

## $H_\infty$ フィルタを用いた非最小位相系の独立成分分析

福永 修<sup>†,††a)</sup> 藤本 健治<sup>†</sup>

Independent Component Analysis for Nonminimum Phase Systems

Using  $H_\infty$  Filters

Shuichi FUKUNAGA<sup>†,††a)</sup> and Kenji FUJIMOTO<sup>†</sup>

あらまし 動的システムに対する独立成分分析は、逆システムを推定することによって入力信号を復元する方法であるが、対象が非最小位相系であると逆システムが不安定になるため推定することができない。そこで本論文では、 $H_\infty$  フィルタを用いた非最小位相系の独立成分分析を提案する。 $H_\infty$  フィルタを用いて逆フィルタを構成し、システムのパラメータは Kullback-Leibler ダイバージェンスを最小化することによって推定する。そして、提案手法の有効性を数値例を用いて確認する。

キーワード 独立成分分析, 非最小位相系,  $H_\infty$  フィルタ, 状態空間モデル

### 1. ま え が き

独立成分分析とは観測信号のみから原信号を推定する方法である。この方法は音声信号処理や生体信号処理、画像処理、通信などへ応用されている。また、近年は制御工学の分野においてもいくつかの応用例が報告されている [1], [2]。

原信号と観測信号が静的な関係である場合は Blind Source Separation (BSS) と呼ばれ、多くのアルゴリズムが提案されてきた。しかし実問題を考えた場合は、原信号と観測信号は動的な関係になることが多い。また、制御工学の分野においては動的システムを扱うため blind deconvolution を考えなくてはならない。

Blind deconvolution に対する代表的な解法として FIR フィルタを用いた方法 [3], [4] や状態空間モデルを用いた方法 [5] ~ [7] が挙げられる。動的システムに対する独立成分分析は、逆システムを推定することによって入力信号を復元する方法として定式化できる。しかしこれらの方法は逆システムが安定であることを仮定している。対象となるシステムが非最小位相系の

場合は逆システムが不安定となるため従来法は適用することができない。また対象が最小位相系であっても逆システムのパラメータをオンラインで推定するために不安定になる可能性があり同様の問題が発生する。この問題に対して、Zhang らは FIR フィルタを用いた非最小位相系の独立成分分析を提案した [8]。この方法は逆システムを FIR フィルタを用いて近似している。しかしここで構成される逆フィルタは、非因果的であるため信号をオンラインで推定することができない。本研究では、状態空間モデルを用いて逆システムを近似し因果的な逆フィルタを構成することによって、信号をオンラインで推定する方法を提案する。

状態空間モデルを用いる利点として、制御工学の分野で得られた知見を利用できる点が挙げられる。実際に制御工学の分野では、非最小位相系に対して安定な逆システムを構成する研究がいくつか報告されている [9], [10]。その中の一つとして、George らは Stable Dynamic Model Inversion と呼ばれる方法を提案した [11], [12]。この方法は、カルマンフィルタを用いて逆フィルタを構成している。本研究では、この方法をもとに逆フィルタを設計する。この逆フィルタは因果的なフィルタであるため、信号をオンラインで推定することができる。また、Stable Dynamic Model Inversion では入力信号が正規分布に従うと仮定しているが、独立成分分析では非ガウス信号を扱う。そこでこの問題に対して本研究では、カルマンフィルタに

<sup>†</sup> 名古屋大学大学院工学研究科, 名古屋市  
Graduate School of Engineering, Nagoya University, Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya-shi, 464-8601 Japan

<sup>††</sup> 東京都立産業技術高等専門学校, 東京都  
Tokyo Metropolitan College of Industrial Technology, 1-10-40 Higashioi, Shinagawa-ku, Tokyo, 140-0011 Japan

a) E-mail: fukunaga@nagoya-u.jp

代わり信号に正規分布を仮定しない  $H_\infty$  フィルタ [13] を用いる．そして，フィルタによって推定された状態を使って入力信号を逆算する．また，システムのパラメータは Kullback-Leibler ダイバージェンスを評価関数とした最急降下法によって推定する．そして，提案手法の有効性を数値例を用いて示す．

本論文の構成は以下のとおりである．2. では  $H_\infty$  フィルタについて説明する．3. では提案手法である  $H_\infty$  フィルタを用いた非最小位相系の独立成分分析について述べる．4. では数値例を示す．最後に 5. でまとめとする．

## 2. $H_\infty$ フィルタの設計

本章では文献 [13] で提案された  $H_\infty$  フィルタについて説明する．

以下のシステムについて考える．

$$x_{t+1} = F_t x_t + G_t w_t$$

$$y_t = H_t x_t + v_t$$

ここで  $x_t \in \mathbb{R}^n$  はシステムの状態， $y_t \in \mathbb{R}^p$  は観測信号， $F_t \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ， $G_t \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ， $H_t \in \mathbb{R}^{p \times n}$  とする．また， $w_t \in \mathbb{R}^r$ ， $v_t \in \mathbb{R}^p$  は外乱であり，エネルギーが有界な雑音，すなわち与えられた  $N > 0$  に対して  $\sum_{t=0}^N \|w_t\|^2 < \infty$ ， $\sum_{t=0}^N \|v_t\|^2 < \infty$  と仮定する．

観測データに基づいて，状態ベクトルの線形結合

$$z_t = L_t x_t$$

を推定する問題を考える．ただし  $z_t \in \mathbb{R}^q$ ， $L_t \in \mathbb{R}^{q \times n}$  である．

