^*_{,n}(P, Q) \right\} d\Gamma + B(P) \quad (5-10)$$

ここで

$$B(P) = \int_{\Omega} \psi(q) v^*(P, q) d\Omega \quad (5-11)$$

ただし、関数 v^* は基本解であって、2DH および 3DH に対してそれぞれ式(5-8)_{1,2} によって与えられる。 $(\cdot)_{,n}$ は、点 Q での法線方向導関数を表す。

非同次項 ψ の関数形が比較的単純な形式である場合について説明する。その1つは(1)有限個の点に集中ソース（たとえば点熱源）が存在する場合であり、そのほかには(2)一定値も含め座標の低次関数（1次あるいは2次）によって表される場合である。

Ω 内の集中ソースが作用する点を $q^j (j=1, 2, \dots, m)$ とすれば、 ψ はつぎのように書ける。

$$\psi(p) = \sum_{j=1}^m \psi(q^j) \delta(p, q^j) \quad (5-12)$$

ここで、 $\psi(q^j)$ は点 q^j における集中ソースの強さである。式(5-12)を(5-11)に代入すれば

$$B(P) = \sum_{j=1}^m \psi(q^j) v^*(P, q^j) \quad (5-13)$$

のようになり、この結果積分計算が不要になる。

つぎに、 ψ が座標の2次までの関数によって表されるものとしよう。

$$\psi = \psi_0 + \psi_{1k} X_k + \psi_{2kl} X_k X_l \quad (5-14)$$

$\psi_0, \psi_{1k}, \psi_{2kl}$ はいずれも定数である。なお添え字 k, l は空間の次元の範囲にとる。このとき領域積分(5-11)はつぎの形で与えられる。

$$B(P) = \int_{\Omega} [\psi_0 + \psi_{1k} X_k + \psi_{2kl} X_k X_l] v^*(P, q) d\Omega \quad (5-15)$$

文献[131]では、上式を境界積分に変換するためにGaussの発散定理

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_1} d\Omega = \int_{\Gamma} n_1 f d\Gamma \quad (5-16)$$

が用いられた。ここでは式(2-50)で示したつぎの第2 Greenの公式を利用する。

$$\int_{\Omega} (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (5-17)$$

なお、式(5-16)と(5-17)の関数 f, g は任意であり、公式は2次元について表示されている。基本解 $v^*(p, q)$ の具体的な関数形が式(5-8)に与えられているから、これらに関連してつぎのような恒等式が成り立つことに着目する〔同様な考え方は熱応力解析について文献[127～130]に利用されている〕。

$$\left\{ \begin{array}{l} \log r = \nabla^2 \frac{r^2}{4} (\log r - 1) \\ r^2 = \nabla^2 \frac{r^4}{16} \\ r^2 \log r = \nabla^2 \frac{r^4}{16} (\log r - \frac{1}{2}) \end{array} \right. \quad (2 \text{次元}) \quad (5-18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} = \nabla^2 \frac{r}{2} \\ r = \nabla^2 \frac{r^3}{12} \end{array} \right. \quad (3 \text{次元}) \quad (5-19)$$

式(5-15)を基本解(5-8)₁について考え、式(5-18)を適用すればつぎのようになる（以下では関数 r の引数 (p, q) あるいは (P, Q) を省略して記述する）。

$$B(P) = a \int_{\Omega} [\psi_0 + \psi_{1k} X_k + \psi_{2k} X_k X_k] \nabla^2 \left[\frac{r^2}{4} (\log r - 1) \right] d\Omega$$

上式に式(5-17)を用いればつぎの式を得る。

$$\begin{aligned} B(P) = & a \int_{\Omega} \frac{r^2}{4} (\log r - 1) \nabla^2 [\psi_0 + \psi_{1k} X_k + \psi_{2k} X_k X_k] d\Omega \\ & + a \int_{\Gamma} \left\{ [\psi_0 + \psi_{1k} X_k + \psi_{2k} X_k X_k] \left[\frac{r^2}{4} (\log r - 1) \right]_{,n} \right. \\ & \left. - \frac{r^2}{4} (\log r - 1) [\psi_0 + \psi_{1k} X_k + \psi_{2k} X_k X_k]_{,n} \right\} d\Gamma \end{aligned} \quad (5-20)$$

2次元空間では

$$\nabla^2 [\psi_0 + \psi_{1k} X_k + \psi_{2k} X_k X_k] = 2 \psi_{2k} \delta_{k1}$$

となるから、式(5-20)の右辺第1項はつぎのようになる。

$$B'(P) = a \int_{\Omega} \frac{1}{2} \psi_{2k} \delta_{k1} r^2 (\log r - 1) d\Omega \quad (5-21)$$

式(5-18)を参考にして、上式にさらに式(5-17)を適用すれば

$$B'(P) = a \int_{\Gamma} \frac{1}{2} \psi_{2k} \delta_{k1} \left[\frac{r^4}{32} (2 \log r - 3) \right]_{,n} d\Gamma \quad (5-22)$$

のように境界積分に変換される。したがって、式(5-20)はまとめてつぎのよう

に書くことができる。

$$B(P) = a \int_{\Gamma} (\psi_0 T_0 + \psi_k T_{1k} + \psi_{2k} T_{2k}) d\Gamma \quad (5-23)$$

ここで

$$\left\{ \begin{array}{l} T_0 = \left[\frac{r^2}{4} (\log r - 1) \right]_{,n} \\ T_{1k} = \left\{ x_k \left[\frac{r^2}{4} (\log r - 1) \right]_{,n} - n_k \frac{r^2}{4} (\log r - 1) \right\} \\ T_{2k} = \left\{ x_k x_i \left[\frac{r^2}{4} (\log r - 1) \right]_{,n} - (x_i n_k - x_k n_i) \frac{r^2}{4} (\log r - 1) \right. \\ \quad \left. + \delta_{ki} \left[\frac{r^4}{64} (2 \log r - 3) \right]_{,n} \right\} \end{array} \right. \quad (5-24)$$

積分を実行する境界 Γ は、非同次項 ψ が 0 でない領域の境界と考えてもよい。
 ψ がさらに高次の関数で表される場合には、式(5-18)のように基本解に対応する高次の調和ポテンシャルを用いて領域積分を境界積分に変換できる。

3次元問題(3DH)についても、上と同様に式(5-19)を考慮して式の変形を行えば最終的につぎの式を得る。

$$\begin{aligned} B(P) &= b \int_{\Omega_3} [\psi_0 + \psi_{1k} x_k + \psi_{2k} x_k x_i] \frac{1}{r} d\Omega_3 \\ &= b \int_{\Gamma_3} (\psi_0 T^0 + \psi_{1k} T_{1k} + \psi_{2k} T_{2k}) d\Gamma_3 \end{aligned} \quad (5-25)$$

ここで

$$\left\{ \begin{array}{l} T_0 = \left[\frac{r}{2} \right]_{,n} \\ T_{1k} = \left\{ x_k \left[\frac{r}{2} \right]_{,n} - n_k \frac{r}{2} \right\} \\ T_{2k} = \left\{ x_k x_i \left[\frac{r}{2} \right]_{,n} - (x_i n_k + x_k n_i) \frac{r}{2} + \delta_{ki} \left[\frac{r^3}{12} \right]_{,n} \right\} \end{array} \right. \quad (5-26)$$

非同次項 ψ が式(5-14)のように表される問題の例として、弾性力学における St. Venant のねじり、曲げ問題がある。一様断面軸のねじり問題では ψ は一定、

曲げ問題では1次の項によって表される。

5・2・2 重調和微分作用素

2次元非同次重調和微分方程式は広い範囲の物理現象を記述することが知られているが、ここではその1つの例として弾性平板の微小曲げ問題を考える。板のたわみを $w(x_1, x_2)$ 、分布荷重を $\bar{p}(x_1, x_2)$ 、曲げ剛性を D とおけば、Kirchhoffの仮定に基づく支配微分方程式は、式(2-19)で示したように

$$\nabla^4 w = \bar{p} / D \quad (5-27)$$

によって表される。右辺の \bar{p} / D を式(5-1)における非同次項とみなし、ここでも $(-\psi)$ によって表示する。

式(5-27)は4階の微分方程式であるから、2・1節で示したように、2つの積分方程式が必要であって、板曲げ問題の境界条件に現われる境界変数、すなわちたわみ w 、たわみ角 $w_{,n}$ 、曲げモーメント M_n [式(2-16)]および等価せん断力 K_n [式(2-18)]によって、なめらかな境界に対してつぎのように表される。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}w(P) = & \int_{\Omega} \psi(q) v^*(P, q) d\Omega - \frac{1}{D} \int_{\Gamma} \{ K_n^* [v^*(P, Q)] w(Q) \\ & - M_n^* [v^*(P, Q)] w_{,n}(Q) + v_{,n}^*(P, Q) M_n [w(Q)] \\ & - v^*(P, Q) K_n [w(Q)] \} d\Gamma \end{aligned} \quad (5-28)$$

および

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}w_{,no}(P) = & \int_{\Omega} \psi(q) v_{,no}^*(P, q) d\Omega - \frac{1}{D} \int_{\Gamma} \{ K_{n,no}^* [v^*(P, Q)] w(Q) \\ & - M_{n,no}^* [v^*(P, Q)] w_{,n}(Q) + v_{,nno}^*(P, Q) M_n [w(Q)] \\ & - v_{,no}^*(P, Q) K_n [w(Q)] \} d\Gamma \end{aligned} \quad (5-29)$$

ただし、ここでは重さ関数は v^* と表しており、 $(\cdot)_{,n}$ は点 P での法線方向導関数を示す。非同次項に基づく領域積分はそれぞれ式(5-28)、(5-29)の右辺第1項であり、つぎのようである。

$$B_1(P) = \int_{\Omega} \psi(q) v^*(P, q) d\Omega \quad (5-30)$$

$$B_2(P) = \int_{\Omega} \psi(q) v_{,no}^*(P, q) d\Omega \quad (5-31)$$

式(5-31)の $B_2(P)$ は式(5-30)を境界上の指定点 P において法線 n_0 方向に微分して求められるから、式(5-30)の積分についてだけ考えておけば、あとの計算はこの結果をもとにすることができる。

まず、有限個の集中荷重に対する非同次項が式(5-12)のように表されれば、式(5-13)と同様に

$$B_1(P) = \sum_{j=1}^n \psi(q^j) v^*(P, q^j) \quad (5-32)$$

となり、調和問題と同様に積分表示によらずに計算ができることになる。

ψ に式(5-14)の形を仮定し、基本解 $v^*(p, q)$ として式(5-8)₃の形をとれば、式(5-30)はつぎの形をとる。

$$B_1(P) = c \int_{\Omega} [\psi_0 + \psi_{1k} X_k + \psi_{2ks} X_k X_s] r^2 \log r \, d\Omega \quad (5-33)$$

調和微分作用素について考えたものと同様に、基本解 $r^2 \log r$ に関して式(5-18)以外につぎの恒等式が成り立つ。

$$r^4 = \nabla^2 \frac{r^6}{36}, \quad r^4 \log r = \nabla^2 \frac{r^6}{36} \left(\log r - \frac{1}{3} \right) \quad (2 \text{次元}) \quad (5-34)$$

式(5-33)に式(5-17)を適用し、このとき式(5-18)と式(5-34)が成り立つことを考慮すれば、先とほとんど同様な計算手続きによって最終的につぎの結果を得る。

$$B_1(P) = c \int_{\Gamma} (\psi_0 T_0 + \psi_{1k} T_{1k} + \psi_{2ks} T_{2ks}) \, d\Gamma \quad (5-35)$$

ここで

$$\left\{ \begin{array}{l} T_0 = \left[\frac{r^4}{16} \left(\log r - \frac{1}{2} \right) \right]_{,n} \\ T_{1k} = \left\{ X_k \left[\frac{r^4}{16} \left(\log r - \frac{1}{2} \right) \right]_{,n} - n_k \frac{r^4}{16} \left(\log r - \frac{1}{2} \right) \right\} \\ T_{2ks} = \left\{ X_k X_s \left[\frac{r^4}{16} \left(\log r - \frac{1}{2} \right) \right]_{,n} - (X_s n_k - X_k n_s) \frac{r^4}{16} \left(\log r - \frac{1}{2} \right) \right. \\ \quad \left. + \delta_{ks} \left[\frac{r^6}{288} \left(\log r - \frac{5}{6} \right) \right]_{,n} \right\} \end{array} \right. \quad (5-36)$$

5・3 数値解析例

これまで通常数値的に計算されてきた非同次項を含む領域積分 $B(P)$ あるいは $B(p)$ を前節で示した境界積分によっておきかえる簡単な例題をここで考える。

5・3・1 3次元ポテンシャル問題

調和微分作用素の非同次問題として、図5-2 に示すような辺の長さが10の立方体において一様な内部分布ソース（ポテンシャル発生源）がある場合を考える。領域内の支配方程式は

$$\nabla_3^2 u = -\psi = \text{const.} \quad (= \bar{p} \text{ とおく}) \quad (5-37)$$

で与えられる。境界条件としては、 x_1 軸に垂直な面 A と B においてそれぞれ $u = 100, 0$ ，他の境界面上で $\partial u / \partial n = 0$ とする。この問題は、具体的には、面 A と B で温度が与えられ、これ以外は断熱面であり、内部に一様な熱発生源がある場合に相当する。

図5-2 の上面に示すように、各境界面を大きさとし形の等しい合計48の三角形要素に分割し、要素上で関数 u とその法線方向導関数 $u_{,n}$ が一定（一定要素）

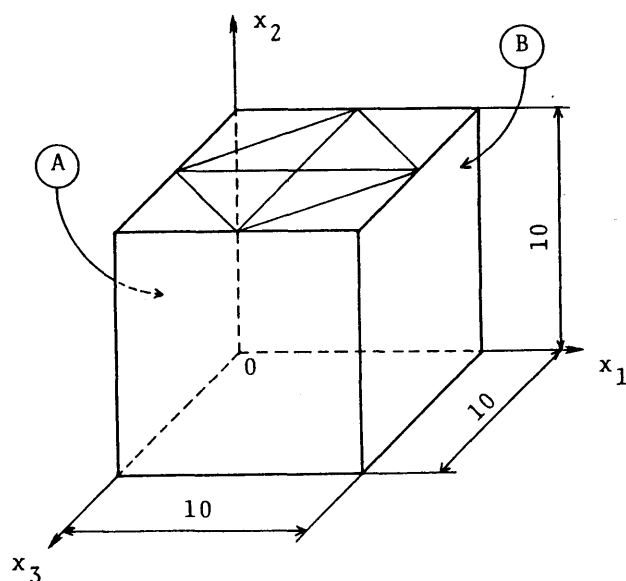


図5-2 3次元ポテンシャル問題の例

とみなして計算を行った結果を図5-3 (a)と(b)に示す。この問題では u は x_1 方向にだけ変化するので、図中の○印は $x_2=5$ 、 $x_3=5$ の位置で領域内点の値として求めた結果であり、また●印は境界上で求めた値である。実線は解析解であり、図における比較からわかるように、境界上だけを要素分割し、境界要素法によって計算した結果は解析解によい一致を示す。有限要素解析でよく知られているように、3次元問題の領域を含めた離散化は極めて複雑で手間がかかるし、同時に連立1次方程式の元数も多くなる。これに対し、領域積分を境界積分に変換してしまえば、計算準備と実行時のこれらの負担は大幅に軽減される。

