研究速報

摂動法による MAX SAT 近似アルゴリズムの改良

小野　孝男[†]　　平田　富夫[†]（正員）
浅野　孝夫[††]（正員）

Improvement of MAX SAT Approximation Algorithm with Perturbation

Takao ONO[†], *Nonmember*, Tomio HIRATA[†], and
Takao ASANO[††], *Members*

[†] 名古屋大学工学部，名古屋市
Faculty of Engineering, Nagoya University, Nagoya-shi, 464–8603 Japan
[††] 中央大学理工学部，東京都
Department of Information and System Engineering, Chuo University, Tokyo, 112–8551 Japan

あらまし　充足最大化問題（MAX SAT）とは正の重みの付いた節の集合が与えられたときに，充足する節の重みの和を最大にする変数への真理値の割当てを求める問題である．本論文では MAX SAT に対して Johnson のアルゴリズムと Goemans-Williamson の近似アルゴリズムを組み合わせた近似アルゴリズムを考え，得られる解に摂動を加えることで 0.7685-近似アルゴリズムが得られることを示す．

キーワード　近似アルゴリズム，充足最大化問題，摂動，確率アルゴリズム

1. まえがき

充足最大化問題（MAX SAT）とは CNF 論理式の節の集合 $\mathcal{C}=\{C_1,C_2,\ldots,C_L\}$ と各節 C_j に対する正の重み w_j が与えられたときに，充足する節の重みの和を最大にする変数 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ への真理値の割当てを求める問題である．この問題に対してはこれまでにもさまざまな研究がなされており，近似アルゴリズムとして Johnson のアルゴリズム [8] や，線形計画法や半定値計画法に緩和する Goemans-Williamson のアルゴリズム [6], [7] が知られている．また，これらのアルゴリズムを組み合わせて 0.7584-近似アルゴリズムが得られている [7].

本論文では近似アルゴリズムから得られる解をある確率で摂動させることを考える．多くのリテラルからなる節は摂動を加えることで簡単に充足させることができる．そのため，節に含まれるリテラルが少ない場合には良い解を生成するがリテラルの個数が多くなると悪い解しか保証できない近似アルゴリズムであっても摂動を加えれば性能を改良できると考えられる．この方法はもともと Crescenzi と Trevisan [5] が近似問題間のリダクションにおいて導入したものである．彼らは，この方法により PCP の手法を用いずに MAX 3-SAT が MAX NP-完全であることを示している．Andersson と Engebretsen は，この方法を集合分割問題（SET SPLITTING）の近似アルゴリズムを見つけるのに応用している [2]. 本論文では MAX SAT の近似アルゴリズムを改良するためにこの方法を用い，その結果 [7] のアルゴリズムが 0.7685-近似まで改良できることを示す．

以下，**2.** で必要な定義を行い，**3.** で本論文で用いる三つのアルゴリズムを簡単に述べる．次に近似アルゴリズムの解に摂動を加えたことによる影響を **4.** で調べ，これらのアルゴリズムを組み合わせた場合の近似率を **5.** で解析する．**6.** でその結果について考察する．

2. 定　　義

MAX SAT の解 $\boldsymbol{x}$ の重みを $w(\boldsymbol{x})$ で表す．すなわち $w(\boldsymbol{x})=\sum_{j:C_j\in\mathcal{C}(\boldsymbol{x})} w_j$ である．但し，$\mathcal{C}(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}$ によって充足される節の集合である．

［定義 1］　MAX SAT の近似アルゴリズム A を問題例 I に適用したときに得られる解を $\boldsymbol{x}_A(I)$，I の最適解を $\boldsymbol{x}_{opt}(I)$ とおく．このときすべての問題例 I に対して

$$\frac{w(\boldsymbol{x}_A(I))}{w(\boldsymbol{x}_{opt}(I))}\geq\alpha$$

が成り立つならば，A は α-近似アルゴリズムであると言う．

以下ではリテラルを k 個含む節の添字の集合を J_k $(k=1,2,\ldots)$ で表す．

3. 各アルゴリズムの概要

ここでは三つのアルゴリズムのそれぞれを簡単に記述する．

3.1 Johnson のアルゴリズム

各変数に独立に確率 p で 1 を，確率 $1-p$ で 0 を割り当てる確率的アルゴリズムを考える．$p=1/2$ とするのが Johnson のアルゴリズムである．その結果 k 個のリテラルを含む節 C_j は $1-1/2^k$ の確率で 1 になるのでこの確率的割当てによる解 $\boldsymbol{x}_J$ の重みの期待値 $E[w(\boldsymbol{x}_J)]$ について次の不等式が成り立つ．

