

# 回転軸系の時間領域実験的同定法の開発と その応用に関する研究

(課題番号 10650238)

平成10年度～平成11年度科学研究費補助金（基盤研究(C)(2)）  
研究報告書

平成12年3月

研究代表者 安田仁彦  
名古屋大学大学院工学研究科教授

## はしがき

本報告書は平成10年度および11年度に行った標記の研究成果についてまとめたものである。この研究に関する研究組織，研究経費，研究発表は以下の通りである，

### 研究組織

研究代表者：安田 仁彦（名古屋大学大学院工学研究科教授）

研究分担者：神谷 恵輔（名古屋大学大学院工学研究科講師）

研究分担者：叶 建瑞（名古屋大学大学院工学研究科助手）

### 研究経費

平成10年度	2,900 千円
平成11年度	700 千円
計	3,600 千円

名古屋大学図書



20095740

### 研究発表

#### 論文

- (1) K. Yasuda and K. Kamiya, Experimental Identification Technique of Nonlinear Beams in Time Domain, Nonlinear Dynamics, Vol.18, (February, 1999), pp185-202.

#### 口頭発表

- (1) 安田仁彦，神谷恵輔，池田教光，非線形回転軸系の時間領域同定法，Dynamics and Design Conference '98，1998年8月18日
- (2) Kimihiko Yasuda and Keisuke Kamiya, Experimental Identification Technique in Time Domain for Nonlinear Rotating Shaft Systems, Seventh Conference on Nonlinear vibrations, Stability, and Dynamics of Structures, Virginia, 1998 July 28
- (3) 安田仁彦，神谷恵輔，池田教光，回転軸系の時間領域同定法，東海支部第47期総会講演会，1998年3月7日

# 目次

1	序論	1
2	線形集中回転軸系の同定法	3
2.1	まえがき	3
2.2	問題設定	3
2.3	同定法の提案	7
2.3.1	最小二乗法による同定法	7
2.3.2	ラグランジュ未定乗数法による同定法	9
2.4	数値シミュレーション	13
2.4.1	データにノイズが含まれない場合	13
2.4.2	データにノイズが含まれる場合	16
2.5	実際の系への適用	21
2.5.1	初期たわみを考慮した数学モデルの導出	21
2.5.2	同定法の修正	23
2.5.3	実験装置の概略	26
2.5.4	同定実験	26
3	非線形集中回転軸系の同定法	35
3.1	まえがき	35
3.2	問題設定	35
3.3	同定法の提案	40
3.3.1	最小二乗法による同定法	40
3.3.2	ラグランジュ未定乗数法による同定法	41
3.4	数値シミュレーション	45
3.4.1	データにノイズが含まれない場合	45

3.4.2	データにノイズが含まれる場合	49
3.5	実際の系への適用	49
3.5.1	実験装置の概略	49
3.5.2	同定実験	54
<b>4</b>	<b>線形連続回転軸系の同定法</b>	<b>63</b>
4.1	まえがき	63
4.2	問題設定	63
4.3	同定法の提案	68
4.3.1	$Z_m(t)$ の求め方	69
4.3.2	最小二乗法による同定法	69
4.3.3	ラグランジュ未定乗数法による同定法	71
4.4	数値シミュレーション	75
4.4.1	一様な回転軸系	75
4.4.2	非一様な回転軸系	85
4.5	実際の系への適用	94
4.5.1	実験装置の概略	94
4.5.2	同定実験	94
<b>5</b>	<b>結論</b>	<b>107</b>
	<b>参考文献</b>	<b>109</b>

# 第1章

## 序論

蒸気タービンやモータなど、回転機械は多い。これらの回転機械は年々、高速化、高性能化、軽量化され、動作の安定化、振動の低減化などの問題に対する要求がますます厳しくなっている。そのため、実験データと理論的検討を融合して数学モデルを作成する実験的同定法が大きな関心を呼んでいる。

回転機械の実験的同定法に関する方法としては、往復振動の構造系を対象に発展してきた実験的モード解析法を回転機械に適用しようとする研究が多い<sup>(1)-(13)</sup>。これら実験的モード解析法をそのまま回転軸系に用いるには、解決しなければならない問題も多いと思われる。まず、実験的モード解析法では、系を加振した際の振動データを使うため、加振機の取り付け位置や、取り付けたことによる系の特性の変化などが問題になる。また回転軸系にとっては特有な量である不釣り合い分布や、初期たわみの同定が不可能となる。

さらに回転機械においては、軸受部のがた、摩擦特性、油膜特性などの要因による非線形性、軸の材料非線形性、軸の幾何学的非線形性などが存在し、回転機械は非線形系となる場合が多い。しかし実験的モード解析法は線形理論に基づいているため非線形系への対応が難しい。このように実験的モード解析法は必ずしも回転軸系に適した方法とは思われない。

以上のことをふまえ、我々ははこれまでに回転軸系の実験的同定法を提案してきた<sup>(14)-(17)</sup>。ただし、その方法は振動数領域の方法に分類されるものであり、回転速度を一定にして定常状態の系の応答を用いる必要がある。そのため実験に多くの時間を要する。

本研究では、実験の便利さを考慮して非定常状態の系の応答を利用できる同定法の開発を試みる。この方法は時間領域の方法に分類されるものである。

本報告書の構成は以下の通りである。

第2章では基本的な検討として、細い弾性軸に一つの回転体を取り付けられた集中回転

軸系の同定法について考える。ここでは系は線形であるものとする。まず系の運動を支配する運動方程式をできるだけ一般性のある形で導く。次に系の不釣り合いによって生じる非定常状態の応答データを利用し、運動方程式中の未知パラメータを定めることを考える。このための方法としてここでは二種類の方法を提案する。ひとつは最小二乗法を用いる方法であり、比較的簡便なものである。もうひとつはラグランジュ未定乗数法を用いる方法であり、やや複雑ではあるが高い精度が期待できるものである。提案した同定法の有効性を数値シミュレーションおよび実験によって確認する。

第3章では、回転軸系が非線形である場合を考える。線形系の場合と同様に、はじめに系の運動を支配する運動方程式をできるだけ一般性のある形で導く。次に運動方程式中の未知パラメータを定めることを考える。ここでもこのための方法として最小二乗法を用いる方法とラグランジュ未定乗数法を用いる方法の二種類を提案する。提案した同定法の有効性を数値シミュレーションおよび実験によって確認する。

第4章では、回転軸の質量が軸方向に分布した連続回転軸系を考える。ここでは系は線形であるものとする。集中回転軸系の場合と同様に、はじめに系の運動を支配する運動方程式をできるだけ一般性のある形で導く。導かれた運動方程式はそのままでは同定に都合が悪いので、同定に便利な形の式に変換し、その式中の未知パラメータを定めることを考える。ここでもこのための方法として最小二乗法を用いる方法とラグランジュ未定乗数法を用いる方法の二種類を提案する。提案した同定法の有効性を数値シミュレーションおよび実験によって確認する。

第5章は結論である。

## 第2章

# 線形集中回転軸系の同定法

### 2.1 まえがき

ここでは非定常状態の系の応答を利用することができる時間領域同定法の基礎的な検討を目的とし、簡単な線形回転軸系を対象として同定法を提案する。提案する同定法では、弾性軸および軸受台の剛性の異方性、不釣り合いに関するパラメータが定められるようにする。

### 2.2 問題設定

細い弾性軸に一つの回転体を取り付けてできた回転軸系を考える。説明の簡単のため、はじめに弾性軸とそれを支える軸受け台の剛性に異方性を持たない対称回転軸系を考える。図2.1に示すように、静止直交座標系  $O\text{-}xys$  を、 $s$  軸が軸受中心線に一致するように定める。また回転体の図心  $M$  を原点とし、軸と同じ回転速度で回転する回転座標系  $M\text{-}x'y's'$  を、 $s'$  軸が点  $M$  における軸の接線方向に一致するように定める。回転体の質量を  $m$ 、極慣性モーメントを  $I_p$ 、直径に関する慣性モーメントを  $I$  とする。回転体には静不釣り合い、動不釣り合いが存在するものとする。その大きさをそれぞれ  $\epsilon, \tau$  とし、回転座標系  $M\text{-}x'y's'$  において  $x'$  軸から測ってそれぞれ角位置  $\phi_\epsilon, \phi_\tau$  にあるとする。回転体の図心  $M$  の  $x, y$  軸方向の変位をそれぞれ  $x, y$ 、また図心  $M$  における弾性軸の接線  $Ms'$  が  $s$  軸となす角の、 $xs$  平面および  $ys$  平面への投影で表される傾き角をそれぞれ  $\theta_x, \theta_y$  とする。 $x$  軸と平行な軸から

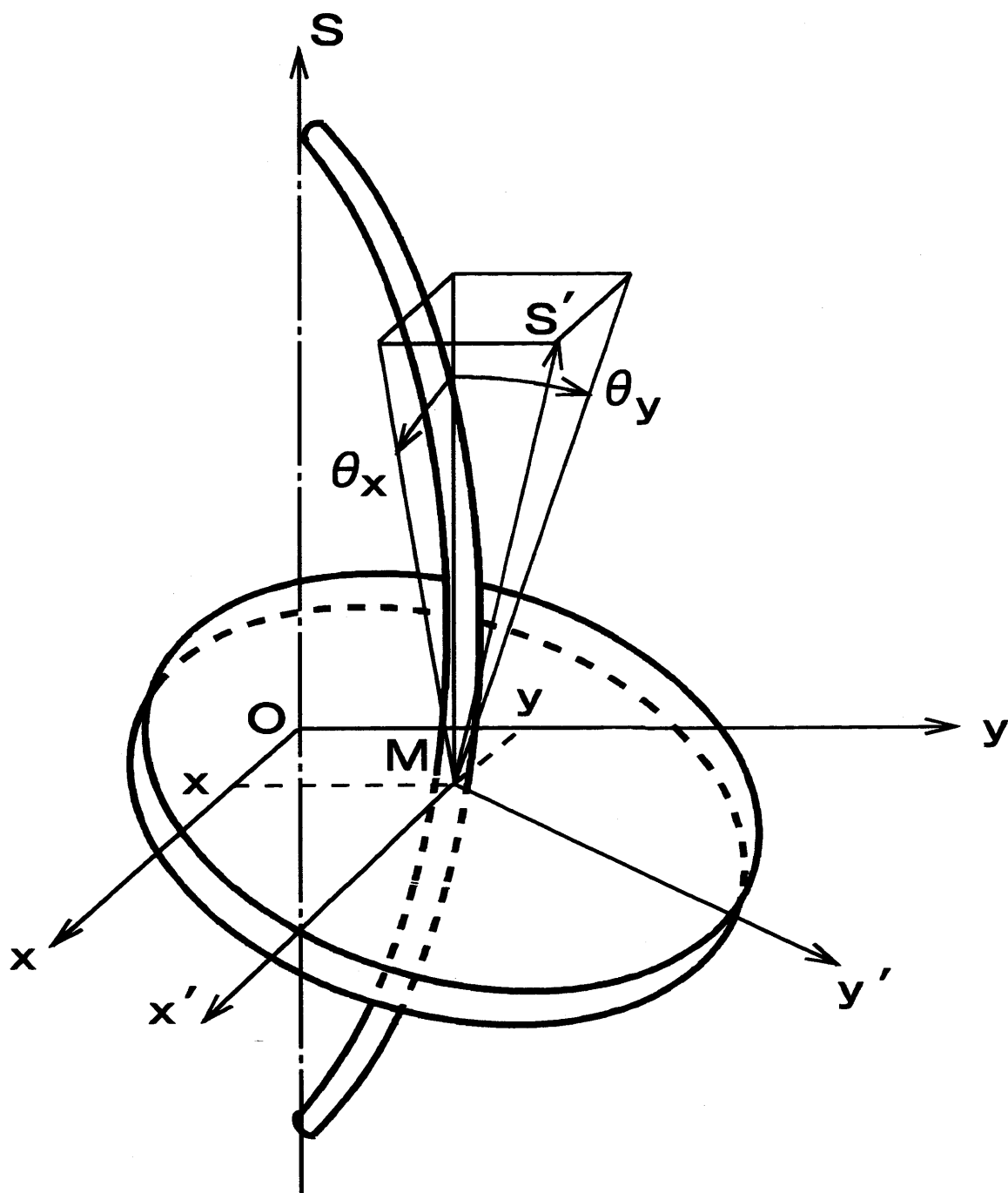


図 2.1: 対象とする回転軸系



測った回転軸の回転角を $\Theta$ とする。このとき、系の運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + c_{11}\dot{x} + c_{12}\dot{\theta}_x + k_{11}x + k_{12}\theta_x &= m\epsilon(\dot{\Theta}^2 \cos(\Theta + \phi_\epsilon) + \ddot{\Theta} \sin(\Theta + \phi_\epsilon)) \\ m\ddot{y} + c_{11}\dot{y} + c_{12}\dot{\theta}_y + k_{11}y + k_{12}\theta_y &= m\epsilon(\dot{\Theta}^2 \sin(\Theta + \phi_\epsilon) - \ddot{\Theta} \cos(\Theta + \phi_\epsilon)) \\ I\ddot{\theta}_x + I_p\ddot{\theta}_y + I_p\dot{\Theta}\dot{\theta}_y + c_{12}\dot{x} + c_{22}\dot{\theta}_x + k_{12}x + k_{22}\theta_x \\ &= (I - I_p)\tau(\dot{\Theta}^2 \cos(\Theta + \phi_\tau) + \ddot{\Theta} \sin(\Theta + \phi_\tau)) \\ I\ddot{\theta}_y - I_p\ddot{\theta}_x - I_p\dot{\Theta}\dot{\theta}_x + c_{12}\dot{y} + c_{22}\dot{\theta}_y + k_{12}y + k_{22}\theta_y \\ &= (I - I_p)\tau(\dot{\Theta}^2 \sin(\Theta + \phi_\tau) - \ddot{\Theta} \cos(\Theta + \phi_\tau)) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

で与えられる<sup>(18)</sup>。ここに、 $k_{ij}$ ,  $c_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) はそれぞれ、系のばね定数と粘性減数係数である。

回転体のふれまわり運動を、次式

$$\left. \begin{aligned} z &= x + jy \\ \theta &= \theta_x + j\theta_y \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

で定義される複素変数により表すことにする。式(2.1)の第2式および第4式に虚数単位 $j$ を掛け、それぞれ第1式および第3式と加え合わせれば、これらの複素数変数により表した運動方程式

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{z} + c_{11}\dot{z} + c_{12}\dot{\theta} + k_{11}z + k_{12}\theta &= m\epsilon(\dot{\Theta}^2 - j\ddot{\Theta})e^{j(\Theta + \phi_\epsilon)} \\ I\ddot{\theta} - jI_p\ddot{\theta} - jI_p\dot{\Theta}\dot{\theta} + c_{12}\dot{z} + c_{22}\dot{\theta} + k_{12}z + k_{22}\theta \\ &= (I - I_p)\tau(\dot{\Theta}^2 - j\ddot{\Theta})e^{j(\Theta + \phi_\tau)} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

を得る。

以上是对称な回転軸系の運動方程式である。一般の回転軸系では、弾性軸あるいはそれを支えている軸受台の剛性に異方性をもち、非対称回転軸系となる。この場合の運動方程

式は、式(2.3)を一般化した

$$\left. \begin{aligned}
 & m\ddot{z} + c_{11}\dot{z} + c_{12}\dot{\theta} + k_{11}z + k_{12}\theta \\
 & \quad - \Delta k_{s11}\bar{z}e^{j(2\Theta+2\phi_{s11})} - \Delta k_{s12}\bar{\theta}e^{j(2\Theta+2\phi_{s12})} \\
 & \quad - \Delta k_{b11}\bar{z}e^{j2\phi_{b11}} - \Delta k_{b12}\bar{\theta}e^{j2\phi_{b12}} \\
 & \quad = m\epsilon(\dot{\Theta}^2 - j\ddot{\Theta})e^{j(\Theta+\phi_\epsilon)} \\
 & I\ddot{\theta} - jI_p\ddot{\theta} - jI_p\dot{\Theta}\dot{\theta} + c_{12}\dot{z} + c_{22}\dot{\theta} + k_{12}z + k_{22}\theta \\
 & \quad - \Delta k_{s12}\bar{z}e^{j(2\Theta+2\phi_{s12})} - \Delta k_{s22}\bar{\theta}e^{j(2\Theta+2\phi_{s22})} \\
 & \quad - \Delta k_{b12}\bar{z}e^{j2\phi_{b12}} - \Delta k_{b22}\bar{\theta}e^{j2\phi_{b22}} \\
 & \quad = (I - I_p)\tau(\dot{\Theta}^2 - j\ddot{\Theta})e^{j(\Theta+\phi_\tau)}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

となる<sup>(19)</sup>．ここに $k_{ij}(i, j = 1, 2)$ は、系のばね定数の一回転にわたる平均値を表す．また $\Delta k_{sij}, \Delta k_{bij}(i, j = 1, 2)$ はそれぞれ、軸および軸受台の剛性の異方性に起因するばね定数の平均値からの変動幅をあらわし、 $\phi_{sij}(i, j = 1, 2)$ は回転座標系 M-x'y's'において軸のばね定数が最小となる方向のx'軸からの角位置、 $\phi_{bij}(i, j = 1, 2)$ は静止座標系 O-xysにおいて軸受台のばね定数が最小となる方向のx軸からの角位置である．記号 $[-]$ は複素共役を表している．

一般に回転軸系は式(2.4)に支配されるので、回転軸系を実験的に同定するという問題は、系の実験データから式(2.4)に現れる未知パラメータを定めるという問題に置き換えられる．回転軸を回転させると、系がもつ不釣り合いによってふれまわり運動が生じる．式(2.4)の未知パラメータを、このふれまわり運動の非定常状態の実験データを用いて定めることができれば、実験において時間を短縮することができ都合である．そこで非定常状態の実験データを用いて未知パラメータを定める方法を提案する．ただし、式(2.4)のパラメータの中には、前もって精度よく求められるものとそうでないものがある．回転体の質量 $m$ 、極慣性モーメント $I_p$ 、直径に関する慣性モーメント $I$ は、幾何学的形状から精度よく求める事ができる場合が多い．そこで以下ではこれらの量は既知であるとし、これ以外のパラメータを実験データから求める方法を考える．

## 2.3 同定法の提案

### 2.3.1 最小二乗法による同定法

回転体の質量  $m$ , 極慣性モーメント  $I_p$ , 直径に関する慣性モーメント  $I$  は既知なので, 式 (2.4) を, 未知パラメータを含む項が左辺に, 既知パラメータのみを含む項が右辺になるように書き換えれば,

$$\left. \begin{aligned}
 & c_{11}\dot{z} + c_{12}\dot{\theta} + k_{11}z + k_{12}\theta \\
 & \quad - \Delta k_{s11}\bar{z}e^{j(2\Theta+2\phi_{s11})} - \Delta k_{s12}\bar{\theta}e^{j(2\Theta+2\phi_{s12})} \\
 & \quad - \Delta k_{b11}\bar{z}e^{j2\phi_{b11}} - \Delta k_{b12}\bar{\theta}e^{j2\phi_{b12}} \\
 & \quad - m\epsilon(\dot{\Theta}^2 - j\ddot{\Theta})e^{j(\Theta+\phi_\epsilon)} \\
 & \quad = -m\ddot{z} \\
 & c_{12}\dot{z} + c_{22}\dot{\theta} + k_{12}z + k_{22}\theta \\
 & \quad - \Delta k_{s12}\bar{z}e^{j(2\Theta+2\phi_{s12})} - \Delta k_{s22}\bar{\theta}e^{j(2\Theta+2\phi_{s22})} \\
 & \quad - \Delta k_{b12}\bar{z}e^{j2\phi_{b12}} - \Delta k_{b22}\bar{\theta}e^{j2\phi_{b22}} \\
 & \quad - (I - I_p)\tau(\dot{\Theta}^2 - j\ddot{\Theta})e^{j(\Theta+\phi_\tau)} \\
 & \quad = -I\ddot{\theta} + jI_p\ddot{\Theta}\theta + jI_p\dot{\Theta}\dot{\theta}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

となる.

同定のために, 前節で定義された  $z(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $\Theta(t)$  とその速度  $\dot{z}(t)$ ,  $\dot{\theta}(t)$ ,  $\dot{\Theta}(t)$ , 加速度  $\ddot{z}(t)$ ,  $\ddot{\theta}(t)$ ,  $\ddot{\Theta}(t)$  の時刻  $t = t_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) における時刻歴データが利用できるものとする.

ここで式 (2.5) の第 1 式をまず考える. 実験データを式 (2.5) に代入すると, 実験データにはノイズが含まれるので等号が成り立つとは限らない. 式 (2.5) の右辺の実数部と左辺の

実数部の差すなわち誤差を  $e_{1i}$  とすると,

$$\begin{aligned}
 e_{1i} = & Re[-m\ddot{z}(t_i)] \\
 & -Re[c_{11}\dot{z}(t_i) + c_{12}\dot{\theta}(t_i) + k_{11}z(t_i) + k_{12}\theta(t_i)] \\
 & -\Delta k_{s11}\bar{z}(t_i)e^{j(2\Theta(t_i)+2\phi_{s11})} - \Delta k_{s12}\bar{\theta}(t_i)e^{j(2\Theta(t_i)+2\phi_{s12})} \\
 & -\Delta k_{b11}\bar{z}(t_i)e^{j2\phi_{b11}} - \Delta k_{b12}\bar{\theta}(t_i)e^{j2\phi_{b12}} \\
 & -m\epsilon(\dot{\Theta}(t_i))^2 - j\ddot{\Theta}(t_i))e^{j(\Theta(t_i)+\phi_\epsilon)}]
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

とおくことができる. 同様に第1式の虚数部, 第2式の実数部, 第2式の虚数部の誤差を  $e_{2i}, e_{3i}, e_{4i}$  とおき, この  $e_{ni}$  ( $n=1, 4$ ) を成分とする誤差ベクトル

$$\{e\}_i = \{ e_{1i} \quad e_{2i} \quad e_{3i} \quad e_{4i} \}^T \tag{2.7}$$

を導入すれば, それは

$$\{e\}_i = \{q\}_i - [A]_i\{S\} \quad (i=1, 2, 3, \dots) \tag{2.8}$$

の形に書くことができる. ここにベクトル  $\{q\}_i$  は既知パラメータ  $m, I, I_p$  および実験データから定められる既知のベクトル,  $[A]_i$  は既知パラメータ  $m, I, I_p$  および実験データから定められる既知のマトリックス, そして  $\{S\}$  は未知パラメータを成分とする

$$\begin{aligned}
 \{S\} = & \{c_{11} \quad c_{12} \quad c_{22} \quad k_{11} \quad k_{12} \quad k_{22} \quad \Delta k_{s11} \cos 2\phi_{s11} \quad \Delta k_{s11} \sin 2\phi_{s11} \\
 & \Delta k_{s12} \cos 2\phi_{s12} \quad \Delta k_{s12} \sin 2\phi_{s12} \quad \Delta k_{s22} \cos 2\phi_{s22} \quad \Delta k_{s22} \sin 2\phi_{s22} \\
 & \Delta k_{b11} \cos 2\phi_{b11} \quad \Delta k_{b11} \sin 2\phi_{b11} \quad \Delta k_{b12} \cos 2\phi_{b12} \quad \Delta k_{b12} \sin 2\phi_{b12} \\
 & \Delta k_{b22} \cos 2\phi_{b22} \quad \Delta k_{b22} \sin 2\phi_{b22} \quad \epsilon \cos \phi_\epsilon \quad \epsilon \sin \phi_\epsilon \quad \tau \cos \phi_\tau \quad \tau \sin \phi_\tau\}^T
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

の形のベクトルである.

未知パラメータを定めるのに, 式(2.8)の誤差の二乗和

$$\begin{aligned}
 E = & \sum_i \sum_{n=1}^M e_{ni}^2 = \sum_i \{e\}_i^T \{e\}_i \\
 = & \sum_i (\{q\}_i - [A]_i\{S\})^T (\{q\}_i - [A]_i\{S\})
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

を最小にするように未知パラメータを決定する．式(2.10)を最小にするための条件式を導けば、未知パラメータに関する線形連立方程式

$$\left( \sum_i [A]_i^T [A]_i \right) \{S\} = \sum_i [A]_i^T \{q\}_i \quad (2.11)$$

を得る．この式を解けば未知パラメータが定められ、同定が完了する．

なお、この以下では最小二乗法による同定法を第1の同定法ということにする．

### 2.3.2 ラグランジュ未定乗数法による同定法

以下では、誤差を含む測定値と真値を区別するため、測定値には記号 $[\hat{\cdot}]$ をつけて表すことにする．

時刻 $t = t_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ )における実験データを成分とするベクトル

$$\{\hat{w}\}_i = \{ \hat{x}(t_i) \quad \hat{y}(t_i) \quad \hat{\theta}_x(t_i) \quad \hat{\theta}_y(t_i) \}^T \quad (2.12)$$

$$\{\hat{\dot{w}}\}_i = \{ \hat{\dot{x}}(t_i) \quad \hat{\dot{y}}(t_i) \quad \hat{\dot{\theta}}_x(t_i) \quad \hat{\dot{\theta}}_y(t_i) \}^T \quad (2.13)$$

$$\{\hat{\ddot{w}}\}_i = \{ \hat{\ddot{x}}(t_i) \quad \hat{\ddot{y}}(t_i) \quad \hat{\ddot{\theta}}_x(t_i) \quad \hat{\ddot{\theta}}_y(t_i) \}^T \quad (2.14)$$

を導入する．たわみの測定データ $\{\hat{w}\}_i$ に含まれる誤差は

$$\{e_w\}_i = \{\hat{w}\}_i - \{w\}_i \quad (2.15)$$

で与えられる．ただし、 $\{w\}_i$ は誤差を含む測定値ではなく真値であり、 $\{e_w\}_i$ は各測定時間におけるたわみの誤差を成分とするベクトルである．上式と同様に、速度、加速度の誤差ベクトルはそれぞれ

$$\{e_{\dot{w}}\}_i = \{\hat{\dot{w}}\}_i - \{\dot{w}\}_i \quad (2.16)$$

$$\{e_{\ddot{w}}\}_i = \{\hat{\ddot{w}}\}_i - \{\ddot{w}\}_i \quad (2.17)$$

で与えられる．ここでも $\{\dot{w}\}_i$ 、 $\{\ddot{w}\}_i$ は真値である． $\{w\}$ 、 $\{\dot{w}\}$ 、 $\{\ddot{w}\}$ は式(2.4)を満足しなければならないので

$$\{q\}_i - [A]_i \{S\} = \{0\} \quad (2.18)$$

が成立しなければならない．ここに $[A]_i$ は、式(2.8)に表れた $[A]_i$ に真値の $\{w\}$ 、 $\{\dot{w}\}$ 、 $\{\ddot{w}\}$ を代入したものである．

式(2.15), (2.16), (2.17)で与えられる誤差の二乗和を最小にし, かつ式(2.18)を満足するように未知パラメータを定めれば, それは最小二乗の意味でもっとも精度の良い推定値といえ, 前節の最小二乗法による同定法より高い精度が期待できる. この問題を解くためにラグランジュの未定乗数法を用いる. このため

$$\begin{aligned}
 U = \sum_i \left( \frac{1}{2} r_1 \{e_w\}_i^T \{e_w\}_i + \frac{1}{2} r_2 \{e_{\dot{w}}\}_i^T \{e_{\dot{w}}\}_i + \frac{1}{2} r_3 \{e_{\ddot{w}}\}_i^T \{e_{\ddot{w}}\}_i \right. \\
 \left. + \{\zeta\}_i^T (\{q\}_i - [A]_i \{S\}) \right)
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

で定義されるラグランジュ関数  $U$  を導入する. ここに  $r_1, r_2, r_3$  はそれぞれ式(2.15), (2.16), (2.17)の誤差に対する重み係数で, 各誤差が同じ程度の大きさとなるよう問題に応じて適当に定める. また  $\{\zeta\}_i$  はラグランジュの未定乗数ベクトルである. このようにすればいま考えている問題は, ラグランジュ関数  $U$  を極小にするように未知数  $\{w\}_i, \{\dot{w}\}_i, \{\ddot{w}\}_i, \{S\}, \{\zeta\}_i$  を定める問題に帰着される. 式(2.19)の  $U$  を極小にするための条件は

$$\frac{\partial U}{\partial \{w\}_i} = \{e_w\}_i + [B]_i^T \{\zeta\}_i = \{0\} \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \{\dot{w}\}_i} = \{e_{\dot{w}}\}_i + [C]_i^T \{\zeta\}_i = \{0\} \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \{\ddot{w}\}_i} = \{e_{\ddot{w}}\}_i + [D]_i^T \{\zeta\}_i = \{0\} \tag{2.22}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \{S\}} = \sum_i [A]_i^T \{\zeta\}_i = \{0\} \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \{\zeta\}_i} = [A]_i \{S\} - \{q\}_i = \{0\} \tag{2.24}$$