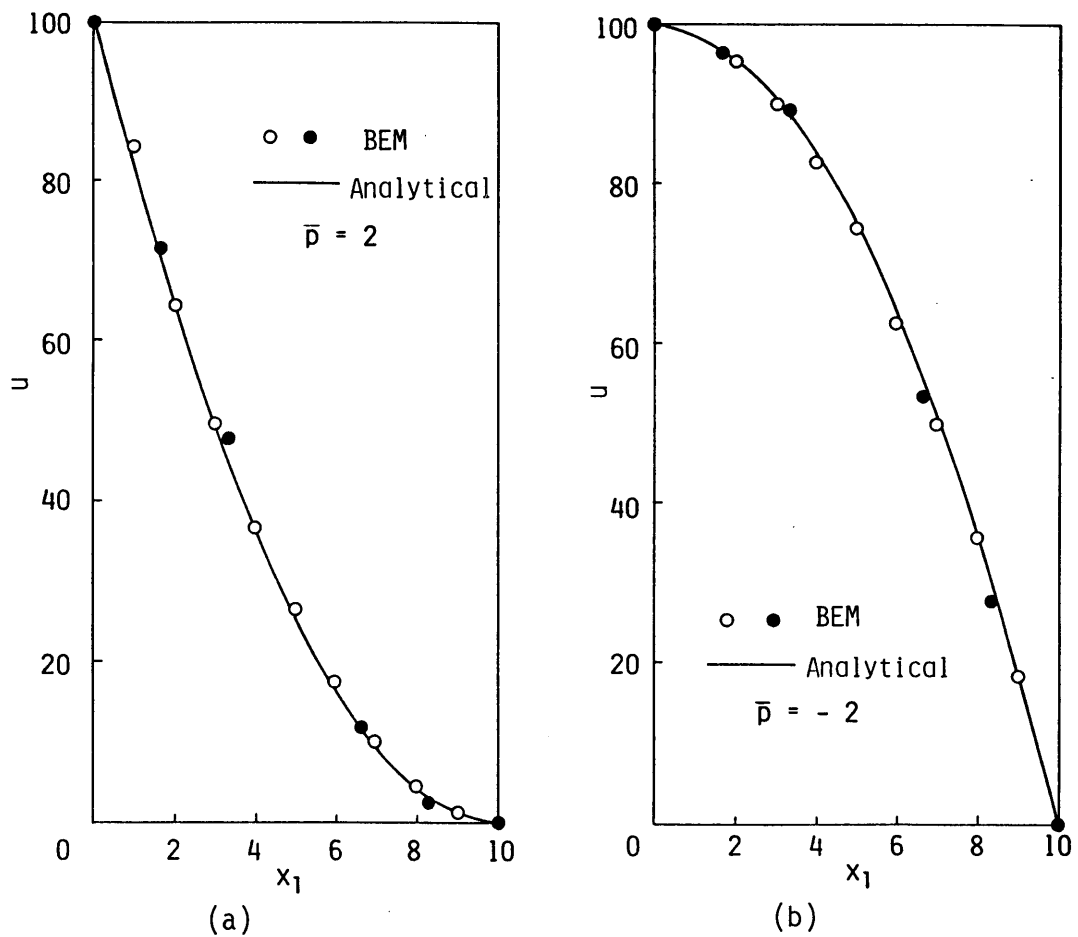


図5-3 3次元ポテンシャル問題の計算例

5・3・2 弾性平板の曲げ問題

非同次項を含む重調和微分方程式の例として、図5-4 (a) のような楕円形弾性薄板（円板も含む）の横荷重による線形曲げ問題を考える。作用する荷重としては、図5-4 (b)と(c)に示すように、板全体に一様に分布する場合と、 x_1 方向に直線的に変化する場合をとりあげる。なお后者では x_2 方向には変化しないものとする。これらについて、式(5-27)の支配微分方程式はつぎのようになる。

$$\nabla^4 w = \bar{P}/D = \begin{cases} p_0/D & \text{(一様荷重)} \\ x_1 p_1/aD & \text{(線形変化荷重)} \end{cases} \quad (5-38)$$

ここでは周辺が固定および単純支持の場合の計算を、24および48個の境界要素（一定要素）を用いて行った。図5-4 (a) では、楕円の第1象限に境界要素数24の場合の分割の様子を示してある。周辺固定の場合には両荷重状態について解析解があり、また単純支持の場合には数値解が求められている[9]。表5-1 は一様分布荷重をうける板の中心における最大たわみを長短軸比、境界要素数について比較したものである。形状比を変えても同様に妥当な結果を得ることおよび境界要素数を増せばより正しい解に近づくことがこの表からわかる。

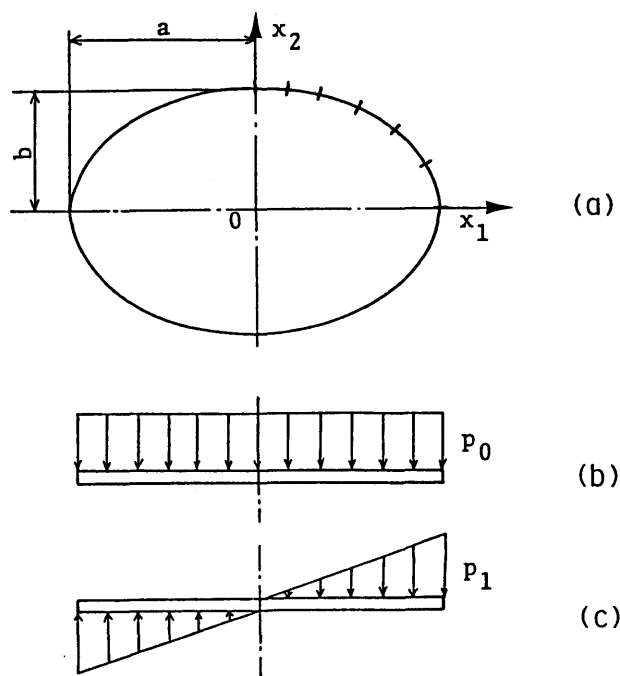
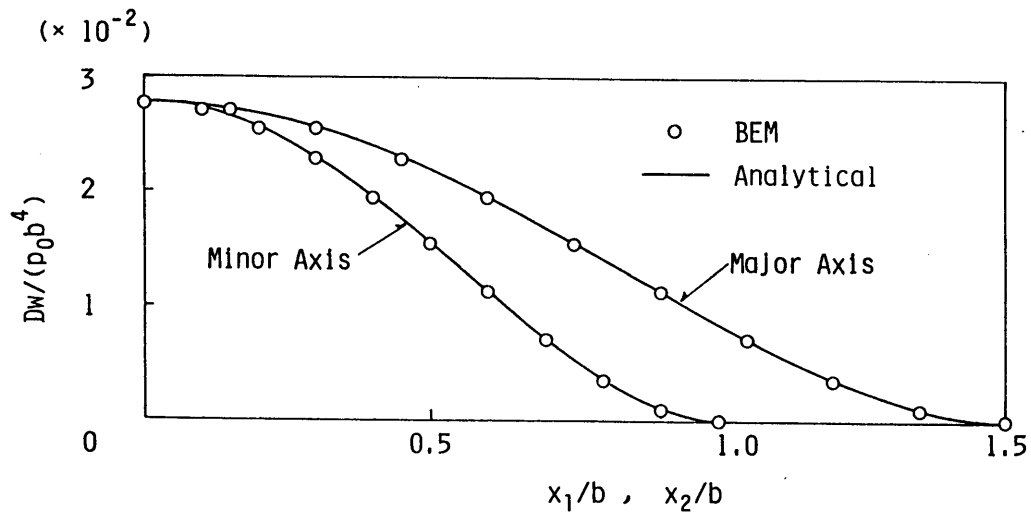


図5-4 楕円板と荷重分布

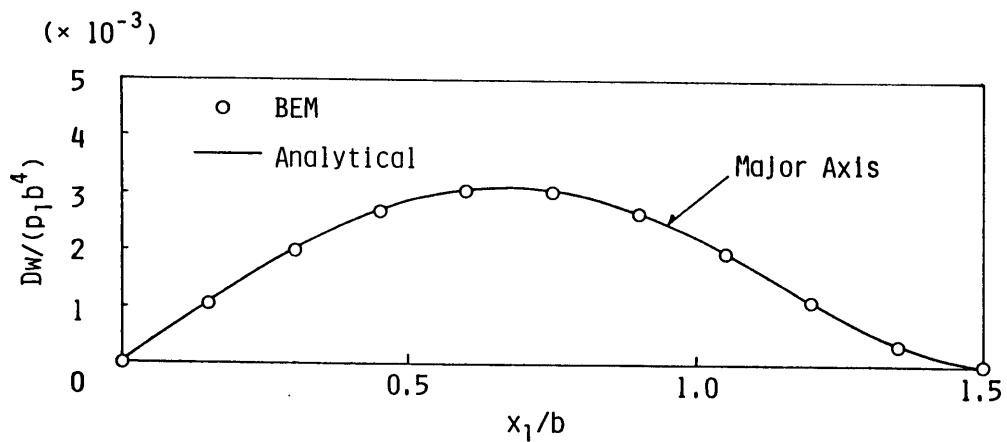
図5-5は、 $a/b=1.5$ の周辺固定楕円板の長軸および短軸上の計算結果である。図5-5(a) は一様分布荷重、(b)は線形変化荷重に対応する。なお、後者では短軸上のたわみは生じないので示していない。この図にみられるように、境界要素解（○印）は解析解（実線）によく一致することがわかる。

表5-1 楕円板の最大たわみ ($Dw_{max}/p b^4$)

Boundary condition		Clamped support			Simple support		
Ratio a/b		1.0	1.5	2.0	1.0	1.5	2.0
Analytical or Numerical		.0156	.0279	.0340	.0637	.1154	.1447
BEM	(24 elements)	.0152	.0271	.0330	.0596	.1091	.1374
	(48 elements)	.0155	.0277	.0337	.0621	.1127	.1409



(a)



(b)

図5-5 楕円板のたわみ

板の曲げ問題における直接法境界要素法の有効利用および計算効率の向上を目的として、境界積分方程式定式化の1つの考え方を示した。本章はつぎのように要約することができる。

- (1) 非同次微分方程式を積分方程式に変換して解析するときに現われる、非同次項を含む領域積分を Green の公式によって厳密に境界積分にに変換し、領域積分をまったく含まない境界積分方程式として定式化する方法を、非同次の調和微分方程式と重調和微分方程式について与えた。
- (2) 非同次項を含む調和微分方程式と重調和微分方程式で表される問題の例として、それぞれ内部熱発生を伴う定常熱伝導問題と横荷重をうける弾性薄板の曲げ問題を考えた。具体例として、前者については、一様な内部熱発生がある3次元定常熱伝導問題を、後者については、一様あるいは線形に変化する分布荷重をうける楕円弾性薄板の曲げ問題を解析し、本解析法による境界要素解を解析解と比較した。その結果、両者はきわめてよく一致することがわかった。
- (3) 本章で示した方法によれば、従来は数値的に計算されていた非同次項の領域積分がなくなり、解析対象の境界だけで計算が行えるので、境界要素法がより有効に利用できる。簡単な例題によって、本方法の利用法と有効性を明らかにした。

第6章 関連する板曲げ問題への応用[152, 153, 154, 156, 157]

本章では、その他の関連する板曲げ問題（微小変形問題）への境界要素法の応用として、前半で弾性床上にある平板の解析に通常の変調和作用素に対する基本解を用いたときに現われる反力項を含む領域積分に対する境界解法について述べる。また、後半では支配方程式は線形であるが境界条件が非線形な問題の例として、非線形弾性支持された平板の曲げ解析について論ずる。

6・1 弾性床上の平板の境界解法[152, 156, 157]

前章で述べたように、線形同次境界値問題に対して、積分方程式は考える領域の境界上だけで定式化されるが、非線形あるいは非同次問題を境界要素法で定式化するとき、積分方程式はふつう領域積分を伴う。これを等価な境界積分に変換できれば、境界要素法の数値計算法としての効率は増す。計算効率の向上を目的として、動弾性問題を解くためにBrebbiaとNardiniにより提案された近似変換法[125]は効果的であり、非定常熱伝導あるいは拡散などの時間依存問題に適用されている[126]。この方法は、2重相反定理を用いた境界要素法（Dual Reciprocity Boundary Element Method）と呼ばれて注目されている。

本節では、上述の方法を、支配微分方程式が変調和作用素により表される問題に適用する。そのような問題の例として、変位に比例する反力を及ぼすWinklerタイプの弾性床上にある弾性薄板の曲げ解析を考える。積分方程式は相反定理（Greenの公式）と変調和方程式に対する基本解により定式化されるので、支配方程式の反力の項と基本解の積に関する領域積分を含む。2重相反定理を用いた境界要素法の考え方に従えば、弾性床からの反力は、これを評価する点とその他の任意の点の関数の線形結合で表される。このような近似を行ったうえで、積分方程式の定式化に用いた相反定理を再び適用すれば、この領域積分は境界積分に変換される。ここでは、支配微分方程式における反力の項を非同次項と考え、反復計算により逐次近似解を求める。

6・1・1 支配方程式と積分方程式の定式化

板はWinklerタイプの弾性床上（弾性係数を k とする）にあり、任意の横荷重

$\bar{p}(x_1, x_2)$ をうけるものとする。たわみを w とすれば板は弾性床から $k w$ の反力をうけることになり、板の曲げ剛性を D とすれば、その支配微分方程式はつぎのように表される。

$$D \nabla^4 w + k w = \bar{p} \quad (6-1)$$

3章で述べたように、このような形の方程式(6-1)の積分方程式への定式化に用いる基本解としては、式(3-21)、(3-22)で定義される2種類の関数のうちの1つを考えることができる。これらの関数はいずれも解析的に求めることができる。式(3-22)で定義される基本解を用いることにより、たわみに対する境界積分方程式は板の境界だけで定式化されるが[54, 55, 68]、この基本解とこれに関連する積分核の形は、式(3-21)で定義される重調和方程式の基本解によるそれと比べてより複雑である。一方、重調和方程式の基本解を用いれば、積分方程式は未知反力 $k w$ と基本解の積に関する領域積分を伴うが、基本解の関数形は比較的簡単な表示であるので、関連する積分核の計算が容易である。ここでは、このような未知量を伴う領域積分を境界積分へ変換する方法について考える。