$$E[w(\boldsymbol{x}_J)]\geq\sum_k\sum_{j\in J_k}\alpha_{1,k}w_j.$$

ここで $\alpha_{1,k}=1-1/2^k$ である．

3.2 線形緩和アルゴリズム，半定値緩和アルゴリズム

線形緩和アルゴリズムと半定値緩和アルゴリズムはそれぞれ [6], [7] で提案されたものである．いずれも近似率は近似解の重みと緩和した問題の最適解との比

で評価される．これら二つを組み合わせたアルゴリズムの近似率を評価するには二つの緩和問題の最適解を同じものにする必要がある．そのため，ここでは二つのアルゴリズムで用いる整数計画問題を統合する．そのような理由で，以下では [6] のアルゴリズムと同じ丸め方法を用いるものについては線形緩和アルゴリズムと呼ぶ．

節 C_j に肯定および否定で含まれる変数の添字の集合をそれぞれ I_j^+，I_j^- とおく．また，$+1$ または -1 の値をとる変数 $y_0, y_1, \ldots, y_n$ を導入し，リテラルを k 個含む節 $C = x_{i_1} \vee x_{i_2} \vee \ldots \vee x_{i_k}$ に対して

$$u(C) = \frac{1}{2k}\left[\sum_{j=1}^{k}(1 + y_0 y_{i_j}) + \sum_{1 \leqq j_1 < j_2 \leqq k}(1 - y_{i_{j_1}} y_{i_{j_2}})\right]$$

と定義する．但し変数 x_i が否定の形で含まれているならば y_i を $-y_i$ に置き換える．次の整数計画問題を考える．

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^{L} w_j z_j \\ \text{s.t.} \quad & z_j \leqq \sum_{i \in I_j^+} \frac{1 + y_0 y_i}{2} + \sum_{i \in I_j^-} \frac{1 - y_0 y_i}{2}, \\ & z_j \leqq u(C_j), \\ & z_j \leqq 1, \\ & |y_i| = 1. \end{aligned} \tag{1}$$

ここで，制約式は各 $j \in \{1, 2, \ldots, L\}$ と各 $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ に対するものを表している．

$x_i = 0$ のときに $y_i = -y_0$，$x_i = 1$ のときには $y_i = y_0$ であると対応付けすると，C が $\boldsymbol{x}$ で充足されないときにはすべての $1 \leqq j \leqq k$ に対して $x_{i_j} = 0$ なので $u(C) = 0$ となることがわかる．一方，C が $\boldsymbol{x}$ で充足される場合には C に含まれるリテラルには 1 であるものが存在し，このときには $u(C) \geqq 1$ となる．同様に，$\sum_{i \in I_j^+}(1 + y_0 y_i)/2 + \sum_{i \in I_j^-}(1 - y_0 y_i)/2$ も C が充足されなければ 0，充足されれば 1 以上となるので，問題 (1) は MAX SAT と等価である．

ここで変数 y_i をノルムが 1 の $n+1$ 次元ベクトル $\boldsymbol{v}_i$ に緩和し，2 変数の積 $y_i y_j$ を対応するベクトルの内積 $\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j$ で置き換えると次の問題が得られる．

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^{L} w_j z_j \\ \text{s.t.} \quad & z_j \leqq \sum_{i \in I_j^+} \frac{1 + \boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{v}_i}{2} + \sum_{i \in I_j^-} \frac{1 - \boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{v}_i}{2}, \\ & z_j \leqq u(C_j), \\ & z_j \leqq 1, \\ & \|\boldsymbol{v}_i\| = 1. \end{aligned} \tag{2}$$