有限時間  $H_\infty$  フィルタリング問題は与えられた  $\gamma > 0$  に対して

$$\sup_{x_0, v_t, w_t} \sum_{t=0}^N \|z_t - \hat{z}_t\|^2 / \left( \|x_0 - \hat{x}_0\|_{\Sigma_0^{-1}}^2 + \sum_{t=0}^N \|v_t\|_{R_t^{-1}}^2 + \sum_{t=0}^N \|w_t\|_{Q_t^{-1}}^2 \right) < \gamma^2 \quad (1)$$

を満足する  $z_t$  の推定値の最適値  $\hat{z}_t = \hat{z}_t^*$ ， $t = 0, 1, \dots, N$  を求める問題である．ただし  $\hat{x}_0$  は初期値  $x_0$  の推定値， $\Sigma_0 > 0$ ， $Q_t > 0$ ， $R_t > 0$  は初期値  $x_0$ ，外乱  $w_t$ ， $v_t$  に対する重み行列とする．ここでは式 (1) の不等式を満足する準最適  $H_\infty$  フィルタを求めることとなる． $\gamma$  の与え方の明確な指針はなく，適当な大きさの  $\gamma > 0$  から始めて， $\gamma$  の値を少しずつ減少

させながら解を繰り返し求めて，満足のいく解が得られるまでこの過程を続ける．しかし  $\gamma$  の値を小さくしすぎると準最適解は存在しなくなる．

この問題をミニマックス推定の立場から考えるために，次の評価関数を導入する．

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\hat{z}_t; x_0, v_t, w_t) &:= \sum_{N=0}^N \|z_t - \hat{z}_t\|^2 - \gamma^2 \left( \|x_0 - \hat{x}_0\|_{\Sigma_0^{-1}}^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{t=0}^N \|v_t\|_{R_t^{-1}}^2 + \sum_{t=0}^N \|w_t\|_{Q_t^{-1}}^2 \right) \quad (2) \end{aligned}$$

式 (1) の不等式条件は  $\mathcal{J}(\hat{z}_t; x_0, v_t, w_t) < 0$  が成立することと等価である．これは

$$\max_{x_0, v_t, w_t} \mathcal{J}(\hat{z}_t; x_0, v_t, w_t) < 0$$

を満足する  $\hat{z}_t$  を求める問題である．したがって，

$$\min_{\hat{z}_t} \max_{x_0, v_t, w_t} \mathcal{J}(\hat{z}_t; x_0, v_t, w_t) < 0$$

というミニマックス問題に帰着できる．

この問題を解いた解として最適値  $z_t^*$  と  $x_t$  の推定値は以下によって与えられる．

$$z_t^* = L_t \hat{x}_{t/t}$$

$$\hat{x}_{t+1/t} = F_t \hat{x}_{t/t}$$

$$\hat{x}_{t/t} = \hat{x}_{t/t-1} + K_t (y_t - H_t \hat{x}_{t/t-1})$$

ここで， $\hat{x}_{t+1/t}$  は  $x_t$  の予測値， $\hat{x}_{t/t}$  は  $x_t$  の推定値を表し

$$K_t := P_t H_t^T (H_t P_t H_t^T + R_t)^{-1}$$

とする．また， $P_t$  は以下を満たすものとする．

$$P_{t+1} = F_t P_t \Psi_t^{-1} F_t^T + G_t Q_t G_t^T \quad (3)$$

$$\Psi_t = I + (H_t^T R_t^{-1} H_t - \gamma^{-2} L_t^T L_t) P_t \quad (4)$$

ここで簡単に  $H_\infty$  フィルタとカルマンフィルタの関係について述べておく．式 (4) において  $\gamma \rightarrow \infty$  のとき  $\Psi \rightarrow I + H_t^T R_t^{-1} H_t P_t$  となるので式 (3) はカルマンフィルタのリカッチ方程式に帰着する．このことは  $\gamma \rightarrow \infty$  のとき式 (2) の右辺第 2 項が支配的になりミニマックス問題は通常のカルマンフィルタによる推定問題になることから分かる．

### 3. $H_\infty$ フィルタを用いた非最小位相系の独立成分分析

#### 3.1 問題設定

以下のシステムについて考える．

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= Ax_t + Bu_t \\ y_t &= Cx_t + Du_t \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 $x_t \in \mathbb{R}^n$  はシステムの状態、 $u_t \in \mathbb{R}^m$  は入力信号、 $y_t \in \mathbb{R}^m$  は観測信号、 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 、 $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 、 $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 、 $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$  とする．また、入力信号  $u_t$  に対して以下の仮定をおく．

[仮定 1] 入力信号  $u_t$  の各要素は互いに独立であり i.i.d. (independent and identically distributed) である．

このシステムにおいて、 $y_t$  のみを既知とし、 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $x_t$ 、 $u_t$  は未知である．ここでは、オンラインで  $u_t$  の推定値  $\hat{u}_t$  を求めることが目的である．そのためには  $x_t$  の推定値  $\hat{x}_{t/t}$  と  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  の毎時刻の推定値  $\hat{A}_t$ 、 $\hat{B}_t$ 、 $\hat{C}_t$ 、 $\hat{D}_t$  を求める必要があり、それぞれの推定方法を以下の節で述べることとする．

#### 3.2 近似的な逆フィルタの設計

従来の動的システムに対する独立成分分析は逆システムの安定性を仮定していたため、逆システムのパラメータを推定することによって入力信号が復元可能であった．しかし、本研究で対象とするシステムは非最小位相系であるため逆システムが不安定であり従来手法を適用することができない．そこで本研究では、 $H_\infty$  フィルタを用いて逆フィルタを構成することを考える．