積分方程式は、式(2-27)で示した相反定理 (Greenの公式)において、重さ関数 w^* として重調和方程式の基本解を用い、式(6-1)の関係を代入すれば得られる。最終的に得られる積分方程式は、2章で示した式(2-31)、(2-38)において、領域積分項をそれぞれつぎの形の積分で置き換えたものとなる。

$$\int_{\Omega} [D k w(Q') - \bar{p}(Q')] w^*(P, Q') d\Omega \quad (6-2)$$

および

$$\int_{\Omega} [D k w(Q') - \bar{p}(Q')] w^*_{,n_0}(P, Q') d\Omega \quad (6-3)$$

式(6-2)と式(6-3)の右辺第1項は、荷重と床からの未知反力の基本解との積を含む領域にわたる積分であり、これまでの境界要素解析では、2～4章でも示したように、この種の領域積分は領域セル分割による数値積分により評価してきた。

6・1・2 床反力に関する領域積分の境界積分への変換

ここで扱う問題に対する境界要素法の効率を改善することを目的として、式(6-2)と(6-3)で表される領域積分を等価な境界積分に変換することを考える。前章で示したように、比較的単純な分布の横荷重と基本解の積に関する領域積分は、容易に対応する境界積分に変換される。これゆえ以下では、弾性床からの未知反力による領域積分の評価に限定する。これらの項は式(6-2)と(6-3)において、つぎのように表された。

$$\int_{\Omega} k w(Q') w^*(P, Q') d\Omega [\equiv I(P)] \quad (6-4)$$

$$\int_{\Omega} k w(Q') w^*_{,no}(P, Q') d\Omega [\equiv I'(P)] \quad (6-5)$$

ここで、それぞれの積分を $I(P)$ および $I'(P)$ とおく。2重相反定理を用いた境界要素法の考え方に従い、領域内のたわみ w は、つぎのような級数で表されるものとする。

$$w(Q') \doteq \sum_{j=1}^M \alpha_j(P') f_j(P', Q') = \sum_{j=1}^M \alpha_j(P') f_j[\rho(P', Q')] \quad (6-6)$$

ここで、 f_j ($j=1, 2, \dots, M$) はたわみを評価する点 Q' と x_1-x_2 面内の任意の点 P' の間の距離 ρ の関数であり、 α_j は未知係数である。いま関数 f_j の各々に対して、関係式

$$\nabla^4 F_j = f_j \quad (6-7)$$

を満たす関数 F_j を見いだすことができれば、式(6-4)は、式(6-6)と(6-7)を代入することにより、つぎのように表される。

$$I(P) = \sum_{j=1}^M k \alpha_j(P') \int_{\Omega} \nabla^4 F_j(P', Q') w^*(P, Q') d\Omega \quad (6-8)$$

ここで、関数 F_j は式(6-7)の特解の1つと考えられる。重調和微分作用素の積分表示に関する相反定理を用いれば、領域積分(6-8) つぎの境界積分に変換される。

$$\begin{aligned}
I(P) = & \sum_{j=1}^M k \alpha_j(P') \{ c(P) F_j(P', P) \\
& + \int_{\Gamma} [w^*(P, Q) \nabla^2 F_{j,n}(P', Q) - w^*_{,n}(P, Q) \nabla^2 F_j(P', Q) \\
& + F_{j,n}(P', Q) \nabla^2 w^*(P, Q) - F_j(P', Q) \nabla^2 w^*_{,n}(P, Q)] d\Gamma \} \quad (6-9)
\end{aligned}$$

ここで、係数 $c(P)$ は式(2-36)などで定義したものと同一である。式(6-5)も同様にして、つぎの境界積分に変換される。

$$\begin{aligned}
I'(P) = & \sum_{j=1}^M k \alpha_j(P') \{ c(P) F_{j, no}(P', P) \\
& + \int_{\Gamma} \{ w^*_{, no}(P, Q) \nabla^2 F_{j,n}(P', Q) - w^*_{, nno}(P, Q) \nabla^2 F_j(P', Q) \\
& + F_{j,n}(P', Q) \nabla^2 w^*_{, no}(P, Q) - [F_j(P', Q) - F_j(P, Q)] \nabla^2 w^*_{, nno}(P, Q) \} d\Gamma \} \quad (6-10)
\end{aligned}$$

式(6-9) と(6-10)を得たことにより、積分方程式は境界だけで評価できることになる。このような積分方程式を導くのに2度相反定理を用いることが、2重相反定理を用いた境界要素法と呼ばれる理由である。

式(6-6)に現われる未知係数 α_j はつぎのような手順で決められる。式(6-6)は、つぎのようにマトリックス表示できる。

$$\{w\} = [f] \{\alpha\} \quad (6-11)$$

マトリックス $[f]$ の逆マトリックス $[f]^{-1}$ が存在するならば、 $\{\alpha\}$ は次式により得られる。

$$\{\alpha\} = [f]^{-1} \{w\} \quad (6-12)$$

関数 f_j として、つぎの関数形

$$f_j(P', Q') = 1 - \rho(P', Q') - \rho^2(P', Q') \quad (6-13)$$

をとれば、式(6-7)で定義される関数 F_j は、つぎのように与えられる。

$$F_j(P', Q') = \frac{1}{64} \rho^4(P', Q') - \frac{1}{225} \rho^5(P', Q') - \frac{1}{576} \rho^6(P', Q') \quad (6-14)$$

式(6-6) に現われる任意点 P' は境界上と領域内に合計 M 個とられる。境界上の点は必ずしも境界要素節点と一致する必要はない。そのような点が境界上だ

けでなく領域内にもとられるのは、たとえば板の全周が固定されているか、単純支持されている場合、式(6-12)のたわみベクトル $\{w\}$ が恒等的に0になってしまい、対応する係数ベクトル $\{\alpha\}$ が計算できないからである。領域内にとられた点P'におけるたわみは、領域内のたわみについて成り立つ積分方程式により定められる。

6・1・3 解析手順と数値計算結果

たわみとたわみ勾配に関する境界積分方程式は一般に解析的に扱うことはできないので、離散化して数値的に解く。板の境界をN個の境界要素に分割すれば、境界積分方程式の離散化式は、形式的につぎのようにマトリックス表示される。

$$\begin{aligned} [A]\{w\} + [B]\{w_{,n}\} + [C]\{M_n\} + [D]\{K_n\} &= \{H\} + \{I\} \\ [A']\{w\} + [B']\{w_{,n}\} + [C']\{M_n\} + [D']\{K_n\} &= \{H'\} + \{I'\} \end{aligned} \quad (6-15)$$

ここで、 $[A]$ 、 $[B]$ 、 \dots 、 $[D']$ は $N \times N$ の係数マトリックス、 $\{w\}$ 、 $\{w_{,n}\}$ 、 $\{M_n\}$ および $\{K_n\}$ は境界上の節点値 w 、 $w_{,n}$ 、 $M_n(w)$ および $K_n(w)$ より構成されるベクトル、 $\{H\}$ 、 $\{H'\}$ は荷重項に関するベクトル、そして $\{I\}$ 、 $\{I'\}$ は式(6-9)と(6-10)に関する未知ベクトルであり、係数ベクトル $\{\alpha\}$ によりつぎのような関係式で表される。

$$\begin{aligned} \{I\} &= [F]\{\alpha\} \\ \{I'\} &= [F']\{\alpha\} \end{aligned} \quad (6-16)$$

上式において、 $[F]$ と $[F']$ は式(6-9)と(6-10)における境界積分の離散化表示から得られる $N \times M$ の係数マトリックスである。

境界変数 w 、 $w_{,n}$ 、 M_n および K_n のうち2つは境界条件により規定されるので、他の2つの変数について式(6-15)を解けばよい。ただし、式(6-15)は右辺に未知量を含むので、このような式を解くために2種類の方法が考えられる。その1つは、式(6-15)と領域内で成り立つ積分方程式の離散化表示を連立して解く方法である。もう1つは、未知量に適当な値を仮定して反復計算により逐次近似解を求めるものである。ここでは、後者の逐次近似解法を用いる。

まず、未知ベクトル $\{I\}$, $\{I'\}$ の第1近似を求めるために、弾性床上にない板 ($k=0$) のたわみ分布を仮定する。つぎに領域内のたわみ分布を領域内で成り立つ積分方程式から計算し、これよりベクトル $\{I\}$, $\{I'\}$ の第2近似を求める。これが、つぎのステップの計算のための初期値となる。このような計算を収束条件が満たされるまで繰り返す。

本節で述べた定式化の考え方と解析手順の妥当性を検討するために、数値解析例として、弾性床上にあり、集中荷重 P の作用する半径 a の円板の曲げ問題を考える。図6-1 は、式(6-12)を評価するためのたわみを計算する領域内の点の配置を示したものである。これらの点は、境界上では境界節点に一致するようにとった。

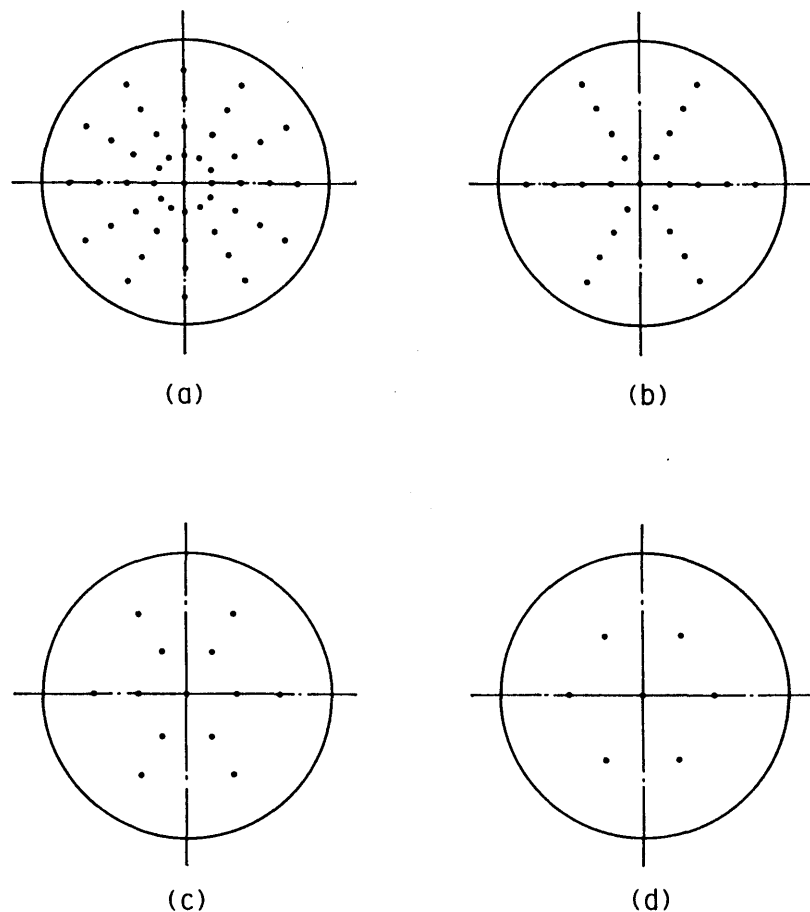


図6-1 領域点の配置

[領域点数: (a)49、(b)25、(c)13、(d)7]

表6-1 は、中央に集中荷重が作用する固定支持円板（軸対称問題）について、無次元弾性床パラメータ λ ($\equiv ka^4/D$) の大きさを変化させたときの中央の最大たわみの計算結果を与える。この例では領域内点数を25とし、境界要素数を48, 36および24としたときの計算結果を解析解と比較した。表より境界要素数の増加とともに解の精度は改善されていることがわかる。表6-2には、境界要素数を48として領域内点を図6-1 に示すように配置したときの中央たわみの計算結果を示す。必ずしも領域内点数の増加とともに精度は向上していないが、結果に大きな差異があるわけではない。

表6-1 中央の最大たわみ $D w_{max}/P a^2$ ($\times 10$) (領域点数: 25)

λ	Analytical	Number of boundary elements		
		48	36	24
0	.1989	.1982	.1977	.1961
1	.1973	.1963	.1957	.1940
2	.1958	.1945	.1938	.1920
3	.1942	.1927	.1919	.1900
4	.1927	.1909	.1901	.1881
5	.1912	.1891	.1883	.1862
6	.1897	.1874	.1865	.1843
7	.1882	.1858	.1848	.1825
8	.1868	.1841	.1831	.1808
9	.1854	.1825	.1814	.1780
10	.1839	.1810	.1798	.1773

表6-2 中央の最大たわみ $D w_{max} / P a^2 (\times 10)$ (境界要素数: 48)

λ	Analytical	Number of domain points			
		49	25	13	7
0	.1989	.1982	.1982	.1982	.1982
1	.1973	.1963	.1963	.1964	.1966
2	.1958	.1944	.1945	.1946	.1950
3	.1942	.1925	.1927	.1929	.1934
4	.1927	.1906	.1909	.1912	.1918
5	.1912	.1889	.1891	.1895	.1903
6	.1897	.1871	.1874	.1878	.1888
7	.1882	.1854	.1858	.1862	.1874
8	.1868	.1837	.1841	.1846	.1859
9	.1854	.1820	.1825	.1831	.1845
10	.1839	.1803	.1810	.1816	.1831

上述の解析例は軸対称問題であるが、つぎに軸対称でない問題の例として、弾性床上にある偏心集中荷重の作用する固定および単純支持円板を考える。この例では、集中荷重を半径長さの1/2の偏心点に作用させた。無次元弾性床パラメータ λ を変化させたときの荷重点を含む直径上のたわみ分布を、それぞれの境界条件に対応して図6-2および6-3に示す。これらの図において、実線はBEM解を表す。比較のために $\lambda = 0$ の解析解を■印で示す。 $\lambda \neq 0$ のBEM解は比較すべきものはないが、 λ を大きくしていくと $\lambda = 0$ の解からわずかずつ変化していく様子が図からわかる。なお、これらの問題では、境界要素数を48、領域内点数を25とした。