内積 $\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j$ をスカラ変数 y_{ij} で置き直せばこの問題は半定値計画問題であり，半定値計画問題に対しては絶対誤差 ϵ の多項式時間近似アルゴリズムが知られている [1]．そこで得られた解 $(\boldsymbol{v}_0^*, \boldsymbol{v}_1^*, \ldots, \boldsymbol{v}_n^*, z_1^*, z_2^*, \ldots, z_L^*)$ は最適解に十分近く，これを使って次のようにして線形緩和アルゴリズムの近似解 $\boldsymbol{x}_L$ と半定値緩和アルゴリズムの近似解 $\boldsymbol{x}_S$ を求める．$\boldsymbol{x}_L$ を求めるには，変数 x_i に他の変数と独立に確率 $(1 + \boldsymbol{v}_0^* \cdot \boldsymbol{v}_i^*)/2$ で 1 を割り当てる．また $\boldsymbol{x}_S$ を求めるには，まずノルムが 1 のベクトル $\boldsymbol{r}$ をランダムに選び，$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v}_i^* > 0$ ならば $y_i = +1$，そうでなければ $y_i = -1$ とおく．そして $y_i = y_0$ ならば $x_i = 1$，$y_i = -y_0$ ならば $x_i = 0$ とおく．

このようにすると，それぞれの近似解の重みの期待値について次の不等式が成り立つ [6], [7]．

$$E[w(\boldsymbol{x}_L)] \geqq \sum_k \sum_{j \in J_k} \alpha_{2,k} w_j z_j^*,$$

$$E[w(\boldsymbol{x}_S)] \geqq \sum_k \sum_{j \in J_k} \alpha \alpha_k w_j z_j^*.$$

ここで

$$\alpha_{2,k} = 1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k,$$

$$\alpha = \min_{0 < \theta \leqq \pi} \frac{\theta/\pi}{(1 - \cos\theta)/2} = 0.87856\ldots,$$

$$\alpha_k = \begin{cases} 4k/(k+1)^2 & k \text{ が奇数のとき} \\ 4/(k+2) & k \text{ が偶数のとき} \end{cases}$$

である．以下では $\alpha\alpha_k = \alpha_{3,k}$ とおく．

4. 摂動の効果

リテラルを k 個含む節 C_j を考える．近似アルゴリズ

ムで得られた解の各変数の値を確率 p $(0 \leqq p < 1/2)$ で摂動させる，すなわち，確率 p で x_i の値を $1-x_i$ で置き換えるとすると C_j が1になる確率は次のように求めることができる．もとの解で $C_j=1$ であった場合には C_j に含まれるリテラルのうち少なくとも1個は1である．従って摂動を加えた後で $C_j=0$ となる確率はたかだか

$$\max_{1 \leqq i \leqq k} p^i (1-p)^{k-i} = p(1-p)^{k-1}$$

である．つまり，摂動させたあとでも $C_j=1$ のままである確率は $1-p(1-p)^{k-1}$ 以上である．一方，$C_j=0$ だった場合には C_j に含まれるすべてのリテラルが0であり，摂動を加えてそのうち少なくとも1個の値が変われば C_j の値は1となる．その確率は

$$1-(1-p)^k$$

である．

これらのことから摂動を加えないときに $C_j=1$ となる確率が β であれば，摂動させたあとで $C_j=1$ となる確率は少なくとも

$$\begin{aligned} pert_k(\beta, p) = \beta\bigl[1-p(1-p)^{k-1}\bigr] \\ +(1-\beta)\bigl[1-(1-p)^k\bigr] \end{aligned}$$

である．

5. 組み合わせたアルゴリズムの近似率の評価

我々が提案するアルゴリズムはJohnsonのアルゴリズム，線形緩和アルゴリズム，半定値緩和アルゴリズムのそれぞれの解に適切な摂動を加え，得られる解のうち最も良いものを出力するというアルゴリズムである．このアルゴリズムを A_{best} とする．一方，それぞれの解を確率 p で摂動させて得られる近似解をそれぞれ確率 $q_{1,p}$，$q_{2,p}$，$q_{3,p}$ で選ぶというアルゴリズムを A_{prob} とする．これらのアルゴリズムで得られる解をそれぞれ $\boldsymbol{x}_{best}$，$\boldsymbol{x}_{prob}$ とおくと $E[w(\boldsymbol{x}_{best})] \geqq E[w(\boldsymbol{x}_{prob})]$ である．以下では，A_{prob} の近似率を解析する．上の関係よりこの近似率は A_{best} の近似率である．