で与えられる． $[B]_i$ ,  $[C]_i$ ,  $[D]_i$  はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} [B]_i &= \begin{bmatrix} \frac{\partial[A]_i}{\partial x(t_i)}\{S\} & \frac{\partial[A]_i}{\partial y(t_i)}\{S\} & \frac{\partial[A]_i}{\partial \theta_x(t_i)}\{S\} - \frac{\partial\{q\}_i}{\partial \theta_x(t_i)} & \frac{\partial[A]_i}{\partial \theta_y(t_i)}\{S\} - \frac{\partial\{q\}_i}{\partial \theta_y(t_i)} \end{bmatrix} \\ [C]_i &= \begin{bmatrix} \frac{\partial[A]_i}{\partial \dot{x}(t_i)}\{S\} & \frac{\partial[A]_i}{\partial \dot{y}(t_i)}\{S\} & \frac{\partial[A]_i}{\partial \dot{\theta}_x(t_i)}\{S\} - \frac{\partial\{q\}_i}{\partial \dot{\theta}_x(t_i)} & \frac{\partial[A]_i}{\partial \dot{\theta}_y(t_i)}\{S\} - \frac{\partial\{q\}_i}{\partial \dot{\theta}_y(t_i)} \end{bmatrix} \\ [D]_i &= \begin{bmatrix} -\frac{\partial\{q\}_i}{\partial \ddot{x}(t_i)} & -\frac{\partial\{q\}_i}{\partial \ddot{y}(t_i)} & -\frac{\partial\{q\}_i}{\partial \ddot{\theta}_x(t_i)} & -\frac{\partial\{q\}_i}{\partial \ddot{\theta}_y(t_i)} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

の形のマトリックスである．式(2.20), (2.21), (2.22), (2.23), (2.24) の左辺は,  $U$  を  $\{w\}_i$ ,  $\{\dot{w}\}_i$ ,  $\{\ddot{w}\}_i$ ,  $\{S\}$ ,  $\{\zeta\}_i$  の各成分でそれぞれ偏微分して得られるベクトルである．式(2.24) は制約条件(2.18) そのものである．このようにして連立方程式から, 未知量  $\{S\}$ ,  $\{\zeta\}$ ,  $\{w\}_i$ ,  $\{\dot{w}\}_i$ ,  $\{\ddot{w}\}_i$  を求めれば, それらは制約条件(2.18) を満足しながらラグランジュ関数  $U$  を極小にすることがわかる．このときの  $\{S\}$  が同定結果である．

方程式(2.20), (2.21), (2.22), (2.23), (2.24) は非線形方程式であり, しかも未知数が多いので直接解くのは一般には困難である．そこで以下に示すような反復法で解く．

未知数  $\{w\}_i$ ,  $\{\dot{w}\}_i$ ,  $\{\ddot{w}\}_i$ ,  $\{S\}$  の初期値として  $\{w_0\}_i$ ,  $\{\dot{w}_0\}_i$ ,  $\{\ddot{w}_0\}_i$ ,  $\{S_0\}$  を与える．以下, 添字「 $_0$ 」が付くものは初期値を表す．また一回の計算における補正量をそれぞれ  $\{\Delta w\}_i$ ,  $\{\Delta \dot{w}\}_i$ ,  $\{\Delta \ddot{w}\}_i$ ,  $\{\Delta S\}$  とする．よって

$$\{w\}_i = \{w_0\}_i + \{\Delta w\}_i \quad (2.26)$$

$$\{\dot{w}\}_i = \{\dot{w}_0\}_i + \{\Delta \dot{w}\}_i \quad (2.27)$$

$$\{\ddot{w}\}_i = \{\ddot{w}_0\}_i + \{\Delta \ddot{w}\}_i \quad (2.28)$$

$$\{S\} = \{S_0\} + \{\Delta S\} \quad (2.29)$$

とおく． $\{q\}_i$ ,  $[A]_i$  も同様に

$$[A]_i = [A_0]_i + [\Delta A]_i \quad (2.30)$$

$$\{q\}_i = \{q_0\}_i + \{\Delta q\}_i \quad (2.31)$$

とおく．式(2.24) に式(2.30), (2.31) を代入する． $[\Delta A]_i$ ,  $\{\Delta q\}_i$ ,  $\{\Delta S\}$  の二乗以上の項

を無視すると

$$[A_0]_i\{S_0\} + [A_0]_i\{\Delta S\} + [B_0]_i\{\Delta w\}_i + [C_0]_i\{\Delta \dot{w}\}_i + [D_0]_i\{\Delta \ddot{w}\}_i - \{q_0\}_i = \{0\} \quad (2.32)$$

を得る. ここに  $[B_0]_i$ ,  $[C_0]_i$ ,  $[D_0]_i$  は式 (2.25) を用いて計算される.

式 (2.20), (2.21), (2.22) に式 (2.15), (2.16), (2.17) を代入すると

$$\{\Delta w\}_i = \{\hat{w}\}_i - \{w_0\}_i + [B_0]_i^T \{\zeta\}_i \quad (2.33)$$

$$\{\Delta \dot{w}\}_i = \{\hat{\dot{w}}\}_i - \{\dot{w}_0\}_i + [C_0]_i^T \{\zeta\}_i \quad (2.34)$$

$$\{\Delta \ddot{w}\}_i = \{\hat{\ddot{w}}\}_i - \{\ddot{w}_0\}_i + [D_0]_i^T \{\zeta\}_i \quad (2.35)$$

となる. 式 (2.33), (2.34), (2.35) を式 (2.32) に代入すると

$$\begin{aligned} & [A_0]_i\{\Delta S\} + [A_0]_i\{S_0\} - \{q_0\}_i + [B_0]_i\{e_w\}_i + [C_0]_i\{e_{\dot{w}}\}_i + [D_0]_i\{e_{\ddot{w}}\}_i \\ & + \left[ [B_0]_i[B_0]_i^T + [C_0]_i[C_0]_i^T + [D_0]_i[D_0]_i^T \right] \{\zeta\}_i = \{0\} \end{aligned} \quad (2.36)$$

となる. ここで

$$\{E\}_i = \left\{ [A_0]_i\{S_0\} - \{q_0\}_i + [B_0]_i\{e_w\}_i + [C_0]_i\{e_{\dot{w}}\}_i + [D_0]_i\{e_{\ddot{w}}\}_i \right\} \quad (2.37)$$

$$[F]_i = \left[ [B_0]_i[B_0]_i^T + [C_0]_i[C_0]_i^T + [D_0]_i[D_0]_i^T \right] \quad (2.38)$$

とおくと, 式 (2.36) は

$$\{\zeta\}_i = [F]_i^{-1} (-\{E\}_i - [A_0]_i\{\Delta S\}) \quad (2.39)$$

となる. これを式 (2.23) に代入すると

$$\sum_i [A_0]_i^T [F]_i^{-1} \{-\{E\}_i - [A_0]_i\{\Delta S\}\} = \{0\} \quad (2.40)$$

が得られるので, これを変形して

$$\{\Delta S\} = \sum_i \left[ -[A_0]_i^T [F]_i^{-1} [A_0]_i \right]^{-1} \sum_i \left\{ [A_0]_i^T [F]_i^{-1} \{E\}_i \right\} \quad (2.41)$$

を得る. この式から,  $\{\Delta S\}$  が求められる.  $\{\Delta S\}$  を式 (2.39) に代入すると,  $\{\zeta\}_i$  が求められる.  $\{\zeta\}_i$  を用いれば式 (2.33), (2.34), (2.35) から補正後の  $\{w_0\}_i + \{\Delta w\}_i$ ,  $\{\dot{w}_0\}_i + \{\Delta \dot{w}\}_i$ ,  $\{\ddot{w}_0\}_i + \{\Delta \ddot{w}\}_i$  が求められる. このようにして求めた補正後の値を新たな初期値として再び計算を行い, 収束するまで繰り返す.



反復計算を行う際に必要となる最初の初期値は、例えば、実験データから求めた  $\{w\}_i$ ,  $\{\dot{w}\}_i$ ,  $\{\ddot{w}\}_i$ ,  $\{q\}_i$  および前節の方法で求めた未知パラメータ  $\{S\}$  を用いればよい。

なお、この以下ではラグランジュ未定乗数法による同定法を第2の同定法ということにする。

## 2.4 数値シミュレーション

式(2.4)で表わされる回転軸系について数値シミュレーションを行った。既知としたパラメータは

$$m = 7.87 \text{ kg}, \quad I_p = 2.26 \times 10^{-1} \text{ kgm}^2, \quad I = 1.13 \times 10^{-1} \text{ kgm}^2 \quad (2.42)$$

であり、これ以外の各パラメータは表2.1の Original の欄に示した値とする。また回転軸は一定角加速度で回転させるものとし、

$$\left. \begin{aligned} \Theta &= \frac{1}{2}\lambda t^2 + \omega_0 t \\ \dot{\Theta} &= \lambda t + \omega_0 \\ \ddot{\Theta} &= \lambda \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

とする。ここで、 $\lambda$ ,  $\omega_0$  は回転軸の角加速度、初角速度を表し

$$\lambda = 10.0 \text{ rad/s}^2, \quad \omega_0 = 30.0 \text{ rad/s} \quad (2.44)$$

とする。

### 2.4.1 データにノイズが含まれない場合

実験データにノイズはまったく含まれないとして同定の数値シミュレーションを行なった。実験データとみなしたデータは方程式(2.4)を数値的に解いて求めた。測定は10秒行い、この間に2500点のデータを収集した。データの例として  $x$ ,  $\theta_x$  とその速度、加速度の応答波形を図2.2に示す。

第1, 第2の同定法により未知パラメータを定めた。ここで式(2.19)のラグランジュ関数  $U$  における重み係数  $r_1, r_2, r_3$  はすべて1とした。表2.1からわかるように各パラメータの値はもとの値に極めて近くなり、データが誤差を含まない場合には、第1の方法、第2の方法ともに提案した同定法が有効なことが確認された。

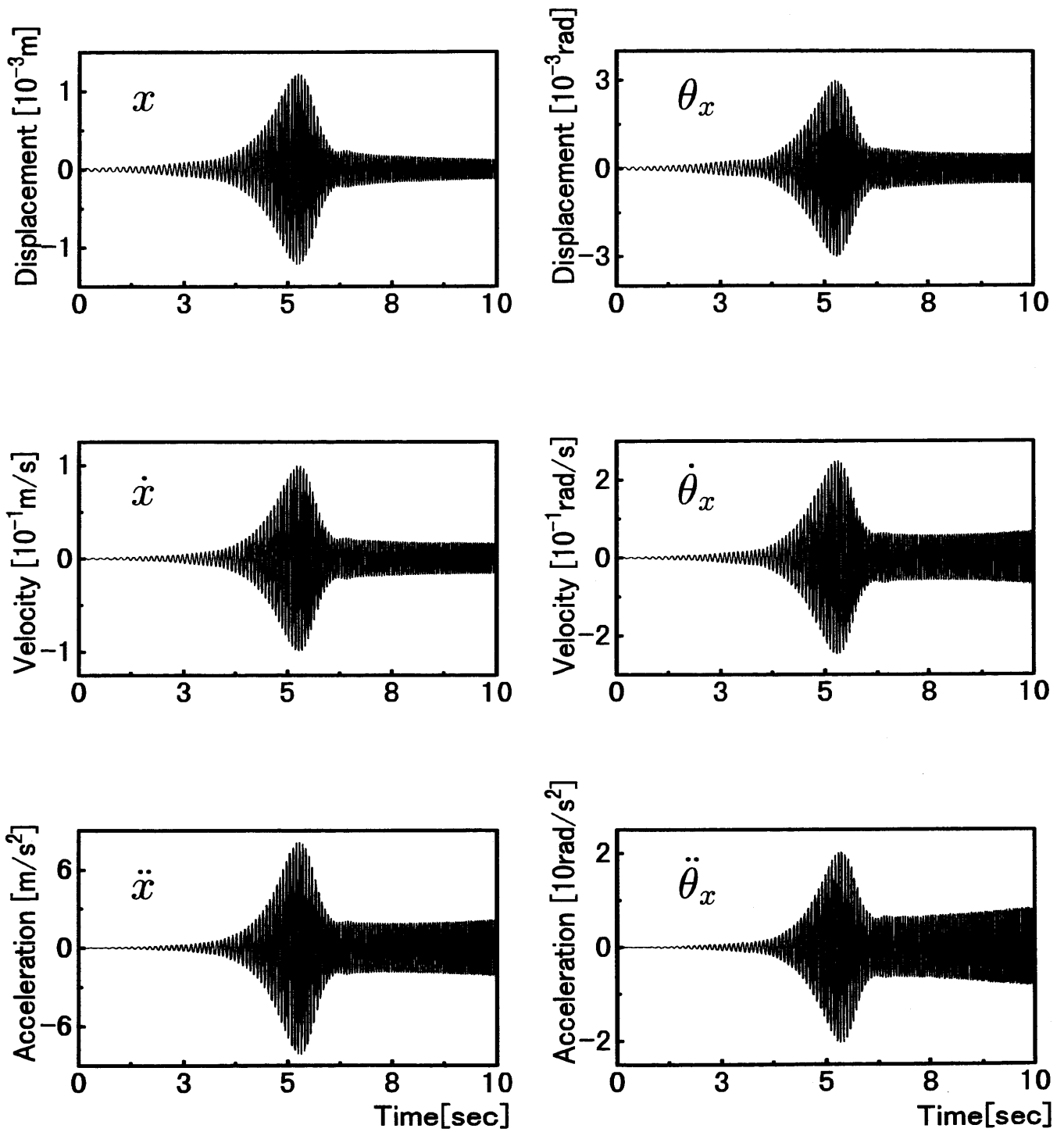


図 2.2: 応答波形の例 (ノイズなし)

Parameters		Original	Identified(1)	Identified(2)
$c_{11}$	Ns/m	$3.246 \times 10^1$	$3.246 \times 10^1$	$3.246 \times 10^1$
$c_{12}$	Ns/rad	0.000	0.000	0.000
$c_{22}$	Nms/rad	5.910	5.910	5.910
$k_{11}$	N/m	$8.366 \times 10^4$	$8.366 \times 10^4$	$8.366 \times 10^4$
$k_{12}$	N/rad	$-1.321 \times 10^4$	$-1.321 \times 10^4$	$-1.321 \times 10^4$
$k_{22}$	Nm/rad	$0.440 \times 10^4$	$0.440 \times 10^4$	$0.440 \times 10^4$
$\Delta k_{s11}$	N/m	$8.366 \times 10^3$	$8.366 \times 10^3$	$8.366 \times 10^3$
$\phi_{s11}$	rad	0.785	0.785	0.785
$\Delta k_{s12}$	N/rad	$-1.321 \times 10^3$	$-1.321 \times 10^3$	$-1.321 \times 10^3$
$\phi_{s12}$	rad	0.785	0.785	0.785
$\Delta k_{s22}$	Nm/rad	$0.440 \times 10^3$	$0.440 \times 10^3$	$0.440 \times 10^3$
$\phi_{s22}$	rad	0.785	0.785	0.785
$\Delta k_{b11}$	N/m	$4.183 \times 10^3$	$4.183 \times 10^3$	$4.183 \times 10^3$
$\phi_{b11}$	rad	0.548	0.548	0.548
$\Delta k_{b12}$	N/rad	$-0.660 \times 10^3$	$-0.660 \times 10^3$	$-0.660 \times 10^3$
$\phi_{b12}$	rad	0.548	0.548	0.548
$\Delta k_{b22}$	Nm/rad	$0.220 \times 10^3$	$0.220 \times 10^3$	$0.220 \times 10^3$
$\phi_{b22}$	rad	0.548	0.548	0.548
$\epsilon$	m	$1.000 \times 10^{-4}$	$1.000 \times 10^{-4}$	$1.000 \times 10^{-4}$
$\phi_\epsilon$	rad	0.897	0.897	0.897
$\tau$	rad	$8.700 \times 10^{-4}$	$8.700 \times 10^{-4}$	$8.700 \times 10^{-4}$
$\phi_\tau$	rad	1.595	1.595	1.595

表 2.1: 同定結果 (ノイズなし)

### 2.4.2 データにノイズが含まれる場合

実際のデータにはノイズが含まれているので、方程式(2.4)を数值的に解いて求めた応答データに正規乱数を加え、得られた結果をノイズを含む実験データとした。測定は10秒行い、この間に2500点のデータを収集した。データの例として加えた乱数の標準偏差が各実験データの二乗平均平方根の2%である応答波形のデータを図2.3に示す。

図2.3の応答データを用いて得られる同定結果を表2.2に示す。ここで式(2.19)のラグランジュ関数 $U$ における重み係数 $r_1, r_2, r_3$ はすべて1とした。この表からわかるように第1の同定法に比べ第2の方法の方がもとのパラメータに近くなっているのがわかる。

さらに同定結果の精度を定量的に評価するために、データにノイズとして加えた乱数の標準偏差を変化させ、その各値での精度を式

$$\left. \begin{aligned} E_d &= \sqrt{\frac{\sum_i (F_d(t_i) - \dot{F}_d(t_i))^2}{\sum_i F_d(t_i)^2}} \\ E_r &= \sqrt{\frac{\sum_i (F_r(t_i) - \dot{F}_r(t_i))^2}{\sum_i F_r(t_i)^2}} \\ E_f &= \sqrt{\frac{\sum_i (F_f(t_i) - \dot{F}_f(t_i))^2}{\sum_i F_f(t_i)^2}} \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

に基づいて求めた。ここに $F_d, F_r, F_f$ はそれぞれ正しい減衰力、復元力、不釣り合いによって生じる力であり、 $\dot{F}_d, \dot{F}_r, \dot{F}_f$ はそれぞれ、同定によって得られるパラメータから定まる減衰力、復元力、不釣り合いによって生じる力である。求めた $E_d, E_r, E_f$ を図2.4に示す。図2.4の横軸は応答波形に含めたノイズの標準偏差の各実験データの二乗平均平方根に対する割合で、ノイズの大きさをあらわしている。また、縦軸の添え字 $z$ はたわみに関する誤差を表し、添え字 $\theta$ は傾きに関する誤差を表している。

この図からノイズが小さい場合には第1の同定法でも精度良く同定できるが、ノイズが大きい場合にはラグランジュの未定乗数法を用いた方が精度がよいことがわかる。

また、表2.2で得られたパラメータを用いてふれまわり運動の最大振幅 $|z|, |\theta|$ を各々求めた。回転速度 $\omega$ を横軸にとって、第二の方法を実線で示した。また、もとのパラメータから同様にして求めた最大振幅を「 $\bullet$ 」, 「 $\circ$ 」で示し、比較した。その結果を図2.5に示す。ただし、第1の同定法で得られたパラメータを用いた場合は、振動が発散し振幅を求めることができなかった。

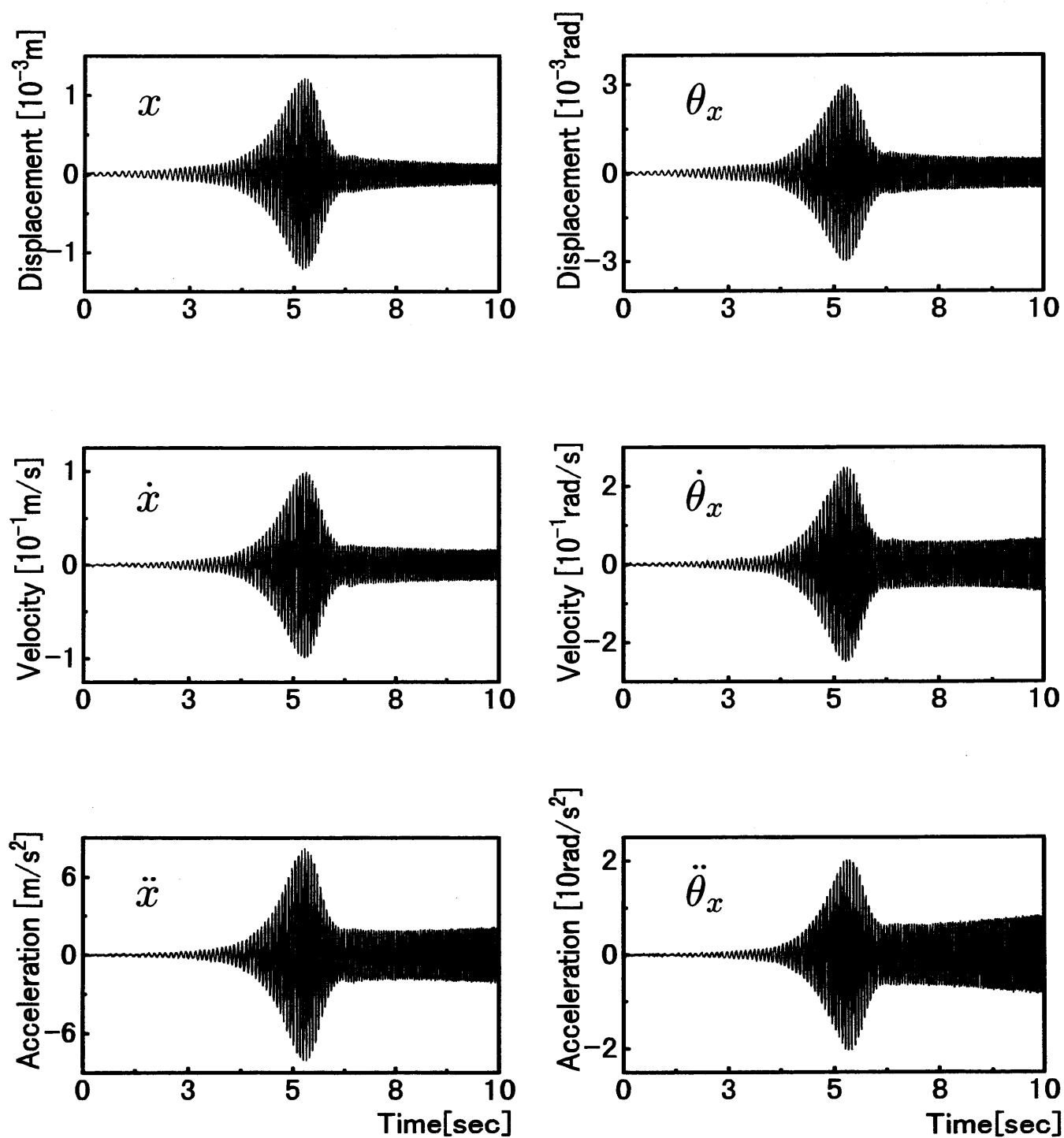


図 2.3: 応答波形の例 (ノイズ 2.0%)

Parameters		Original	Identified(1)	Identified(2)
$c_{11}$	Ns/m	$3.246 \times 10^1$	$3.160 \times 10^1$	$3.278 \times 10^1$
$c_{12}$	Ns/rad	0.000	16.48	1.073
$c_{22}$	Nms/rad	5.910	-6.661	5.006
$k_{11}$	N/m	$8.366 \times 10^4$	$5.463 \times 10^4$	$8.154 \times 10^4$
$k_{12}$	N/rad	$-1.321 \times 10^4$	$-0.120 \times 10^4$	$-1.238 \times 10^4$
$k_{22}$	Nm/rad	$0.440 \times 10^4$	$0.009 \times 10^4$	$0.408 \times 10^4$
$\Delta k_{s11}$	N/m	$8.366 \times 10^3$	$3.522 \times 10^3$	$8.441 \times 10^3$
$\phi_{s11}$	rad	0.785	0.711	0.780
$\Delta k_{s12}$	N/rad	$-1.321 \times 10^3$	$0.535 \times 10^3$	$-1.335 \times 10^3$
$\phi_{s12}$	rad	0.785	0.830	0.771
$\Delta k_{s22}$	Nm/rad	$0.440 \times 10^3$	$-0.247 \times 10^3$	$0.443 \times 10^3$
$\phi_{s22}$	rad	0.785	0.712	0.767
$\Delta k_{b11}$	N/m	$4.183 \times 10^3$	$-3.514 \times 10^3$	$3.618 \times 10^3$
$\phi_{b11}$	rad	0.548	0.271	0.574
$\Delta k_{b12}$	N/rad	$-0.660 \times 10^3$	$1.431 \times 10^3$	$-0.507 \times 10^3$
$\phi_{b12}$	rad	0.548	0.299	0.613
$\Delta k_{b22}$	Nm/rad	$0.220 \times 10^3$	$-0.283 \times 10^3$	$0.183 \times 10^3$
$\phi_{b22}$	rad	0.548	0.189	0.608
$\epsilon$	m	$1.000 \times 10^{-4}$	$0.911 \times 10^{-4}$	$0.991 \times 10^{-4}$
$\phi_\epsilon$	rad	0.897	0.675	0.884
$\tau$	rad	$8.700 \times 10^{-4}$	$4.054 \times 10^{-4}$	$8.285 \times 10^{-4}$
$\phi_\tau$	rad	1.595	0.797	1.576

表 2.2: 同定結果 (ノイズ 2.0%)