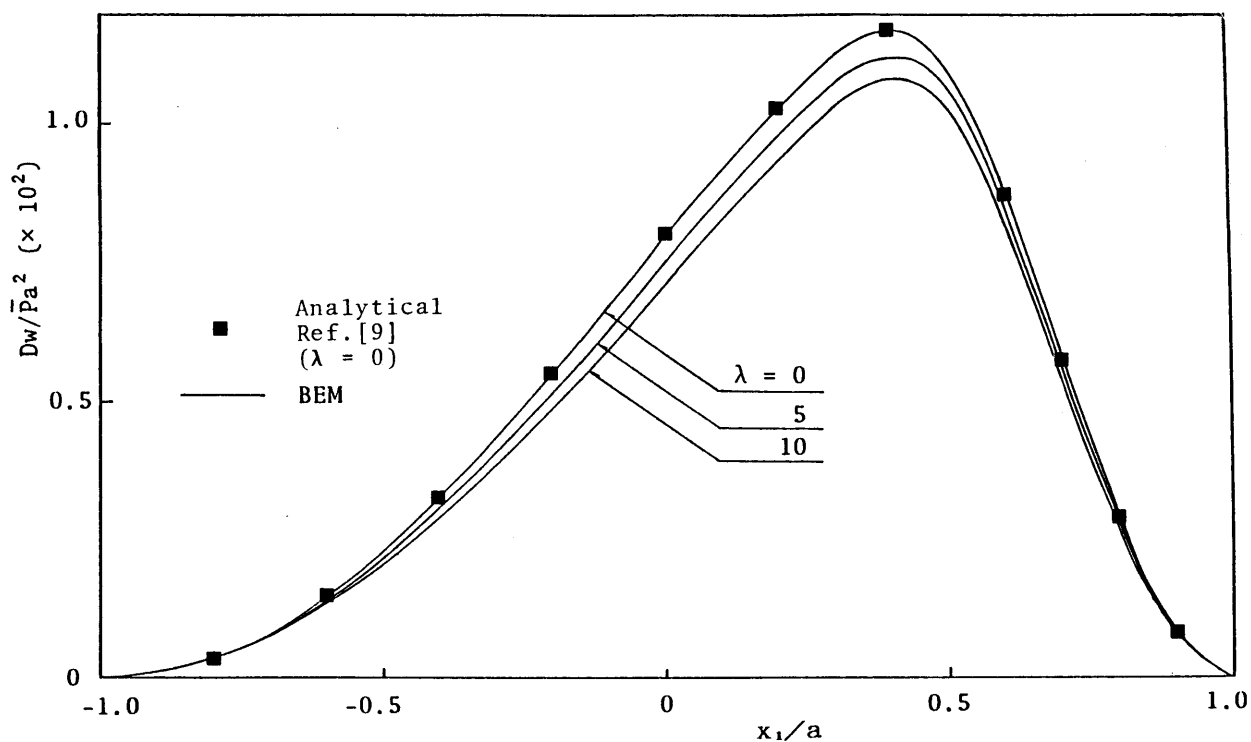


図6-2 偏心集中荷重の作用する弾性床上的固定支持円板のたわみ

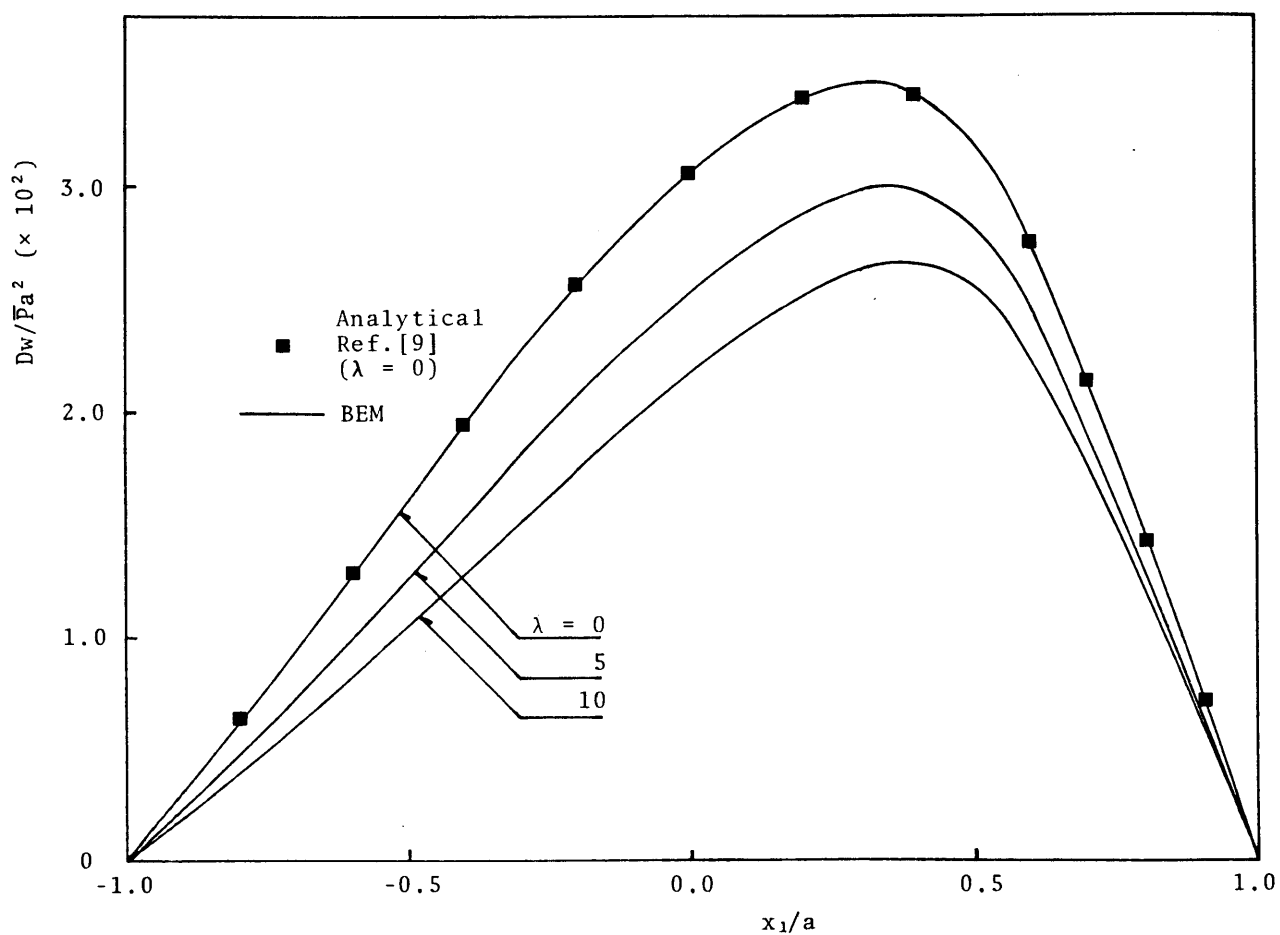


図6-3 偏心集中荷重の作用する弾性床上的単純支持円板のたわみ

6・2 非線形弾性支持平板の曲げ解析[153, 154]

前節でも述べたように、境界要素法は、その解法原理から均一な線形場の問題に対してきわめて効果的である。なぜなら、このとき積分方程式は、考える領域の境界上だけで定式化され得るからである。このような境界要素法の特性を考えるうえで見落としてはならないのは、問題の支配方程式は線形であるが、境界条件が非線形となる場合である。非線形熱伝導問題や非線形弾性支持問題は、しばしば現われる典型的な例である。弾性接触問題や流体スロッシング問題は未知境界形状を伴うそのような問題の別の例である。線形弾性体の形状最適化問題も、またそのような範ちゅうに入る。注意しなければならないのは、このような場合、その積分方程式は線形とはならないことである。したがって、境界未知節点量により定式化される代数方程式も非線形となる。これは、例えば逐次繰り返し計算などによって解く必要がある。しかしながら、この場合、境界節点だけを扱えばよいので、最終的に解かなければならない代数方程式の元数を抑えることができ、有限要素法などの領域解法と比べ計算コストを低くできる。

本節では、通常の境界条件より一般的かつ複雑な境界条件下で横荷重を受ける弾性薄板の境界要素解析について述べる。ここでは板の境界での支持条件が変形に依存する場合、すなわち境界曲げモーメントがたわみ勾配の非線形関数となる場合を考える。境界積分方程式は上述の非線形境界条件に対応して修正される。このとき、たわみ、たわみ勾配、曲げモーメントおよび等価せん断力は互いに非線形関係にある。境界積分方程式の離散化により得られる代数方程式は非線形となるので、逐次繰り返し計算により解かれる。

6・2・1 非線形な境界条件

板の曲げ問題において、通常用いられる板の境界条件は、式(2-20)～(2-22)で示したように、つぎのように与えられる。

$$\begin{aligned} \text{単純支持端: } & w = 0, & M_n &= 0 \\ \text{固定支持端: } & w = 0, & w_{,n} &= 0 \\ \text{自由端: } & M_n &= 0, & K_n &= 0 \end{aligned} \tag{6-17}$$

上記の表示において、 K_n 、 M_n 、 w_n および w は、それぞれ板の境界における等価せん断力、法線方向曲げモーメントおよび、法線方向たわみ勾配およびたわみである。

2章で述べたように、板曲げ問題における直接法境界要素法では、積分方程式は式(6-17)で示した境界条件に現われる4つの量により定式化される[式(2-31), (2-38)]。板の境界を境界要素に分割すると、たわみとたわみ勾配に関する境界積分方程式は、各々の変数に対する適当な内挿関数を用いて境界節点に関して離散化され、形式的につぎのようにマトリックス表示される。

$$\begin{aligned} [A_1]\{w\} + [B_1]\{w_{,n}\} + [C_1]\{M_n\} + [D_1]\{K_n\} &= \{b_1\} \\ [A_2]\{w\} + [B_2]\{w_{,n}\} + [C_2]\{M_n\} + [D_2]\{K_n\} &= \{b_2\} \end{aligned} \quad (6-18)$$

ここで、 $\{w\}$ 、 $\{w_{,n}\}$ 、 $\{M_n\}$ および $\{K_n\}$ は節点値ベクトルであり、 $[A_1]$ 、 $[A_2]$ 、 \dots 、 $[D_2]$ および $\{b_1\}$ 、 $\{b_2\}$ はそれぞれ係数マトリックスおよび右辺ベクトルである。通常の境界条件では、4つの変数 w 、 $w_{,n}$ 、 M_n および K_n のうち2つが規定されるので、未知量は2つとなる。式(6-18)は、この2つの未知量を決定するために必要な線形連立方程式を構成する。

板曲げ問題における通常の境界条件式(6-17)は、いわば理想化されたものである。実際には、これらとは異なる条件あるいはもっと複雑な条件が必要となることがある。典型的な例として、板の境界がばねにより支持されている場合が考えられる。薄板部材による構造物の挙動は、これに相当する。板の境界での最も簡単な弾性支持は、線形弾性ばねによりモデル化される。このモデルでは、板はその境界でのたわみ勾配に比例した拘束曲げモーメントを受けることになる。このようなモデルを定式化すれば、ばね定数を k としてつぎのように表される。

$$M_n = k w_{,n} \quad (6-19)$$

上述のモデルでは、4つの境界変数のうち2つが線形な関係を持つことになる。式(6-17)で表される通常の境界条件の1つを上式の関係で置き換えれば、境界条件で与えられない変数について、式(6-18)より線形連立方程式を構成するこ

とができる。このようなことは、温度とフラックスが線形関係にある（熱ふく射）境界条件をもつ熱伝導問題でよく知られている。

より一般的な場合として、式(6-19)のばね定数 k が変形に依存すると考えることは合理的である。拘束曲げモーメントは、板の境界の接線まわりの回転を生じるたわみによると考えられる。このとき k は、境界でのたわみ勾配の関数として、つぎのようにで表すことができる。

$$k = k(w_{,n}) \quad (6-20)$$

一様でない支持条件において、 k は板の境界に沿って変化することになり、また曲げモーメント M_n は、たわみ勾配 $w_{,n}$ の非線形関数となる。式(6-18)における曲げモーメントの項に式(6-19)および(6-20)の関係を考慮することにより、次式で示される非線形連立方程式を得る。

$$\begin{aligned} [A_1]\{w\} + \{[B_1] + k(\{w_{,n}\})[C_1]\}\{w_{,n}\} + [D_1]\{K_n\} &= \{b_1\} \\ [A_2]\{w\} + \{[B_2] + k(\{w_{,n}\})[C_2]\}\{w_{,n}\} + [D_2]\{K_n\} &= \{b_2\} \end{aligned} \quad (6-21)$$

さらに、もう1つの境界条件、例えば全周支持のとき、 $\{w\} = \{0\}$ を代入することにより、上式を解くことができる。この種の非線形方程式は、 $k = \text{const.}$ に対する既知の線形解を初期値として、逐次繰返し法により解かれる。最終的に得られた代数方程式は非線形であるから、繰返し計算によって解く必要はあるが、境界節点変数だけについて定式化される。

6・2・2 数値解析例

例として、非線形ばね定数 k が次式で与えられる問題を考える。

$$k(w_{,n}) = k_1 |w_{,n}| + k_2$$

ここで、 k_1 と k_2 は既知のパラメータである。したがって、節点値ベクトルに関する連立方程式(6-21)は、たわみ勾配 $w_{,n}$ について2次となり、繰返し計算により解かれる。なお、本計算では、境界要素の中央で関数値を代表させる

いわゆる一定要素を用いた。以下に示す円板および正方形板の問題では、境界要素数をそれぞれ36および40とした。

図6-4と6-5は、一様分布荷重の作用する円板（半径 a ）についての種々のパラメータに対する本解析法による計算例であり、それぞれ中央での最大たわみと境界でのたわみ勾配を荷重に対して示したものである。もし、 $k_1 = 0$ とするならば、一定のばね定数 $k = k_2$ の場合に相当し、この解析解は容易に得られるので、境界要素解をこれと比較した。両者の結果は比較的よく一致してい

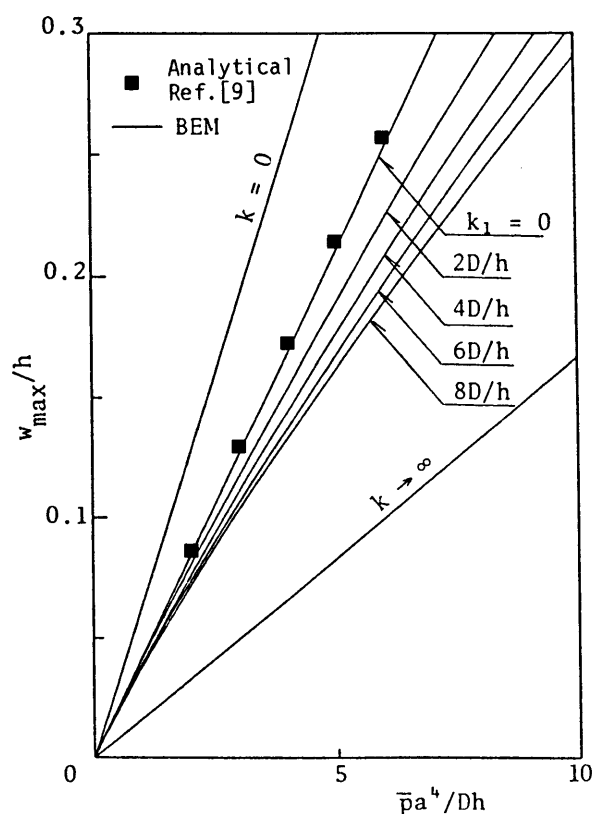


図6-4 一様分布荷重の作用する円板の
中央の最大たわみ($k_2 = D/a$)