Johnsonのアルゴリズムによる解 $\boldsymbol{x}_J$ では，リテラルを k 個含む節 C_j が1となる確率は $1-1/2^k=\alpha_{1,k}$ である．従って $\boldsymbol{x}$ を確率 p で摂動させて得られる解の重みの期待値は少なくとも

$$\sum_k \sum_{j \in J_k} pert_k(\alpha_{1,k}, p) w_j$$

である．一方，線形緩和アルゴリズムによる解 $\boldsymbol{x}_L$ および半定値計画法緩和アルゴリズムによる解 $\boldsymbol{x}_S$ では，その丸め方法から k 個のリテラルからなる節 C_j に対して

$$\begin{aligned} &\Pr\{C_j(\boldsymbol{x}_L)=1\} \geqq \alpha_{2,k} z_j^*, \\ &\Pr\{C_j(\boldsymbol{x}_S)=1\} \geqq \alpha_{3,k} z_j^* \end{aligned}$$

が成り立ち[6],[7]，従って $\boldsymbol{x}_L$，$\boldsymbol{x}_S$ を確率 p で摂動させて得られる解の重みの期待値はそれぞれ少なくとも

$$\begin{aligned} &\sum_k \sum_{j \in J_k} pert_k(\alpha_{2,k} z_j^*, p) w_j, \\ &\sum_k \sum_{j \in J_k} pert_k(\alpha_{3,k} z_j^*, p) w_j \end{aligned}$$

である．$q_{1,p}$，$q_{2,p}$，$q_{3,p}$ の最適値を求めるには，摂動させる確率として $0 \leqq p < 1/2$ の範囲のすべての p を考えなければならない．しかし，これは不可能なのでこの範囲を離散化した集合 $P=\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ $(0=p_1<p_2<\cdots<p_m<1/2)$ を選び，摂動する確率はこの中から選ぶものとする．このようにすると $\boldsymbol{x}_{prob}$ の重みの期待値は

$$\begin{aligned} &E[w(\boldsymbol{x}_{prob})] \\ &\geqq \sum_k \Biggl[\sum_{p \in P} q_{1,p} \sum_{j \in J_k} pert_k(\alpha_{1,k}, p) w_j \\ &\quad + \sum_{i=2}^{3} \sum_{p \in P} q_{i,p} \sum_{j \in J_k} pert_k(\alpha_{i,k} z_j^*, p) w_j \Biggr] \end{aligned}$$

を満たす．$z_j^* \leqq 1$ であり，また

$$\begin{aligned} &pert_k(\alpha_{i,k} z_j^*, p) \\ &= \alpha_{i,k} z_j^* \bigl[1-p(1-p)^{k-1}\bigr] \\ &\quad + (1-\alpha_{i,k} z_j^*)\bigl[1-(1-p)^k\bigr] \\ &\geqq \alpha_{i,k} z_j^* \bigl[1-p(1-p)^{k-1}\bigr] \\ &\quad + (z_j^* - \alpha_{i,k} z_j^*)\bigl[1-(1-p)^k\bigr] \\ &= z_j^* \bigl\{\alpha_{i,k}\bigl[1-p(1-p)^{k-1}\bigr] \\ &\quad + (1-\alpha_{i,k})\bigl[1-(1-p)^k\bigr]\bigr\} \\ &= pert_k(\alpha_{i,k}, p) z_j^* \end{aligned}$$

なので

$$E[w(\boldsymbol{x}_{prob})]$$

$$\geq \sum_k \left[\sum_{p\in P} q_{1,p} \sum_{j\in J_k} pert_k(\alpha_{1,k},p) w_j + \sum_{i=2}^{3}\sum_{p\in P} q_{i,p} \sum_{j\in J_k} pert_k(\alpha_{i,k} z_j^*, p) w_j \right]$$

$$\geq \sum_k \left[\sum_{p\in P} q_{1,p} \sum_{j\in J_k} pert_k(\alpha_{1,k},p) z_j^* w_j + \sum_{i=2}^{3}\sum_{p\in P} q_{i,p} \sum_{j\in J_k} pert_k(\alpha_{i,k}, p) z_j^* w_j \right]$$

$$= \sum_k \sum_{i=1}^{3} \sum_{p\in P} \sum_{j\in J_k} q_{i,p} \cdot pert_k(\alpha_{i,k},p) z_j^* w_j$$

となる．さて，a はすべての k に対して $a \leq \sum_{i=1}^{3}\sum_{p\in P} q_{i,p} \cdot pert_k(\alpha_{i,k},p)$ を満たす実数とする．問題 (2) は MAX SAT を緩和した問題なので

$$\frac{E[w(\boldsymbol{x}_{prob})]}{w(\boldsymbol{x}_{opt})} \geq \frac{E[w(\boldsymbol{x}_{prob})]}{\sum_j w_j z_j^*} \geq \frac{\sum_k a \sum_{j\in J_k} w_j z_j^*}{\sum_k \sum_{j\in J_k} w_j z_j^*} \geq a$$