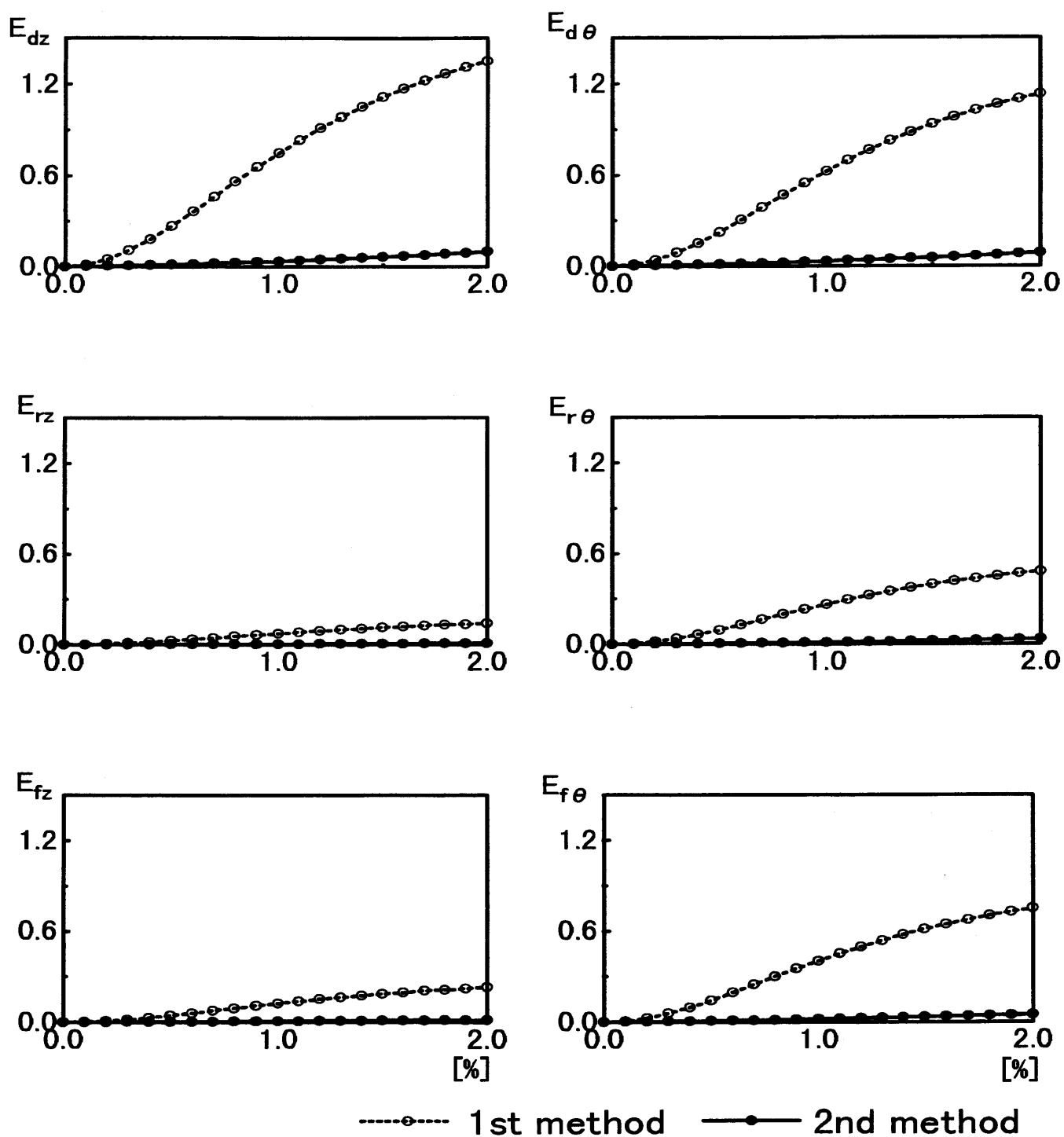


図 2.4: 同定精度の評価

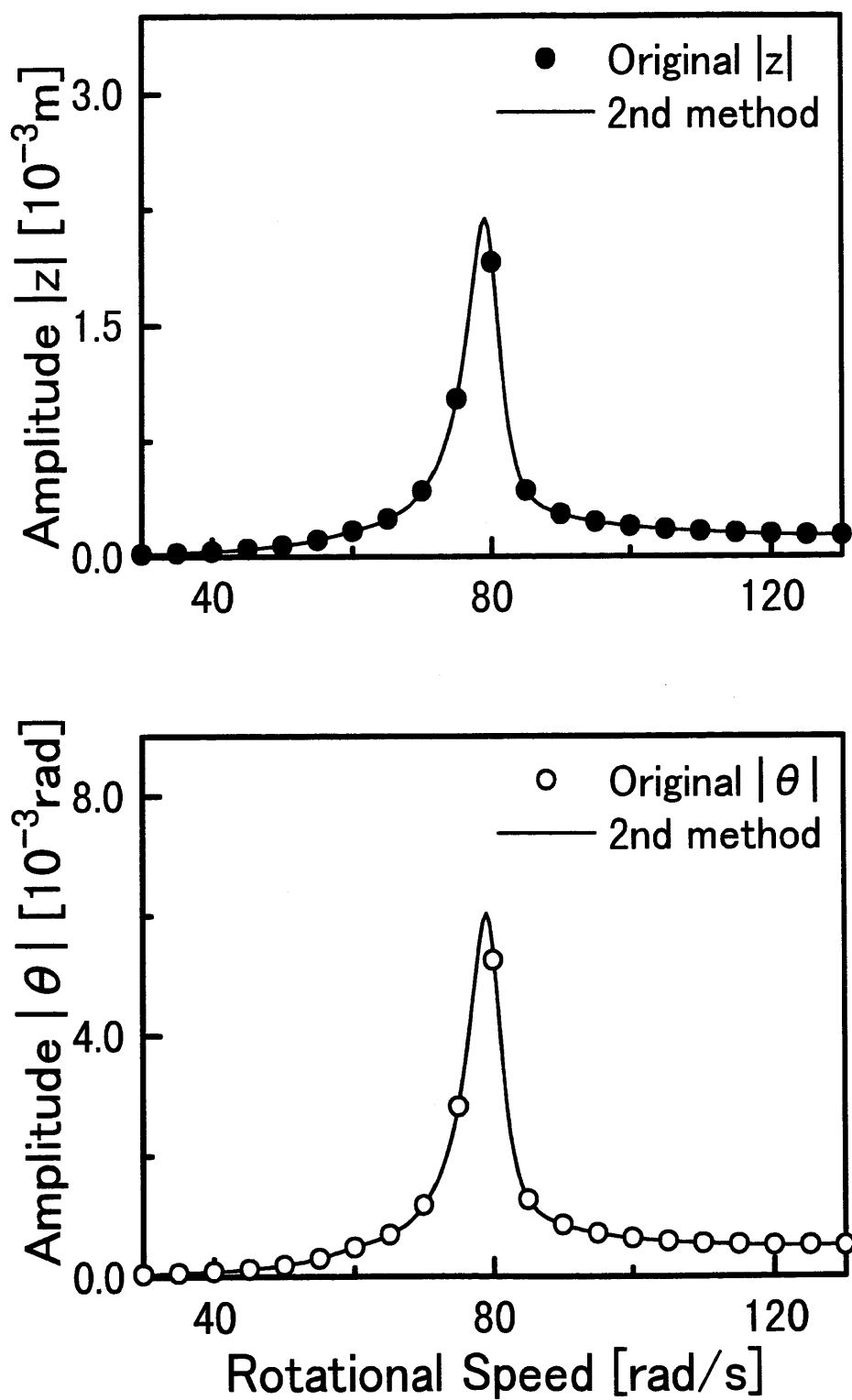


図 2.5: 最大振幅 (ノイズ 2.0%)



この結果より、ノイズが大きい場合でも第2の方法を用いれば正しい応答を予測できることがわかる。

## 2.5 実際の系への適用

弾性軸の中央に円板状の回転体を有する回転軸系を実際に作成し、これらから得られる実験データを用いて、提案した同定法の有効性を確認する。予備的な実験によって、弾性軸の初期たわみが同定精度に大きな影響を及ぼすことがわかったので、まず、同定法が基礎とする運動方程式を初期たわみの影響を考慮したものに修正する。次にこれをもとにして、提案した同定法を修正する。最後にこの同定法で回転軸系を同定し、その有効性を確認する。

### 2.5.1 初期たわみを考慮した数学モデルの導出

ここで対象とする回転軸系では回転体が回転軸の中央に取り付けられているため、回転体の並進運動と傾き運動が連成しない。ここでは並進運動のみを考慮する。

弾性軸の初期たわみによって、時刻  $t = 0$  の瞬間に、図心  $M$  が  $x$  軸から角位置  $\phi_0$  の方向に原点  $O$  から  $|z_0|$  だけ変位しているとする。この初期たわみを複素数で表現すれば

$$z_0 = |z_0| e^{j\phi_0} \quad (2.46)$$

となる。復元力は初期たわみからの変位によって定められる。したがって初期たわみがある場合の運動方程式は式(2.4)の第1式において、復元力に関する項の  $z$  を  $z - z_0$  で置き換えることにより

$$\begin{aligned} m\ddot{z} + c\dot{z} + kz - \Delta k_s \bar{z} e^{j2\theta} - \Delta k_b \bar{z} \\ - kz_0 e^{j\theta} + \Delta k_s \bar{z}_0 e^{j\theta} + \Delta k_b \bar{z}_0 e^{-j\theta} \\ = m\epsilon(\ddot{\theta}^2 - j\ddot{\theta}) e^{j\theta} \end{aligned} \quad (2.47)$$

となる。

以上によって、この章で対象とする回転軸系は式(2.47)によって支配されることがわかった。同定の問題は、式(2.47)の各パラメータを定める問題に帰着される。

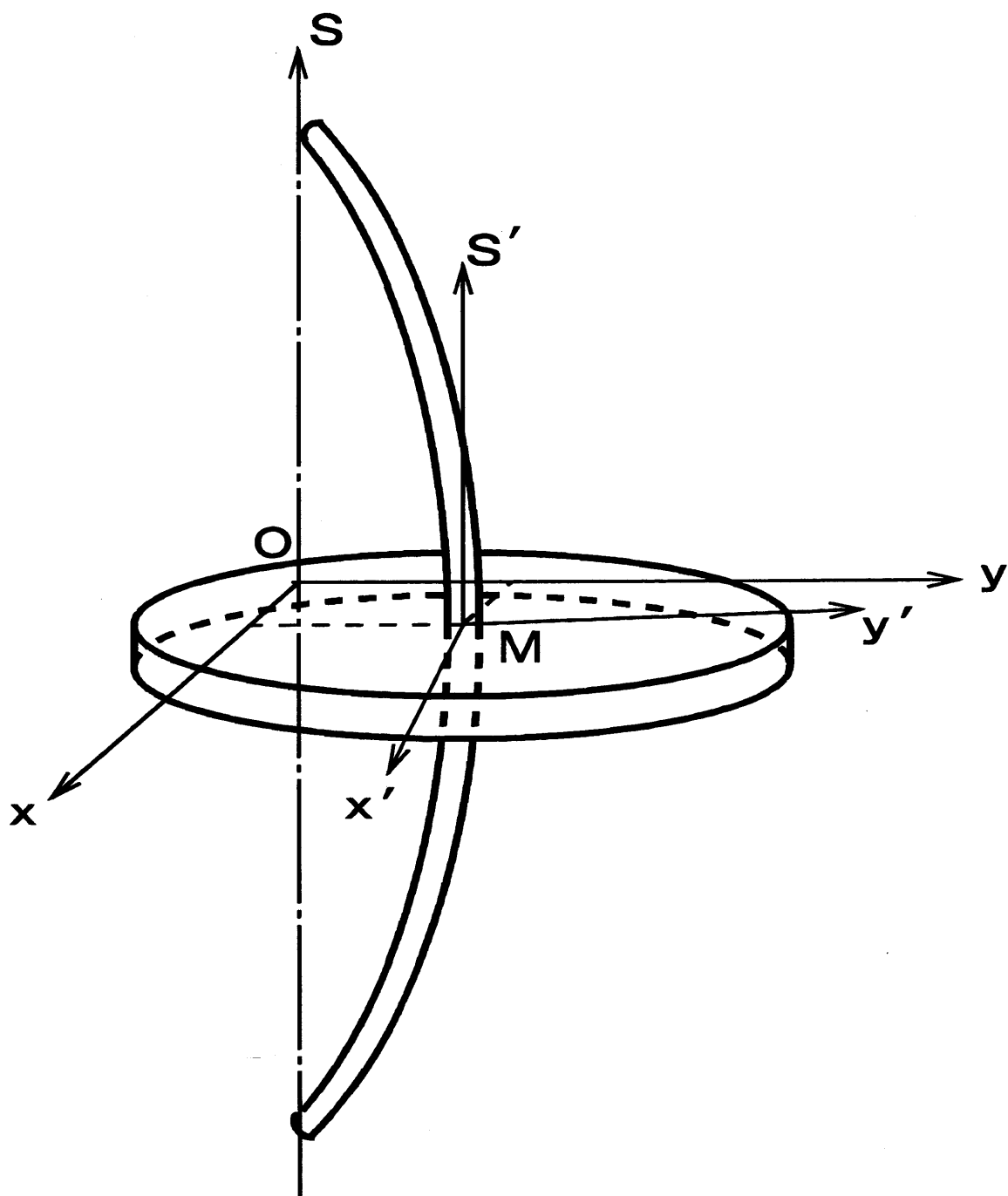


図 2.6: 対象とする回転軸系

### 2.5.2 同定法の修正

2. 3節で提案した同定法を修正し、回転軸系の非定常状態の実験データから式(2.47)のパラメータを定める方法を考える。ただし、回転体の質量 $m$ は、幾何学的形状から精度よく求める事ができる場合が多いので、以下ではこれは既知であるとし、これ以外のパラメータを実験データから求める方法を考える。

#### 最小二乗法による同定法

実験データを式(2.47)に代入すると、実験データにはノイズが含まれるので等号が成り立つとは限らない。そこで式(2.6)と同様に、その誤差を成分とする誤差ベクトル

$$\{e\}_i = \{ e_{1i} \ e_{2i} \}^T \quad (2.48)$$

を導入すると、それは

$$\{e\}_i = \{q\}_i - [A]_i \{S\} \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.49)$$

の形に書くことができる。ここに $\{S\}$ は未知パラメータを成分とする

$$\begin{aligned} \{S\} = \{ & c \ k \ Re[\Delta k_s] \ Im[\Delta k_s] \ Re[\Delta k_b] \ Im[\Delta k_b] \\ & Re[kz_0] \ Im[kz_0] \ Re[\Delta k_s \bar{z}_0] \ Im[\Delta k_s \bar{z}_0] \\ & Re[\Delta k_b \bar{z}_0] \ Im[\Delta k_b \bar{z}_0] \ Re[\epsilon] \ Im[\epsilon] \}^T \end{aligned} \quad (2.50)$$

の形のベクトルである。

支配方程式の未知パラメータを定めるのに、式(2.49)の誤差の二乗和を最小にするように未知パラメータを決定する。ただし、そのための条件式は未知パラメータに関する非線形連立方程式になっている。そこで、非線形最小二乗法<sup>(20)</sup>を用いて未知パラメータを定める。

#### ラグランジュ未定乗数法による同定法

ここでも式

$$\begin{aligned} U = \sum_i \left( \frac{1}{2} r_1 \{e_w\}_i^T \{e_w\}_i + \frac{1}{2} r_2 \{e_{\dot{w}}\}_i^T \{e_{\dot{w}}\}_i + \frac{1}{2} r_3 \{e_{\ddot{w}}\}_i^T \{e_{\ddot{w}}\}_i \right. \\ \left. + \{\zeta\}_i^T (\{q\}_i - [A]_i \{S\}) \right) \end{aligned} \quad (2.51)$$

で定義されるラグランジュ関数  $U$  を導入する. ただし, ベクトル  $\{S\}$  は式 (2.50) の形のベクトルであり, その成分には未知パラメータの積の形のものがある. このままでは以下の式表現が複雑になるので, 独立な未知パラメータを成分とするベクトル

$$\{S'\} = \{c \ k \ Re[\Delta k_s] \ Im[\Delta k_s] \ Re[\Delta k_b] \ Im[\Delta k_b] \ Re[z_0] \ Im[z_0] \ Re[\epsilon] \ Im[\epsilon]\}^T \quad (2.52)$$

を新たに導入する. 以下, ラグランジュ関数  $U$  を極小にするように未知数  $\{w\}_i, \{\dot{w}\}_i, \{\ddot{w}\}_i, \{S'\}, \{\zeta\}_i$  を定めることを考える. 式 (2.51) の  $U$  を極小にするための条件は

$$\frac{\partial U}{\partial \{w\}_i} = \{e_w\}_i + [B]_i^T \{\zeta\}_i = \{0\} \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \{\dot{w}\}_i} = \{e_{\dot{w}}\}_i + [C]_i^T \{\zeta\}_i = \{0\} \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \{\ddot{w}\}_i} = \{e_{\ddot{w}}\}_i + [D]_i^T \{\zeta\}_i = \{0\} \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \{S'\}} = \sum_i [G]^T [A]_i^T \{\zeta\}_i = \{0\} \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \{\zeta\}_i} = [A]_i \{S\} - \{q\}_i = \{0\} \quad (2.57)$$

で与えられる.  $[B]_i, [C]_i, [D]_i, [G]$  はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} [B]_i &= \begin{bmatrix} \frac{\partial [A]_i}{\partial x(t_i)} \{S\} & \frac{\partial [A]_i}{\partial y(t_i)} \{S\} \end{bmatrix} \\ [C]_i &= \begin{bmatrix} \frac{\partial [A]_i}{\partial \dot{x}(t_i)} \{S\} & \frac{\partial [A]_i}{\partial \dot{y}(t_i)} \{S\} \end{bmatrix} \\ [D]_i &= \begin{bmatrix} -\frac{\partial \{q\}_i}{\partial \ddot{x}(t_i)} & -\frac{\partial \{q\}_i}{\partial \ddot{y}(t_i)} \end{bmatrix} \\ [G] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \{S\}}{\partial \{S'\}^T} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2.58)$$

の形のマトリックスである. この連立方程式を以下に示すような反復法で解く.

一回の計算における補正量をそれぞれ  $\{\Delta w\}_i, \{\Delta \dot{w}\}_i, \{\Delta \ddot{w}\}_i, \{\Delta S'\}$  とすると

$$\{w\}_i = \{w_0\}_i + \{\Delta w\}_i \quad (2.59)$$

$$\{\dot{w}\}_i = \{\dot{w}_0\}_i + \{\Delta\dot{w}\}_i \quad (2.60)$$

$$\{\ddot{w}\}_i = \{\ddot{w}_0\}_i + \{\Delta\ddot{w}\}_i \quad (2.61)$$

$$\{S\} = \{S_0\} + [G]\{\Delta S'\} \quad (2.62)$$

となる。これを用いて、2.3.2節で述べたと同様な手順で解くと

$$\{\zeta\}_i = [F]_i^{-1} (-\{E\}_i - [A_0]_i [G] \{\Delta S'\}) \quad (2.63)$$

を得る。これを式(2.56)に代入すると

$$\sum_i [G]^T [A_0]^T [F]_i^{-1} \{-\{E\}_i - [A_0]_i [G] \{\Delta S'\}\} = \{0\} \quad (2.64)$$

が得られるので、これを变形して

$$\{\Delta S'\} = \sum_i \left[ -[G]^T [A_0]^T [F]_i^{-1} [A_0]_i [G] \right]^{-1} \sum_i \{ [G]^T [A_0]^T [F]_i^{-1} \{E\}_i \} \quad (2.65)$$

を得る。この式から、 $\{\Delta S'\}$  が求められる。 $\{\Delta S'\}$  を式(2.63)に代入すると、 $\{\zeta\}_i$  が求められる。 $\{\zeta\}_i$  を用いれば補正後の  $\{w_0\}_i + \{\Delta w\}_i$ ,  $\{\dot{w}_0\}_i + \{\Delta\dot{w}\}_i$ ,  $\{\ddot{w}_0\}_i + \{\Delta\ddot{w}\}_i$  が求められる。このようにして求めた補正後の値を新たな初期値として再び計算を行い、収束するまで繰り返す。

反復計算を行う際に必要となる最初の初期値は、例えば、実験データから求めた  $\{w\}_i$ ,  $\{\dot{w}\}_i$ ,  $\{\ddot{w}\}_i$ ,  $\{q\}_i$  および前節の方法で求めた未知パラメータ  $\{S\}$  を用いればよい。

### 2.5.3 実験装置の概略

以上に示した同定法の妥当性を検討するため、実験装置を作成し、これらから得られる実験データを用いて系の同定を行う。同定の対象とした実験装置の概略を図2.7に示す。図のSは弾性軸を表し、直径12 mmの円形断面をもち、長さ700 mmである。軸の両端は玉軸受けを介して軸受台によって鉛直に支えられている。回転体の質量は3.21 kg、弾性軸の質量は0.621 kgであった。

$x$ および $y$ 軸を、軸受台の方向および軸受台に直角の方向に定めた。 $x'$ および $y'$ 軸を、弾性軸の上部に固定した小紙片Pのある方向およびそれに直角の方向に定めた。 $x'$ 軸が $x$ 軸に平行になる瞬間から変位を測定するため、レーザー式センサーStを $x$ 軸の方向に固定し、これから発するレーザーが小紙片Pによって遮られる瞬間から測定を開始するように測定装置を設定した。変位 $x, y$ を、回転体の近くで $x$ および $y$ 軸方向に固定した2個のセンサーで測定した。また、軸の上部Tにロータリーエンコーダを取り付け回転角 $\theta$ を測定した。

### 2.5.4 同定実験

質量 $m$ は、回転体の質量と弾性軸の質量の寄与分を加えたものである。弾性軸の寄与分は、軸の両端が単純支持されている場合に、レーレー法によって得られる結果を用い、弾性軸の全質量の17/35とする<sup>(21)</sup>。以上のようにして $m = 3.51\text{kg}$ とする。軸の回転速度を、主危険速度を含むように変化させ、そのときの変位 $x, y$ と回転角 $\theta$ を測定した。測定は12秒間行い、センサごとに12000個のデータを採取した。このデータから8192個のデータを収集し、変位の速度と加速度、回転角の角速度と角加速度は各データを微分して求めた。変位の微分は周波数領域で行った。このとき400rad/s以上の周波数と定数成分は誤差とみなして無視した。また、回転角の微分は収集したデータを5次の多項式で近似し、それを微分して得た。その波形を図2.8, 2.9に示す。

これらの実験データを用いて、前述した同定法に基づいて各パラメータを求めた。その結果を表2.3に示す。ここで式(2.51)のラグランジュ関数 $U$ における重み係数 $r_1, r_2, r_3$ はすべて1とした。同定結果の妥当性を検討するため、同定により定められたパラメータの値を用いて各回転速度のふれまわり運動の最大振幅を求めた。さらに実際の軸を回転速度70rad/sから110rad/s付近の間で回転させ、定常状態での最大振幅を測定しそれと比較した。回転速度 $\omega$ を横軸にとって第1の方法を点線、第2の方法を実線で示し、実際の軸から測定した最大振幅を「●」で示した。その結果を図2.10に示す。また、ふれまわり運動の $x, y$ 方向成分の最大振幅においても同様の方法で比較した。それを図2.11に示す。この図

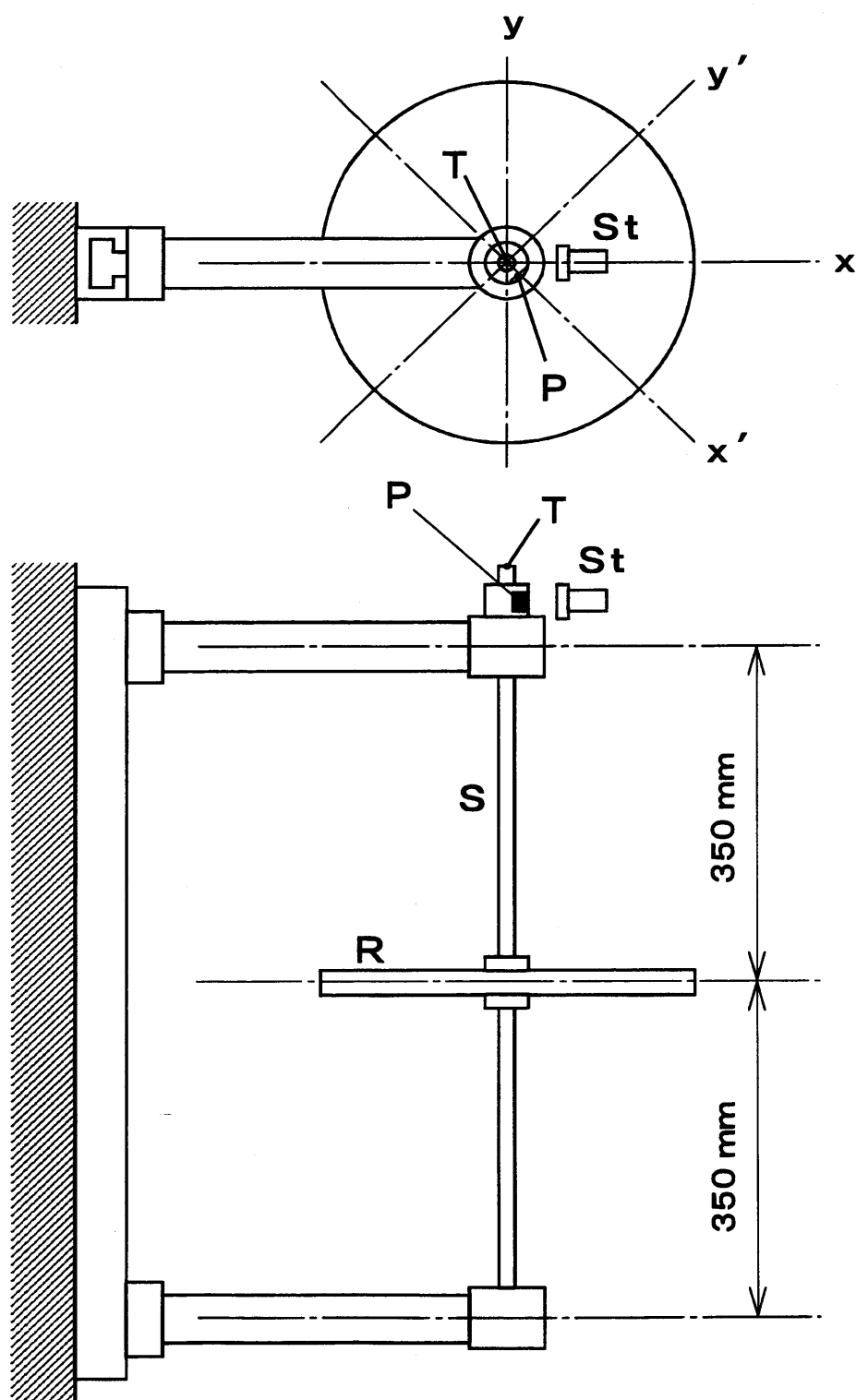


図 2.7: 実験装置

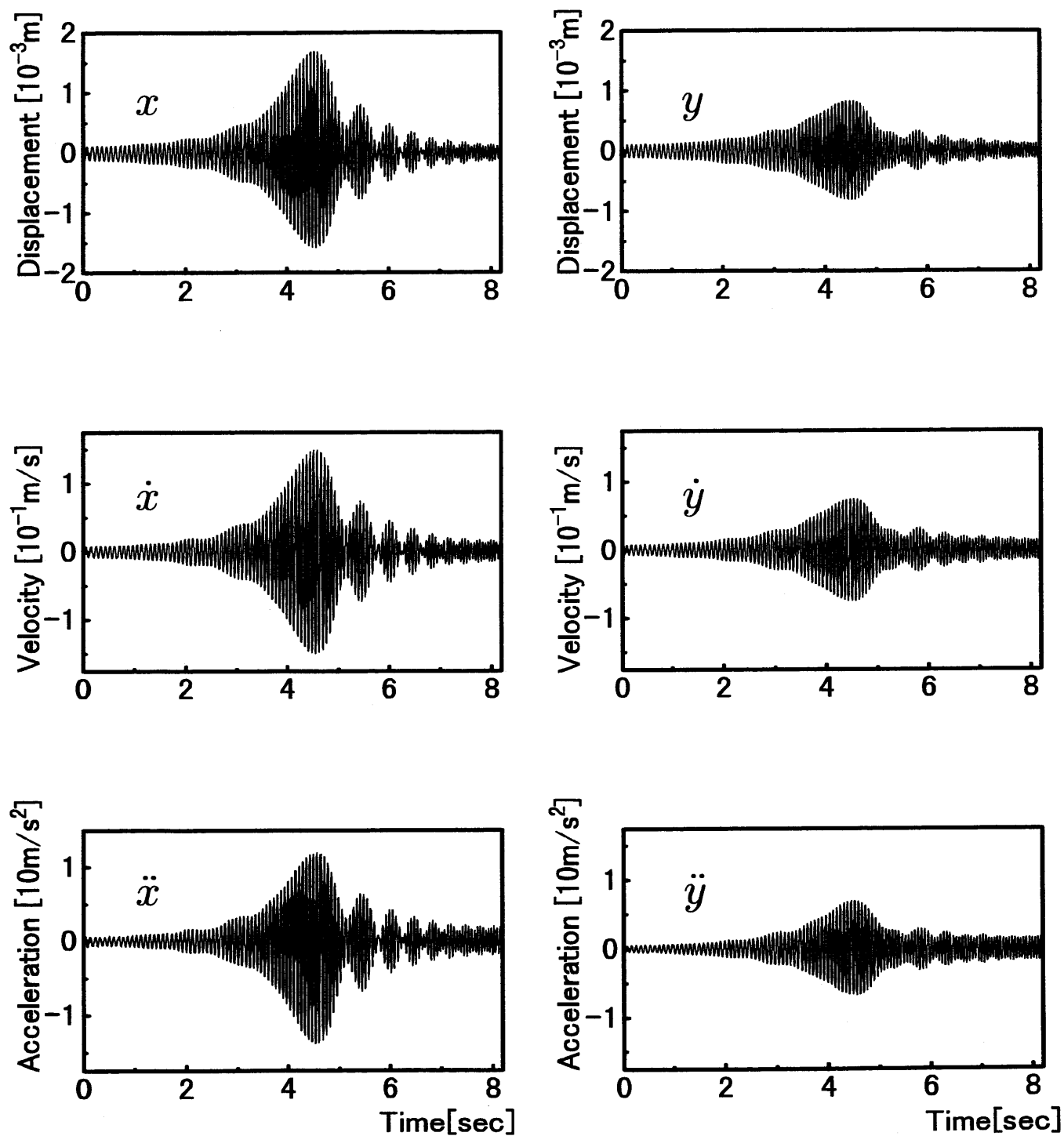


図 2.8: 実験データ (変位, 速度, 加速度)