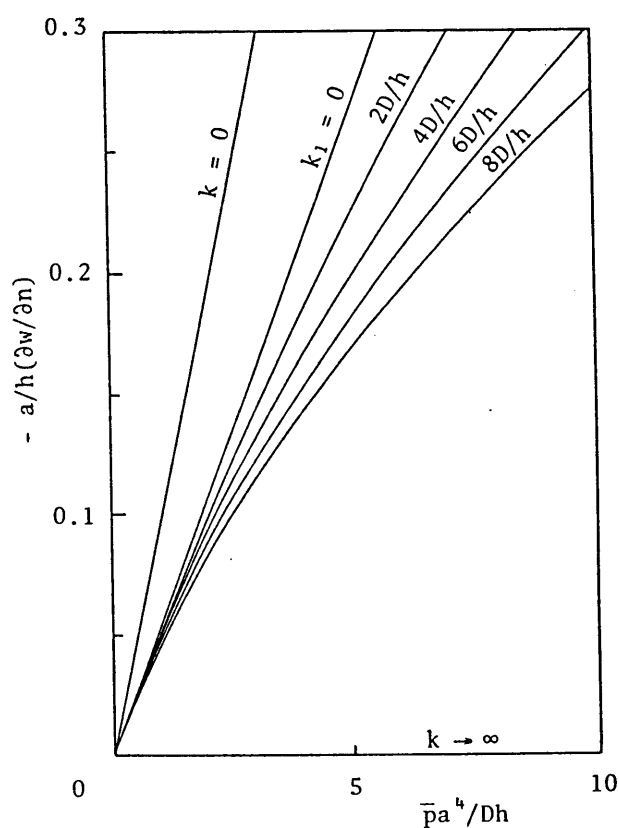


図6-5 一様分布荷重の作用する円板の
法線方向たわみ勾配($k_2 = D/a$)

ることがわかる。さらに、非線形境界条件すなわち $k_1 \neq 0$ の場合の境界要素解を示した。 k_1 の値が大きいほど非線形性が強く現われている。 $k = 0$ のときは単純支持条件、 $k \rightarrow \infty$ のときは固定支持条件の計算結果に相当し、 k の値が有限のときの境界要素解は、これらの解の間にはいつている。

別の計算例として、任意の位置に集中荷重が作用する円板の問題を考える。図6-6と6-7は、中央集中荷重による軸対称たわみの計算結果であり、分布荷重のそれと類似している。もう1つの例は、偏心集中荷重が作用する場合であ

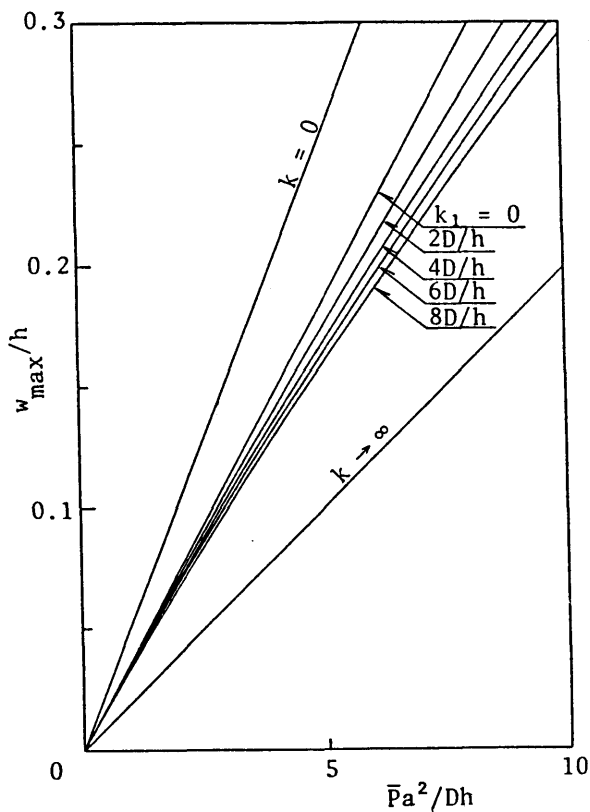


図6-6 中央集中荷重の作用する円板の
中央の最大たわみ($k_2 = D/a$)

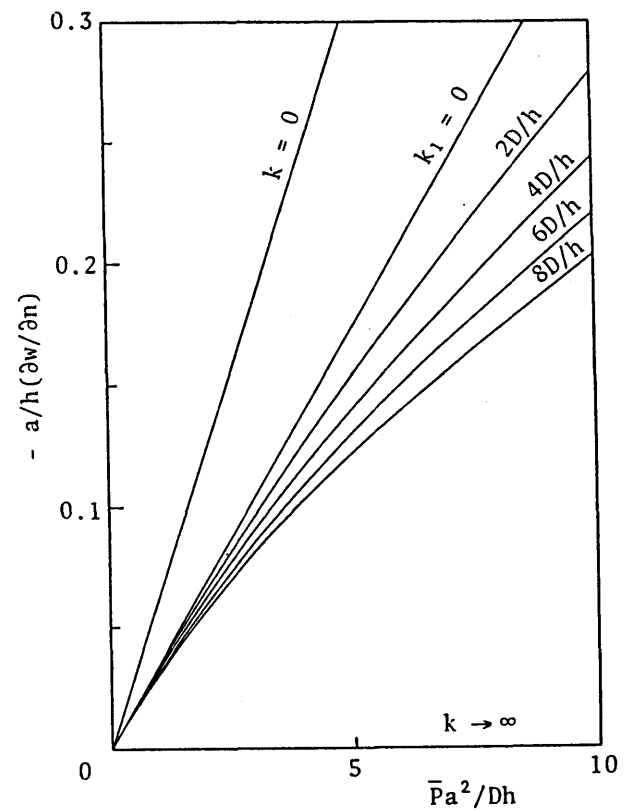


図6-7 中央集中荷重の作用する円板の
法線方向たわみ勾配($k_2 = D/a$)

る。このとき板は非軸対称に変形する。荷重点を含む直径上のたわみ分布と板の境界上のたわみ勾配をそれぞれ図6-8と6-9に示した。この場合も、 k_2 を一定とし、 k_1 を変化させて計算した。図6-9において、 $k \rightarrow \infty$ の結果は横軸に一致する。

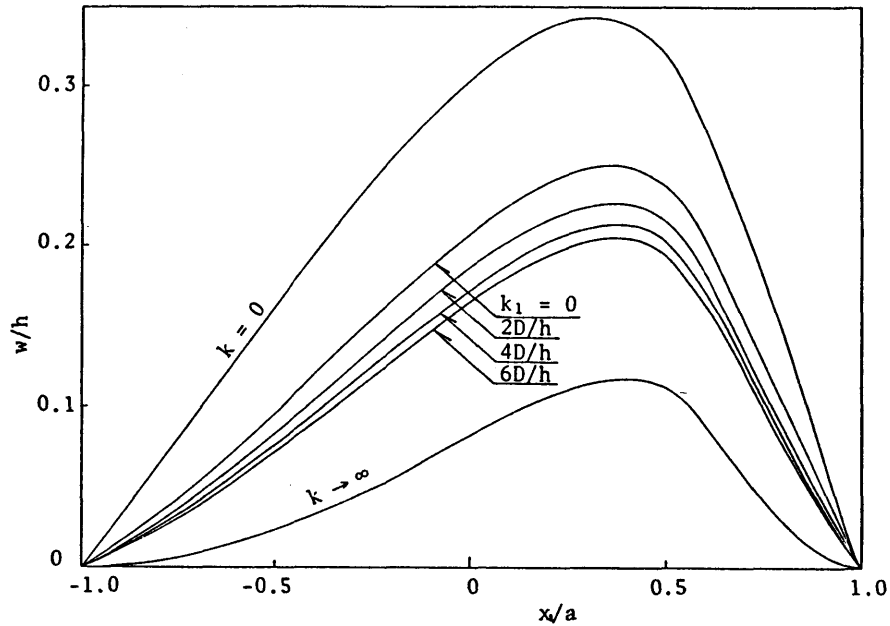


図6-8 偏心集中荷重の作用する円板のたわみ($k_2 = D/a$)
($x_1 = a/2$, $x_2 = 0$, $Pa^2/Dh = 10$)

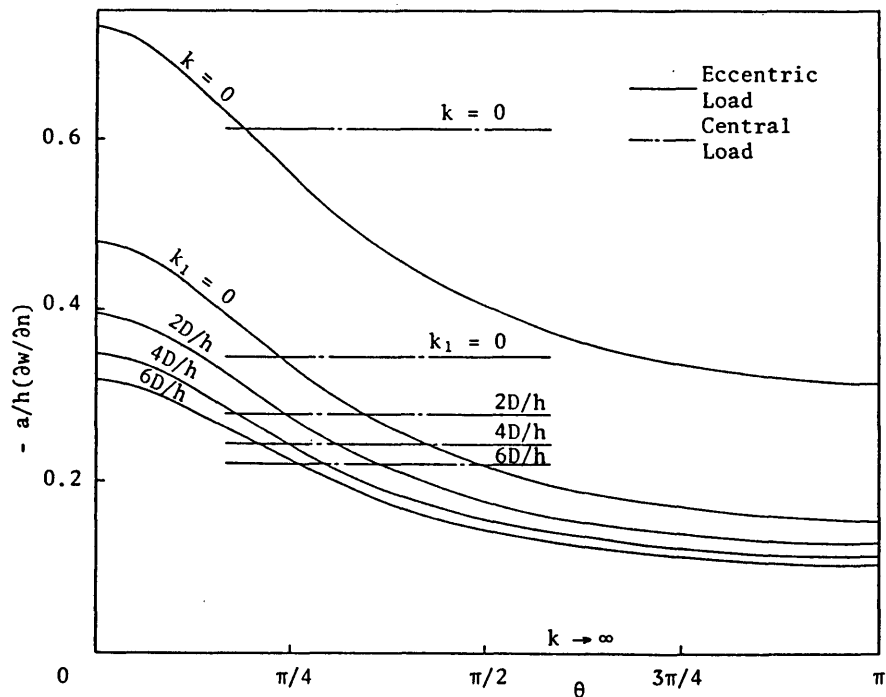


図6-9 偏心集中荷重の作用する円板の法線方向たわみ勾配($k_2 = D/a$)
($x_1 = a/2$, $x_2 = 0$, $Pa^2/Dh = 10$)

さらに、一様分布荷重と中央集中荷重の作用する正方形板 ($2a \times 2a$) に関する中央での最大たわみの計算結果を、図6-10と6-11に示した。ここでも、 k_2 を一定とし、 k_1 を変化させてたときの境界要素解を、 $k = 0$ のときの単純支持条件および $k \rightarrow \infty$ のときの固定支持条件の計算結果とともに示した。定性的には、円板の計算結果と類似している。

6・3 まとめ

本章では、その他の板曲げ問題への直接法境界要素法の応用として、弾性床にある平板に対する積分方程式定式化のときに現われる反力項を含む領域積分に関する境界解法と、支配方程式は線形で境界条件が非線形となる問題の例

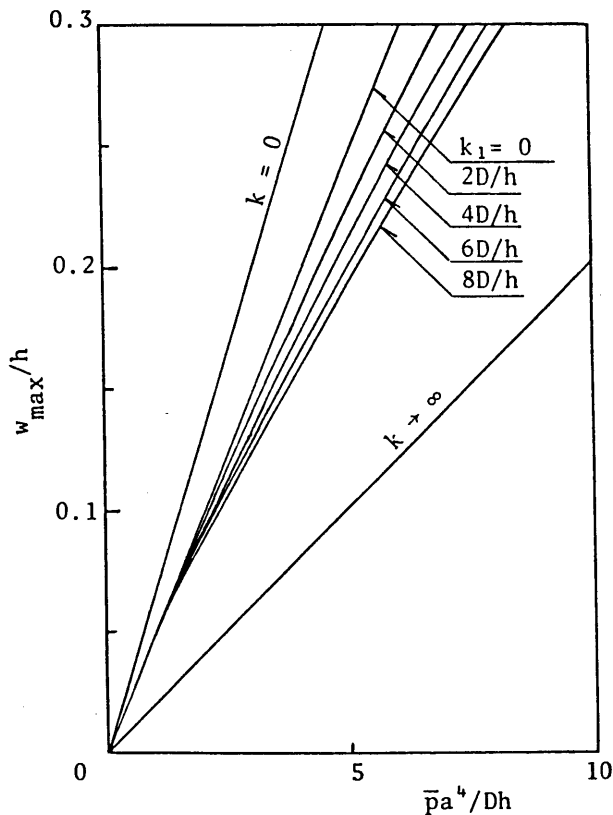


図6-10 一様分布荷重の作用する正方形板の
中央の最大たわみ ($k_2 = D/a$)

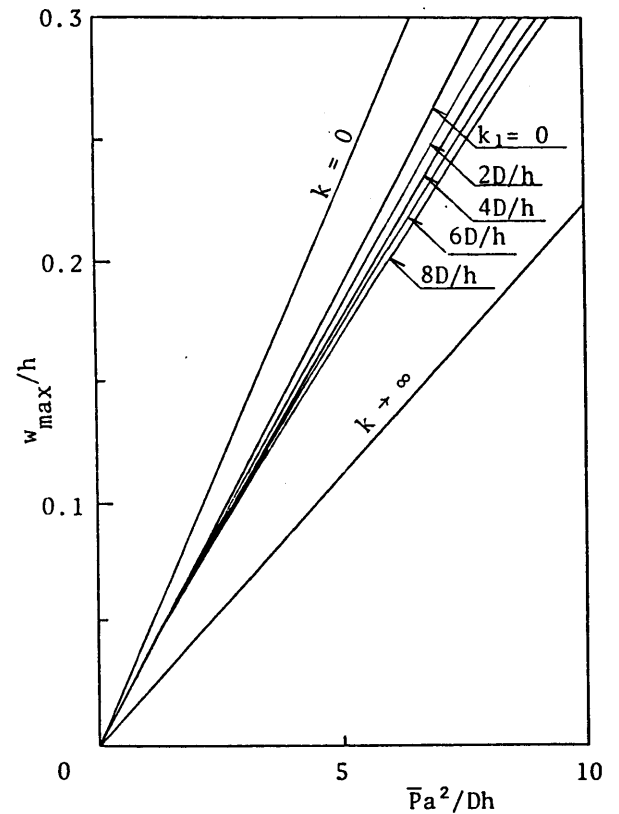


図6-11 中央集中荷重の作用する正方形板の
中央の最大たわみ ($k_2 = D/a$)

として非線形弾性支持された平板の微小曲げ解析について述べた。本章の内容をまとめると以下のようなものである。

(1) 本章の前半では、2重相反定理を用いた境界要素法を弾性平板の曲げ変形を支配する重調和型の方程式に適用しする例として、Winklerタイプの弾性床上にある平板の曲げ問題を考え、このような問題に対する積分方程式を境界上だけで定式化する方法について述べた。