Stable Dynamic Model Inversion ではシステム (5) に対してカルマンフィルタを構成することによって逆フィルタを設計していた．本研究ではシステム (5) に対して  $H_\infty$  フィルタを用いて逆フィルタ設計する．ただし、 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  は未知であるので、毎時刻の推定値  $\hat{A}_t$ 、 $\hat{B}_t$ 、 $\hat{C}_t$ 、 $\hat{D}_t$  を用いた以下の時変システムについて考える．

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \hat{A}_t x_t + \hat{B}_t u_t \\ y_t &= \hat{C}_t x_t + \hat{D}_t u_t \end{aligned} \quad (6)$$

このシステムに対して  $\hat{z}_t = L_t \hat{x}_{t/t}$  を推定する  $H_\infty$  フィルタは 2. より以下によって構成される．

$$\hat{x}_{t+1/t} = \hat{A}_t \hat{x}_{t/t}$$

$$\hat{x}_{t/t} = \hat{x}_{t/t-1} - K_t (\hat{D}_t^{-1} \hat{C}_t \hat{x}_{t/t-1} - \hat{D}_t^{-1} y_t) \quad (7)$$

ただし

$$\begin{aligned} K_t &:= P_t (\hat{D}_t^{-1} \hat{C}_t)^T (\hat{D}_t^{-1} \hat{C}_t \\ &\quad \times P_t (\hat{D}_t^{-1} \hat{C}_t)^T + R_t)^{-1} \end{aligned} \quad (8)$$

$$P_{t+1} = \hat{A}_t P_t \Psi_t^{-1} \hat{A}_t^T + \hat{B}_t Q_t \hat{B}_t^T \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Psi_t &= I + ((\hat{D}_t^{-1} \hat{C}_t)^T R_t^{-1} \hat{D}_t^{-1} \hat{C}_t \\ &\quad - \gamma^{-2} L_t^T L_t) P_t \end{aligned} \quad (10)$$

である．そしてフィルタ方程式 (7) によって推定された値  $\hat{x}_{t/t-1}$  を用いて入力信号を計算する．これはシステム (6) の第 2 式の  $u_t$  に関する逆を考えることによって得られる．したがって、観測信号  $y_t$  から入力の推定値  $\hat{u}_t$  を出力する逆フィルタが以下によって与えられる．

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t+1/t} &= \hat{A}_{s,t} \hat{x}_{t/t-1} + \hat{A}_t K_t \hat{D}_t y_t \\ \hat{u}_t &= -\hat{C}_t \hat{x}_{t/t-1} + \hat{D}_t y_t \end{aligned} \quad (11)$$

ただし  $\hat{A}_{s,t} = \hat{A}_t - \hat{A}_t K_t \hat{C}_t$ 、 $\hat{C}_t = \hat{D}_t^{-1} \hat{C}_t$ 、 $\hat{D}_t = \hat{D}_t^{-1}$  である． $\hat{D}_t^{-1} \hat{C}_t$ 、 $\hat{D}_t^{-1}$  は行列が特異になる場合計算できないため、これらを  $\hat{C}_t$ 、 $\hat{D}_t$  とおき逆行列を推定することによって特異点を回避することとする．またこのフィルタは、システム (5) の正確な逆になっているとは限らず、近似的な逆フィルタであることに注意する．そして、フィルタのミニマックス推定問題の解が存在する必要十分条件は以下の定理が得られている．

[定理 1][13]  $\hat{A}_t$  は正則であるとする．リカッチ方程式 (9) が正定値  $P_t$  をもち、かつ任意の  $t \in [0, N]$  に対して

$$\begin{aligned} \gamma^2 I - L_t \bar{P}_t L_t^T &> 0 \\ \bar{P}_t &= P_t (I + \hat{C}_t^T R^{-1} \hat{C}_t P_t)^{-1} \end{aligned}$$

が成立するとき、ミニマックス推定問題の解は一意的に存在する．

ここで  $P_t$  は、文献 [14] 命題 9.3 と文献 [13] 3.3 節注意より、初期値を  $P_0 > 0$  とし  $\gamma^2 I - L_t \bar{P}_t L_t^T > 0$  を満たす  $\gamma$  を設定すれば正定値となる．したがって、 $\hat{A}_t$  が正則であり、初期値を  $P_0 > 0$  とし  $\gamma^2 I - L_t \bar{P}_t L_t^T > 0$  を満たす  $\gamma$  を設定すれば、ミニマックス推定問題の解が常に存在する． $\gamma$  の設定方法は、値が十分大きけれ

ば  $\gamma^2 \mathbf{I} - \mathbf{L}_t \bar{\mathbf{P}}_t \mathbf{L}_t^T > 0$  を満たすため、最初はある程度の大きさに設定し、少しずつ減少させながら解を繰り返し求めて解が存在する範囲でこの過程をとめた値とする。

### 3.3 逆フィルタのパラメータ推定

本節では逆フィルタのパラメータの推定値  $\hat{\mathbf{A}}_t, \hat{\mathbf{B}}_t, \hat{\mathbf{C}}_t, \hat{\mathbf{D}}_t$  を求めるアルゴリズムを導出する。基本的な方針は、信号の独立性を測る評価関数を考えてそれを最適にするパラメータを最急降下法によって求めることである。

#### 3.3.1 独立性の基準

観測信号  $\mathcal{Y}$  と入力推定値  $\hat{\mathcal{U}}$  を以下のように定義する。

$$\mathcal{Y} := (\mathbf{y}_0^T, \mathbf{y}_1^T, \dots, \mathbf{y}_N^T)^T$$

$$\hat{\mathcal{U}} := (\hat{\mathbf{u}}_0^T, \hat{\mathbf{u}}_1^T, \dots, \hat{\mathbf{u}}_N^T)^T$$

