Ⅶ　教科研究・特別研究

数学科

教材研究の楽しみ：

「放物線と直線の間の面積」を積分計算なしで求める

福　谷　　敏

【抄録】 昨年の紀要では三角錐の公式を積分を用いずに求める方法を説明した．同様な考え方で「放物線と直線の間の面積」も求まることを報告する。三角錐は（ユークリッドの取り尽くし法）で出てくる分割を利用するものであった。今回もヒントはアルキメデスの方法（解析概論ｐ98）から無限和の操作の部分を、（アフィン）変換での面積変化に置き換えることである。考えつけば非常に簡単なものである。

【キーワード】 弓形、放物線と直線で囲まれる部分、面積公式、極限を用いない、変換と面積

1　問題の設定の経緯

我々の問題は、具体的に書くと「弓形　Ｆ１（連立不等式 $y \geqq x^2-1$, $y \leqq 0$ で表される部分）を考えるとその部分の面積が、４/３であることを積分計算を使わずに求めよ。」である。

昨年の紀要では、２年前に始めて中一を教えることになったとき考えた「錐の体積公式」の導出を扱った。中学生や小学校上級生で理解可能な証明はないか考えてみた。アイデアの、ユークリッドの錐公式の証明であった。実は、無限を持ち出せば、無限等比級数と考えて、中学３年でも理解可能な説明がつく。例えば、0.3333…＝１/３を示すとき使う方法を利用する。これなら、今回の問題もアルキメデスの方法の中心部分である無限等比級数のところは解決できるので、一応積分なしで、「放物線と直線の間の面積」を導くことができる。しかし、昨年同様に、さらに、使う道具を制限「無限」を持ち出さず「弓形の面積」が導出できることを報告する。

2　問題の解答

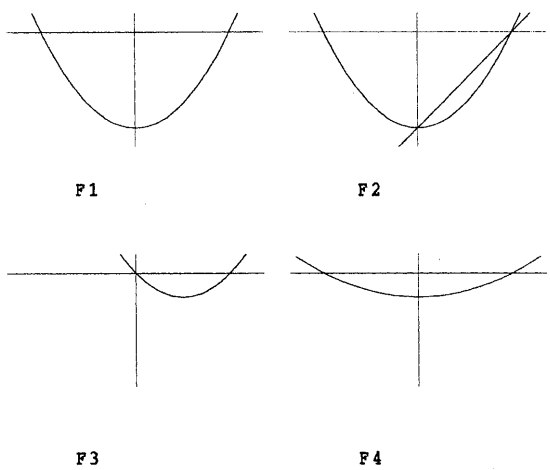
問題の弓形Ｆ１（連立不等式 $y \geqq x^2-1$, $y \leqq 0$ で表される部分）の面積Ｓを求めるために、順に（Ｆ１も含め）４つの弓形を順次考える。

まず、弓形Ｆ２（連立不等式 $y \geqq x^2-1$, $y \leqq x-1$ で表される部分）を考える。図を書くと、この面積は $(S-1)/2$ であることが容易に分かる。Ｆ２を点（1，0）を中心としてアフィン変換（または「カバリエリの原理」で説明しても良いが）で面積を変えずに、弓形Ｆ３（連立不等式 $y \geqq x(x-1)$, $y \leqq 0$ で表される部分）に移すことができる。ここで、点（1，0）を中心に左右に２倍広げる変換を考えると、弓形Ｆ３は、弓形Ｆ４（連立不等式 $y \geqq (x+1)(x-1)$, $y \leqq 0$ で表される部分）に移る。面積は２倍になるので $S-1$ となる。さらに、弓形Ｆ４を原点を中心に上下に４倍する変換で移すともとの弓形Ｆ１に戻る。面積は４倍になるので $4(S-1)$ となる。

したがって、方程式 $S=4(S-1)$ が得られたので、解くと $S=4/3$ が求まる。

3　おわりに

これをきちんとした基礎付けるのは直接積分計算で求めるのと大差なくなる。基礎になるのは、「面積を三角形の分割の極限として定義すること」と「アフィン変換と面積の関係」、さらに「領域の像の求め方」という部分である。しかし、一方で、これらの説明が具体的な図や移動を体験しながら、体験的に学ぶ機会と考えれば豊かな教材となりうると思う。「問題の解答」も上で見たように非常に簡単なものなので良く知られていることかもしれない。まわりの先生方や大学生に尋ねたところ、知る人はいなかったので報告することとした。



参考図