(2) 中央集中荷重あるいは偏心集中荷重の作用する、弾性床上の円板の曲げ問題に関する数値解析例を示すことにより、定式化および解析手順の有効性を検証した。

(3) 本章の後半では、線形な支配方程式と非線形な境界条件をもつ重調和境界値問題に対する境界要素法の応用を考えた。分布横荷重の作用する板の微小曲げ問題を考え、その境界条件として板のたわみ勾配に非線形に比例する拘束曲げモーメントをうけるモデルを仮定した。境界積分方程式は直接法境界要素法に基づき、上述の非線形境界条件を考慮して定式化され、さらに離散化されて境界節点未知量に関する非線形代数方程式に帰着されるので、逐次繰り返し法により解かれた。

(4) 上述の問題に対する数値解析例として、たわみ勾配の2乗に比例する大きさの拘束曲げモーメントが作用する円板と正方形板の曲げ問題を考え、この種の問題に対する境界要素法の有用性を明らかにした。

第7章 結 論

板およびシェルの曲げ解析への境界要素法の応用に関する研究は、そのほとんどが微小変形を仮定した線形解析に対するものである。板およびシェルの曲げ解析では大変形（有限変形）を考慮する必要性が高いにもかかわらず、この種の幾何学的非線形問題に対する境界要素法の応用に関する研究は開始されたところである。このような状況のもとで、本研究では、まず、板の有限変形理論で著名なvon Karman理論に基づいた連成支配方程式に対する直接法境界要素法による定式化を、微小変形解析の拡張として行えることを示した。つぎに、Berger法に基づく板およびシェルの近似有限変形解析、座屈後変形解析に境界要素法を適用し、さらに、この方法をサンドイッチ板およびシェルの曲げ解析にも拡張応用した。また、別の観点、すなわち境界要素法の計算効率の向上を目的とした積分方程式定式化の考え方について、板の曲げ問題を例として述べた。以下に、本研究において明かとなった諸点についてまとめ、本論文の結論とする。

第1章では、汎用数値解析法のなかで境界要素法の占める位置と歴史的背景について触れたあと、境界要素法による板およびシェルの曲げ解析の過去の研究成果と現状を概観し、そのなかで本研究の果たした役割と位置付けについて述べた。

第2章では、直接法境界要素法による弾性平板の微小および有限変形解析について述べ、その内容は以下のように要約することができる。

- (1) 横荷重が作用する一様厚さの等方性弾性薄板の微小変形解析に関する支配方程式を、直接法境界要素法により積分方程式に定式化する方法について説明した。
- (2) 横荷重による等方性板の曲げ問題に対する境界要素法による解析法を拡張応用することにより、不均一な温度場のもとにある板の曲げ問題を境界要素解析するときの定式化の手順とその留意点について述べた。数値解析例として、

放物面状温度分布の温度場にある円板の熱による曲げ問題を考え、半径方向のたわみ分布について、境界要素法による結果を解析解と比較してその精度を検討し、定式化および解析法の有用性を示した。

(3) 直交異方性板の微小変形解析にも等方性板と同様の考え方を応用することにより、直接法境界要素法による一般的な取り扱いが可能なことを示した。例題として、一様分布荷重の作用する直交異方性円板の曲げ問題を解析し、半径方向のたわみ分布と境界上の法線方向曲げモーメントの境界要素法による計算値を解析解と比較した。その結果両者はよく一致し、定式化の妥当性を示すことができた。

(4) von Karmanによる板の有限変形理論に基づく直接法境界要素法による積分方程式の定式化は、微小変形解析の考え方を拡張応用することにより行えることを示した。定式化と解析手順の有効性を検討するために、一様分布荷重をうける円板を考え、板の境界での面内変位を拘束する場合としない場合について解析した。円板の中央における最大たわみに関する境界要素解をRKG解と比較し、境界要素数が解に及ぼす影響を調べた。この結果、いずれの境界条件においても、境界要素数を増すことにより、より高い精度の境界要素解が得られることがわかった。

第3章においては、Berger法に基づく弾性平板およびシェルの近似有限変形解析と座屈後変形解析を、直接法境界要素法により行った。3章はつぎのようにまとめることができる。

(5) 弾性偏平シェルの膜ひずみの第2不変量を見捨てたポテンシャルエネルギーの停留条件から導出されるBerger方程式に対する積分方程式が、弾性平板の微小変形解析と同様の基本解を用いて定式化されることを示した。数値解析例として、横荷重あるいは熱負荷の作用をうける円板および球シェルと正方形板およびシェルの曲げ問題を考えた。円板および球シェルについては、中央における最大たわみ、半径方向のたわみ分布およびたわみ勾配分布に関するBEM解を、対応するRKG解と比較した。その結果、有限変形モードおよび座屈後変

形モードのいずれのモードにおいても、一部の結果を除いて両者はよく一致した。正方形板およびシェルについても同様の解析を行った。これらのBEM解も、円板および球シェルと同様の傾向を示すことがわかった。

(6) 弾性床上の平板の有限変形解析にも、Berger方程式に基づく直接法境界要素法を適用し、このような問題にも本解析法が有効であることを数値解析例により示した。

(7) 他の解法でも解析できる比較的簡単な境界条件、形状の板あるいはシェルの解析例を示したが、本解析法は任意の境界条件、形状の問題に対しても容易に拡張することができる。

つづく第4章では、Berger法に基づくサンドイッチ平板およびシェルの近似有限変形解析と座屈後変形解析に境界要素法を適用し、その内容は以下のよう

にまとめることができる。

(8) Berger法を修正した方法により導かれた、サンドイッチ平板およびシェルの有限変形解析に関する近似支配方程式に対する積分方程式が、3章で述べた方法と同様の考え方で定式化されうることを示した。数値解析例として、横荷重あるいは熱負荷の作用するサンドイッチ円板および球シェルとサンドイッチ正方形板およびシェルの曲げ解析を行った。サンドイッチ円板については、板の中心における最大たわみ、半径方向のたわみ分布およびたわみ勾配分布について計算し、BEM解を対応するRKG解と比較して、その解析精度について検討した。有限変形モードおよび座屈後変形モードのいずれの変形モードにおいても、両者はよく一致した。サンドイッチ球シェルと正方形板およびシェルについてはBEM解だけを示した。得られた計算結果から、3章で示した均質等方性球シェルおよび正方形シェルと類似の傾向がみられることがわかった。

(9) ここでは限られた問題への適用例を示したにすぎないが、サンドイッチ板およびシェルの有限変形解析のように支配方程式が比較的複雑になる問題にも、均質等方性板およびシェルに対する境界要素法と同様の考え方を適用できる可能性を示すことができた。

第5章においては、板の曲げ問題における直接法境界要素法の有効利用および計算効率の向上を目的として、境界積分方程式定式化の1つの考え方を示し、つぎのように要約することができる。

(10) 非同次微分方程式を積分方程式に変換して解析するときに現われる、非同次項を含む領域積分を Green の公式によって厳密に境界積分に変換し、領域積分をまったく含まない境界積分方程式として定式化する方法を、非同次な調和微分方程式と重調和微分方程式について与えた。このような問題の例として、内部熱発生を伴う定常熱伝導問題と横荷重をうける弾性薄板の曲げ問題を考えた。具体例として、前者については、一様な内部熱発生がある3次元定常熱伝導問題を、後者については、一様あるいは線形に変化する分布荷重をうける楕円弾性薄板の曲げ問題を解析し、本解析法による境界要素解を解析解と比較した。その結果、両者はきわめてよく一致することがわかった。

(11) 5章で示した方法によれば、従来は数値的に計算されていた非同次項の領域積分がなくなり、解析対象の境界だけで計算が行えるので、境界要素法がより有効に利用できる。簡単な例題によって、本方法の利用法と有効性を明らかにした。

第6章では、その他の板曲げ問題への直接法境界要素法の応用として、弾性床上にある平板に対する積分方程式定式化のときに現われる反力項を含む領域積分に関する境界解法と、支配方程式は線形で境界条件が非線形となる問題の例として非線形弾性支持された平板の微小曲げ解析について述べ、その内容をまとめると以下のようなものである。

(12) 6章の前半では、2重相反定理を用いた境界要素法を弾性平板の曲げ変形を支配する重調和型の方程式に適用する例として、Winkler タイプ の弾性床上にある平板の曲げ問題を考え、このような問題に対する積分方程式を境界上だけで定式化する方法について述べた。中央集中荷重あるいは偏心集中荷重の作用する、弾性床上の円板の曲げ問題に関する数値解析例を示して、定式化および解析手順の有効性を検証した。

(13) 6章の後半では、線形な支配方程式と非線形な境界条件をもつ重調和境界値問題に対する境界要素法の応用を考えた。分布荷重の作用する板の微小曲げ問題を考え、その境界条件として板のたわみ勾配に非線形に比例する拘束曲げモーメントをうけるモデルを仮定した。境界積分方程式は直接法境界要素法に基づき、上述の非線形境界条件を考慮して定式化され、さらに離散化されて境界節点未知量に関する非線形代数方程式に帰着されるので、逐次繰返し法により解かれた。数値解析例として、たわみ勾配の2乗に比例する大きさの拘束曲げモーメントが作用する円板と正方形板の曲げ問題を考え、この種の問題に対する境界要素法の有効性を明らかにした。

謝 辞

本研究は、名古屋大学工学部神谷紀生教授の懇切なご指導により完結し得たものであり、ここに謹んで謝意を表します。

また、本研究に対する数々の有益なご教示、ご助言を賜った名古屋大学工学部清家政一郎教授ならびに村上澄男教授に深く感謝いたします。

さらに、本研究をまとめるにあたり、多くの貴重なご意見とご激励をいただいた三重大学工学部徳田正孝教授に厚く感謝いたします。

また、本研究の遂行にあたり、多大なご協力をいただいた三重大学工学部機械材料工学科材料力学研究室の方々に感謝いたします。

最後に、本研究の計算機シミュレーションに際し、名古屋大学大型計算機センターを利用したことを付記し、感謝します。

参 考 文 献

- [1] Brebbia, C. A., The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press, 1978; 神谷・田中・田中共訳、境界要素法入門、培風館、1980.
- [2] Banerjee, P. K. and Butterfield, R., Boundary Element Methods in Engineering Science, McGraw-Hill, 1981.
- [3] Patankar, S. V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, McGraw-Hill, 1980.
- [4] Zienkiewicz, O. C., The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, 1971.
- [5] 小林, "境界積分方程式法の歴史から", 数理科学、No.234, 1982, pp.7-9.
- [6] Jaswon, M. A. and Symm, G. T., Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics, Academic Press, 1977.
- [7] Rizzo, F. J., "An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics", Quart. Appl. Math., Vol.25, 1967, pp.83-95.
- [8] Berger, H. M., "A New Approach to the Analysis of Large Deflection of Plates", J. Appl. Mech., Vol.22, 1955, pp.465-472.
- [9] Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger, S., Theory of Plates and Shells, 2nd edn., McGraw-Hill, 1959.
- [10] 文献[4]の10章.
- [11] Bergman, S. and Schiffer, M., Kernel Functions and Elliptic Differential Equations in Mathematical Physics, Academic Press, 1953.
- [12] Chicurel, R. and Suppiger, E. W., "The Reflection Method in Elasticity and Bending of Plates", Zeit. Ang. Math. Phys., Vol.15, 1964, pp.629-638.
- [13] 西谷, "電子計算機による二次元応力問題の解法", 日本機械学会誌, Vol.70, 1967, pp.627-634.
- [14] Jaswon, M. A. and Maiti, M., "An Integral Equation Formulation of Plate

- Bending Problems", J. Eng. Math., Vol.2, 1968, pp.83-93.
- [15] Segedin, C. M. and Brickell, D. G. A., "Integral Equation Method for a Corner Plate", Proc. ASCE, J. Struct. Div., Vol.94, ST-1, 1968, pp.41-52.
- [16] Maiti, M. and Chakrabarty, S. K., "Integral Equation Solutions for Simply Supported Polygonal Plates", Int. J. Eng. Sci., Vol.12, 1974, pp.793-806.
- [17] Vivoli, J. and Fillipi, P., "Eigenfrequencies of Thin Plates and Layer Potentials", J. Acoust. Soc. America, Vol.55, 1974, pp.562-567.
- [18] Glahn, H., "Eine Integralgleichung zur Berechnung Gelenkig Gelagerter Platten bei Krummem Rand", Ing. Arch., Vol.44, 1975, pp.189-198.
- [19] Hansen, E. B., "Numerical Solution of Integro-Differential and Singular Integral Equations for Plate Bending Problems", J. Elast., Vol.6, 1976, pp.39-56.
- [20] Bezine, G., "Boundary Integral Formulation for Plate Flexure with Arbitrary Boundary Conditions", Mech. Res. Comm., Vol.5, 1978, pp.197-206.
- [21] Bezine, G. P. and Gamby, D. A., "A New Integral Equation Formulation for Plate Bending Problems", Recent Advances in Boundary Element Methods, Brebbia, C. A. ed., Pentech Press, 1978, pp.327-342.
- [22] Altiero, N. J. and Sikarskie, D. L., "A Boundary Integral Method Applied to Plates of Arbitrary Plan Form", Comp. Struct., Vol.9, 1978, pp.163-168.
- [23] Wu, B. C. and Altiero, N. J., "A Boundary Integral Method Applied to Plates of Arbitrary Plan Form and Arbitrary Boundary Conditions", Comp. Struct., Vol.10, 1979, pp.703-707.
- [24] Stern, M., "A General Boundary Integral Formulation for the Numerical Solution of Plate Bending Problems", Int. J. Solids Struct., Vol.15, 1979, pp.769-782.
- [25] Stanisic, M. M. and Lafayette, W., "On the Response of Thin Elastic

- Plates by Means of Green's Functions", *Ing. Arch.*, Vol.48, 1979, pp.279-288.
- [26] Danson, D. J., "Analysis of Plate Bending Problems by the Direct Boundary Element Methods", M. Sc. Dissertation, Univ. of Southampton, 1979.
 - [27] Tottenham, H., "The Boundary Element Method for Plates and Shells", *Developments in Boundary Element Methods - 1*, Banerjee, P. K. and Butterfield, R. eds., Applied Science Publishers, 1979, pp.175-205.
 - [28] 丹羽・小林・北原、"積分方程式法による平板の固有振動問題の解析"、土木学会論文報告集、304号、1980、pp.1-16.
 - [29] Bezine, G., "A Mixed Boundary Integral-Finite Element Approach to Plate Vibration Problems", *Mech. Res. Comm.*, Vol.7, 1980, pp.141-150.
 - [30] Morjaria, M. and Mukherjee, S., "Inelastic Analysis of Transverse Deflection of Plates by the Boundary Element Method", *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, Vol. 47, 1980, pp.291-296.
 - [31] Bezine, G., "Application of Similarity to Research of New Boundary Integral Equations for Plate Flexure Problems", *Appl. Math. Modelling*, Vol.5, 1981, pp.66-70.
 - [32] Bezine, G., "A Boundary Integral Equation Method for Plate Flexure with Conditions Inside the Domain", *Int J. Num. Meth. Eng.*, Vol.17, 1981, pp.1647-1657.
 - [33] Wu, B. C. and Altiero, N. J., "A New Numerical Method for the Analysis of Anisotropic Thin-Plate Bending Problems", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol.25, 1981, pp.343-353.
 - [34] Wong, G. K. K. and Hutchinson, J. R., "An Improved Boundary Element Method for Plate Vibrations", *Proc. Third Int. Conf. Boundary Element Methods Eng*, Brebbia, C. A. ed., Springer-Verlag, 1981, pp.272-289.
 - [35] Antes, H., "On Boundary Integral Equations for Circular Cylindrical Shells", *Proc. Third Int. Conf. Boundary Element Methods Eng*, Brebbia, C. A. ed., Springer-Verlag, 1981, pp.224-237.