が成り立つ．この a の最大値を求めるため，次の最適化問題を考える．

$$\begin{aligned} \max \quad & a \\ \text{s.t.} \quad & a \leq \sum_{i=1}^{3}\sum_{p\in P} q_{i,p} \cdot pert_k(\alpha_{i,k},p),\ \forall k \\ & \sum_{i=1}^{3}\sum_{p\in P} q_{i,p} = 1, \\ & q_{i,p} \geq 0. \end{aligned} \tag{3}$$

ここで $P = \{0, 0.037\}$，$q_{1,0} = 0.4104$，$q_{2,0} = 0.4143$，$q_{3,0.037} = 0.1753$，$a = 0.7685$ とおくと $k \leq 25$ に対しては直接確かめることにより，また $k > 25$ に対しては

$$\begin{aligned} & q_{1,0}\cdot\alpha_{1,k} + q_{2,0}\cdot\alpha_{2,k} + q_{3,0.037}\cdot pert_k(\alpha_{3,k}, 0.037) \\ &= 0.4104\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) + 0.4143\left[1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k\right] \\ &\quad +0.1753[\alpha_{3,k}(1 - 0.037\cdot 0.963^{k-1}) \\ &\quad +(1-\alpha_{3,k})(1 - 0.963^k)] \\ &\geq 0.4104\left(1 - \frac{1}{2^{25}}\right) + 0.4143\left(1 - \frac{1}{e}\right) \\ &\quad +0.1753(1 - 0.963^{25}) \\ &= 0.77928\ldots \end{aligned}$$

を満たすことにより，すべての k に対して $a \leq \sum_{i=1}^{3}\sum_{p\in P} q_{i,p} pert_k(\alpha_{i,k},p)$ であることがわかる．従って Johnson のアルゴリズムで得られた解，線形緩和アルゴリズムで得られた解，それに半定値緩和アルゴリズムで得られた解に 0.037 の確率で摂動を加えたものをそれぞれ 0.4104，0.4143，0.1753 の確率で選べば得られた解の重みの期待値は最適解の重みの 0.7685 倍以上となる．これは [4] で示された 0.76554 近似より良い結果である．

ここでは組み合わせたアルゴリズム全体を確率的アルゴリズムとして解析したが，Johnson のアルゴリズムと線形緩和アルゴリズムは条件付き期待値を用いてデランダマイズすることができる [10]．半定値緩和アルゴリズムについても，決定性アルゴリズムにできることが [9] で報告されており，摂動を加えてもその方法を適用することができる．これらのアルゴリズムから得られた解を選ぶことも最も重みの大きいものを選べばよいため，アルゴリズム全体を決定性アルゴリズムとして記述することができる．

6. 考　　察

ここでは上の結果が得られた理由について考察する．まず，半定値緩和アルゴリズムで得られた解にのみ摂動を加える理由を考える．Johnson のアルゴリズムで得られた解に対して確率 p で摂動を加えると，k 個のリテラルからなる節が 1 となる確率は $pert_k(\alpha_{1,k},p)$ である．ここで $pert_k(\alpha_{1,k},p) = \alpha_{1,k}[1-p(1-p)^{k-1}] + (1-\alpha_{1,k})[1-(1-p)^k] = f(p)$ とおくと $k=1$ のときには常に $f(p) = 1/2 = \alpha_{1,1}$ である．$k \geq 2$ のときは $f(0) = f(1/2) = 1 - 1/2^k$ であり，また

$$\begin{aligned} f'(p) &= -\alpha_{1,k}(1-p)^{k-1} \\ &\quad + (k-1)\alpha_{1,k} p (1-p)^{k-2} \\ &\quad + k(1-\alpha_{1,k})(1-p)^{k-1} \\ &= \big\{(2k\alpha_{1,k} - k)p \\ &\quad + [k - (k+1)\alpha_{1,k}]\big\}(1-p)^{k-2} \end{aligned}$$