入力の推定値  $\hat{\mathcal{U}}$  が空間的にも時間的にも独立であれば、その確率密度関数  $p(\hat{\mathcal{U}})$  は次式を満たす。

$$p(\hat{\mathcal{U}}) \equiv \prod_{i=1}^m \prod_{t=0}^N p(\hat{u}_{i,t})$$

$p(\hat{\mathcal{U}})$  と  $\prod_{i=1}^m \prod_{t=0}^N p(\hat{u}_{i,t})$  が一致するかどうかを、統計的な距離である Kullback-Leibler ダイバージェンスを用いて測ると、以下のように表すことができる。

$$I(\hat{\mathcal{U}}) := \int p(\hat{\mathcal{U}}) \log \frac{p(\hat{\mathcal{U}})}{\prod_{i=1}^m \prod_{t=0}^N p(\hat{u}_{i,t})} d\hat{\mathcal{U}} \quad (12)$$

ここでの目的は、最急降下法を用いて  $I(\hat{\mathcal{U}})$  が最小となるパラメータを求めることが目的である。そのためには  $I(\hat{\mathcal{U}})$  のパラメータに関するこう配を計算する必要がある。そのために評価関数の変形を行う。

$\hat{\mathcal{U}}$  と  $\mathcal{Y}$  のそれぞれの確率密度関数  $p(\hat{\mathcal{U}})$  と  $p(\mathcal{Y})$  の関係は、以下によって与えられる（文献 [15] 3.2 節参照）。

$$p(\hat{\mathcal{U}}) = \frac{p(\mathcal{Y})}{|J|} \quad (13)$$

ここで  $J$  は  $\hat{\mathcal{U}}$  の  $\mathcal{Y}$  に関するヤコビ行列式である。入力の推定値  $\hat{u}_t$  と観測信号  $y_t$  の関係は初期値  $\hat{x}_{0/-1} = 0$  とすると以下の式で表される。

$$\hat{u}_0 = \hat{\mathbf{D}}_0 \mathbf{y}_0$$

$$\hat{u}_1 = -\hat{\mathbf{C}}_1 \hat{\mathbf{A}}_0 \mathbf{K}_0 \hat{\mathbf{D}}_0 \mathbf{y}_0 + \hat{\mathbf{D}}_1 \mathbf{y}_1$$

⋮

$$\hat{u}_N = -\hat{\mathbf{C}}_N \hat{\mathbf{A}}_{s,N-1} \cdots \hat{\mathbf{A}}_{s,1} \hat{\mathbf{A}}_0 \mathbf{K}_0 \hat{\mathbf{D}}_0 \mathbf{y}_0$$

$$- \hat{\mathbf{C}}_N \hat{\mathbf{A}}_{s,N-1} \cdots \hat{\mathbf{A}}_{s,2} \hat{\mathbf{A}}_1 \mathbf{K}_1 \hat{\mathbf{D}}_1 \mathbf{y}_1$$

$$- \cdots + \hat{\mathbf{D}}_N \mathbf{y}_N$$

これをまとめると

$$\hat{\mathcal{U}} = \mathcal{T} \mathcal{Y}$$

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{D}}_0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \hat{\mathbf{D}}_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & \hat{\mathbf{D}}_N \end{pmatrix}$$

となる。ただし  $*$  は 0 でない値である。したがって  $\hat{\mathcal{U}}$  の  $\mathcal{Y}$  に関するヤコビ行列式  $J$  は

$$J = \det \mathcal{T}$$

$$= \prod_{t=0}^N \det \hat{\mathbf{D}}_t$$

となる。よって式 (13) は以下のように表すことができる。

$$p(\hat{\mathcal{U}}) = \frac{p(\mathcal{Y})}{\prod_{t=0}^N |\det \hat{\mathbf{D}}_t|}$$

この式を式 (12) へ代入し整理すると

$$I(\hat{\mathcal{U}}) = - \sum_{t=0}^N E[\log |\det \hat{\mathbf{D}}_t|] + E[\log p(\mathcal{Y})]$$

$$- \sum_{i=1}^m \sum_{t=0}^N E[\log p(\hat{u}_{i,t})]$$

となる。ここで第 2 項は推定するパラメータに関係しない定数項となり、また信号をオンラインで推定するため各時刻での評価に書き直したものを新たな評価関数とする。

$$\tilde{I}(\hat{u}_t) := - \log |\det \hat{\mathbf{D}}_t| - \sum_{i=1}^m \log p(\hat{u}_{i,t}) \quad (14)$$

#### 3.3.2 最急降下法によるパラメータ推定

この項では最急降下法によってパラメータを推定するために、上で示した評価関数のこう配を計算する。まず、出力に関するパラメータ  $\hat{\mathbf{C}}_t$  と  $\hat{\mathbf{D}}_t$  のこう配は