- [36] Hartmann, F., "Elastostatics", Progress in Boundary Element Methods, Vol.1, Brebbia, C. A. ed., Pentech Press, 1981, pp.84-167.
- [37] Irschik, H. and Ziegler, F., "Application of the Green's Function Method to Thin Elastic Polygonal Plates", Acta Mech., Vol.39, 1981, pp. 155-169.
- [38] Weeen, F. V., "Application of the Boundary Integral Equation Method to Reissner's Plate Model", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.18, 1982, pp.1-10.
- [39] Gospodinov, G. and Ljutskanov, D., "The Boundary Element Method Applied to Plates", Appl. Math. Modelling, Vol.6, 1982, pp.237-244.
- [40] Mukherjee, S., Boundary Element Method in Creep and Fracture, Applid Science Publishers, 1982.
- [41] Weeen, F. V., "Application of the Direct Boundary Element Method to Reissner's Plate Model", Proc. Fourth Int. Conf. Boundary Element Methods Eng., Brebbia, C. A. ed., Springer-Verlag, 1982, pp.487-499.
- [42] Du, Q. and Yao, Z. H., "Applications of the Boundary Element Method to Two and Three Dimensional Stress analysis and Plate Bending Problems in Elasticity", Proc. Fourth Int. Conf. Boundary Element Methods Eng., Brebbia, C. A. ed., Springer-Verlag, 1982, pp.269-281.
- [43] Tanaka, M., "Integral Equation Approach to Small and Large Displacements of Thin Elastic Plates", Proc. Fourth Int. Conf. Boundary Element Methods Eng., Brebbia, C. A. ed., Springer-Verlag, 1982, pp.526-539.
- [44] Kim, J. W., "On the Computation of the Stress Intensity Factors in Elastic Plate Flexure via Boundary Integral Equations", Proc. Fourth Int. Conf. Boundary Element Methods Eng., Brebbia, C. A. ed., Springer-Verlag, 1982, pp.540-553.
- [45] Irschik, H., "Ein Randintegralgleichungsverfahren fur Temperaturmomentbeanspruchte Platten", Ing. Arch., Vol.53, 1983, pp.197-207.
- [46] Stern, M., "Boundary Integral Equations for Bending of Thin Plates", Progress in Boundary Element Methods, Vol.2, Brebbia, C. A. ed., Pentech Press, 1983, pp.158-181.

- [47] Tosaka, N. and Miyake, S., "A Boundary Integral Equation Formulation for Elastic Shallow Shell Bending Problems", Proc. Fifth Int. Conf. Boundary Elements, Brebbia, C. A., Futagami, T. and Tanaka, M. eds., Springer-Verlag, 1983, pp.527-538.
- [48] Xiangfu, C. and Rong, Q., "Spline Function Used in Boundary Element Methods", Proc. Fifth Int. Conf. Boundary Elements, Brebbia, C. A., Futagami, T. and Tanaka, M. eds., Springer-Verlag, 1983, pp.539-548.
- [49] Okada, H., Fujimoto, M. and Abe, H., "Elasto-Plastic Instability Analysis of Thin Plates", Proc. Fifth Int. Conf. Boundary Elements, Brebbia, C. A., Futagami, T. and Tanaka, M. eds., Springer-Verlag, 1983, pp.589-597.
- [50] Sladek, J. and Sladek, V., "The BIE Analysis of the Berger Equation", Ing. Arch., Vol.53, 1983, pp.385-397.
- [51] Bezine, G., "Thin Plates Buckling Analysis by the Boundary Integral Equations Method (in French)", Proc. Third Int. Symp. Num. Meth. Eng., Lascaux, P. ed., Pluralis, 1983, pp.723-729.
- [52] Irschik, A., "A Boundary Integral Equation Method for Bending of Orthotropic Plates", Int. J. Solids Struct., Vol.20, 1984, pp.245-255.
- [53] Du, Q., Yao, Z and Song, G., "Solution of Some Plate Bending Problems Using the Boundary Element Method", Appl. Math. Modelling, Vol.8, 1984, pp.15-22.
- [54] Katsikadelis, J. T. and Armenakas, A. E., "Analysis of Clamped Plates on Elastic Foundation by the Boundary Integral Equation Method", Trans. ASME, J. Appl. Mech., Vol.51, 1984, pp.574-580.
- [55] Katsikadelis, J. T. and Armenakas, A. E., "Plates on Elastic Foundation by BIE Method", Proc. ASCE, J. Eng. Mech., EM-7, Vol.110, 1984, pp.1086-1105
- [56] Tanaka, M., "Large Deflection Analysis of Thin Plates", Developments in Boundary Element Methods - 3, Bernerjee, P. K. and Mukherjee, S eds., Elsevier Applied Science Publishers, 1984, pp.115-136.

- [57] Bezine, G. and Fortune, D., "Contact Between Plates by a New Direct Boundary Integral Equation Formulation", Int. J. Solids Struct., Vol.20, 1984, pp.739-746.
- [58] Balas, J., Sladek, V. and Sladek, J., "The Boundary Integral Equation Method for Plates Resting on a Two-Parametric Foundation", Ziet. Ang. Math. Mech., Vol.64, 1984, pp.137-146.
- [59] Stern, M., "Plate Bending Problems", Boundary Element Techniques in Computer-Aided Engineering, Brebbia, C. A. ed., Martinus Nijhoff Publishers, 1984, pp.315-325
- [60] Stern, M., "Formulation for Cracks in Plate Bending", Boundary Element Techniques in Computer-Aided Engineering, Brebbia, C. A. ed., Martinus Nijhoff Publishers, 1984, pp.343-353.
- [61] Mathiak, F. U., "Die Singularitatenmethode in der Theorie einer Schubelastischen Isotropen Platten", Ing. Arch., Vol.54, 1984, pp.427-439.
- [62] Costa, Jr. J. A. and Brebbia C. A., "Plate Bending Problem Using B.E.M.", Proc. Sixth Int. Conf. Boundary Elements, Brebbia, C. A. ed., Springer-Verlag, 1984, pp.3/43-63.
- [63] Gospodinov, G., "The Boundary Element Method Applied to Shallow Spherical Shells", Proc. Sixth Int. Conf. Boundary Elements, Brebbia, C. A. ed., Springer-Verlag, 1984, pp.3/65-77.
- [64] Tepavitcharov, A and Gospodinov, G., "The Boundary Integral Equation Method Applied to Shallow Membrane Shells of Positive Gaussian Curvature", Appl. Math. Modelling, Vol.8, 1984, pp.179-187.
- [65] Bezine, G. and Bonneau, D., "On a Procedure for Numerical Evaluation of Surface Integrals in Two-Dimensional Boundary Integral Equation Method", Eng. Anal., Vol.2, 1985, pp.2-8.
- [66] Bezine, G., Cimetiere, A. and Gelbert, J. P., "Unilateral Buckling of Thin Plates by the Boundary Integral Equation Method", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.21, 1985, pp.2189-2199.

- [67] Ye, T. Q. and Liu, Y., "Finite Deflection Analysis of Elastic Plate by the Boundary Element Method", Appl. Math. Modelling, Vol.9, 1985, pp.183-188.
- [68] Costa, Jr. J. A. and Brebbia, C. A., "Bending of Plates on Elastic Foundations Using the Boundary Element Method", Proc. Second Int. Conf. Variational Meth. Eng., Brebbia, C. A. ed., Springer-Verlag, 1985, pp.5/23-33.
- [69] Tosaka, N. and Miyake, S., "Bending Analysis of Shallow Spherical Shells Using the Boundary Element Method", Theor. Appl. Mech., Vol.33, 1985, pp.195-204.
- [70] 田中・宮崎、"平板の弾性曲げ解析に対する直接法BEMについての一考察"、日本機械学会論文集 (A編)、51巻、1985, pp.1636-1641.
- [71] Hartmann, F., "A Note on the Domain Force Integral of Kirchhoff Plates", Eng. Anal., Vol.2, 1985, pp.111-112.
- [72] Tanaka, M. and Miyazaki, K., "A Direct BEM for Elastic Plate-Structures Subjected to Arbitrary Loadings", Proc. Seventh Int. Conf. Boundary Elements, Brebbia, C. A. and Maier, G. eds., Springer-Verlag, 1985, pp.4/3-16.
- [73] Paris, F. and Leon, S., "An Alternative Analysis of Thin Elastic Plates with Any Boundary Conditions, Using BEM", Proc. Seventh Int. Conf. Boundary Elements, Brebbia, C. A. and Maier, G. eds., Springer-Verlag, 1985, pp.4/17-28.
- [74] Costa, Jr. J. A. and Brebbia, C. A., "Elastic Buckling of Plates Using the Boundary Element Method", Proc. Seventh Int. Conf. Boundary Elements, Brebbia, C. A. and Maier, G. eds., Springer-Verlag, 1985, pp.4/29-42.
- [75] Tosaka, N. and Miyake, S., "Nonlinear Analysis of Elastic Shallow Shell by Boundary Element Method", Proc. Seventh Int. Conf. Boundary Elements, Brebbia, C. A. and Maier, G. eds., Springer-Verlag, 1985, pp.4/43-52.
- [76] Tepavitcharov, A. D., "Fundamental Solution and Boundary Integral

Equations in the Bending Theory of Shallow Spherical Shells", Proc. Seventh Int. Conf. Boundary Elements, Brebbia, C. A. and Maier, G. eds., Springer-Verlag, 1985, pp.4/53-62.

- [77] Wener, H. and Protopsaltis, B., "A Boundary Superposition Element Method of the Kirchhoff Plate Bending Problem", Proc. Seventh Int. Conf. Boundary Elements, Brebbia, C. A. and Maier, G. eds., Springer-Verlag, 1985, pp.4/63-80.
- [78] Zotemantel, R., "Numerical Solution of Plate Bending Problems Using the Boundary Element Method", Proc. Seventh Int. Conf. Boundary Elements, Brebbia, C. A. and Maier, G. eds., Springer-Verlag, 1985, pp.4/81-91.
- [79] Hadjиков, L. M., Marginov, S. and Bekyarova, P. T., "Cubic Spline Boundary Element Method for Circular Cylindrical Shells", Proc. Seventh Int. Conf. Boundary Elements, Brebbia C. A. and Maier, G. eds, Springer Verlag, 1985, pp.4/93-102.
- [80] Paris, F. and Leon, S., "Simply Supported Plates by the Boundary Integral Equation Method", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.23, 1986, pp. 173-191.
- [81] Puttonen, J. and Varpasuo, P., "Boundary Element Analysis of a Plate on Elastic Foundation", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.23, 1986, pp.287-303.
- [82] Hartmann, F. and Zotemantel, R., "The Direct Boundary Element Method in Plate Bending", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.23, 1986, pp.2049-2069.
- [83] Gou-shu, S. and Mukherjee, S., "Boundary Element Method Analysis of Bending of Elastic Plates of Arbitrary Shape with General Boundary Conditions", Eng. Anal., Vol.3, 1986, pp.36-44.
- [84] Moshaiov, A. and Vorus, W. S., "Elasto-Plastic Plate Bending Analysis by a Boundary Element Method with Initial Plastic Moments", Int. J. Solids Struct., Vol.22, 1986, pp.1213-1229.
- [85] Stern, M., "Thin Elastic Plates in Bending", Developments in Boundary Element Methods - 4, Banerjee, P. K. and Watson, J. O. eds., Elsevier Applied Science Publishers, 1986, pp.91-119.

- [86] Miller, R. D., "Comparison of the Boundary Element Method and the Finite Element Method for the Solution of a Uniformly Loaded Circular Plate", Proc. Second Boundary Element Technology Conf., Connor, J. J. and Brebbia, C. A. eds., A Computational Mechanics Publication, 1986, pp.521-537.
- [87] Simos, N. and Sadegh, A. M., "An Indirect Boundary Integral Equation for Spherical Shells", Proc. Second Boundary Element Technology Conf., Connor, J. J. and Brebbia, C. A. eds., A Computational Mechanics Publication, 1986, pp.539-553.
- [88] Moshaiov, A. and Vorus, W. S., "Thermo-Elastic-Plastic Plate Bending by Boundary Element Method with Initial Plastic Moments", Proc. Second Boundary Element Technology Conf., Connor, J. J. and Brebbia, C. A. eds., A Computational Mechanics Publication, 1986, pp.567-594.
- [89] Du, Q. H. and Lu, X. L., "Some Further Works for the Kirchhoff Plate Bending Problems by Highly Conforming Boundary Element Method", Proc. Eighth Int. Conf. Boundary Elements, Tanaka, M. and Brebbia, C. A. eds., Springer-Verlag, 1986, pp.475-485.
- [90] Tosaka, N and Miyake, S., "Geometrically Nonlinear Analysis of Shallow Spherical Shell Using An Integral Equation Method", Proc. Eighth Int. Conf. Boundary Elements, Tanaka, M. and Brebbia, C. A. eds., Springer-Verlag, 1986, pp.537-546.
- [91] Tanaka, M. and Miyazaki, K., "Elastic Buckling Analysis of Assembled Plate Structures by Boundary Element Method", Proc. Eighth Int. Conf. Boundary Elements, Tanaka, M. and Brebbia, C. A. eds., Springer-Verlag, 1986, pp.547-559.
- [92] Tosaka, N. and Miyake, S., "Large Deflection Analysis of Shallow Spherical Shell Using an Integral Equation Method", Boundary Elements, Proc. Int. Conf., Du, Q. ed., Pergamon Press, 1986, pp.59-66.
- [93] Zhang, J. D. and Atluri, S. N., "Nonlinear Quasi-Static and Transient Response Analysis of Shallow Shells: Formulations and Interior/Boundary Element Algorithms", Boundary Elements, Proc. Int. Conf., Du, Q. ed.,

Pergamon Press, 1986, pp.87-109.