において $f'(0)<0$, $f'(1/2)>0$ となることから $0<p<1/2$ で $f(p)<1-1/2^k=\alpha_{1,k}$ となる．つまり，Johnson のアルゴリズムで得られた解に摂動を加えてももとの解より性能が良くなることはない．一方，線型緩和アルゴリズムの解に摂動を加えることで組み合わせたアルゴリズムの近似率を改良することができるが，この場合には半定値緩和アルゴリズムの解にも摂動を加えることで更に改良することができる．実際，半定値緩和アルゴリズムの解に加える摂動の確率を増やし (3) と同様の線型計画問題を解いてみると性能は次第に改良され，それに伴い線型緩和アルゴリズムの解に加える摂動の確率は小さくなっていき，最終的には 0 となる．このことから半定値緩和アルゴリズムの解にのみ摂動を加え，Johnson のアルゴリズムの解と線型緩和アルゴリズムの解には摂動を加えないという結果が得られる．

次に，Johnson のアルゴリズムと線形緩和アルゴリズムの両方が必要である理由について考察する．そのため，半定値緩和アルゴリズムで得られた解に確率 p で摂動を加えるアルゴリズムを考える．このアルゴリズムによる近似率の上界は次の線形計画問題を解くことで求まる．

$$\begin{aligned}&\text{maximize} \quad a\\&\text{subject to} \quad a \leqq pert_k(\alpha_{3,k},p). \quad k=1,2,\ldots\end{aligned}$$

この解は $p=0.1884\ldots$ のときの $a=0.7359$ である．このとき $pert_1(\alpha_{3,1},p)=pert_3(\alpha_{3,3},p)=0.7359$ なので，近似率をこれより良くするにはリテラルが 1 個の節と 3 個の節の両方に対して近似率を改善する必要がある．Johnson のアルゴリズムは節に含まれるリテラルが多いほど近似率が良く，逆に線形緩和アルゴリズムは節に含まれるリテラルが少ないほど近似率が良いので，この両方を組み合わせることでリテラルが 1 個の節と 3 個の節の両方に対して近似率が改善できることになる．

7. むすび

半定値計画法に緩和するアルゴリズムで得られる近似解に対して適切に摂動を加えることで，Johnson のアルゴリズム，線形計画法に緩和するアルゴリズムと組み合わせて 0.7685-近似アルゴリズムが得られることを示した．摂動を加えない場合には同じ組合せで 0.758-近似アルゴリズムとなるので，摂動を加えることで近似率が改良されることがわかる．また，Yannakakis のアルゴリズムを組み合わせた [3] の 0.767-近似に対しても近似率を改良できたことになる．

謝辞 本研究の一部は柏森情報科学振興財団から援助を受けた．

文　献

[1] F. Alizadeh, “Interior point methods in semidefinite programming with applications to combinatorial optimization,” SIAM Journal on Optimization, vol.5, no.1, pp.13–51, 1995.

[2] G. Andersson and L. Engebretsen, “Better approximation algorithms and tighter analysis for set splitting and not-all-equal SAT,” Information Processing Letters, vol.201, 1997, to appear.

[3] T. Asano, K. Hori, T. Ono, and T. Hirata, “A refinement of Yannakakis's algorithm for MAX SAT,” Information Processing Society of Japan, SIGAL-TR-54-11, 1996.

[4] T. Asano, T. Ono, and T. Hirata, “Approximation algorithms for the maximum satisfiability problem,” Nordic Journal of Computing, vol.3, no.4, pp.388–404, 1996.

[5] P. Crescenzi and L. Trevisan, “Max NP-completeness made easy,” Manuscript, Dec. 1996.

[6] M.X. Goemans and D.P. Williamson, “New 3/4-approximation algorithms for the maximum satisfiability problem,” SIAM Journal on Discrete Mathematics, vol.7, no.4, pp.656–666, Nov. 1994.

[7] M.X. Goemans and D.P. Williamson, “Improved approtimation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming,” J. ACM, vol.42, pp.1115–1145, 1995.

[8] D.S. Johnson, “Approximation algorithms for combinatorial problems,” J. Computer & System Sciences, vol.9, pp.256–278, 1974.

[9] S. Mahajan and H. Ramesh, “Derandomizing semidefinite programming based approximation algorithms,” Proc. 36th FOCS, pp.162–169, 1995.

[10] R. Motwani and P. Raghavan, “Randomized Algorithms,” Cambridge University Press, Cambridge, New York, 1995.

(平成 10 年 1 月 7 日受付，3 月 16 日再受付)