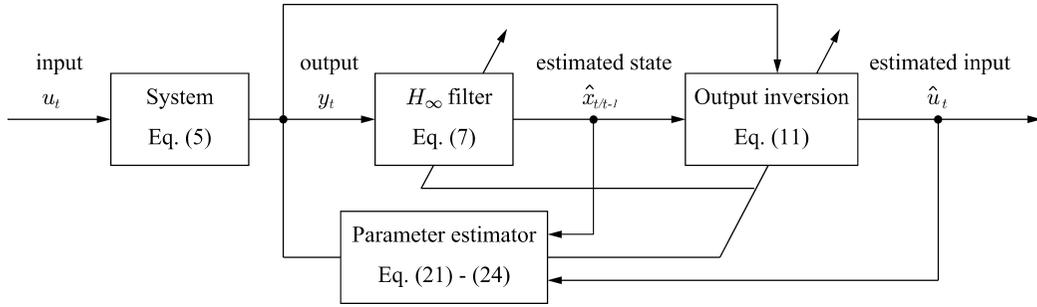


図 1 提案手法のブロック線図  
Fig. 1 Block diagram of the proposed method.

$$\frac{\partial \tilde{I}(\hat{u}_t)}{\partial \hat{C}_t} = -\varphi(\hat{u}_t) \hat{x}_{t/t-1}^T \quad (15)$$

$$\frac{\partial \tilde{I}(\hat{u}_t)}{\partial \hat{D}_t} = -\hat{D}_t^{-T} + \varphi(\hat{u}_t) \mathbf{y}_t^T \quad (16)$$

となる．ここで

$$\varphi(\hat{u}_t) := - \left( \frac{d \log p(\hat{u}_{1,t})}{d \hat{u}_{1,t}}, \dots, \frac{d \log p(\hat{u}_{m,t})}{d \hat{u}_{m,t}} \right)^T \quad (17)$$

とする．この非線形関数  $\varphi(\hat{u}_t)$  は入力確率密度関数が分からないと計算することができないが，先行研究においてこの関数の近似法が提案されているため [16]，ここではその方法を用いることとする．また，式 (16) は推定値の逆行列を含む．しかし，この式は BSS に対する独立成分分析のアルゴリズムにおける評価関数のこの配と同じ形をしており，甘利らは正定値行列を掛けることによって逆行列の計算を回避している [17]．ここでは  $\hat{D}_t^T \hat{D}_t$  を掛けた自然この配

$$\frac{\partial \tilde{I}(\hat{u}_t)}{\partial \hat{D}_t} \hat{D}_t^T \hat{D}_t = -(I - \varphi(\hat{u}_t) \mathbf{y}_t^T \hat{D}_t^T) \hat{D}_t \quad (18)$$

をこの配の代わりに用いることとする．

次に，ダイナミクスに関するパラメータ  $\hat{A}_t$  と  $\hat{B}_t$  のこの配は連鎖律によって以下のように計算される．

$$\frac{\partial \tilde{I}(\hat{u}_t)}{\partial \hat{A}_{t-1}} = \sum_{p=1}^n \frac{\partial \tilde{I}(\hat{u}_t)}{\partial \hat{x}_{p,t/t-1}} \frac{\partial \hat{x}_{p,t/t-1}}{\partial \hat{A}_{t-1}} \quad (19)$$

$$\frac{\partial \tilde{I}(\hat{u}_t)}{\partial \hat{B}_{t-2}} = \sum_{p=1}^n \frac{\partial \tilde{I}(\hat{u}_t)}{\partial \hat{x}_{p,t/t-1}} \frac{\partial \hat{x}_{p,t/t-1}}{\partial \hat{B}_{t-2}} \quad (20)$$

(詳細な計算は付録参照)．

### 3.4 アルゴリズム

前節までのまとめとして，提案手法のブロック線図を図 1 にアルゴリズムを以下に示す．

[アルゴリズム 1]

- step 1 初期値  $\hat{A}_0, \hat{B}_0, \hat{C}_0, \hat{D}_0, P_0$  と  $\gamma$  を決定
- step 2 ゲイン (8) を計算
- step 3 フィルタ方程式 (7) を更新
- step 4 行列 (9) を更新
- step 5 パラメータ  $\hat{A}_t, \hat{B}_t, \hat{C}_t, \hat{D}_t$  をそれぞれのこの配である式 (19), (20), (15), (18) を使って以下の式により更新する．

$$\hat{A}_{t+1} = \hat{A}_t - \mu_1 \sum_{p=1}^n \frac{\partial \tilde{I}(\hat{u}_t)}{\partial \hat{x}_{p,t/t-1}} \frac{\partial \hat{x}_{p,t/t-1}}{\partial \hat{A}_{t-1}} \quad (21)$$

$$\hat{B}_{t+1} = \hat{B}_t - \mu_2 \sum_{p=1}^n \frac{\partial \tilde{I}(\hat{u}_t)}{\partial \hat{x}_{p,t/t-1}} \frac{\partial \hat{x}_{p,t/t-1}}{\partial \hat{B}_{t-2}} \quad (22)$$

$$\hat{C}_{t+1} = \hat{C}_t + \mu_3 \varphi(\hat{u}_t) \hat{x}_{t/t-1}^T \quad (23)$$

$$\hat{D}_{t+1} = \hat{D}_t + \mu_4 (I - \varphi(\hat{u}_t) \mathbf{y}_t^T \hat{D}_t^T) \hat{D}_t \quad (24)$$

ただし， $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$  はこの配法のステップサイズパラメータであり適当な正定数とする．

step 6 入力の推定値を式 (11) により計算

以上の step 2 から step 6 の手続きを毎時刻行う．

3.2 において，フィルタの解が存在するために  $\hat{A}_t$  が正則であることを仮定した．この仮定は，正則な初期値  $\hat{A}_0$  を選びステップサイズパラメータ  $\mu_1$  を小さくすれば満たす．