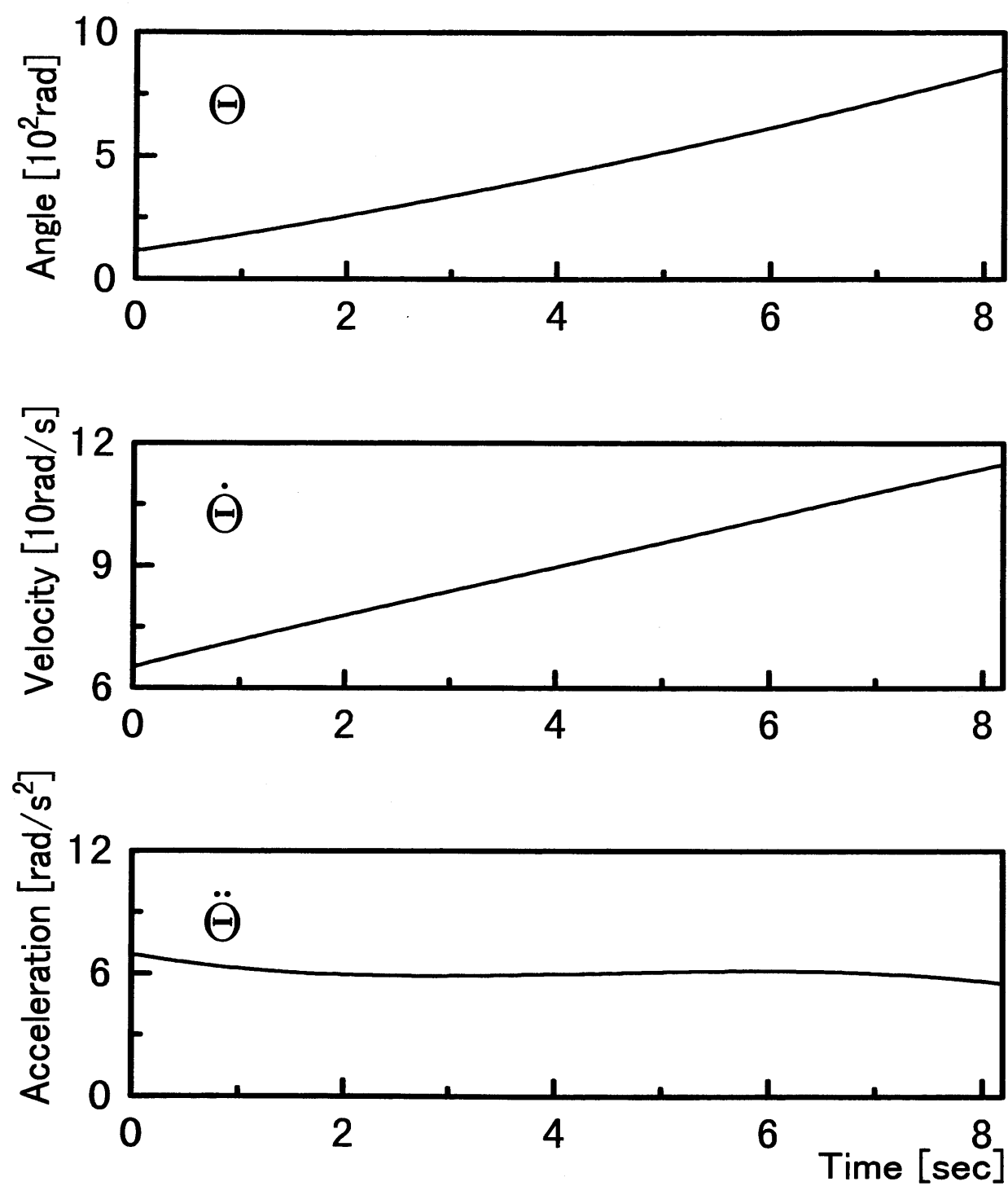


図 2.9: 実験データ (回転角, 角速度, 角加速度)

Parameters		Identified(1)	Identified(2)
$c$	Ns/m	8.976	9.004
$k$	N/m	$2.763 \times 10^4$	$2.773 \times 10^4$
$ \Delta k_s $	N/m	$1.040 \times 10^2$	$1.220 \times 10^2$
$\phi_s$	rad	1.272	1.220
$ \Delta k_b $	N/m	$4.161 \times 10^2$	$4.143 \times 10^2$
$\phi_b$	rad	-0.630	-0.628
$\epsilon$	m	$5.127 \times 10^{-5}$	$5.079 \times 10^{-5}$
$\phi_\epsilon$	rad	1.017	1.037
$ z_0 $	m	$4.931 \times 10^{-5}$	$5.047 \times 10^{-5}$
$\phi_0$	rad	-1.002	-0.992

表 2.3: 同定結果

から、同定結果は第1の方法、第2の方法ともに実験データをよく再現していることがわかる。同定結果の妥当性をさらに比較するため、同定結果をもとに回転軸系の釣り合わせを取り、応答の予測を行った。表2.3の値をもとに、静不釣り合いを減らすように質量を回転体に取り付けた場合の最大振幅を予測し、釣り合わせ後に行った実験結果と比較した。比較の結果を図2.12に示す。図の点線、実線はそれぞれ第1の方法、第2の方法によって得られた結果から予測された最大振幅、「○」は釣り合わせ後に実験によって得られた最大振幅である。この図から、釣り合わせ後の応答の予測は第1の方法、第2の方法ともに実験結果とよく一致していることがわかる。

以上のようにして、提案した同定法の妥当性が確認された。ここで第1の方法においても精度よく同定できているのは測定した実験データに大きなノイズが含まれなかったためだと思われる。

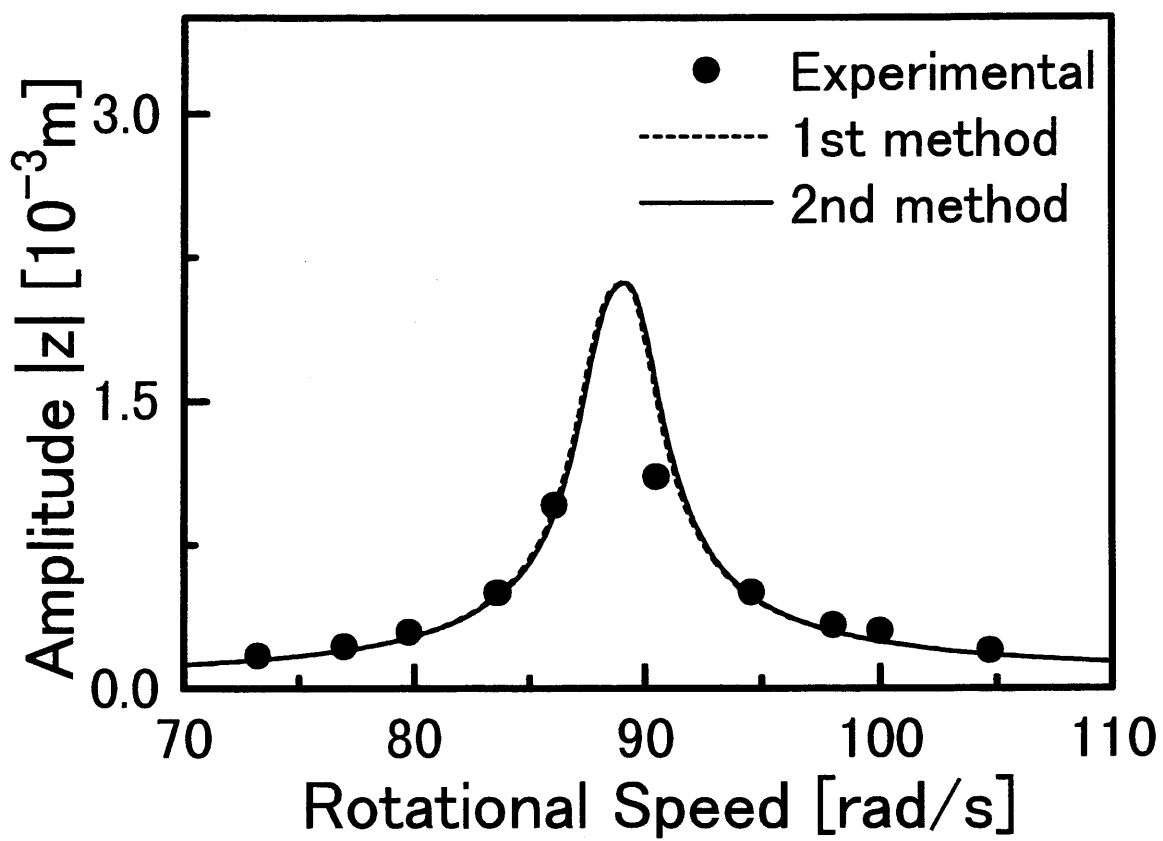


図 2.10: 最大振幅

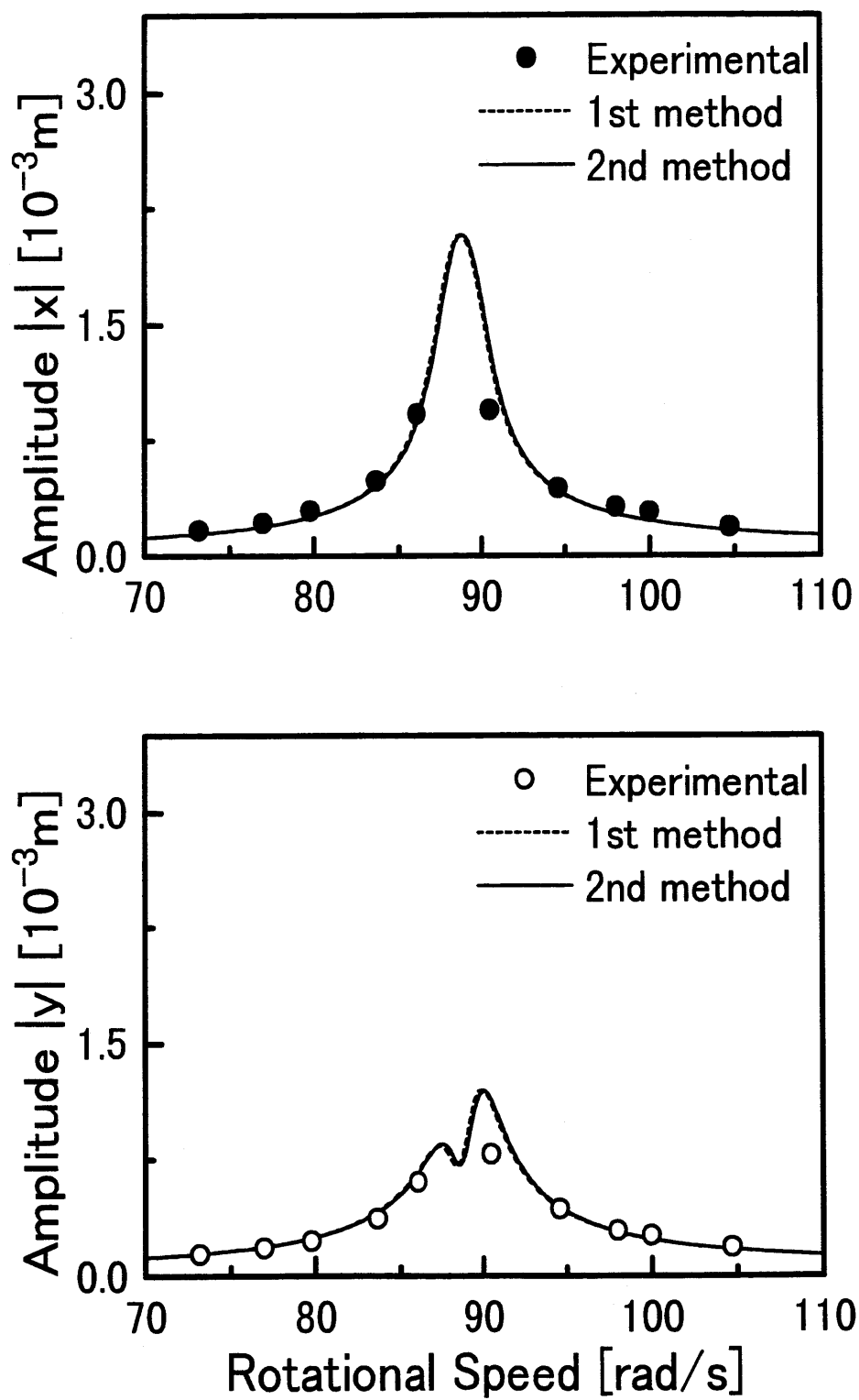


図 2.11: 最大振幅

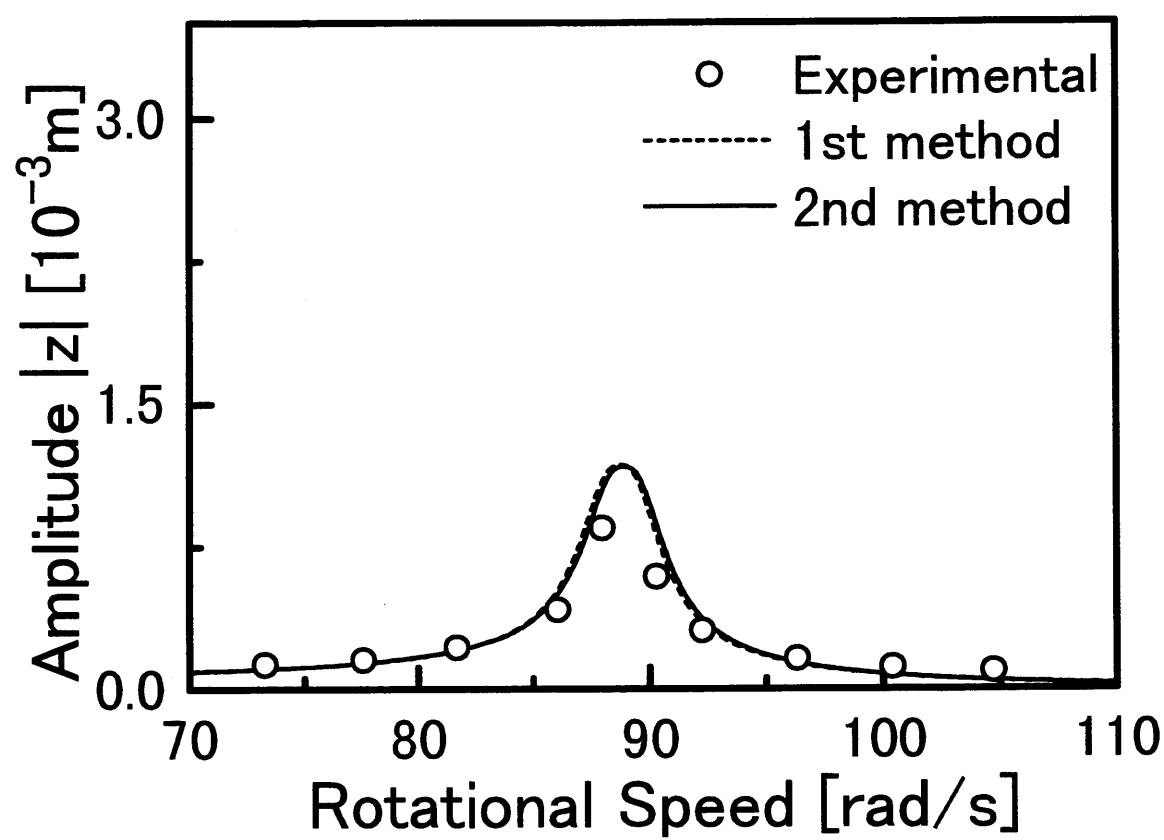


図 2.12: 釣り合わせ後の最大振幅



## 第3章

# 非線形集中回転軸系の同定法

### 3.1 まえがき

前章までは線形回転軸系を対象としたものである。回転機械では、軸受部のがた、摩擦特性、油膜特性などの要因による非線形性、軸の材料非線形性、軸の幾何学的非線形性などが存在し、回転軸系は非線形系となることが多い。したがって非線形性までを考慮した実験的同定法の必要性は高い。そこでこの章では非線形集中回転軸系の時間領域同定法を提案する。

はじめに非線形集中回転軸系の数学モデルについて検討し、運動方程式を導く。次に回転中に不釣り合いによって引き起こされる回転軸系のふれまわり運動の非定常状態の応答データを利用して運動方程式に含まれるパラメータを定める方法を示し、同定法の提案とする。

### 3.2 問題設定

弾性軸に一つの回転体を取り付けてできた回転軸系を考える。この系の復元力は非線形性を示すものとする。

図3.1に示すように、静止直交座標系  $O\text{-}xys$  を、 $s$  軸が軸受中心線に一致するように定める。また回転体の図心  $M$  を原点とし、軸と同じ回転速度で回転する回転座標系  $M\text{-}x'y's'$  を、 $s'$  軸が点  $M$  における軸の接線方向に一致するように定める。回転体の質量を  $m$ 、極慣性モーメントを  $I_p$ 、直径に関する慣性モーメントを  $I$  とする。回転体には静不釣り合い、動不釣り合いが存在するものとする。その大きさをそれぞれ  $\epsilon, \tau$  とし、回転座標系  $M\text{-}x'y's'$  において  $x'$  軸から測ってそれぞれ角位置  $\phi_\epsilon, \phi_\tau$  にあるとする。回転体の図心  $M$  の  $x, y$  軸方

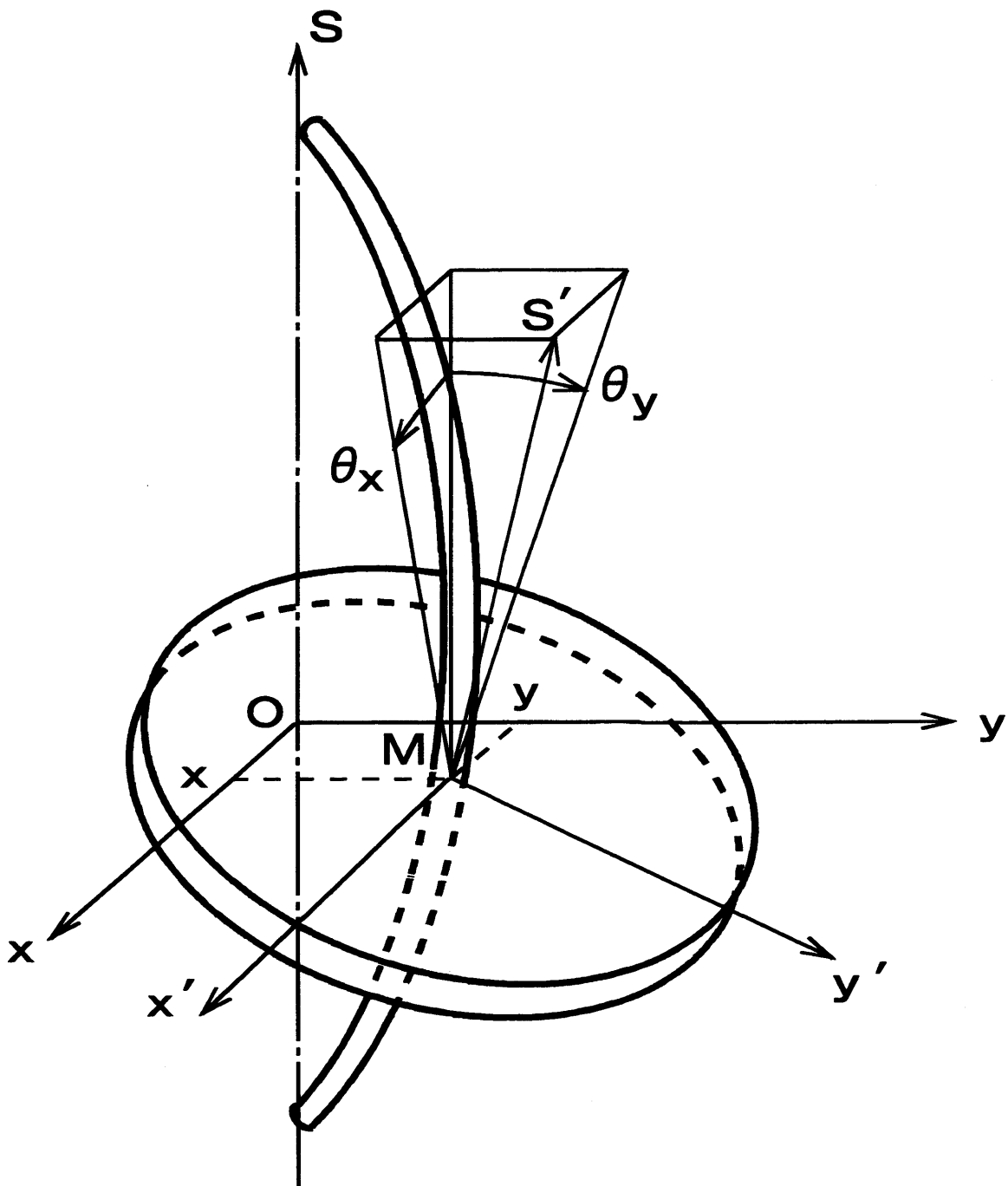


図 3.1: 対象とする回転軸系



向の変位をそれぞれ  $x, y$ , また図心  $M$  における弾性軸の接線  $Ms'$  が  $s$  軸となす角の,  $xs$  平面および  $ys$  平面への投影で表される傾き角をそれぞれ  $\theta_x, \theta_y$  とする.  $x$  軸と平行な軸から測った回転軸の回転角を  $\Theta$  とする.

はじめに回転体が軸の中央に取り付けられている簡単な場合を考える. このときたわみ振動と傾き振動は連成せず, 運動方程式はたわみ振動に関する方程式と傾き振動に関する方程式に分けられる. まず最初に, たわみ振動に関する方程式についてのみ考察する. 系に粘性減衰が作用するものとする, たわみ振動に関する運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} - F_x &= m\epsilon(\dot{\Theta}^2 \cos(\Theta + \phi_\epsilon) + \ddot{\Theta} \sin(\Theta + \phi_\epsilon)) \\ m\ddot{y} + c\dot{y} - F_y &= m\epsilon(\dot{\Theta}^2 \sin(\Theta + \phi_\epsilon) - \ddot{\Theta} \cos(\Theta + \phi_\epsilon)) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

で与えられる. ここに,  $c$  は粘性減数係数,  $F_x, F_y$  は復元力である.

復元力に対してポテンシャルが存在するものとし, それを  $V$  とおくと, 復元力は

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad (3.2)$$

で与えられる. ポテンシャル  $V$  を原点  $O$  のまわりで展開すると, いまの問題では  $V$  は

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}k_{xx}x^2 + k_{xy}xy + \frac{1}{2}k_{yy}y^2 \\ &+ \frac{1}{3}\alpha_{xxx}x^3 + \alpha_{xxy}x^2y + \alpha_{xyy}xy^2 + \frac{1}{3}\alpha_{yyy}y^3 \\ &+ \frac{1}{4}\beta_{xxxx}x^4 + \beta_{xxx}x^3y + \frac{3}{2}\beta_{xxyy}x^2y^2 + \beta_{xyyy}xy^3 + \frac{1}{4}\beta_{yyyy}y^4 + \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

の形の多項式で近似される. ここに係数  $k_{xx}, \dots, \alpha_{xxx}, \dots, \beta_{xxxx}, \dots$  などは定数である. 式(3.3)において3次以上の項が無視できるとすれば, 式(3.1)は式(2.1)のような線形回転軸系に関する周知の方程式となる.

線形系の場合と同じように回転体のふれまわり運動を, 次式

$$z = x + jy \quad (3.4)$$

で定義される複素変数により表すことにする. 式(3.1)の第2式に虚数単位  $j$  を掛け, 第1式と加え合わせれば, これらの複素数変数により表した運動方程式

$$m\ddot{z} + c\dot{z} - F_z(x, y) = m\epsilon_z(\dot{\Theta}^2 - j\ddot{\Theta})e^{j\Theta} \quad (3.5)$$

を得る. ここに  $F_z$  は

$$F_z(x, y) = F_x + jF_y \quad (3.6)$$

で与えられる  $x, y$  の関数であり,  $\epsilon_z$  は

$$\epsilon_z = \epsilon e^{j\phi_\epsilon} \quad (3.7)$$

である.

ここで式(3.6)の  $F_z(x, y)$  を, たわみ  $z$  とその共役複素数  $\bar{z}$  を用いて表し,  $F_z(z, \bar{z})$  とおくことにする.  $F_z(z, \bar{z})$  を求めるのに, 式(3.3)の  $x, y$  を

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2j} \quad (3.8)$$

で置き換えてもよいが, ポテンシャル  $V$  を  $z, \bar{z}$  で表し, それを微分してもよい. ここでは後者の方法をとる. このため式(3.8)を式(3.3)に代入し整理すると

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{4}k_{zz}z^2 + \frac{1}{2}k_{z\bar{z}}z\bar{z} + \frac{1}{4}k_{\bar{z}\bar{z}}\bar{z}^2 \\ & + \frac{1}{6}\alpha_{zzz}z^3 + \frac{1}{2}\alpha_{zz\bar{z}}z^2\bar{z} + \frac{1}{2}\alpha_{z\bar{z}\bar{z}}z\bar{z}^2 + \frac{1}{6}\alpha_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}}\bar{z}^3 \\ & + \frac{1}{8}\beta_{zzzz}z^4 + \frac{1}{2}\beta_{zzz\bar{z}}z^3\bar{z} + \frac{3}{4}\beta_{zz\bar{z}\bar{z}}z^2\bar{z}^2 + \frac{1}{2}\beta_{z\bar{z}\bar{z}\bar{z}}z\bar{z}^3 + \frac{1}{8}\beta_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}\bar{z}}\bar{z}^4 + \dots \end{aligned} \quad (3.9)$$

を得る. ここに係数  $k_{zz}, \dots, \alpha_{zzz}, \dots, \beta_{zzzz}, \dots$  などは式(3.3)の係数を組み合わせて得られる定数である. また, 式(3.3)の  $V$  は定数であるため, 各係数は

$$k_{zz} = \overline{k_{\bar{z}\bar{z}}}, \dots, \alpha_{zz\bar{z}} = \overline{\alpha_{\bar{z}\bar{z}z}}, \dots, \beta_{zzz\bar{z}} = \overline{\beta_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}z}}, \dots \quad (3.10)$$

などの関係を満たす. 復元力  $F_z(x, y)$  は

$$F_z(x, y) = -\frac{\partial V}{\partial x} - j\frac{\partial V}{\partial y} \quad (3.11)$$

で与えられ, この式の  $x, y$  に関する微分を  $z, \bar{z}$  に関する微分で表せば

$$F_z(z, \bar{z}) = -2\frac{\partial V}{\partial \bar{z}} \quad (3.12)$$

を得る. このようにして,  $F_z(z, \bar{z})$  は

$$\begin{aligned} F_z(z, \bar{z}) = & -k_{z\bar{z}}z - k_{\bar{z}\bar{z}}\bar{z} \\ & -\alpha_{zz\bar{z}}z^2 - 2\alpha_{z\bar{z}\bar{z}}z\bar{z} - \alpha_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}}\bar{z}^2 \\ & -\beta_{zzz\bar{z}}z^3 - 3\beta_{zz\bar{z}\bar{z}}z^2\bar{z} - 3\beta_{z\bar{z}\bar{z}\bar{z}}z\bar{z}^2 - \beta_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}\bar{z}}\bar{z}^3 - \dots \end{aligned} \quad (3.13)$$

となる。

以上は簡単な場合のたわみ振動に関する運動方程式である。次にたわみ振動と傾き振動が連成する場合を考える。このため新たに複素数の傾き

$$\theta = \theta_x + j\theta_y \quad (3.14)$$

を導入する。式(3.4)と(3.14)で表せられる  $z$ ,  $\theta$  およびそれらに共役な複素数  $\bar{z}$ ,  $\bar{\theta}$  を用いると、運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{z} + c_{zz}\dot{z} + c_{z\theta}\dot{\theta} - F_z(z, \bar{z}, \theta, \bar{\theta}) &= m\epsilon_z(\dot{\Theta}^2 - j\ddot{\Theta})e^{j\Theta} \\ I\ddot{\theta} - jI_p\ddot{\Theta}\theta - jI_p\dot{\Theta}\dot{\theta} + c_{z\theta}\dot{z} + c_{\theta\theta}\dot{\theta} - M_\theta(z, \bar{z}, \theta, \bar{\theta}) &= (I - I_p)\tau_\theta(\dot{\Theta}^2 - j\ddot{\Theta})e^{j\Theta} \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