- [94] Mukherjee, S. and Poddar, B., "An Integral Equation Formulation for Elastic and Inelastic Shell Analysis", Boundary Elements, Proc. Int. Conf., Du, Q. ed., Pergamon Press, 1986, pp.353-365.
- [95] Ye, T. Q. and Liu, Y., "Finite Deflection Analysis of Heated Elastic Plates by the Boundary Element Method", Boundary Elements, Proc. Int. Conf., Du, Q. ed., Pergamon Press, 1986, pp.367-374.
- [96] Wang, Y. C., Ye, J. Q. and Wang, Z. H., "Spline Boundary Element Method for Shallow Thin-Shells", Boundary Elements, Proc. Int. Conf., Du, Q. ed., Pergamon Press, 1986, pp.375-382.
- [97] Zastrow, U., "A Boundary Integral Equation for Anisotropic Plates with Simply-Supported Smooth Edges", Boundary Elements, Proc. Int. Conf., Du, Q. ed., Pergamon Press, 1986, pp.393-402.
- [98] Lu, X. and Du, Q., "Boundary Element Method for Kirchhoff Type Plate Bending Problems by the Nonsingular Integration Technique", Boundary Elements, Proc. Int. Conf., Du, Q. ed., Pergamon Press, 1986, pp.403-409.
- [99] Feng, Z. and Li, Z., "Application of Boundary Element Method in Bending Problem of Thin Plates with Large Deflection", Boundary Elements, Proc. Int. Conf., Du, Q. ed., Pergamon Press, 1986, pp.411-418.
- [100] Ye, B., "Boundary Element Analysis of Laminated Plates", Boundary Elements, Proc. Int. Conf., Du, Q. ed., Pergamon Press, 1986, pp.419-426.
- [101] Wang, Y. C., Jiang, L. Z., Li, J. and Wang, Z. H., "Spline Boundary Element Method for Plate Bending Problems", Boundary Elements, Proc. Int. Conf., Du, Q. ed., Pergamon Press, 1986, pp.427-436.
- [102] Lei, X. and Huang, M., "Mixed Method of BIEM and FEM to Solve Free Vibration of Reissner's Plate", Boundary Elements, Proc. Int. Conf., Du, Q. ed., Pergamon Press, 1986, pp.455-460.
- [103] Yao, M., "A Simplified Boundary Integral Equation Formulation for Free

Vibration Analysis of Thin Plate", Boundary Elements, Proc. Int. Conf., Du, Q. ed., Pergamon Press, 1986, pp.475-482.

- [104] 田中・宮崎、"組立板構造物の弾性座屈問題に対する境界要素法"、日本機械学会論文集 (A編)、53巻、1987, pp.70-76.
- [105] Liu, Y., "Elastic Stability Analysis of Thin Plate by the Boundary Element Method - A New Formulation", Eng. Anal., Vol.4, 1987, pp.160-164.
- [106] Brebbia, C. A. and Long, S. Y., "Boundary Element Analysis of Plates Using Reissner's Theory", Proc. Ninth Int. Conf. Boundary Elements, Vol.2, Brebbia, C. A., Wendland, W. L. and Kuhn, G. eds., Springer-Verlag, 1987, pp.3-18.
- [107] Costabel, M., Lusikka, I. and Saranen, J., "Comparison of Three Boundary Element Approaches for the Solution of the Clamped Plate Problem", Proc. Ninth Int. Conf. Boundary Elements, Vol.2, Brebbia, C. A., Wendland, W. L. and Kuhn, G. eds., Springer-Verlag, 1987, pp.19-34.
- [108] Irschik, H., Heuer, R. and Ziegler, F., "BEM Using Green's Functions of Rectangular Domains: Static and Dynamic Problems of Bending of Plates", Proc. Ninth Int. Conf. Boundary Elements, Vol.2, Brebbia, C. A., Wendland, W. L. and Kuhn, G. eds., Springer-Verlag, 1987, pp.35-49.
- [109] Katsikadelis, J. T. and Sapountzakis, E. J., "Numerical Evaluation of the Green Function for the Biharmonic Equation Using BEM with Application to Static and Dynamic Analysis of Plates", Proc. Ninth Int. Conf. Boundary Elements, Vol.2, Brebbia, C. A., Wendland, W. L. and Kuhn, G. eds., Springer-Verlag, 1987, pp.51-67.
- [110] Lei, X. and Huang, M., "Boundary Element Method for Shallow Spherical Shell Bending Problems Involving Shear Deformation", Proc. Ninth Int. Conf. Boundary Elements, Vol.2, Brebbia, C. A., Wendland, W. L. and Kuhn, G. eds., Springer-Verlag, 1987, pp.69-79.
- [111] Providakis, C. P. and Beskos, D. E., "Forced Vibrations of Plates and Shells by Boundary-Interior Elements", Proc. Ninth Int. Conf. Boundary Elements, Vol.2, Brebbia, C. A., Wendland, W. L. and Kuhn, G. eds.,

Springer-Verlag, 1987, pp.97-109.

- [112] Wang, Y., Jiang, L. and Wang, Z., "Spline Boundary Element Method for Reissner's Plate and Its Application on Foundation Plates", Proc. Ninth Int. Conf. Boundary Elements, Vol.2, Brebbia, C. A., Wendland, W. L. and Kuhn, G. eds., Springer-Verlag, 1987, pp.111-125.
- [113] Washizu, K., Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, 1968.
- [114] Boley, B. A. and Weiner, J. H., Theory of Thermal Stresses, John Wiley and Sons, 1960.
- [115] Lukasiewicz, S., Local Loads in Plates and Shells, Sijthoff and Noordhoff International Pub., 1979.
- [116] Way, S., "Uniformly Loaded, Clamped, Rectangular Plates with Large Deflection", Proc. Fifth Int. Cong. Appl. Mech., John Wiley, 1938, pp.123-128.
- [117] Way, S., "Bending of Circular Plates with Large Deflections", Trans. ASME, Vol.56, 1934, pp.627-636.
- [118] Pal, M. C., "Large Deflections of Heated Circular Plates", Acta Mech., Vol.8, 1969, pp.82-103.
- [119] Nowinski, J. L. and Ismail, A., "Certain Approximate Analyses of Large Deflections of Cylindrical Shells", Ziet. Ang. Math. Phys., Vol.15, 1964, pp.449-456.
- [120] Nash, W. A. and Modeer, J. R., "Certain Approximate Analyses of the Nonlinear Behaviors of Plates and Shallow Shells", Proc. Symp. Theory of Thin Elastic Shells, IUTAM, 1960, pp.331-354.
- [121] Sinha, S. N., "Large Deflections of Plates on Elastic Foundations", Proc. ASCE, J. Eng. Mech., Vol.89, EM-1, 1963, pp.1-24.
- [122] Nowinski, J. L. and Ohnabe, H., "Fundamental Equations for Large Deflections of Sandwich Plates with Orthotropic Core and Faces", Proc. Tenth Int. Symp. Space Technology and Science, Univ. of Tokyo Press,

1975, pp.311-318.

- [123] Kamiya, N., "Governing Equations for Large Deflections of Sandwich Plates", AIAA J., Vol.14, 1976, pp.250-253.
- [124] Kamiya, N., "Analysis of the Large Thermal Bending of Sandwich Plates by a Modified Berger Method", J. Strain Anal., Vol.13, 1978, pp.17-22.
- [125] Brebbia, C. A. and Nardini, D., "Dynamic Analysis in Solid Mechanics by Alternative Boundary Element Procedure", Int. J. Soil Dynamics and Earthquake Eng., Vol.2, 1983, pp.228-233.
- [126] Wrobel, L. C., Telles, J. C. F. and Brebbia, C. A., "A Dual Reciprocity Boundary Element Formulation for Axisymmetric Diffusion Problems", Proc. Eighth Int. Conf. Boundary Elements, Tanaka, M. and Brebbia, C. A. eds., Springer-Verlag, 1986, pp.59-69.
- [127] Cruse, T. A., "Boundary-Integral Equation Method for Three Dimensional Elastic Fracture Mechanics Analysis", AFOSR-TR-75-0813, Pratt and Whitney Aircraft, 1975.
- [128] Cruse, T. A., Snow, D. W. and Wilson, R. B., "Numerical Solutions in Axisymmetric Elasticity", Comp. Struct., Vol.7, 1977, pp.445-451.
- [129] Rizzo, F. J. and Shippy, D. J., "An Advanced Boundary Integral Equation Method for Three-Dimensional Thermoelasticity", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.11, 1977, pp.1753-1768.
- [130] Danson, D. J., "Linear Isotropic Elasticity with Body Forces", Progress in Boundary Element Methods, Vol.2, Brebbia, C. A. ed., Pentech Press, 1983, pp.101-135.
- [131] 蔦・山地、"物体力、熱伝導、熱応力およびクリープ場の境界要素法とその効率化"、日本機械学会論文集(A編)、49巻、1983、pp.1235-1242.
- [132] Kamiya, N., Sawaki, Y. and Nakamura, Y., "Thermal Bending Analysis by Boundary Integral Equation Method", Mech. Res. Comm., Vol.8, 1981, pp.369-373.
- [133] Kamiya, N. and Sawaki, Y., "An Integral Equation Approach to Finite

Deflection of Elastic Plates", Int. J. Non-Linear Mech., Vol.17, 1982, pp.187-194.

- [134] Kamiya, N., Sawaki, Y., Nakamura, Y. and Fukui, A., "An Approximate Finite Deflection Analysis of a Heated Elastic Plate by the Boundary Element Method", Appl. Math. Modelling, Vol.6, 1982, pp.23-27.
- [135] Kamiya, N. and Sawaki, Y., "Integral Equation Formulation for Non-linear Bending of Plates - Formulation by Weighted Residual Method", Zeit. Ang. Math. Mech., Vol.62, 1982, pp.651-655.
- [136] Kamiya, N. and Sawaki, Y., "A General Boundary Element Method for Bending Analysis of Orthotropic Elastic Plates", Res Mech., Vol.5, 1982, pp.329-334.
- [137] Kamiya, N. and Sawaki, Y., "A Simplified Nonlinear Bending Analysis of Flat Plates and Shallow Shells by Boundary Element Approach Based on Berger Equation", Proc. Int. Conf. Num. Meth. Ind. Forming Processes, Pittman, J. F. T., Wood, R. D., Alexander, J. M. and Zienkiewicz, O. C. eds., Pineridge Press, 1982, pp.289-297.
- [138] Kamiya, N., Sawaki, Y. and Nakamura, Y., "Boundary Element Nonlinear Bending Analysis of Clamped Sandwich Plates and Shells", Proc. Fourth Int. Conf. Boundary Element Methods Eng., Brebbia, C. A. ed., Springer Verlag, 1982, pp.515-525.
- [139] Kamiya, N., Sawaki, Y. and Nakamura, Y., "Nonlinear Bending Analyses of Heated Sandwich Plates and Shells by the Boundary Element Method", Res Mech., Vol.8, 1983, pp.29-38.
- [140] Kamiya, N., "Boundary Element Bending Analysis of Heated Elastic Plates", Appl. Math. Modelling, Vol.7, 1983, pp.377-379.
- [141] Kamiya, N. and Sawaki, Y., "Boundary Element Method Applied to Finite Deflections of Shallow Elastic Shells", Proc. Third Int. Symp. Num. Meth. Eng., Lascaux, P. ed., Pluralis, 1983, pp.739-748.
- [142] Kamiya, N., Sawaki, Y. and Nakamura, Y., "Finite and Postbuckling Deformations of Heated Plates and Shallow Shells", Proc. Fifth Int.

- Conf. Boundary Elements, Brebbia, C. A., Futagami, T. and Tanaka, M. eds., Springer-Verlag, 1983, pp.507-516.
- [143] Kamiya, N. and Sawaki, Y., "Boundary Element Method Applied to Finite Deflection Analysis of Plates and Shells", Res. Rep. Fac. Eng., Mie Univ., Vol.8, 1983, pp.77-99.
- [144] Kamiya, N. and Sawaki, Y., "Postbuckling Analysis by the Boundary Element Method", Eng. Anal., Vol.1, 1984, pp.40-44.
- [145] Kamiya, N. and Sawaki, Y., "The Boundary Integral Formulation for Inhomogeneous Differential Equations", Eng. Anal., Vol.1, 1984, pp.188-194.
- [146] Kamiya, N. and Sawaki, Y., "Boundary Integral Formulation for Plate Bending Problems", Mech. Res. Comm., Vol.11, 1984, pp.245-251.
- [147] 神谷・佐脇、"非同次方程式の境界要素法", 境界要素法論文集、1巻、1984、pp.121-126.
- [148] Kamiya, N. and Sawaki, Y., "Finite Deflection of Plates", Topics in Boundary Element Research, Vol.1, Brebbia, C. A. ed., Springer-Verlag, 1984, pp.204-224.
- [149] 神谷・佐脇、"境界要素法の有効利用に関する一考察", 日本機械学会論文集 (A編)、51巻、1985, pp.2327-2333.
- [150] Kamiya, N. and Sawaki, Y., "A Simplified Large Deflection Analysis of Plates Resting on Elastic Foundation: A Boundary Element Approach", Rev. Roum. Sci. Tech., Mec. Appl., Vol.30, 1985, pp.91-99.
- [151] Kamiya, N. and Sawaki, Y., "An Efficient BEM for Some Inhomogeneous and Nonlinear Problems", Proc. Seventh Int. Conf. Boundary Elements, Brebbia, C. A. and Maier, G. eds., Springer-Verlag, 1985, pp.13/59-68.
- [152] Kamiya, N. and Sawaki, Y., "An Alternative Boundary Element Analysis of Plates Resting on Elastic Foundation", Proc. Eighth Int. Conf. Boundary Elements, Tanaka, M. and Brebbia, C. A. eds., Springer-Verlag, 1986, pp.561-570.

- [153] Kamiya, N. and Sawaki, Y., "Boundary Element Analysis of Plate Bending Problem with Nonlinear Boundary Conditions", Boundary Elements, Proc. Int. Conf., Du, Q. ed., Pergamon Press, 1986, pp.383-392.
- [154] 神谷・佐脇、"非線形弾性支持平板の境界要素解析", 境界要素法論文集、3巻、1986、pp.99-104.
- [155] Kamiya, N. and Sawaki, Y., "Boundary Element Analysis of Nonlinear Bending of Sandwich Plates and Shallow Shells", Developments in Boundary Element Methods - 4, Banerjee, P. K. and Watson, J. O. eds., 1986, pp.121-148.
- [156] Kamiya, N. and Sawaki, Y., "The Plate Bending Analysis by the Dual Reciprocity Boundary Elements", Eng. Anal., (in Press).
- [157] 神谷・佐脇、"2重相反定理を用いた境界要素法による板曲げ解析", 境界要素法論文集、4巻、1987、pp.263-268.
- [158] Kamiya, N., "Geometrically Nonlinear Analysis of Elastic Plates by the Boundary Element Method", Proc. IUTAM Symp. on Advanced Boundary Element Methods, Cruse, T. A. ed., Springer-Verlag, 1987, pp. 189-196.