### 4. 数 値 例

システム (5) のパラメータを以下のように決めた．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.50 & -0.41 & -0.70 & 0.72 \\ 0.72 & -0.72 & -0.43 & 0.17 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -0.05 & -0.46 & -0.85 & 1.13 \\ -0.19 & -0.24 & -0.99 & -0.47 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0.84 & -0.66 \\ 0.68 & 0.12 \end{pmatrix}$$

このシステムは  $-0.8651, 1.3877, 0.8458, -0.0830 \pm 1.1228i, 0.2506 \pm 0.7894i, -0.2957, 0.8458, -0.6776, 0.7059 \pm 0.9828i, 0.4479, 5.2382, 0.5003, -2.0528$  に零点をもつ．また，入力  $u_t$  は区間  $(-1, 1)$  の一様乱数とする．

このシステムに対して，前章で導出したアルゴリズムを用いて入力を推定する．推定するパラメータの初期値は

$$\hat{A}_0 = \begin{pmatrix} 0.0430 & 0.0023 & 1.0440 & 0.0018 \\ 0.0198 & 0.0778 & 0.0758 & 1.0837 \\ 0.5341 & -0.3532 & -0.6410 & 0.7925 \\ 0.7214 & -0.6629 & -0.4125 & 0.2487 \end{pmatrix}$$

$$\hat{B}_0 = \begin{pmatrix} 0.0755 & 0.0639 \\ 0.0190 & 0.0802 \\ 1.0070 & 0.0613 \\ 0.0662 & 1.0389 \end{pmatrix}$$

$$\hat{C}_0 = \begin{pmatrix} 0.6880 & 0.9968 & 0.2084 & 0.9885 \\ 0.3463 & 0.2464 & 0.6580 & 0.2108 \end{pmatrix}$$

$$\hat{D}_0 = \begin{pmatrix} 0.4456 & 0.6848 \\ 0.0649 & 0.1993 \end{pmatrix}$$

とした．提案手法はこう配法を用いているため，初期値が真値から離れていれば局所解へ収束し，初期値が真値へ近ければ最適解へ収束することが期待される．また，フィルタの解が存在するための仮定を満たすために正則な  $\hat{A}_0$  を選ぶ．そしてステップサイズパラメータは， $\mu_1$  は小さくとり  $\mu_1 = 0.0001, \mu_2 = 0.0001, \mu_3 = 0.01, \mu_4 = 0.01$  とする．また， $\gamma = 1.15$  とす

る．この値は，最初はある程度大きな値に設定し，値を少しずつ減少させながら解を繰り返し求めて，解が存在する範囲の最小値である．式 (17) で定義した非線形関数は文献 [16] より原信号に一様分布を用いているため  $\varphi(\hat{u}_t) = \hat{u}_t^3$  とする．

図 2 に  $t = 450 \sim 500$  [s] の範囲の原信号と復元信号を示す．上が第 1 成分を表し，下が第 2 成分を表す．破線は原信号を表し，実線は復元信号を表す．式 (14) で表される評価関数  $\tilde{J}(\hat{u}_t)$  を図 3 に示す．ここで，評価関数 (14) において， $p(\hat{u}_t)$  は本来分らない確率密度関数である．そのため，上で  $\varphi(\hat{u}_t) = \hat{u}_t^3$  としたことを用いて式 (17) を解くと以下が得られる．

$$p(\hat{u}_t) = \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(\frac{1}{4})} \exp\left(-\frac{\hat{u}_t^4}{4}\right)$$

ここで， $\Gamma(\cdot)$  はガンマ関数である．この確率密度関数を用いて評価関数を計算した．評価関数が減少したのちに収束していることから，提案手法は有効であることが示された．この結果はシステムのパラメータを変え複数のシミュレーションを行ったうちのの一つであり，他のパラメータにおいても同様の結果が得られる．

次に  $\gamma = 1.15$  と  $\gamma = \infty$  の場合の比較を行った．二

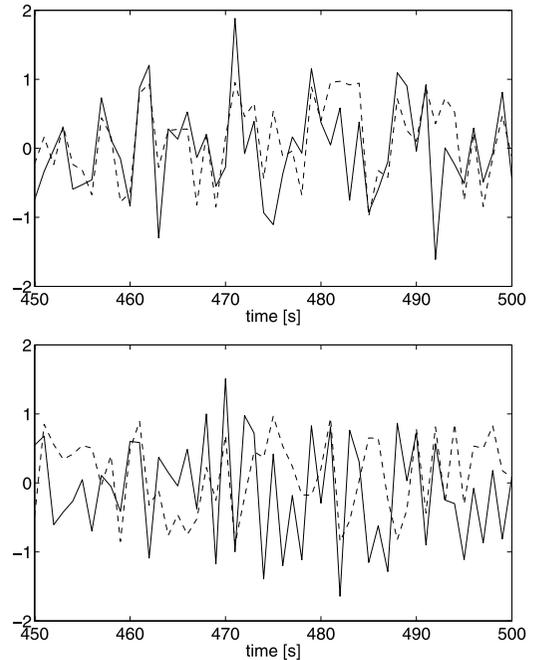


図 2 原信号と復元信号  
Fig. 2 Source signals and recovered signals.

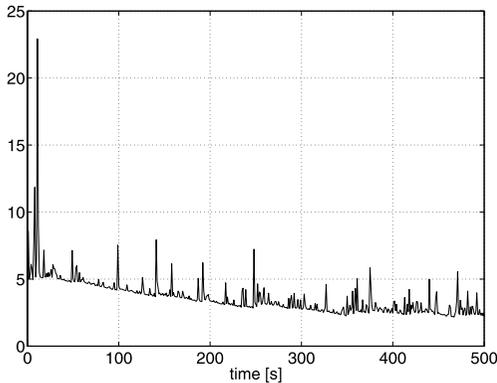


図3 評価関数  $\bar{J}(\hat{u}_t)$   
Fig. 3 Cost function.