となる。ここに  $\tau_\theta$  は

$$\tau_\theta = \tau e^{j\phi_r} \quad (3.16)$$

であり、 $c_{zz}$ ,  $c_{z\theta}$ ,  $c_{\theta\theta}$  は粘性減衰係数である。また復元力  $F_z(z, \bar{z}, \theta, \bar{\theta})$  および復元モーメント  $M_\theta(z, \bar{z}, \theta, \bar{\theta})$  は

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4}k_{zz}z^2 + \frac{1}{2}k_{z\bar{z}}z\bar{z} + \frac{1}{2}k_{z\theta}z\theta + \dots \\ &+ \frac{1}{6}\alpha_{zzz}z^3 + \frac{1}{2}\alpha_{zz\bar{z}}z^2\bar{z} + \frac{1}{2}\alpha_{zz\theta}z^2\theta + \dots \\ &+ \alpha_{z\bar{z}\theta}z\bar{z}\theta + \alpha_{z\bar{z}\bar{\theta}}z\bar{z}\bar{\theta} + \dots \\ &+ \frac{1}{8}\beta_{zzzz}z^4 + \frac{1}{2}\beta_{zzz\bar{z}}z^3\bar{z} + \frac{1}{2}\beta_{zzz\theta}z^3\theta + \dots \\ &+ \frac{3}{4}\beta_{zz\bar{z}\bar{z}}z^2\bar{z}^2 + \frac{3}{2}\beta_{zz\bar{z}\theta}z^2\bar{z}\theta + \dots \\ &+ 3\beta_{z\bar{z}\theta\bar{\theta}}z\bar{z}\theta\bar{\theta} + \frac{3}{2}\beta_{z\bar{z}\bar{\theta}\bar{\theta}}z\bar{z}\bar{\theta}^2 + \dots \end{aligned} \quad (3.17)$$

の形のポテンシャルからそれぞれ、

$$F_z = -2\frac{\partial V}{\partial \bar{z}}, \quad M_\theta = -2\frac{\partial V}{\partial \bar{\theta}} \quad (3.18)$$

によって導かれる。

いま考えている回転軸系は式(3.15)に支配されるので、回転軸系を実験的に同定するという問題は、系の実験データから式(3.15)に現れる未知パラメータを定めるという問題に

置き換えられる。回転軸を回転させると、系がもつ不釣り合いによってふれまわり運動が生じる。式 (3.15) の未知パラメータを、このふれまわり運動の非定常状態の実験データを用いて定めることができれば、実験において時間を短縮することができ都合である。そこで非定常状態の実験データを用いて未知パラメータを定める方法を提案する。ただし、式 (3.15) のパラメータの中には、前もって精度よく求められるものとそうでないものがある。回転体の質量  $m$ 、極慣性モーメント  $I_p$ 、直径に関する慣性モーメント  $I$  は、幾何学的形状から精度よく求める事ができる場合が多い。そこで以下ではこれらの量は既知であるとし、これ以外のパラメータを実験データから求める方法を考える。

### 3.3 同定法の提案

#### 3.3.1 最小二乗法による同定法

回転体の質量  $m$ 、極慣性モーメント  $I_p$ 、直径に関する慣性モーメント  $I$  は既知なので式 (3.15) を、未知パラメータを含む項が左辺に、既知パラメータのみを含む項が右辺になるように書き換えれば、

$$\left. \begin{aligned} c_{zz}\dot{z} + c_{z\theta}\dot{\theta} - F_z(z, \bar{z}, \theta, \bar{\theta}) - m\epsilon_z(\dot{\Theta}^2 - j\ddot{\Theta})e^{j\Theta} &= -m\ddot{z} \\ c_{z\theta}\dot{z} + c_{\theta\theta}\dot{\theta} - M_\theta(z, \bar{z}, \theta, \bar{\theta}) - (I - I_p)\tau_\theta(\dot{\Theta}^2 - j\ddot{\Theta})e^{j\Theta} &= -I\ddot{\theta} + jI_p\ddot{\theta}\theta + jI_p\dot{\theta}\dot{\theta} \end{aligned} \right\} (3.19)$$

となる。

同定のために、前節で定義された  $z(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $\Theta(t)$  とその速度  $\dot{z}(t)$ ,  $\dot{\theta}(t)$ ,  $\dot{\Theta}(t)$ , 加速度  $\ddot{z}(t)$ ,  $\ddot{\theta}(t)$ ,  $\ddot{\Theta}(t)$  の時刻  $t = t_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) における時刻歴データが利用できるものとする。

ここで式 (3.19) の第1式をまず考える。実験データを式 (3.19) に代入すると、実験データにはノイズが含まれるので等号が成り立つとは限らない。式 (3.19) の右辺の実数部と左辺の実数部の差すなわち誤差を  $e_{1i}$  ( $n = 1, 4$ ) とすると、

$$\begin{aligned} e_{1i} &= \text{Re}[-m\ddot{z}(t_i)] \\ &\quad - \text{Re}[c_{zz}\dot{z}(t_i) + c_{z\theta}\dot{\theta}(t_i) - F_z(z(t_i), \bar{z}(t_i), \theta(t_i), \bar{\theta}(t_i)) \\ &\quad - m\epsilon_z(\dot{\Theta}(t_i)^2 - j\ddot{\Theta}(t_i))e^{j\Theta(t_i)}] \end{aligned} \quad (3.20)$$

とおくことができる。同様に第1式の虚数部、第2式の実数部、第2式の虚数部の誤差を  $e_{2i}, e_{3i}, e_{4i}$  とおき、この  $e_{ni}$  を成分とする誤差ベクトル

$$\{e\}_i = \{ e_{1i} \quad e_{2i} \quad e_{3i} \quad e_{4i} \}^T \quad (3.21)$$

を導入すれば、それは

$$\{e\}_i = \{q\}_i - [A]_i \{S\} \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.22)$$

の形に書くことができる。ここにベクトル  $\{q\}_i$  は既知パラメータ  $m, I, I_p$  および実験データから定められる既知のベクトル,  $[A]_i$  は既知パラメータ  $m, I, I_p$  および実験データから定められる既知のマトリックス, そして  $\{S\}$  は未知パラメータを成分とする

$$\begin{aligned} \{S\} = & \{ \text{Re}[\epsilon_z] \quad \text{Im}[\epsilon_z] \quad \text{Re}[\tau_\theta] \quad \text{Re}[\tau_\theta] \quad c_{zz} \quad c_{z\theta} \quad c_{\theta\theta} \quad k_{z\bar{z}} \quad \text{Re}[k_{z\bar{z}}] \quad \text{Im}[k_{z\bar{z}}] \quad \dots \\ & \text{Re}[\alpha_{zz\bar{z}}] \quad \text{Im}[\alpha_{zz\bar{z}}] \quad \text{Re}[\alpha_{zz\bar{\theta}}] \quad \text{Im}[\alpha_{zz\bar{\theta}}] \quad \dots \\ & \text{Re}[\beta_{zzz\bar{z}}] \quad \text{Im}[\beta_{zzz\bar{z}}] \quad \text{Re}[\beta_{zzz\bar{\theta}}] \quad \text{Im}[\beta_{zzz\bar{\theta}}] \quad \dots \}^T \end{aligned} \quad (3.23)$$

の形のベクトルである。

未知パラメータを定めるのに、式(3.22)の誤差の二乗和

$$\begin{aligned} E &= \sum_i \sum_{n=1}^M e_{ni}^2 = \sum_i \{e\}_i^T \{e\}_i \\ &= \sum_i (\{q\}_i - [A]_i \{S\})^T (\{q\}_i - [A]_i \{S\}) \end{aligned} \quad (3.24)$$

を最小にするように未知パラメータを決定する。式(3.24)を最小にするための条件式を導けば、未知パラメータに関する線形連立方程式

$$\left( \sum_i [A]_i^T [A]_i \right) \{S\} = \sum_i [A]_i^T \{q\}_i \quad (3.25)$$

を得る。この式を解けば未知パラメータが定められ、同定が完了する。

### 3.3.2 ラグランジュ未定乗数法による同定法

以下では、誤差を含む測定値と真値を区別するため、測定値には記号  $[\hat{\cdot}]$  をつけて表すことにする。

時刻  $t = t_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) における実験データを成分とするベクトル

$$\{\hat{w}\}_i = \{ \hat{x}(t_i) \quad \hat{y}(t_i) \quad \hat{\theta}_x(t_i) \quad \hat{\theta}_y(t_i) \}^T \quad (3.26)$$

$$\{\hat{w}\}_i = \{ \hat{x}(t_i) \quad \hat{y}(t_i) \quad \hat{\theta}_x(t_i) \quad \hat{\theta}_y(t_i) \}^T \quad (3.27)$$

$$\{\hat{w}\}_i = \{ \hat{x}(t_i) \quad \hat{y}(t_i) \quad \hat{\theta}_x(t_i) \quad \hat{\theta}_y(t_i) \}^T \quad (3.28)$$

を導入する．たわみの測定データ  $\{\hat{w}\}_i$  に含まれる誤差は

$$\{e_w\}_i = \{\hat{w}\}_i - \{w\}_i \quad (3.29)$$

で与えられる．ただし， $\{w\}_i$  は誤差を含む測定値ではなく真値であり， $\{e_w\}_i$  は各測定時間におけるたわみの誤差を成分とするベクトルである．上式と同様に，速度，加速度の誤差ベクトルはそれぞれ

$$\{e_{\dot{w}}\}_i = \{\dot{\hat{w}}\}_i - \{\dot{w}\}_i \quad (3.30)$$

$$\{e_{\ddot{w}}\}_i = \{\ddot{\hat{w}}\}_i - \{\ddot{w}\}_i \quad (3.31)$$

で与えられる．ここでも  $\{\dot{w}\}_i$ ， $\{\ddot{w}\}_i$  は真値である．式(3.29)，(3.30)，(3.31)は式(3.15)を満足しなければならないので

$$\{q\}_i - [A]_i\{S\} = \{0\} \quad (3.32)$$

が成立しなければならない．ここに  $[A]_i$  は，式(3.22)に表れた  $[A]_i$  に真値の  $\{w\}$ ， $\{\dot{w}\}$ ， $\{\ddot{w}\}$  を代入したものである．

式(3.29)，(3.30)，(3.31)で与えられる誤差の二乗和を最小にし，かつ式(3.32)を満足するように未知パラメータを定めれば，それは最小二乗の意味でもっとも精度の良い推定値といえ，前節の最小二乗法による同定法より高い精度が期待できる．この問題を解くためにラグランジュの未定乗数法を用いる．このため

$$U = \sum_i \left( \frac{1}{2} r_1 \{e_w\}_i^T \{e_w\}_i + \frac{1}{2} r_2 \{e_{\dot{w}}\}_i^T \{e_{\dot{w}}\}_i + \frac{1}{2} r_3 \{e_{\ddot{w}}\}_i^T \{e_{\ddot{w}}\}_i \right. \\ \left. + \{\zeta\}_i^T (\{q\}_i - [A]_i\{S\}) \right) \quad (3.33)$$

で定義されるラグランジュ関数  $U$  を導入する．ここに  $r_1$ ， $r_2$ ， $r_3$  はそれぞれ式(3.29)，(3.30)，(3.31)の誤差に対する重み係数で，各誤差が同じ程度の大きさとなるよう問題に応じて適当に定める．また  $\{\zeta\}_i$  はラグランジュの未定乗数ベクトルである．このようにすればいま考えている問題は，ラグランジュ関数  $U$  を極小にするように未知数  $\{w\}_i$ ， $\{\dot{w}\}_i$ ， $\{\ddot{w}\}_i$ ， $\{S\}$ ， $\{\zeta\}_i$  を定める問題に帰着される．式(3.33)の  $U$  を極小にするための条件は

$$\frac{\partial U}{\partial \{w\}_i} = \{e_w\}_i + [B]_i^T \{\zeta\}_i = \{0\} \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \{\dot{w}\}_i} = \{e_{\dot{w}}\}_i + [C]_i^T \{\zeta\}_i = \{0\} \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \{\ddot{w}\}_i} = \{e_{\ddot{w}}\}_i + [D]_i^T \{\zeta\}_i = \{0\} \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \{S\}} = \sum_i [A]_i^T \{\zeta\}_i = \{0\} \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \{\zeta\}_i} = [A]_i \{S\} - \{q\}_i = \{0\} \quad (3.38)$$

で与えられる． $[B]_i$ ， $[C]_i$ ， $[D]_i$ はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} [B]_i &= \begin{bmatrix} \frac{\partial [A]_i}{\partial x(t_i)} \{S\} & \frac{\partial [A]_i}{\partial y(t_i)} \{S\} & \frac{\partial [A]_i}{\partial \theta_x(t_i)} \{S\} - \frac{\partial \{q\}_i}{\partial \theta_x(t_i)} & \frac{\partial [A]_i}{\partial \theta_y(t_i)} \{S\} - \frac{\partial \{q\}_i}{\partial \theta_y(t_i)} \end{bmatrix} \\ [C]_i &= \begin{bmatrix} \frac{\partial [A]_i}{\partial \dot{x}(t_i)} \{S\} & \frac{\partial [A]_i}{\partial \dot{y}(t_i)} \{S\} & \frac{\partial [A]_i}{\partial \dot{\theta}_x(t_i)} \{S\} - \frac{\partial \{q\}_i}{\partial \dot{\theta}_x(t_i)} & \frac{\partial [A]_i}{\partial \dot{\theta}_y(t_i)} \{S\} - \frac{\partial \{q\}_i}{\partial \dot{\theta}_y(t_i)} \end{bmatrix} \\ [D]_i &= \begin{bmatrix} -\frac{\partial \{q\}_i}{\partial \ddot{x}(t_i)} & -\frac{\partial \{q\}_i}{\partial \ddot{y}(t_i)} & -\frac{\partial \{q\}_i}{\partial \ddot{\theta}_x(t_i)} & -\frac{\partial \{q\}_i}{\partial \ddot{\theta}_y(t_i)} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

の形のマトリックスである．式(3.34)，(3.35)，(3.36)，(3.37)，(3.38)の左辺は， $U$ を $\{w\}_i$ ， $\{\dot{w}\}_i$ ， $\{\ddot{w}\}_i$ ， $\{S\}$ ， $\{\zeta\}_i$ の各成分でそれぞれ偏微分して得られるベクトルである．式(3.38)は制約条件(3.32)そのものである．このようにして連立方程式から，未知量 $\{S\}$ ， $\{\zeta\}$ ， $\{w\}_i$ ， $\{\dot{w}\}_i$ ， $\{\ddot{w}\}_i$ を求めれば，それらは制約条件(3.32)を満足しながらラグランジュ関数 $U$ を極小にすることがわかる．このときの $\{S\}$ が同定結果である．

方程式(3.34)，(3.35)，(3.36)，(3.37)，(3.38)は非線形方程式であり，しかも未知数が多いので直接解くのは一般には困難である．そこで以下に示すような反復法で解く．

このため，未知数 $\{w\}_i$ ， $\{\dot{w}\}_i$ ， $\{\ddot{w}\}_i$ ， $\{S\}$ の初期値として $\{w_0\}_i$ ， $\{\dot{w}_0\}_i$ ， $\{\ddot{w}_0\}_i$ ， $\{S_0\}$ を与える．以下，添字「0」が付くものは初期値を表す．また一回の計算における補正量をそれぞれ $\{\Delta w\}_i$ ， $\{\Delta \dot{w}\}_i$ ， $\{\Delta \ddot{w}\}_i$ ， $\{\Delta S\}$ とする．よって

$$\{w\}_i = \{w_0\}_i + \{\Delta w\}_i \quad (3.40)$$

$$\{\dot{w}\}_i = \{\dot{w}_0\}_i + \{\Delta \dot{w}\}_i \quad (3.41)$$

$$\{\ddot{w}\}_i = \{\ddot{w}_0\}_i + \{\Delta\ddot{w}\}_i \quad (3.42)$$

$$\{S\} = \{S_0\} + \{\Delta S\} \quad (3.43)$$

とおく.  $\{q\}_i$ ,  $[A]_i$  も同様に

$$[A]_i = [A_0]_i + [\Delta A]_i \quad (3.44)$$

$$\{q\}_i = \{q_0\}_i + \{\Delta q\}_i \quad (3.45)$$

とおく. 式(3.38)に式(3.44), (3.45)を代入する.  $[\Delta A]_i$ ,  $\{\Delta q\}_i$ ,  $\{\Delta S\}$  の二乗以上の項を無視すると

$$[A_0]_i\{S_0\} + [A_0]_i\{\Delta S\} + [B_0]_i\{\Delta w\}_i + [C_0]_i\{\Delta \dot{w}\}_i + [D_0]_i\{\Delta \ddot{w}\}_i - \{q_0\}_i = \{0\} \quad (3.46)$$

を得る. ここに  $[B_0]_i$ ,  $[C_0]_i$ ,  $[D_0]_i$  は式(3.39)を用いて計算される.

式(3.34), (3.35), (3.36)に式(3.29), (3.30), (3.31)を代入すると

$$\{\Delta w\}_i = \{\hat{w}\}_i - \{w_0\}_i + [B_0]_i^T \{\zeta\}_i \quad (3.47)$$

$$\{\Delta \dot{w}\}_i = \{\hat{\dot{w}}\}_i - \{\dot{w}_0\}_i + [C_0]_i^T \{\zeta\}_i \quad (3.48)$$

$$\{\Delta \ddot{w}\}_i = \{\hat{\ddot{w}}\}_i - \{\ddot{w}_0\}_i + [D_0]_i^T \{\zeta\}_i \quad (3.49)$$

となる. 式(3.47), (3.48), (3.49)を式(3.46)に代入すると

$$\begin{aligned} & [A_0]_i\{\Delta S\} + [A_0]_i\{S_0\} - \{q_0\}_i + [B_0]_i\{e_w\}_i + [C_0]_i\{e_{\dot{w}}\}_i + [D_0]_i\{e_{\ddot{w}}\}_i \\ & + [B_0]_i[B_0]_i^T + [C_0]_i[C_0]_i^T + [D_0]_i[D_0]_i^T \{\zeta\}_i = \{0\} \end{aligned} \quad (3.50)$$

となる. ここで

$$\{E\}_i = \{[A_0]_i\{S_0\} - \{q_0\}_i + [B_0]_i\{e_w\}_i + [C_0]_i\{e_{\dot{w}}\}_i + [D_0]_i\{e_{\ddot{w}}\}_i\} \quad (3.51)$$

$$[F]_i = [[B_0]_i[B_0]_i^T + [C_0]_i[C_0]_i^T + [D_0]_i[D_0]_i^T] \quad (3.52)$$

とおくと, 式(3.50)は

$$\{\zeta\}_i = [F]_i^{-1} (-\{E\}_i - [A_0]_i\{\Delta S\}) \quad (3.53)$$

となる. これを式(3.37)に代入すると

$$\sum_i [A_0]^T [F]_i^{-1} \{-\{E\}_i - [A_0]_i\{\Delta S\}\} = \{0\} \quad (3.54)$$



が得られるので、これを变形して

$$\{\Delta S\} = \sum_i \left[ -[A_0]_i^T [F]_i^{-1} [A_0]_i \right]^{-1} \sum_i \left\{ [A_0]_i^T [F]_i^{-1} \{E\}_i \right\} \quad (3.55)$$

を得る。この式から、 $\{\Delta S\}$  が求められる。 $\{\Delta S\}$  を式 (3.53) に代入すると、 $\{\zeta\}_i$  が求められる。 $\{\zeta\}_i$  を用いれば式 (3.47), (3.48), (3.49) から補正後の  $\{w_0\}_i + \{\Delta w\}_i$ ,  $\{\dot{w}_0\}_i + \{\Delta \dot{w}\}_i$ ,  $\{\ddot{w}_0\}_i + \{\Delta \ddot{w}\}_i$  が求められる。このようにして求めた補正後の値を新たな初期値として再び計算を行い、収束するまで繰り返す。

反復計算を行う際に必要となる最初の初期値は、例えば、実験データから求めた  $\{w\}_i$ ,  $\{\dot{w}\}_i$ ,  $\{\ddot{w}\}_i$ ,  $\{q\}_i$  および前節の方法で求めた未知パラメータ  $\{S\}$  を用いればよい。

### 3.4 数値シミュレーション

提案した同定法の有効性を検討するため、数値的にふれまわり運動のデータを求め、これを実験データとみなして同定の数値シミュレーションを行う。

既知としたパラメータは

$$m = 7.87 \text{ kg}, \quad I_p = 1.03 \text{ kg m}^2, \quad I = 0.52 \text{ kg m}^2 \quad (3.56)$$

である。またポテンシャル  $V$  は4次の項まで含む多項式で与えられるとし、各パラメータは表3.1の Original の欄に示した値とする。また回転軸は角加速度一定で回転させるものとし、

$$\left. \begin{aligned} \Theta &= \frac{1}{2} \lambda t^2 + \omega_0 t \\ \dot{\Theta} &= \lambda t + \omega_0 \\ \ddot{\Theta} &= \lambda \end{aligned} \right\} \quad (3.57)$$

とする。ここで、 $\lambda$ ,  $\omega_0$  は回転軸の角加速度、初角速度を表し

$$\lambda = 20.0 \text{ rad/s}^2, \quad \omega_0 = 20.0 \text{ rad/s} \quad (3.58)$$

とする。

#### 3.4.1 データにノイズが含まれない場合

実験データにノイズはまったく含まれないとして同定の数値シミュレーションを行った。実験データとみなしたデータは以下のようにして求めた。方程式 (3.15) を前述のパラメー

タを用い数値的に解いて  $x, y, \theta_x, \theta_y$  とその速度, 加速度を各時間毎に計算した. 測定は8秒行い, この間に4000点のデータを収集した. データの例として  $x, \theta_x$  とその速度, 加速度の応答波形を図3.2に示す.

第1, 第2の同定法により未知パラメータを定めた. ここで式(3.33)のラグランジュ関数  $U$  における重み係数  $r_1, r_2, r_3$  はすべて1とした. 表3.1からわかるように各パラメータの値はもとの値に極めて近くなり, データが誤差を含まない場合には, 第1の方法, 第2の方法ともに提案した同定法が有効なことが確認された.

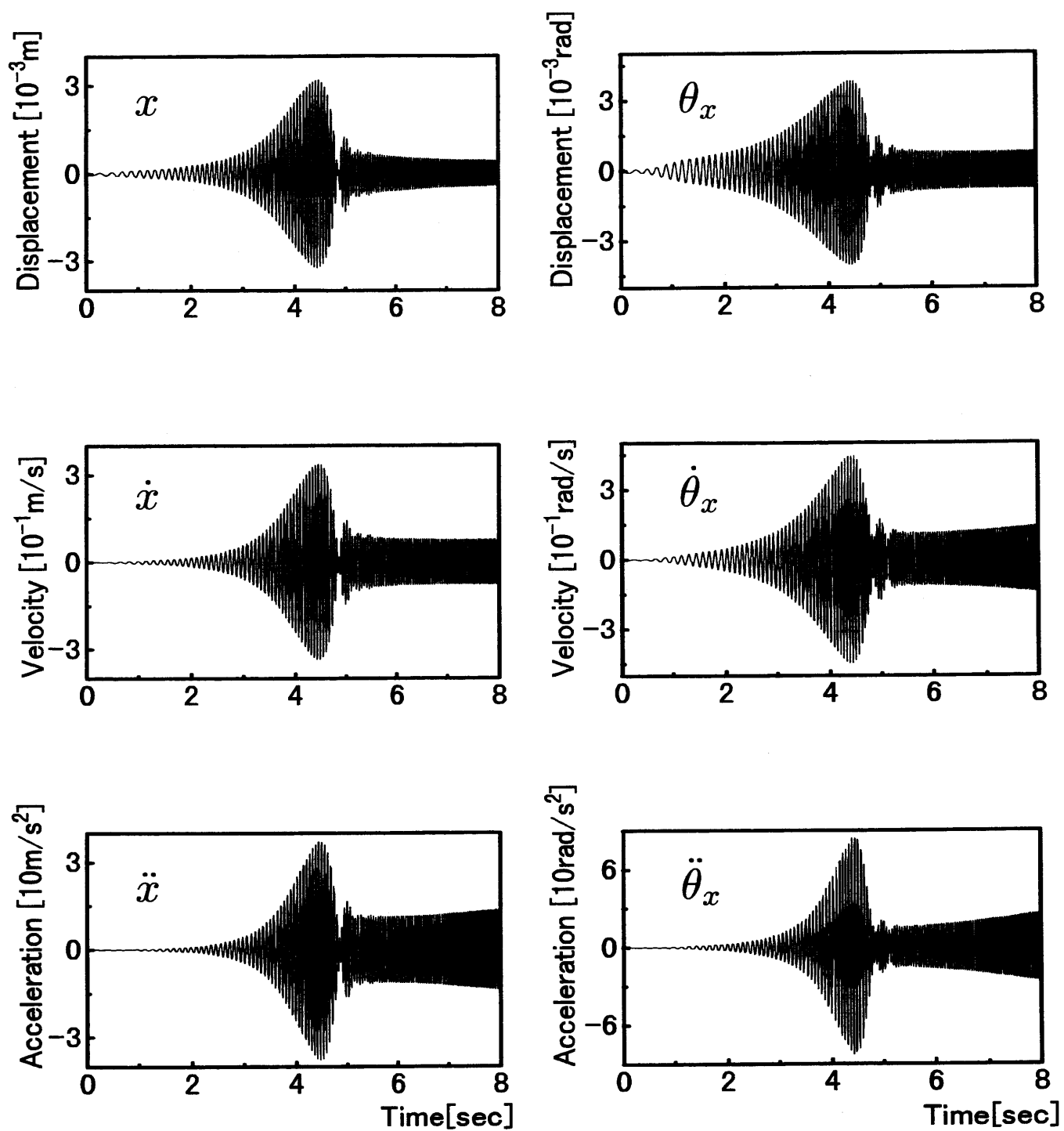


図 3.2: 応答波形の例 (ノイズなし)

Parameters		Original		Identified(1)		Identified(2)	
$c_{zz}$	Ns/m	4.102	$\times 10^1$	4.102	$\times 10^1$	4.102	$\times 10^1$
$c_{z\theta}$	Ns/rad	0.000		0.000		0.000	
$c_{\theta\theta}$	Nms/rad	3.031	$\times 10^1$	3.031	$\times 10^1$	3.031	$\times 10^1$
$k_{zz}$	N/m	8.370	$\times 10^4$	8.370	$\times 10^4$	8.370	$\times 10^4$
$k_{z\bar{z}}$	N/m	$-1.910-j3.720$	$\times 10^3$	$-1.910-j3.720$	$\times 10^3$	$-1.910-j3.720$	$\times 10^3$
$k_{z\theta}$	N/rad	$-1.320+j0.000$	$\times 10^4$	$-1.320+j0.000$	$\times 10^4$	$-1.320+j0.000$	$\times 10^4$
$k_{z\bar{\theta}}$	N/rad	$3.020+j5.870$	$\times 10^3$	$3.020+j5.870$	$\times 10^3$	$3.020+j5.870$	$\times 10^3$
$k_{\theta\bar{\theta}}$	Nm/rad	0.440	$\times 10^4$	0.440	$\times 10^4$	0.440	$\times 10^4$
$k_{\theta\theta}$	N/rad	$-1.010-j1.960$	$\times 10^3$	$-1.010-j1.960$	$\times 10^3$	$-1.010-j1.960$	$\times 10^3$
$\alpha_{zz\bar{z}}$	N/m <sup>2</sup>	$1.220+j1.750$	$\times 10^5$	$1.220+j1.750$	$\times 10^5$	$1.220+j1.750$	$\times 10^5$
$\alpha_{zz\bar{\theta}}$	N/m	$-1.330-j1.190$	$\times 10^5$	$-1.330-j1.190$	$\times 10^5$	$-1.330-j1.190$	$\times 10^5$
$\alpha_{z\bar{z}\theta}$	N/(m rad)	$-0.195-j1.610$	$\times 10^5$	$-0.195-j1.610$	$\times 10^5$	$-0.195-j1.610$	$\times 10^5$
$\alpha_{z\theta\bar{\theta}}$	N/rad	$0.891+j1.270$	$\times 10^5$	$0.891+j1.270$	$\times 10^5$	$0.891+j1.270$	$\times 10^5$
$\alpha_{z\bar{\theta}\bar{\theta}}$	N/rad	$0.439-j1.430$	$\times 10^5$	$0.439-j1.430$	$\times 10^5$	$0.439-j1.430$	$\times 10^5$
$\alpha_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}}$	N/m <sup>2</sup>	$1.010-j0.184$	$\times 10^5$	$1.010-j0.184$	$\times 10^5$	$1.010-j0.184$	$\times 10^5$
$\alpha_{\bar{z}\bar{z}\bar{\theta}}$	N/(m rad)	$3.290-j5.830$	$\times 10^4$	$3.290-j5.830$	$\times 10^4$	$3.290-j5.830$	$\times 10^4$
$\alpha_{\bar{z}\bar{\theta}\bar{\theta}}$	N/rad <sup>2</sup>	$-1.520-j0.741$	$\times 10^4$	$-1.520-j0.741$	$\times 10^4$	$-1.520-j0.741$	$\times 10^4$
$\alpha_{\theta\theta\bar{\theta}}$	Nm/rad <sup>2</sup>	$-5.440-j9.840$	$\times 10^4$	$-5.440-j9.840$	$\times 10^4$	$-5.440-j9.840$	$\times 10^4$
$\alpha_{\theta\bar{\theta}\bar{\theta}}$	Nm/rad <sup>2</sup>	$-1.890+j4.250$	$\times 10^4$	$-1.890+j4.250$	$\times 10^4$	$-1.890+j4.250$	$\times 10^4$
$\beta_{zzzz}$	N/m <sup>3</sup>	$-5.830+j7.820$	$\times 10^8$	$-5.830+j7.820$	$\times 10^8$	$-5.830+j7.820$	$\times 10^8$
$\beta_{zzz\bar{\theta}}$	N/m <sup>2</sup>	$4.160-j6.180$	$\times 10^8$	$4.160-j6.180$	$\times 10^8$	$4.160-j6.180$	$\times 10^8$
$\beta_{zz\bar{z}\bar{z}}$	N/(m rad)	1.380	$\times 10^9$	1.380	$\times 10^9$	1.380	$\times 10^9$
$\beta_{zzz\theta}$	N/(m <sup>2</sup> rad)	$6.810-j4.620$	$\times 10^8$	$6.810-j4.620$	$\times 10^8$	$6.810-j4.620$	$\times 10^8$
$\beta_{zzz\bar{\theta}}$	N/(m <sup>2</sup> rad)	$-8.440+j0.222$	$\times 10^8$	$-8.440+j0.222$	$\times 10^8$	$-8.440+j0.222$	$\times 10^8$
$\beta_{zz\theta\bar{\theta}}$	N/(m rad)	$-5.230+j4.380$	$\times 10^8$	$-5.230+j4.380$	$\times 10^8$	$-5.230+j4.380$	$\times 10^8$
$\beta_{zz\bar{\theta}\bar{\theta}}$	N/(m rad)	$7.480-j0.350$	$\times 10^8$	$7.480-j0.350$	$\times 10^8$	$7.480-j0.350$	$\times 10^8$
$\beta_{z\bar{z}\theta\theta}$	N/rad <sup>2</sup>	$-6.750+j2.770$	$\times 10^8$	$-6.750+j2.770$	$\times 10^8$	$-6.750+j2.770$	$\times 10^8$
$\beta_{z\bar{z}\bar{\theta}\bar{\theta}}$	N/(m rad <sup>2</sup> )	7.380	$\times 10^8$	7.380	$\times 10^8$	7.380	$\times 10^8$
$\beta_{z\theta\theta\bar{\theta}}$	N/rad <sup>2</sup>	$5.350-j2.830$	$\times 10^8$	$5.350-j2.830$	$\times 10^8$	$5.350-j2.830$	$\times 10^8$
$\beta_{z\bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\theta}}$	N/rad <sup>2</sup>	$-5.880-j0.187$	$\times 10^8$	$-5.880-j0.187$	$\times 10^8$	$-5.880-j0.187$	$\times 10^8$
$\beta_{z\bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\theta}}$	N/rad	$5.630+j1.460$	$\times 10^8$	$5.630+j1.460$	$\times 10^8$	$5.630+j1.460$	$\times 10^8$
$\beta_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}\bar{z}}$	N/m <sup>3</sup>	$-1.780-j1.550$	$\times 10^8$	$-1.780-j1.550$	$\times 10^8$	$-1.780-j1.550$	$\times 10^8$
$\beta_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}\bar{\theta}}$	N/(m <sup>2</sup> rad)	$1.860-j0.131$	$\times 10^8$	$1.860-j0.131$	$\times 10^8$	$1.860-j0.131$	$\times 10^8$
$\beta_{\bar{z}\bar{z}\bar{\theta}\bar{\theta}}$	N/(m rad <sup>2</sup> )	$-1.080+j0.568$	$\times 10^8$	$-1.080+j0.568$	$\times 10^8$	$-1.080+j0.568$	$\times 10^8$
$\beta_{\bar{z}\bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\theta}}$	N/rad <sup>3</sup>	$1.080-j1.300$	$\times 10^8$	$1.080-j1.300$	$\times 10^8$	$1.080-j1.300$	$\times 10^8$
$\beta_{\theta\theta\theta\bar{\theta}}$	Nm/rad <sup>3</sup>	$-4.310+j2.060$	$\times 10^8$	$-4.310+j2.060$	$\times 10^8$	$-4.310+j2.060$	$\times 10^8$
$\beta_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}}$	Nm/rad <sup>3</sup>	5.320	$\times 10^8$	5.320	$\times 10^8$	5.320	$\times 10^8$
$\beta_{\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\theta}}$	Nm/rad <sup>3</sup>	$-0.906+j1.960$	$\times 10^8$	$-0.906+j1.960$	$\times 10^8$	$-0.906+j1.960$	$\times 10^8$
$\epsilon$	m	$1.870+j2.340$	$\times 10^{-4}$	$1.870+j2.340$	$\times 10^{-4}$	$1.870+j2.340$	$\times 10^{-4}$
$\tau$	rad	$-5.110+j8.700$	$\times 10^{-4}$	$-5.110+j8.700$	$\times 10^{-4}$	$-5.110+j8.700$	$\times 10^{-4}$

表 3.1: 同定結果 (ノイズなし)

### 3.4.2 データにノイズが含まれる場合

実際のデータにはノイズが含まれているので、方程式(3.15)を数値的に解いて求めた応答データに正規乱数を加え、得られた結果をノイズを含む実験データとした。測定は8秒行い、この間に4000点のデータを収集した。データの例として加えた乱数の標準偏差が各実験データの二乗平均平方根の5%である応答波形のデータを図3.3に示す。

図3.3の応答データを用いて得られる同定結果を表3.2に示す。ここで式(3.33)のラグランジュ関数 $U$ における重み係数 $r_1, r_2, r_3$ はすべて1とした。この表からわかるように第1の同定法に比べ第2の方法の方がもとのパラメータに近くなっているのがわかる。

さらに同定結果の精度を定量的に評価するために、データにノイズとして加えた乱数の標準偏差を変化させ、その各値での精度を式(2.45)で定義した誤差に基づいて求めた。これを図3.4に示す。図3.4の横軸は応答波形に含めたノイズの標準偏差の各実験データの二乗平均平方根に対する割合で、ノイズの大きさをあらわしている。また、縦軸の添え字 $z$ はたわみに関する誤差を表し、添え字 $\theta$ は傾きに関する誤差を表している。

この図からノイズが小さい場合には第1の同定法でも精度良く同定できるが、ノイズが大きい場合にはラグランジュの未定乗数法を用いた方が精度がよいことがわかる。

また、表3.2で得られたパラメータを用いてふれまわり運動の最大振幅 $|z|, |\theta|$ を各々求めた。回転速度 $\omega$ を横軸にとって、第二の方法を実線で示した。また、もとのパラメータから同様にして求めた最大振幅を「 $\bullet$ 」, 「 $\circ$ 」で示し、比較した。その結果を図3.5に示す。ただし、第1の同定法で得られたパラメータを用いた場合は、振動が発散し振幅を求めることができなかった。

この結果より、ノイズが大きい場合でも第2の方法を用いれば正しい応答を予測できることがわかる。

## 3.5 実際の系への適用

提案した同定法の妥当性を検討するため、実験装置を作成し、これらから得られる実験データを用いて系の同定を行う。

### 3.5.1 実験装置の概略

同定の対象とした実験装置の概略を図3.6に示す。図のSは弾性軸を表し、直径12 mmの円形断面をもち、長さ700 mmである。軸の両端は玉軸受けを介して軸受台によって鉛直

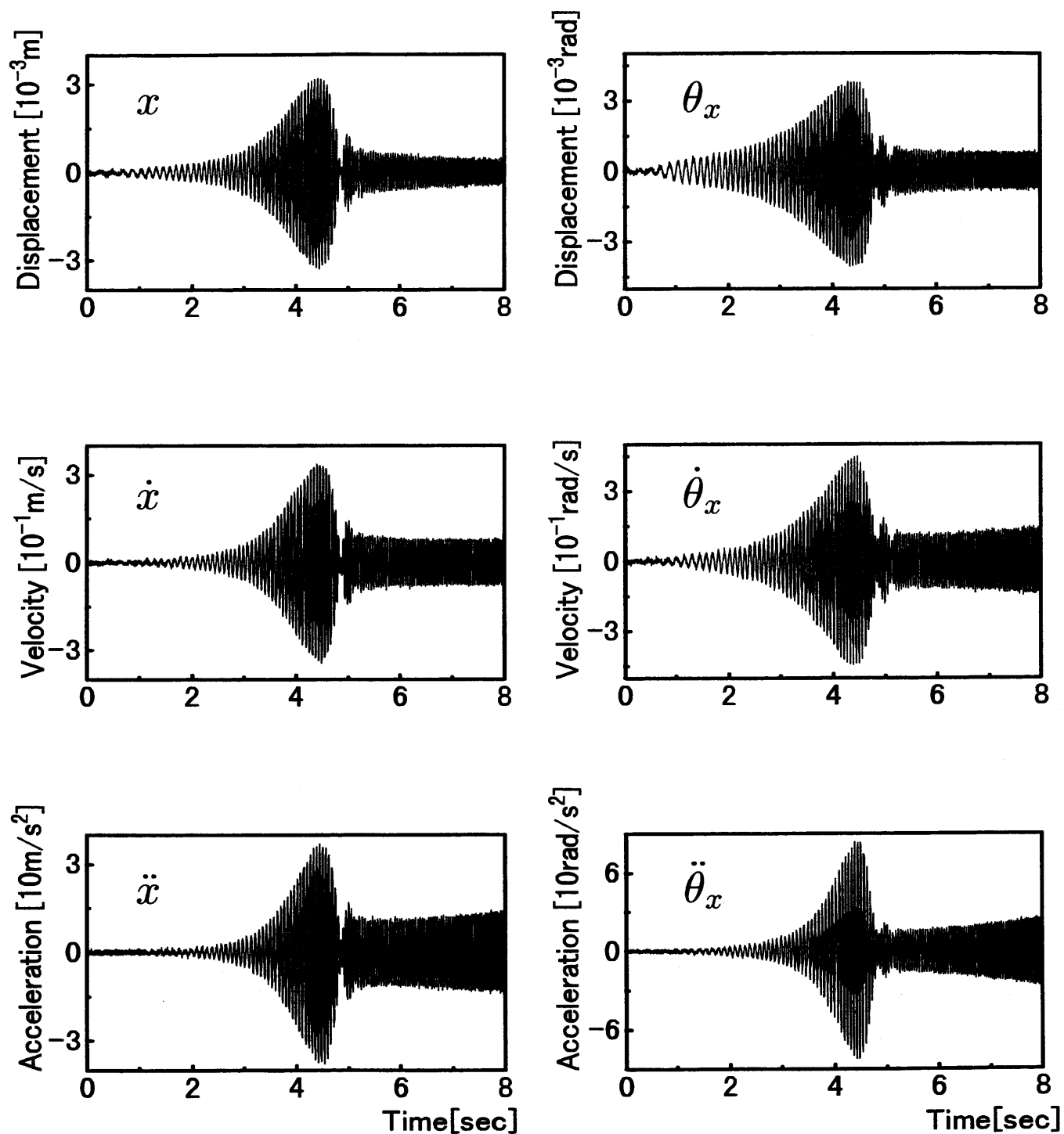


図 3.3: 応答波形の例 (ノイズ 5.0%)

Parameters		Original		Identified(1)		Identified(2)	
$c_{zz}$	Ns/m	4.102	$\times 10^1$	3.095	$\times 10^1$	4.050	$\times 10^1$
$c_{z\theta}$	Ns/rad	0.000		15.01		-1.371	
$c_{\theta\theta}$	Nms/rad	3.031	$\times 10^1$	1.364	$\times 10^1$	3.252	$\times 10^1$
$k_{zz}$	N/m	8.370	$\times 10^4$	7.861	$\times 10^4$	8.394	$\times 10^4$
$k_{\bar{z}\bar{z}}$	N/m	-1.910-j3.720	$\times 10^3$	-0.832-j5.154	$\times 10^3$	-1.595-j3.587	$\times 10^3$
$k_{\bar{z}\theta}$	N/rad	-1.320+j0.000	$\times 10^4$	-1.076+j0.084	$\times 10^4$	-1.327+j0.019	$\times 10^4$
$k_{\bar{z}\bar{\theta}}$	N/rad	3.020+j5.870	$\times 10^3$	2.662+j6.767	$\times 10^3$	2.920+j5.881	$\times 10^3$
$k_{\theta\bar{\theta}}$	Nm/rad	0.440	$\times 10^4$	0.410	$\times 10^4$	0.435	$\times 10^4$
$k_{\bar{\theta}\bar{\theta}}$	N/rad	-1.010-j1.960	$\times 10^3$	-0.984-j2.443	$\times 10^3$	-0.920-j1.965	$\times 10^3$
$\alpha_{zz\bar{z}}$	N/m <sup>2</sup>	1.220+j1.750	$\times 10^5$	3.478+j2.312	$\times 10^5$	1.803+j2.348	$\times 10^5$
$\alpha_{zz\bar{\theta}}$	N/m	-1.330-j1.190	$\times 10^5$	-2.278-j1.319	$\times 10^5$	-1.983-j1.417	$\times 10^5$
$\alpha_{z\bar{z}\theta}$	N/(m rad)	-0.195-j1.610	$\times 10^5$	-1.622-j2.415	$\times 10^5$	-0.578-j2.169	$\times 10^5$
$\alpha_{z\theta\bar{\theta}}$	N/rad	0.891+j1.270	$\times 10^5$	1.338+j1.679	$\times 10^5$	1.373+j1.647	$\times 10^5$
$\alpha_{z\bar{\theta}\bar{\theta}}$	N/rad	0.439-j1.430	$\times 10^5$	1.282-j2.153	$\times 10^5$	0.592-j1.982	$\times 10^5$
$\alpha_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}}$	N/m <sup>2</sup>	1.010-j0.184	$\times 10^5$	0.670-j1.909	$\times 10^5$	1.333-j0.297	$\times 10^5$
$\alpha_{\bar{z}\bar{z}\bar{\theta}}$	N/(m rad)	3.290-j5.830	$\times 10^4$	18.49+j0.697	$\times 10^4$	5.179-j6.944	$\times 10^4$
$\alpha_{\bar{z}\bar{\theta}\bar{\theta}}$	N/rad <sup>2</sup>	-1.520-j0.741	$\times 10^4$	-14.56-j1.694	$\times 10^4$	-1.644-j0.391	$\times 10^4$
$\alpha_{\theta\theta\bar{\theta}}$	Nm/rad <sup>2</sup>	-5.440-j9.840	$\times 10^4$	-7.106-j10.51	$\times 10^4$	-8.365-j13.59	$\times 10^4$
$\alpha_{\bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\theta}}$	Nm/rad <sup>2</sup>	-1.890+j4.250	$\times 10^4$	6.034+j4.487	$\times 10^4$	-2.459+j5.865	$\times 10^4$
$\beta_{zzz\bar{z}}$	N/m <sup>3</sup>	-5.830+j7.820	$\times 10^8$	-13.28-j13.60	$\times 10^8$	-7.241+j9.384	$\times 10^8$
$\beta_{zzz\bar{\theta}}$	N/m <sup>2</sup>	4.160-j6.180	$\times 10^8$	10.47+j8.774	$\times 10^8$	5.322-j7.411	$\times 10^8$
$\beta_{zz\bar{z}\bar{z}}$	N/(m rad)	1.380	$\times 10^9$	-1.542	$\times 10^9$	1.498	$\times 10^9$
$\beta_{zz\bar{z}\theta}$	N/(m <sup>2</sup> rad)	6.810-j4.620	$\times 10^8$	7.071+j14.09	$\times 10^8$	8.190-j5.241	$\times 10^8$
$\beta_{zz\bar{z}\bar{\theta}}$	N/(m <sup>2</sup> rad)	-8.440+j0.222	$\times 10^8$	16.76-j4.573	$\times 10^8$	-9.392+j0.152	$\times 10^8$
$\beta_{zz\theta\bar{\theta}}$	N/(m rad)	-5.230+j4.380	$\times 10^8$	-6.102-j9.021	$\times 10^8$	-6.486+j4.911	$\times 10^8$
$\beta_{zz\bar{\theta}\bar{\theta}}$	N/(m rad)	7.480-j0.350	$\times 10^8$	-13.99+j6.458	$\times 10^8$	8.324-j0.950	$\times 10^8$
$\beta_{z\bar{z}\theta\theta}$	N/rad <sup>2</sup>	-6.750+j2.770	$\times 10^8$	-3.544-j13.78	$\times 10^8$	-7.988+j2.900	$\times 10^8$
$\beta_{z\bar{z}\bar{\theta}\bar{\theta}}$	N/(m rad <sup>2</sup> )	7.380	$\times 10^8$	-13.34	$\times 10^8$	8.061	$\times 10^8$
$\beta_{z\theta\theta\bar{\theta}}$	N/rad <sup>2</sup>	5.350-j2.830	$\times 10^8$	3.814+j8.992	$\times 10^8$	6.551-j2.992	$\times 10^8$
$\beta_{z\bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\theta}}$	N/rad <sup>2</sup>	-5.880-j0.187	$\times 10^8$	11.44-j1.731	$\times 10^8$	-6.485-j0.282	$\times 10^8$
$\beta_{\bar{z}\bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\theta}}$	N/rad	5.630+j1.460	$\times 10^8$	0.714-j14.22	$\times 10^8$	6.581+j1.265	$\times 10^8$
$\beta_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}\bar{z}}$	N/m <sup>3</sup>	-1.780-j1.550	$\times 10^8$	4.647+j12.20	$\times 10^8$	-4.007-j1.764	$\times 10^8$
$\beta_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}\bar{\theta}}$	N/(m <sup>2</sup> rad)	1.860-j0.131	$\times 10^8$	-5.665-j9.163	$\times 10^8$	3.315-j0.551	$\times 10^8$
$\beta_{\bar{z}\bar{z}\bar{\theta}\bar{\theta}}$	N/(m rad <sup>2</sup> )	-1.080+j0.568	$\times 10^8$	6.940+j6.636	$\times 10^8$	-1.885+j1.272	$\times 10^8$
$\beta_{\bar{z}\bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\theta}}$	N/rad <sup>3</sup>	1.080-j1.300	$\times 10^8$	-7.595-j5.109	$\times 10^8$	1.350-j2.119	$\times 10^8$
$\beta_{\theta\theta\theta\bar{\theta}}$	Nm/rad <sup>3</sup>	-4.310+j2.060	$\times 10^8$	-1.388-j8.713	$\times 10^8$	-5.378+j1.949	$\times 10^8$
$\beta_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}}$	Nm/rad <sup>3</sup>	5.320	$\times 10^8$	-9.748	$\times 10^8$	5.924	$\times 10^8$
$\beta_{\bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\theta}}$	Nm/rad <sup>3</sup>	-0.906+j1.960	$\times 10^8$	8.406+j4.007	$\times 10^8$	-0.750+j2.727	$\times 10^8$
$\epsilon$	m	1.870+j2.340	$\times 10^{-4}$	2.076+j2.281	$\times 10^{-4}$	1.867+j2.346	$\times 10^{-4}$
$\tau$	rad	-5.110+j8.700	$\times 10^{-4}$	-2.763+j8.662	$\times 10^{-4}$	-5.243+j8.612	$\times 10^{-4}$

表 3.2: 同定結果 (ノイズ 5.0%)

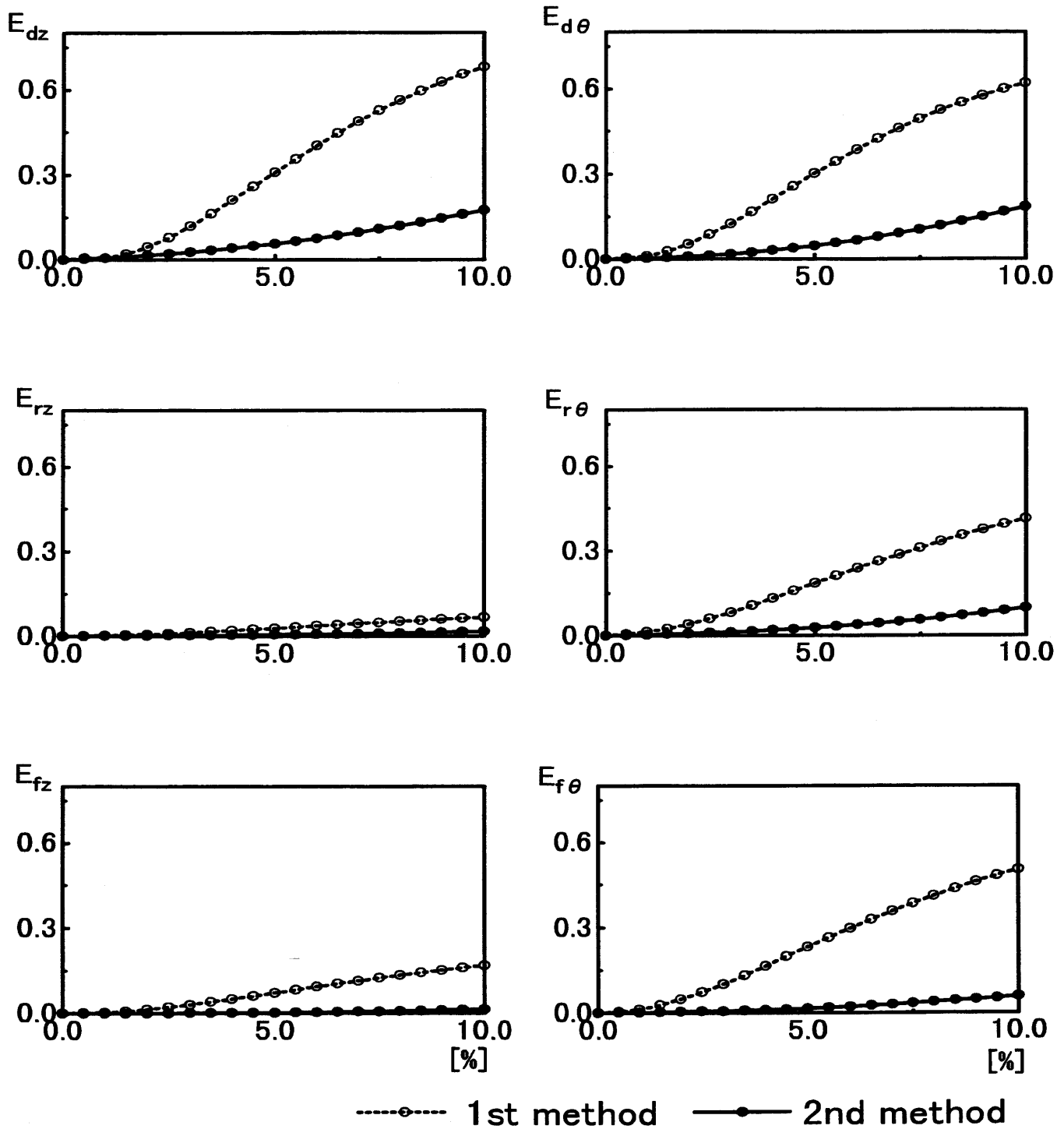


図 3.4: 同定精度の評価



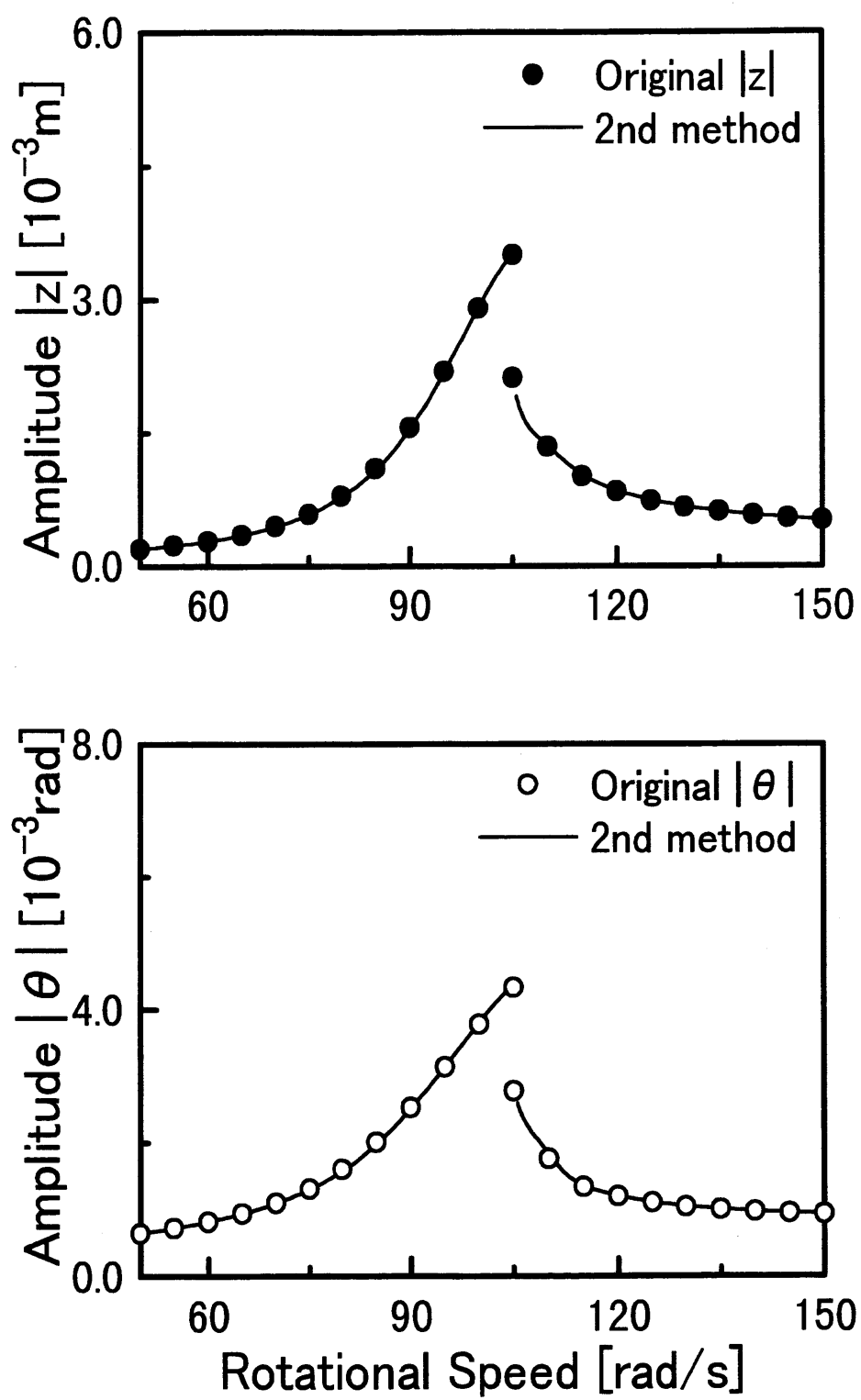


図 3.5: 最大振幅 (ノイズ 5.0 %)

に支えられている。回転体の質量は3.21 kg, 弾性軸の質量は0.621 kgであった。

$x$ および $y$ 軸を, 軸受台の方向および軸受台に直角の方向に定めた。 $x'$ および $y'$ 軸を, 弾性軸の上部に固定した小紙片 P のある方向およびそれに直角の方向に定めた。 $x'$ 軸が $x$ 軸に平行になる瞬間から変位を測定するため, レーザー式センサー St を $x$ 軸の方向に固定し, これから発するレーザーが小紙片 P によって遮られる瞬間から測定を開始するように測定装置を設定した。変位 $x, y$ を, 回転体の近くで $x$ および $y$ 軸方向に固定した2個のセンサーで測定した。また, 軸の上部 T にロータリーエンコーダを取り付け回転角 $\theta$ を測定した。