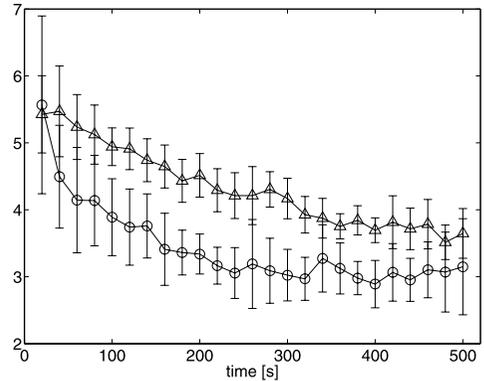


図5 提案手法と Zhang らの方法の評価関数  
Fig. 5 Cost function of the proposed method and the Zhang's method.

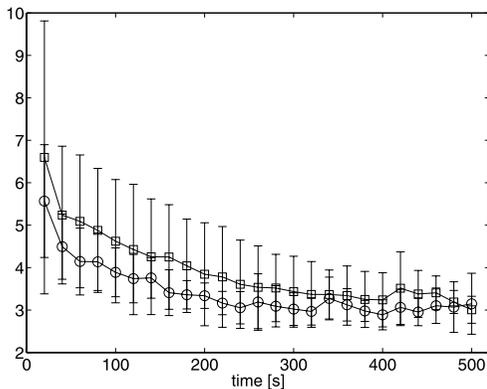


図4  $\gamma = 1.15$  と  $\gamma = \infty$  の場合の評価関数  
Fig. 4 Cost function in case of  $\gamma = 1.15$  and  $\gamma = \infty$ .

つの場合の評価関数の 20 ステップごとの平均を図 4 に示す。丸は  $\gamma = 1.15$  を四角は  $\gamma = \infty$  を表す。エラーバーは 10 試行における標準偏差を表す。 $\gamma = 1.15$  のときの方が評価関数が小さい値となっていることから  $H_\infty$  フィルタを用いたときの方が性能がよいことが分かる。カルマンフィルタを用いた場合も大きく性能が劣化していないのは最小分散フィルタとして機能したためであると考えられる。

更に提案手法と Zhang らの方法 [8] の比較を行った。Zhang らの方法はフィルタ長を 10 とした。二つの方法の評価関数の 20 ステップごとの平均を図 5 に示す。丸は提案手法を三角は Zhang らの方法を表す。エラーバーは 10 試行における標準偏差を表す。提案手法の方が評価関数の値が小さくなっていることから性能がよく、また局所解への収束が速いと考えられる。

## 5. むすび

本研究では、 $H_\infty$  フィルタを用いた非最小位相系の独立成分分析を提案した。提案手法は、 $H_\infty$  フィルタを用いて因果的な逆フィルタを構成し、信号の独立性を測る評価関数を最適にするパラメータを最急降下法により求めることによって、観測信号から入力をオンラインで推定する方法である。そして、数値例を用いて提案手法の有効性を確認した。今後の課題として、提案手法の非線形への拡張や生体信号処理、システム同定などの実問題への応用が挙げられる。

## 文 献

- [1] 加納 学, 田中章平, 丸田 浩, 長谷部伸治, 橋本伊織, 大野 弘, “外部分析と独立成分分析を用いた統計的プロセス運転監視,” 計測自動制御学会論文集, vol.38, no.11, pp.958–965, 2002.
- [2] 新田益大, 杉本謙二, “独立成分分析に基づく多入力多出力システムのブラインド同定,” 信学論 (A), vol.J90-A, no.1, pp.27–34, Jan. 2007.
- [3] H.L. Nguyen Thi and C. Jutten, “Blind source separation for convolutive mixtures,” *Signal Process.*, vol.45, pp.209–229, 1995.
- [4] A. Gorokhov and P. Loubaton, “Blind identification of MIMO-FIR systems: A generalized linear prediction approach,” *Signal Process.*, vol.73, no.1-2, pp.105–124, 1999.
- [5] L. Zhang and A. Cichocki, “Blind deconvolution of dynamical systems: A state space approach,” *J. Signal Process.*, vol.4, no.2, pp.111–130, 2000.
- [6] K. Waheed and F.M. Salem, “Blind source recovery: A framework in the state space,” *J. Machine Learning Research*, vol.4, pp.1411–1446, 2003.
- [7] S. Fukunaga and K. Fujimoto, “Nonlinear blind deconvolution based on a state-space model,” *Proc.*

- 45th IEEE Conference on Decision and Control, pp.6259–6300, 2006.
- [8] L. Zhang, A. Cichocki, and S. Amari, “Multichannel blind deconvolution of nonminimum-phase systems using filter decomposition,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol.52, no.5, pp.1430–1442, 2004.
- [9] S. Devasia, D. Chen, and B. Paden, “Nonlinear inversion-based output tracking,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol.41, no.7, pp.930–942, 1996.
- [10] L.R. Hunt, G. Meyer, and R. Su, “Noncausal inverses for linear systems,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol.41, no.4, pp.608–611, 1996.
- [11] K. George, M. Verhaegen, and J.M.A. Scherpen, “Stable inversion of MIMO linear discrete time non-minimum phase systems,” *Proc. 7th Mediterranean Conference on Control and Automation*, pp.267–281, 1999.
- [12] K. George, M. Verhaegen, and J.M.A. Scherpen, “A systematic and numerically efficient procedure for stable dynamic model inversion of LTI systems,” *Proc. 38th IEEE Conference on Decision and Control*, pp.1881–1886, 1999.
- [13] 鷹羽浄嗣, 片山 徹, “線形離散時間系に対するミニマックス推定問題,” *システム制御情報学会論文誌*, vol.7, no.8, pp.321–331, 1994.
- [14] 片山 徹, 新版 応用カルマンフィルタ, 朝倉書店, 2000.
- [15] 竹村彰通, 現代数理統計学, 創分社, 1991.
- [16] S. Amari, T.P. Chen, and A. Cichocki, “Stability analysis of learning algorithms for blind source separation,” *Neural Netw.*, vol.10, no.8, pp.1345–1351, 1997.
- [17] S. Amari, A. Cichocki, and H.H. Yang, “A new learning algorithm for blind signal separation,” *Advances in Neural Information Processing Systems 8*, pp.757–763, 1996.