### 3.5.2 同定実験

質量 $m$ は, 回転体の質量と弾性軸の質量の寄与分を加えたものである。弾性軸の寄与分は, 軸の両端が単純支持されている場合に, レーレー法によって得られる結果を用い, 弾性軸の全質量の17/35とする<sup>(21)</sup>。以上のようにして $m = 3.51\text{kg}$ とする。また復元力 $F_z(z, \bar{z})$ は $z, \bar{z}$ の3次の項までを含む多項式で与えられるとする。軸の回転速度を, 主危険速度を含むように変化させ, 回転速度を上げた場合と下げた場合の変位 $x, y$ と回転角 $\theta$ を測定した。それぞれの場合において測定は12秒間行い, センサごとに12000個のデータを採取した。このデータからそれぞれ8000個のデータを収集し, 変位の速度と加速度, 回転角の角速度と角加速度は各データを微分して求めた。変位の微分は周波数領域で行った。このとき600rad/s以上の周波数と定数成分は誤差とみなして無視した。また, 回転角の微分は収集したデータを5次の多項式で近似し, それを微分して得た。データの例として $x, \theta$ とその速度, 加速度の波形を図3.7, 3.8に示す。それぞれ左側が回転速度を上げていった場合, 右側が回転速度を下げていった場合の波形である。

これらの実験データを用いて, 前述した同定法に基づいて各パラメータを求めた。その結果を表3.3に示す。ここでラグランジュ関数 $U$ における重み係数 $r_1, r_2, r_3$ はすべて1とした。同定結果の妥当性を検討するため, 同定により定められたパラメータの値を用いて各回転速度のふれまわり運動の最大振幅を求めた。さらに実際の軸を回転速度85rad/sから125rad/s付近の間で回転させ, 定常状態での最大振幅を測定しそれと比較した。回転速度 $\omega$ を横軸にとって第1の方法を点線, 第2の方法を実線で示し, 実際の軸から測定した最大振幅を「●」で示した。その結果を図3.9に示す。また, ふれまわり運動の $x, y$ 方向成分の最大振幅においても同様の方法で比較した。それを図3.10に示す。この図から, 同定結果は第1の方法, 第2の方法ともに実験データをよく再現していることがわかる。同定結果の妥当性をさらに比較するため, 同定結果をもとに回転軸系の釣り合わせをとり, 応

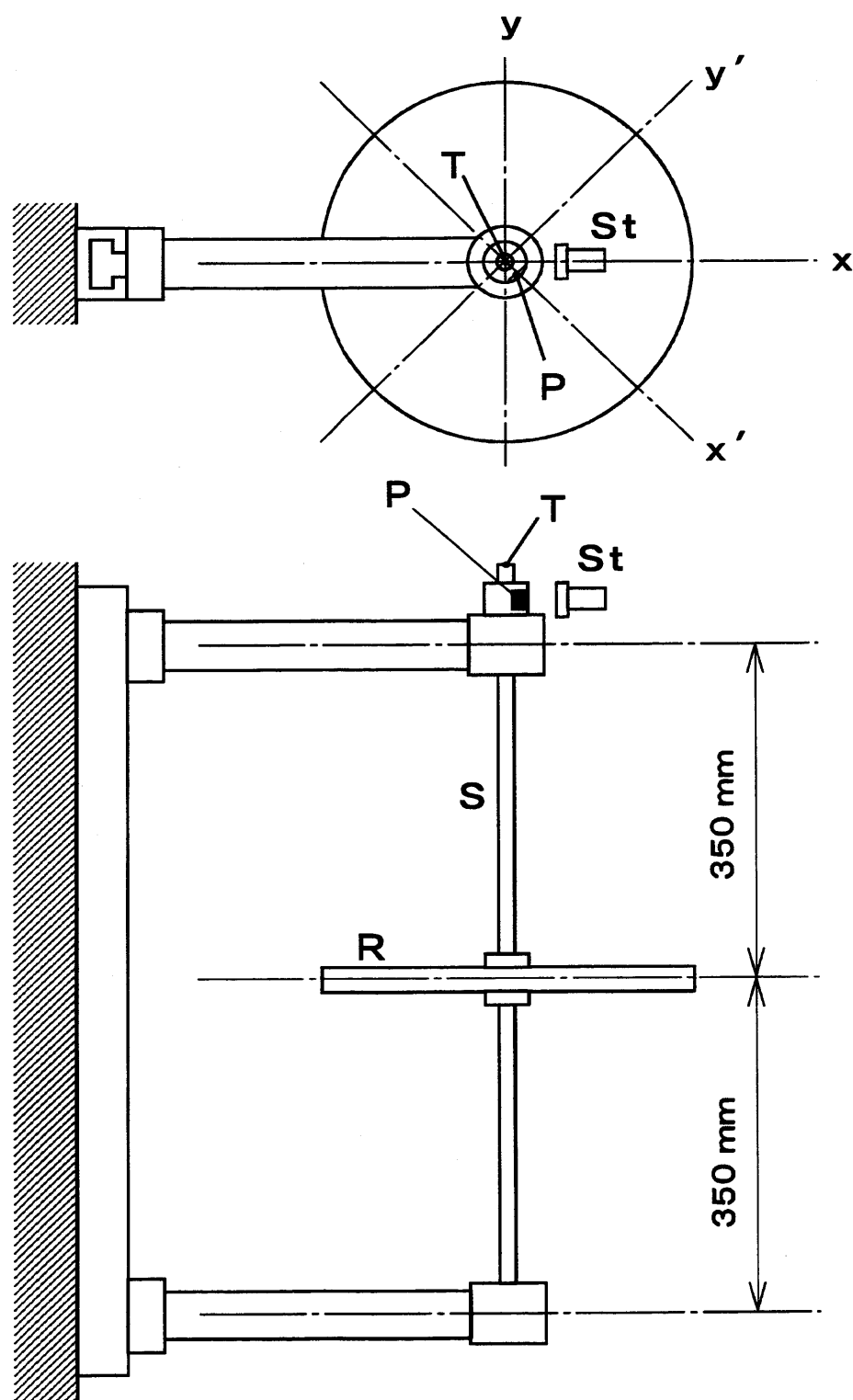


図 3.6: 実験装置

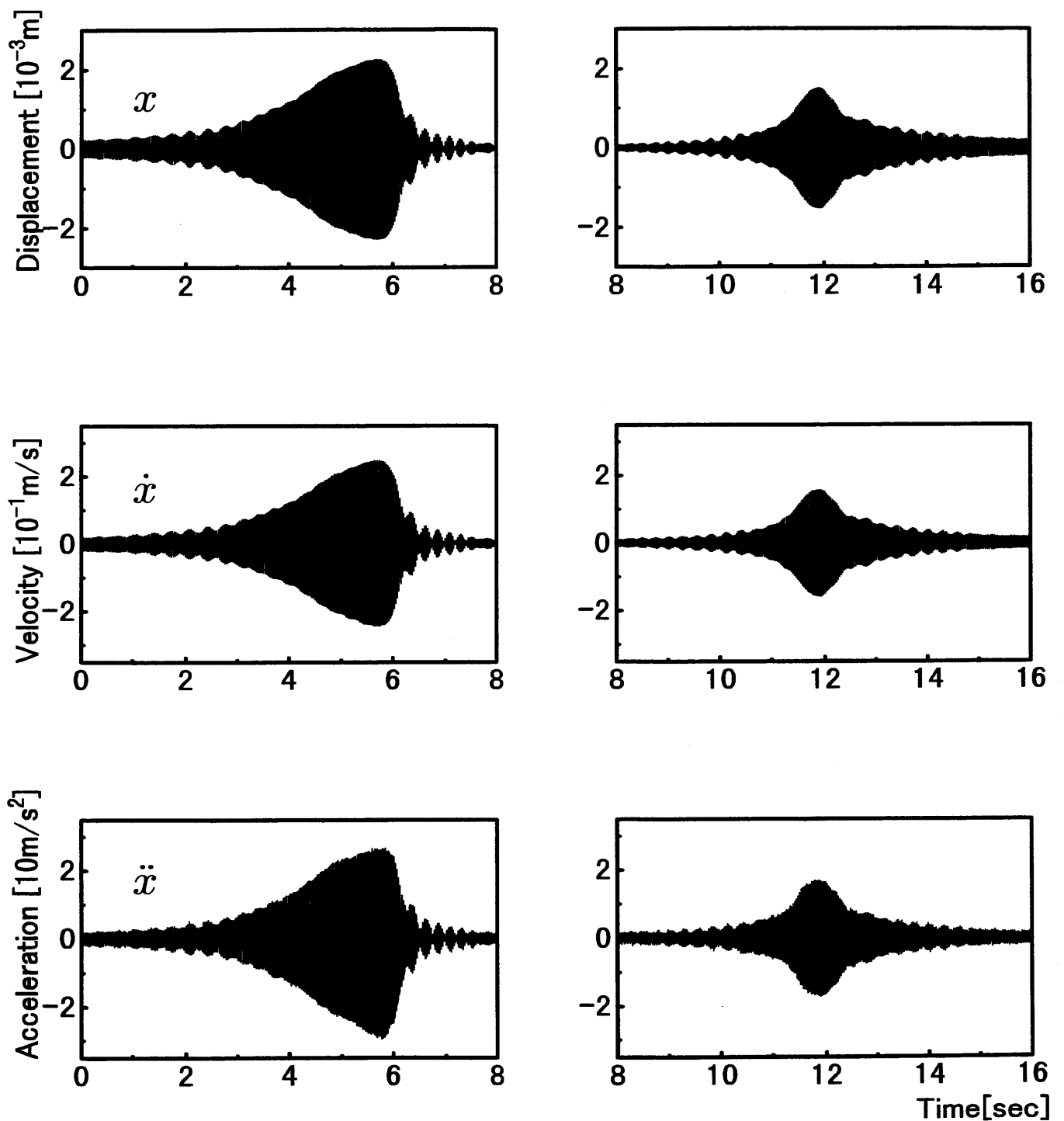


図 3.7: 実験データの例(変位, 速度, 加速度)

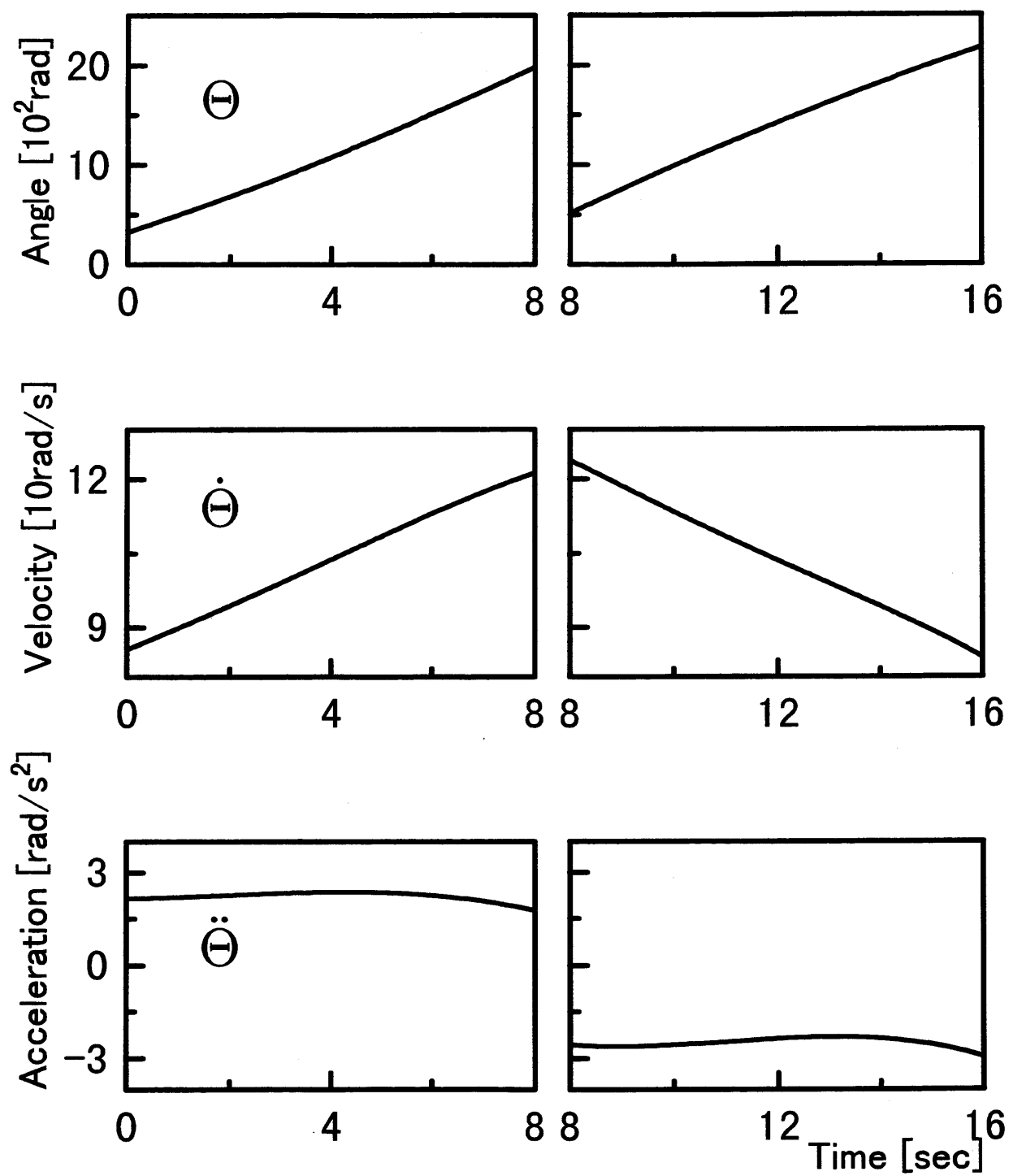


図 3.8: 実験データの例 (回転角, 角速度, 角加速度)

Parameters		Identified(1)	Identified(2)
$c$	Ns/m	3.460	4.767
$k_{z\bar{z}}$	N/m	$3.607 \times 10^4$	$3.639 \times 10^4$
$k_{\bar{z}\bar{z}}$	N/m	$-8.396+j6.935 \times 10^2$	$-7.740+j8.409 \times 10^2$
$\alpha_{zz\bar{z}}$	N/m <sup>2</sup>	$-0.120+j2.410 \times 10^5$	$0.137+j2.208 \times 10^5$
$\alpha_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}}$	N/m <sup>2</sup>	$1.987-j2.930 \times 10^5$	$0.900-j2.427 \times 10^5$
$\beta_{zzz\bar{z}}$	N/m <sup>3</sup>	$0.284-j1.856 \times 10^8$	$0.167-j1.495 \times 10^8$
$\beta_{zz\bar{z}\bar{z}}$	N/m <sup>3</sup>	$6.334 \times 10^8$	$6.160 \times 10^8$
$\beta_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}\bar{z}}$	N/m <sup>3</sup>	$-4.270-j1.912 \times 10^8$	$-3.831-j2.073 \times 10^8$
$\epsilon_z$	m	$1.737+j2.578 \times 10^{-5}$	$1.844+j3.058 \times 10^{-5}$

表 3.3: 同定結果

答の予測を行った．表3.3の値をもとに，静不釣合いを減らすように質量を回転体に取り付けた場合の最大振幅を予測し，釣り合わせ後に行った実験結果と比較した．比較の結果を図3.11に示す．図の点線，実線はそれぞれ第1の方法，第2の方法によって得られた結果から予測された最大振幅，「○」は釣り合わせ後に実験によって得られた最大振幅である．この図から，釣り合わせ後の応答の予測は第1の方法の方より，第2の方法の方が実験結果とよく一致していることがわかる．

以上のようにして，提案した同定法の妥当性が確認された．

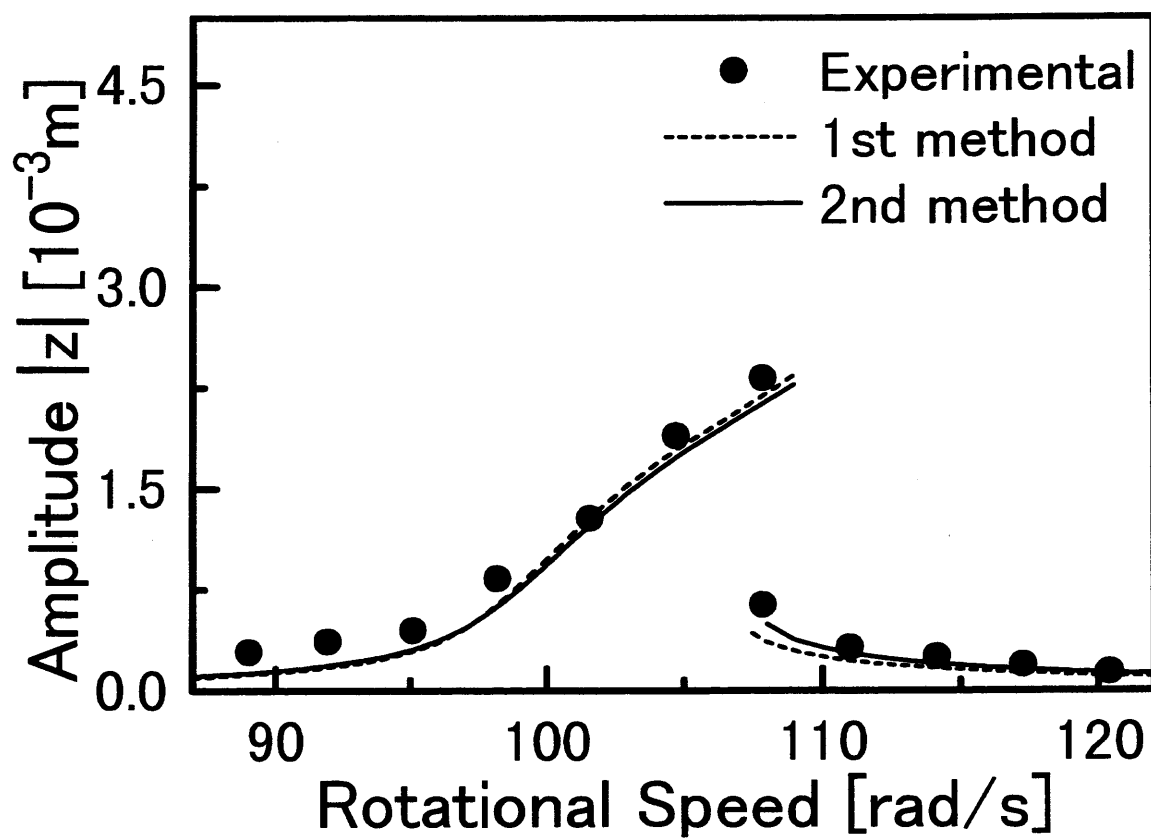


図 3.9: 最大振幅

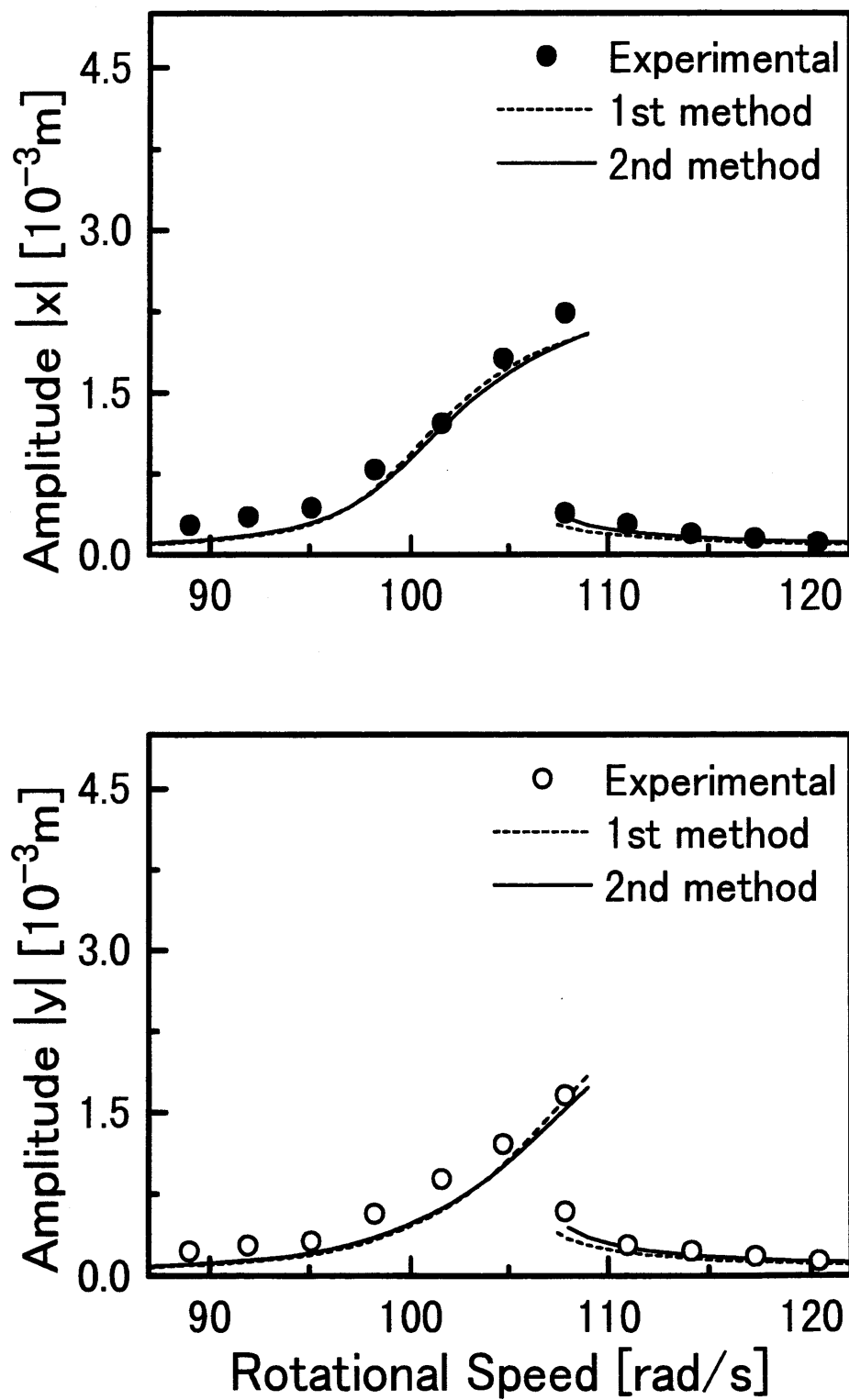


図 3.10: 最大振幅



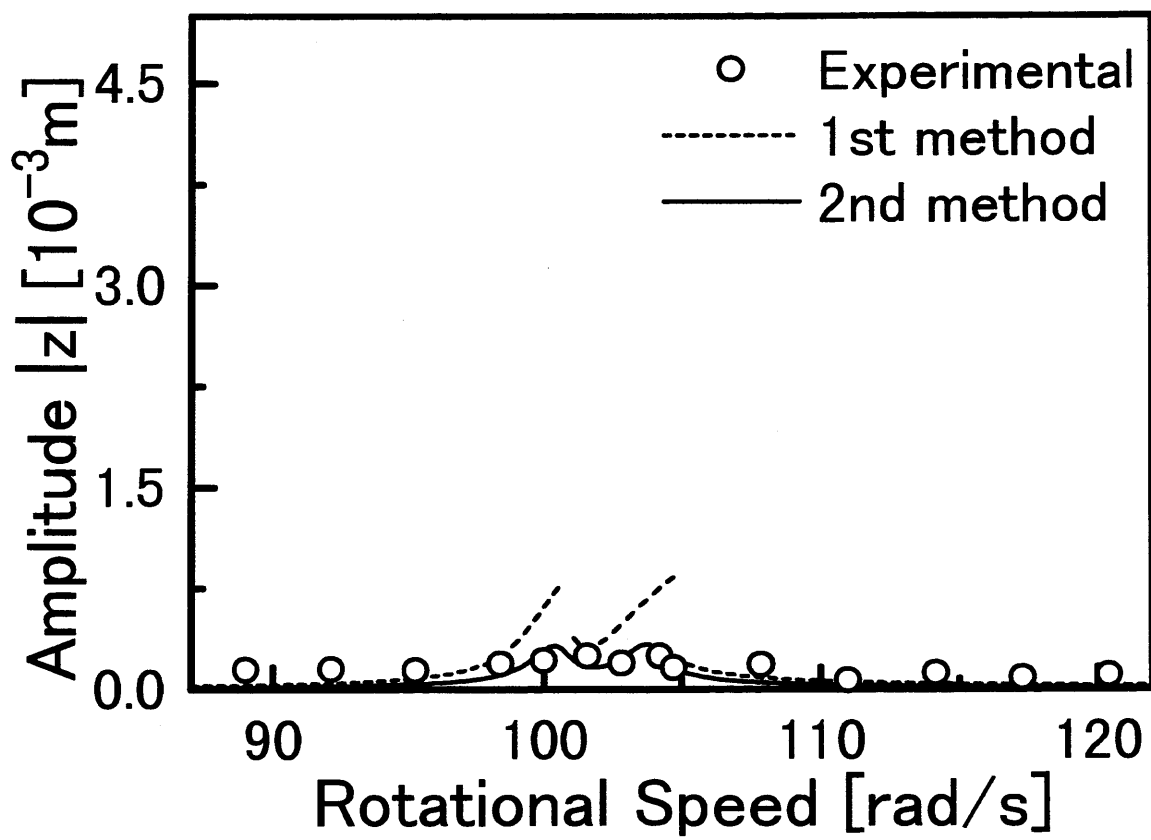


図 3.11: 釣り合わせ後の最大振幅



## 第4章

# 線形連続回転軸系の同定法

### 4.1 まえがき

第2章および第3章では集中回転軸系でモデル化できる系をとりあげた。この章では質量が軸全体にわたって分布しており、連続回転軸系としてモデル化する必要のある系を対象にして、その同定法を提案する。ここでは系は線形であるものとする。提案する同定法では、弾性軸および軸受台の剛性の異方性、不釣り合い、初期たわみに関するパラメータまで含めて系のパラメータが定められるようにする。

### 4.2 問題設定

説明の簡単のため、はじめに両端が軸受で支持された長さ $l$ 、断面積 $A$ の一様な円形断面を持つ連続回転軸を考える。弾性軸とそれを支える軸受部の剛性に異方性を持たないものとする。この回転軸の密度を $\rho$ 、縦弾性係数を $E$ 、断面二次モーメントを $I$ とする。図4.1に示すように、静止直交座標系  $O\text{-}xys$  を、 $s$  軸が軸受中心線に一致するように定める。また、 $O$  を原点とし、軸と同じ回転速度で回転する回転座標系  $O\text{-}\xi\eta s$  を定める。