## 付 録

ダイナミクスに関するパラメータ  $\hat{A}_t$  と  $\hat{B}_t$  のこう配の計算

ダイナミクスに関するパラメータ  $\hat{A}_t$  と  $\hat{B}_t$  のこう配は式 (19), (20) によって計算される. ここで, このこう配の成分  $\partial \tilde{I}(\hat{u}_t) / \partial \hat{a}_{ij,t-1}$ ,  $\partial \tilde{I}(\hat{u}_t) / \partial \hat{b}_{ik,t-2}$  は具体的に以下のように計算される.

$$\frac{\partial \tilde{I}(\hat{u}_t)}{\partial \hat{a}_{ij,t-1}} = -\varphi(\hat{u}_t)^\top \sum_{p=1}^n \hat{C}_{p,t} \frac{\partial \hat{x}_{p,t/t-1}}{\partial \hat{a}_{ij,t-1}}$$

$$\frac{\partial \tilde{I}(\hat{u}_t)}{\partial \hat{b}_{ik,t-2}} = -\varphi(\hat{u}_t)^\top \sum_{p=1}^n \hat{C}_{p,t} \frac{\partial \hat{x}_{p,t/t-1}}{\partial \hat{b}_{ik,t-2}}$$

ここで,  $\hat{C}_{p,t}$  は  $\hat{C}_t$  の第  $p$  列の列ベクトルとし,  $\partial \hat{x}_{p,t/t-1} / \partial \hat{a}_{ij,t-1}$ ,  $\partial \hat{x}_{p,t/t-1} / \partial \hat{b}_{ik,t-2}$  は以下によ

て表される.

$$\frac{\partial \hat{x}_{t+1/t}}{\partial \hat{a}_{ij,t}} = \hat{A}_{s,t} \frac{\partial \hat{x}_{t/t-1}}{\partial \hat{a}_{ij,t}} + J^{ij} \hat{x}_{t/t-1} - J^{ij} K_t (\hat{C}_t \hat{x}_{t/t-1} - \hat{D}_t y_t)$$

$$\frac{\partial \hat{x}_{t+1/t}}{\partial \hat{b}_{ik,t-1}} = \hat{A}_{s,t} \frac{\partial \hat{x}_{r,t/t-1}}{\partial \hat{b}_{ik,t-1}} - \hat{A}_t \frac{\partial K_t}{\partial \hat{b}_{ik,t-1}} \left( \hat{C}_t \hat{x}_{t/t-1} - \hat{D}_t y_t \right)$$

ただし,  $J^{ij}$  は  $(i, j)$  成分は 1 としそれ以外の成分は 0 となる行列とし, また  $\partial K_t / \partial \hat{b}_{ik,t}$  は

$$\frac{\partial K_t}{\partial \hat{b}_{ik,t-1}} = \frac{\partial P_t}{\partial \hat{b}_{ik,t-1}} \hat{C}_t^\top (\hat{C}_t P_t \hat{C}_t^\top + R_t)^{-1} - P_t \hat{C}_t^\top (\hat{C}_t P_t \hat{C}_t^\top + R_t)^{-1} \times \hat{C}_t \frac{\partial P_t}{\partial \hat{b}_{ik,t-1}} \hat{C}_t^\top (\hat{C}_t P_t \hat{C}_t^\top + R_t)^{-1}$$

$$\frac{\partial P_{t+1}}{\partial \hat{b}_{ik,t}} = J^{ik} Q_t \hat{B}_t^\top + \hat{B}_t Q_t J^{ik\top}$$

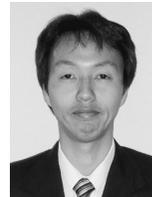
と表される.

(平成 19 年 11 月 30 日受付, 20 年 1 月 23 日再受付)



福永 修一 (学生員)

2003 明大・理工卒. 2005 奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科博士前期課程了. 同年名古屋大学大学院工学研究科博士後期課程に入学. 2007 東京都立産業技術高等専門学校助教. 現在に至る.



藤本 健治

1994 京大・工・精密卒, 1996 同大学院修士課程了, 1997 同大学院博士後期課程中途退学, 同年京都大学大学院工学研究科助手, 2004 名古屋大学大学院工学研究科助教. 現在, 同大学院工学研究科准教授. 1999 オーストラリア国立大学客員研究員, 1999~2000 及び 2002 デルフト工科大学客員研究員. 非線形制御の研究に従事. 博士(情報学). 2005 The IFAC Congress Young Author Prize, 2007 計測自動制御学会制御部門バイオニア賞などを受賞. IEEE, 計測自動制御学会, システム制御情報学会, 日本機械学会, 日本鉄鋼協会各会員.