位置 $s$ における軸の $x$  軸、 $y$  軸方向の変位をそれぞれ、 $u(s, t), v(s, t)$  とする $x$  軸と平行

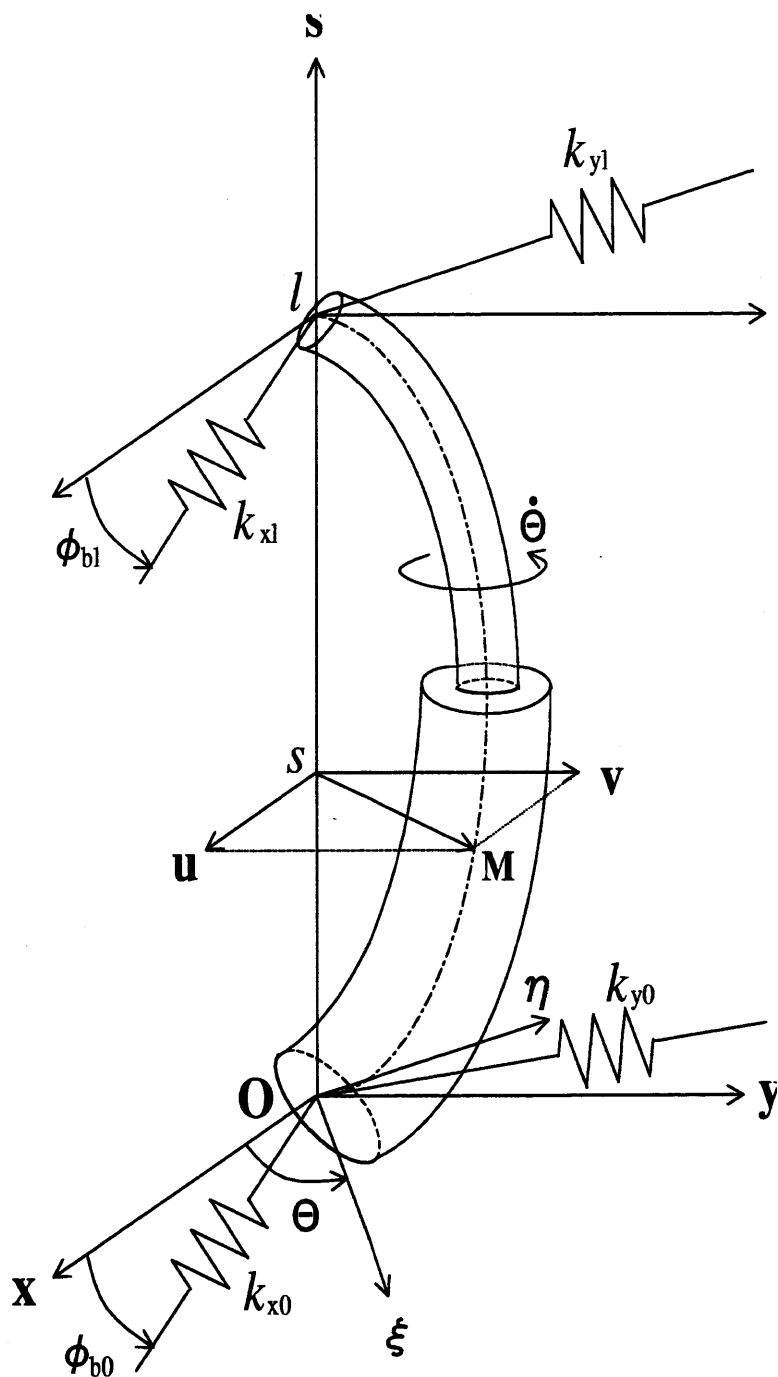


図 4.1: 対象とする回転軸系

な軸から測った回転軸の回転角を  $\Theta$  とする。このとき、系の運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c \frac{\partial u}{\partial t} - \dot{\Theta} I_p \frac{\partial^3 v}{\partial s^2 \partial t} - \ddot{\Theta} I_p \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - I_d \frac{\partial^4 u}{\partial s^2 \partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial s^4} \\ = \rho A \{ \dot{\Theta}^2 (\epsilon_\xi \cos \Theta - \epsilon_\eta \sin \Theta) + \ddot{\Theta} (\epsilon_\xi \sin \Theta + \epsilon_\eta \cos \Theta) \} \\ \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + c \frac{\partial v}{\partial t} + \dot{\Theta} I_p \frac{\partial^3 u}{\partial s^2 \partial t} + \ddot{\Theta} I_p \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - I_d \frac{\partial^4 v}{\partial s^2 \partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial s^4} \\ = \rho A \{ \dot{\Theta}^2 (\epsilon_\xi \sin \Theta + \epsilon_\eta \cos \Theta) - \ddot{\Theta} (\epsilon_\xi \cos \Theta - \epsilon_\eta \sin \Theta) \} \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

となる。ここに、 $I_d, I_p, c$  はそれぞれ、単位長さあたりの慣性モーメント、極慣性モーメント、粘性減衰係数を表わす。また、 $\epsilon_\xi, \epsilon_\eta$  はそれぞれ、 $\xi$  軸、 $\eta$  軸方向の不釣り合いの大きさを表わしている。

回転体のふれまわり運動を、次式

$$z = u(s, t) + jv(s, t) \quad (4.2)$$

で定義される複素変数により表すことにする。式(4.1)の第2式に虚数単位  $j$  を掛け、第1式と加え合わせれば、複素変数により表した運動方程式

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + c \frac{\partial z}{\partial t} + j \dot{\Theta} I_p \frac{\partial^3 z}{\partial s^2 \partial t} + j \ddot{\Theta} I_p \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \\ - I_d \frac{\partial^4 z}{\partial s^2 \partial t^2} + EI \frac{\partial^4 z}{\partial s^4} = \rho A \epsilon (\dot{\Theta}^2 - j \ddot{\Theta}) e^{j\Theta} \end{aligned} \quad (4.3)$$

を得る。ここに

$$\epsilon(s) = \epsilon_\xi(s) + j\epsilon_\eta(s) \quad (4.4)$$

である。

以上は一様な回転軸系の運動方程式である。一般の回転軸系では、軸断面は位置  $s$  により変化し、その断面形状も円形とは限らないため、軸の慣性モーメントおよび曲げ剛性に異方性を持つ。この場合の運動方程式は、式(4.3)を一般化した

$$\begin{aligned}
\rho A \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + c \frac{\partial z}{\partial t} + j \dot{\Theta} \frac{\partial}{\partial s} \left[ I_p \frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} \right] + j \ddot{\Theta} \frac{\partial}{\partial s} \left[ I_p \frac{\partial z}{\partial s} \right] \\
- \frac{\partial}{\partial s} \left[ I_d \frac{\partial^3 z}{\partial s \partial t^2} \right] - \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \left[ \left( \Delta I_d + j I_{d\xi\eta} \right) \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial s \partial t} e^{j2\Theta} \right] \\
+ \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left[ EI \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \right] + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left[ E \left( \Delta I + j I_{\xi\eta} \right) \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial s^2} \right] e^{j2\Theta} \\
= \rho A \epsilon (\dot{\Theta}^2 - j \ddot{\Theta}) e^{j\Theta}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

となる．ここに

$$\begin{aligned}
I_d &= \frac{I_{d\xi} + I_{d\eta}}{2}, \quad \Delta I_d = \frac{I_{d\xi} - I_{d\eta}}{2} \\
I &= \frac{I_\xi + I_\eta}{2}, \quad \Delta I = \frac{I_\xi - I_\eta}{2}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

である．式(4.5)，および(4.6)の $I_{d\xi}, I_{d\eta}$ はそれぞれ $\xi$ 軸， $\eta$ 軸に関する単位長さあたりの慣性モーメントであり， $I_{d\xi\eta}$ は単位長さあたりの慣性乗積である．また， $I_\xi, I_\eta$ はそれぞれ $\xi$ 軸， $\eta$ 軸に関する断面二次モーメントであり， $I_{\xi\eta}$ は断面相乗モーメントである．また，記号「 $\bar{\phantom{x}}$ 」は複素共役を表わしている．

以上では初期たわみを考慮しなかった．次に初期たわみが存在する場合を考える． $s$ 軸からの変位を測定した実験データ $z_{exp}(s, t)$ は，初期たわみ $z_0$ を含み，

$$z = z_{exp} - z_0 e^{j\Theta} \tag{4.7}$$

の関係がある．回転軸の復元力は初期たわみからの変位によって定められるため，初期たわみの影響は復元項に現れる．そこで，式(4.5)の復元力に関する項に式(4.7)を代入し，改めて $z_{exp}$ を $z$ とおくと，運動方程式は，

$$\begin{aligned}
\rho A \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + c \frac{\partial z}{\partial t} + j \dot{\Theta} \frac{\partial}{\partial s} \left[ I_p \frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} \right] + j \ddot{\Theta} \frac{\partial}{\partial s} \left[ I_p \frac{\partial z}{\partial s} \right] \\
- \frac{\partial}{\partial s} \left[ I_d \frac{\partial^3 z}{\partial s \partial t^2} \right] - \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \left[ \left( \Delta I_d + j I_{d\xi\eta} \right) \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial s \partial t} e^{j2\Theta} \right] \\
+ \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left[ EI \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \right] + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left[ E \left( \Delta I + j I_{\xi\eta} \right) \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial s^2} \right] e^{j2\Theta} \\
= \rho A \epsilon (\dot{\Theta}^2 - j \ddot{\Theta}) e^{j\Theta} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left[ EI \frac{\partial^2 z_0}{\partial s^2} \right] e^{j\Theta} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left[ E \left( \Delta I + j I_{\xi\eta} \right) \frac{\partial^2 \bar{z}_0}{\partial s^2} \right] e^{j\Theta}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

となる．初期たわみによる項は，見かけ上，不釣り合いと同じように軸の回転速度で回転する外力として右辺に現れている．

実験データから式(4.8)を定めることができれば，対象とする回転軸を同定できたことになる．しかし，式(4.8)は偏微分方程式であり，この式を実験データから定めることは困難である．そこで，式(4.8)を同定に都合の良い等価な式に変換し，それを定めることを考える．

式(4.8)において，減衰項，回転軸の異方性，不釣り合い，初期たわみに関する項を無視すれば，系が回転していない時の運動方程式は，

$$\rho A \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s} \left[ I_d \frac{\partial^3 z}{\partial s \partial t^2} \right] + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left[ EI \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \right] = 0 \quad (4.9)$$

となる．いま，系の幾何学的形状，材料特性は設計段階での情報から比較的精度良く求められ，また，系の境界条件も近似的には既知とする．このとき式(4.9)は，例えば有限要素法を用いて解くことができ，モード関数  $\Phi_m$  を求めることができる．式(4.8)の  $z(s, t)$  を，ここで求めたモード関数  $\Phi_m(s)$  と時間  $t$  に関する関数  $Z_m(t)$  を用いて，

$$z(s, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(s) Z_m(t) \quad (4.10)$$

と級数展開する．これは，式(4.8)を近似的に満たすと考えられる．

式(4.10)の  $z$  は無限個の  $\Phi_m$ ， $Z_m$  を用いて表わされているが，実際にはこれらを無限個考えることは不可能であるので，ある有限な  $M$  個までで近似することになる．このことによる誤差を小さくするために，ガラーキン法を適用する．

式(4.10)を  $M$  個で打ち切ったものを系の運動方程式(4.8)に代入し，両辺に  $\Phi_n(s)$  ( $n = 1, 2, \dots, M$ ) をかけ，軸の長さ ( $0 \leq s \leq l$ ) にわたって積分すれば，

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M m_{nm} \ddot{Z}_m + \sum_{m=1}^M \Delta m_{nm} \frac{d}{dt} \left( \dot{Z}_m e^{j2\Theta} \right) \\ - j\dot{\Theta} \sum_{m=1}^M g_{nm} \dot{Z}_m - j\ddot{\Theta} \sum_{m=1}^M g_{nm} Z_m + \sum_{m=1}^M c_{nm} \dot{Z}_m \\ + \sum_{m=1}^M k_{nm} Z_m + \sum_{m=1}^M \Delta k_{nm} \bar{Z}_m + \sum_{m=1}^M \Delta k'_{nm} \bar{Z}_m e^{j2\Theta} \\ = (\dot{\Theta}^2 - j\ddot{\Theta}) q_n e^{j\Theta} + z_{0n} e^{j\Theta} \quad (n = 1, 2, \dots, M) \end{aligned} \quad (4.11)$$

の形の式が得られる．ここに，記号「 $\dot{\phantom{x}}$ 」は時間  $t$  に関する一階微分を表わすことにする．

また,  $m_{nm}, \Delta m_{nm}, g_{nm}, c_{nm}, k_{nm}, \Delta k'_{nm}, q_n, z_{0n}$  は

$$\left. \begin{aligned}
 m_{nm} &= \int_0^l \rho A \Phi_n \Phi_m ds + \int_0^l I_d \frac{d\Phi_n}{ds} \frac{d\Phi_m}{ds} ds \\
 \Delta m_{nm} &= \int_0^l (\Delta I_d + j I_{d\xi\eta}) \frac{d\Phi_n}{ds} \frac{d\Phi_m}{ds} ds \\
 g_{nm} &= \int_0^l I_p \frac{d\Phi_n}{ds} \frac{d\Phi_m}{ds} ds \\
 c_{nm} &= \int_0^l c \Phi_n \Phi_m ds \\
 k_{nm} &= \int_0^l EI \frac{d^2\Phi_n}{ds^2} \frac{d^2\Phi_m}{ds^2} ds \\
 &\quad + \text{terms related to the boundary conditions} \\
 \Delta k'_{nm} &= \int_0^l E(\Delta I + j I_{\xi\eta}) \frac{d^2\Phi_n}{ds^2} \frac{d^2\Phi_m}{ds^2} ds \\
 &\quad + \text{terms related to the boundary conditions} \\
 q_n &= \int_0^l \rho A \epsilon \Phi_n ds \\
 z_{0n} &= \int_0^l \frac{d^2}{ds^2} \left( EI \frac{d^2 z_0}{ds^2} \right) \Phi_n ds + \int_0^l \frac{d^2}{ds^2} \left\{ E(\Delta I + j I_{\xi\eta}) \frac{d^2 \bar{z}_0}{ds^2} \right\} \Phi_n ds
 \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

で与えられる定数である．上式の  $k_{nm}, \Delta k'_{nm}$  の境界条件に関連した項は，境界がばねで支えられているときに，そのばね定数による寄与を表わす項である．また， $\Delta k_{nm}$  は軸受部の剛性の異方性に起因する項の係数で，定数である．

このようにして，偏微分方程式で与えられる連続回転軸系の運動方程式(4.8)は，等価な定数係数の常微分方程式(4.11)に変換される．したがって，連続回転軸系を同定するという問題は，式(4.11)を定めるという問題に置き換えることができる．そこで，以下に実験データを用いて式(4.11)を定める方法を提案する．

### 4.3 同定法の提案

回転軸系の非定常状態の実験データから式(4.11)のパラメータを定める方法を考える．ただし，系の幾何学的形状や材料特性は，設計段階の情報から精度よく求められる場合が多いので，以下ではこの量は既知であるとし，これ以外のパラメータを実験データから求める方法を考える．

回転軸系は，系自身の持つ不釣り合いや初期たわみによってふれまわり運動を行う．このふれまわり運動の非定常状態の実験データを利用して，系を同定することを考える．



$s$  軸方向に適当な間隔で  $N$  個の測定位置  $s_i (i = 1, 2, 3, \dots, N)$  を定める回転軸を回転させ、ふれまわり運動を発生させる。その時の各測定位置における  $x$  軸,  $y$  軸方向の変位  $u(s_i, t), v(s_i, t)$  を,  $\xi$  軸が  $x$  軸と一致した瞬間から適当な時間間隔で測定する。こうして得られたデータをそれぞれ  $u(s_i, t_j), v(s_i, t_j)$  とし, 式 (4.2) により定義される複素量,

$$z(s_i, t_j) = u(s_i, t_j) + jv(s_i, t_j) \quad (4.13)$$

を求める

#### 4.3.1 $Z_m(t)$ の求め方

式 (4.11) を定めるにあたり, 必要となる  $Z_m$  を実験データから求める方法を考える。

今, 測定したデータにおいて,  $M$  次より高次の  $Z_m$  が無視できるとすると式 (4.10) より  $z(s_i, t_j)$  は,

$$z(s_i, t_j) = \sum_{m=1}^M \Phi_m(s_i) Z_m(t_j) \quad (4.14)$$

となる。関数  $\Phi_m$  は前節で述べたように既知であるので, 測定点の数  $N$  と考慮する級数展開の次数  $M$  を等しく選べば, 式 (4.14) は  $Z_m(t_j)$  に関する線形連立方程式となる。これを各時刻  $t_j$  のデータについて解けば,  $Z_m$  を求めることができる。

#### 4.3.2 最小二乗法による同定法

ここでは系の幾何学的形状や材料特性が, 設計段階の情報から精度良く求められるので  $\rho, A, E, I, I_d, I_p$  の各パラメータは既知とみなせる。そのため, 式 (4.11) におけるパラメータ  $m_{nm}, g_{nm}$  は式 (4.12) から既知となる。

式 (4.11) を, 未知パラメータを含む項を左辺に, 既知パラメータを含む項が右辺になるように書き換えれば,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \Delta m_{nm} \frac{d}{dt} \left( \dot{\bar{Z}}_m e^{j2\Theta} \right) + \sum_{m=1}^M c_{nm} \dot{\bar{Z}}_m + \sum_{m=1}^M k_{nm} \bar{Z}_m \\ + \sum_{m=1}^M \Delta k_{nm} \bar{Z}_m + \sum_{m=1}^M \Delta k'_{nm} \bar{Z}_m e^{j2\Theta} - (\dot{\Theta}^2 - j\ddot{\Theta}) q_n e^{j\Theta} - z_{0n} e^{j\Theta} \\ = - \sum_{m=1}^M m_{nm} \ddot{\bar{Z}}_m + j\dot{\Theta} \sum_{m=1}^M g_{nm} \dot{\bar{Z}}_m + j\ddot{\Theta} \sum_{m=1}^M g_{nm} \bar{Z}_m \quad (n = 1, 2, 3, \dots, M) \end{aligned} \quad (4.15)$$

となる。

同定のために、前節で定義された  $Z_m(t)$ ,  $\Theta(t)$  とその速度、加速度の時刻  $t = t_j$  における時刻歴データが利用できるものとする。

実験データを式(4.15)に代入すると、実験データにはノイズが含まれるので等号は成り立たない。そこで、式(4.15)の第  $n$  式の右辺の実数部と左辺の実数部の差すなわち誤差を  $e_{n1j}$  とすると、

$$\begin{aligned} e_{n1j} = & Re \left[ - \sum_{m=1}^M m_{nm} \ddot{Z}_m + j \dot{\Theta} \sum_{m=1}^M g_{nm} \dot{Z}_m + j \ddot{\Theta} \sum_{m=1}^M g_{nm} Z_m \right] \\ & - Re \left[ \sum_{m=1}^M \Delta m_{nm} \frac{d}{dt} (\dot{Z}_m e^{j2\Theta}) + \sum_{m=1}^M c_{nm} \dot{Z}_m \right. \\ & + \sum_{m=1}^M k_{nm} Z_m + \sum_{m=1}^M \Delta k_{nm} \bar{Z}_m + \sum_{m=1}^M \Delta k'_{nm} \bar{Z}_m e^{j2\Theta} \\ & \left. - (\dot{\Theta}^2 - j \ddot{\Theta}) q_n e^{j\Theta} - z_{0n} e^{j\Theta} \right] \end{aligned} \quad (4.16)$$

とおくことができる。同様に、第  $n$  式の虚数部の誤差を  $e_{n2j}$  とおき、この  $e_{n1j}$ ,  $e_{n2j}$  を成分とする誤差ベクトル

$$\{e\}_j = \{ e_{11j} \quad e_{12j} \quad \cdots \quad e_{M1j} \quad e_{M2j} \}^T \quad (4.17)$$

を導入すれば、それは

$$\{e\}_j = \{q\}_j - [A]_j \{S\} \quad (j = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.18)$$

の形に書くことができる。ここにベクトル  $\{q\}_j$  は既知パラメータ  $m_{nm}$ ,  $g_{nm}$  および実験データから定められる既知のベクトル,  $[A]_j$  は既知パラメータ  $m_{nm}$ ,  $g_{nm}$  および実験データから定められる既知のマトリックス, そして  $\{S\}$  は未知パラメータを成分とする未知のベクトルである。

未知パラメータを定めるのに、式(4.18)の二乗和

$$\begin{aligned} E &= \sum_j \sum_{n=1}^M \sum_{k=1}^2 e_{nkj}^2 = \sum_j \{e\}_j^T \{e\}_j \\ &= \sum_j (\{q\}_j - [A]_j \{S\})^T (\{q\}_j - [A]_j \{S\}) \end{aligned} \quad (4.19)$$

を最小にするように未知パラメータを決定する。式(4.19)を最小にするための条件式を導けば、未知パラメータに関する線形連立方程式

$$\left( \sum_j [A]_j^T [A]_j \right) \{S\} = \sum_j [A]_j^T \{q\}_j \quad (4.20)$$

を得る。この式を解けば未知パラメータが定められ、同定が完了する。

## 4.3.3 ラグランジュ未定乗数法による同定法

以下では、誤差を含む測定値と真値を区別するため、測定値には記号 $[\hat{\cdot}]$ をつけて表すことにする。また実験データを成分とするベクトル,

$$\{\hat{w}\}_j = \{ \hat{u}(s_1, t_j) \ \hat{v}(s_1, t_j) \ \hat{u}(s_2, t_j) \ \hat{v}(s_2, t_j) \ \cdots \ \hat{u}(s_N, t_j) \ \hat{v}(s_N, t_j) \}^T \quad (4.21)$$

$$\{\hat{w}\}_j = \{ \hat{u}(s_1, t_j) \ \hat{v}(s_1, t_j) \ \hat{u}(s_2, t_j) \ \hat{v}(s_2, t_j) \ \cdots \ \hat{u}(s_N, t_j) \ \hat{v}(s_N, t_j) \}^T \quad (4.22)$$

$$\{\hat{w}\}_j = \{ \hat{u}(s_1, t_j) \ \hat{v}(s_1, t_j) \ \hat{u}(s_2, t_j) \ \hat{v}(s_2, t_j) \ \cdots \ \hat{u}(s_N, t_j) \ \hat{v}(s_N, t_j) \}^T \quad (4.23)$$

を導入する。さらに測定位置 $s_i (i = 1, 2, \dots, N)$ における関数 $\Phi_m(s)$ の値を成分とする行列,

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \Phi_1(s_1) & 0 & \Phi_2(s_1) & 0 & \cdots & \Phi_M(s_1) & 0 \\ 0 & \Phi_1(s_1) & 0 & \Phi_2(s_1) & \cdots & 0 & \Phi_M(s_1) \\ \Phi_1(s_2) & 0 & \Phi_2(s_2) & 0 & \cdots & \Phi_M(s_2) & 0 \\ 0 & \Phi_1(s_2) & 0 & \Phi_2(s_2) & \cdots & 0 & \Phi_M(s_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Phi_1(s_N) & 0 & \Phi_2(s_N) & 0 & \cdots & \Phi_M(s_N) & 0 \\ 0 & \Phi_1(s_N) & 0 & \Phi_2(s_N) & \cdots & 0 & \Phi_M(s_N) \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

と、 $Z_m(t_j)$ の実部と虚部 $X_m(t_j), Y_m(t_j)$ からなるベクトル,

$$\{W\}_j = \{ X_1(t_j) \ Y_1(t_j) \ X_2(t_j) \ Y_2(t_j) \ \cdots \ X_M(t_j) \ Y_M(t_j) \}^T \quad (4.25)$$

を導入する。

すると、たわみの測定データ $\{\hat{w}\}_i$ に含まれる誤差は

$$\{e_w\}_j = \{\hat{w}\}_j - [\Phi]\{W\}_j \quad (4.26)$$

で与えられる。ここに $\{e_w\}_j$ は各測点におけるたわみの誤差を成分とするベクトルである。上式と同様に、速度、加速度の誤差ベクトルはそれぞれ

$$\{e_{\dot{w}}\}_j = \{\dot{\hat{w}}\}_j - [\Phi]\{\dot{W}\}_j \quad (4.27)$$

$$\{e_{\ddot{w}}\}_j = \{\ddot{\hat{w}}\}_j - [\Phi]\{\ddot{W}\}_j \quad (4.28)$$

で与えられる。式(4.26), (4.27), (4.28)の $\{W\}_j, \{\dot{W}\}_j, \{\ddot{W}\}_j$ は式(4.11)を満足しなければならないので

$$\{q\}_j - [A]_j\{S\} = \{0\} \quad (4.29)$$

が成立しなければならない．ここに  $[A]_j$  は真値の  $\{W\}_j, \{\dot{W}\}_j, \{\ddot{W}\}_j$  からなることを除いて式(4.18)に表れた  $[A]_j$  と同じマトリックスである．

式(4.26), (4.27), (4.28)で与えられる誤差の二乗和を最小にし, かつ式(4.29)を満足するように未知パラメータを定めれば, それは最小二乗の意味でもっとも精度の良い推定値といえ, 前節の最小二乗法による同定法より高い精度が期待できる．この問題を解くためにラグランジュの未定乗数法を用いる．このため

$$U = \sum_i \left( \frac{1}{2} r_1 \{e_w\}_j^T \{e_w\}_j + \frac{1}{2} r_2 \{e_{\dot{w}}\}_j^T \{e_{\dot{w}}\}_j + \frac{1}{2} r_3 \{e_{\ddot{w}}\}_j^T \{e_{\ddot{w}}\}_j + \{\zeta\}_j^T (\{q\}_j - [A]_j \{S\}) \right) \quad (4.30)$$

で定義されるラグランジュ関数  $U$  を導入する．ここに  $r_1, r_2, r_3$  はそれぞれ式(4.26), (4.27), (4.28)の誤差に対する重み係数で, 問題に応じて適当に定める．また  $\{\zeta\}_j$  はラグランジュの未定乗数ベクトルである．ラグランジュ関数  $U$  を極小にするように未知数  $\{W\}_j, \{\dot{W}\}_j, \{\ddot{W}\}_j, \{S\}, \{\zeta\}_j$  を定める問題を考える．式(4.30)の  $U$  を極小にするための条件は

$$\frac{\partial U}{\partial \{\hat{w}\}_j} = r_1 [\Phi]^T (\{\hat{w}\}_j - [\Phi] \{W\}_j) + [B]_j^T \{\zeta\}_j = \{0\} \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \{\dot{\hat{w}}\}_j} = r_2 [\Phi]^T (\{\dot{\hat{w}}\}_j - [\Phi] \{\dot{W}\}_j) + [C]_j^T \{\zeta\}_j = \{0\} \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \{\ddot{\hat{w}}\}_j} = r_3 [\Phi]^T (\{\ddot{\hat{w}}\}_j - [\Phi] \{\ddot{W}\}_j) + [D]_j^T \{\zeta\}_j = \{0\} \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \{S\}} = \sum_j [A]_j^T \{\zeta\}_j = \{0\} \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \{\zeta\}_j} = [A]_j \{S\} - \{q\}_j = \{0\} \quad (4.35)$$

で与えられる．ここに  $[B]_j$ ,  $[C]_j$ ,  $[D]_j$  はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} [B]_j &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \dot{X}_1(t_j)}([A]_j\{S\} - \{q\}_j) & \frac{\partial}{\partial \dot{Y}_1(t_j)}([A]_j\{S\} - \{q\}_j) \\ \cdots & \frac{\partial}{\partial \dot{X}_M(t_j)}([A]_j\{S\} - \{q\}_j) & \frac{\partial}{\partial \dot{Y}_M(t_j)}([A]_j\{S\} - \{q\}_j) \end{bmatrix} \\ [C]_j &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \ddot{X}_1(t_j)}([A]_j\{S\} - \{q\}_j) & \frac{\partial}{\partial \ddot{Y}_1(t_j)}([A]_j\{S\} - \{q\}_j) \\ \cdots & \frac{\partial}{\partial \ddot{X}_M(t_j)}([A]_j\{S\} - \{q\}_j) & \frac{\partial}{\partial \ddot{Y}_M(t_j)}([A]_j\{S\} - \{q\}_j) \end{bmatrix} \\ [D]_j &= \begin{bmatrix} -\frac{\partial \{q\}_j}{\partial \ddot{X}_1(t_j)} & -\frac{\partial \{q\}_j}{\partial \ddot{Y}_1(t_j)} & \cdots & -\frac{\partial \{q\}_j}{\partial \ddot{X}_M(t_j)} & -\frac{\partial \{q\}_j}{\partial \ddot{Y}_M(t_j)} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

の形のマトリックスである．式(4.31), (4.32), (4.33), (4.34), (4.35)の左辺は,  $U$ を $\{W\}_j$ ,  $\{\dot{W}\}_j$ ,  $\{\ddot{W}\}_j$ ,  $\{S\}$ ,  $\{\zeta\}_j$ の各成分でそれぞれ偏微分して得られるベクトルである．式(4.35)は制約条件(4.29)そのものである．このようにして連立方程式から, 未知量 $\{S\}$ ,  $\{\zeta\}_j$ ,  $\{W\}_j$ ,  $\{\dot{W}\}_j$ ,  $\{\ddot{W}\}_j$ を求めれば, それらは制約条件(4.29)を満足しながらラグランジュ関数 $U$ を極小にすることがわかる．このときの $\{S\}$ が同定結果である．方程式(4.31), (4.32), (4.33), (4.34), (4.35)は非線形方程式であり, しかも未知数が多いので直接解くのは困難である．そこで以下に示すような反復法で解く．

このため, 未知数 $\{W\}_j$ ,  $\{\dot{W}\}_j$ ,  $\{\ddot{W}\}_j$ ,  $\{S\}$ の初期値として $\{W_0\}_j$ ,  $\{\dot{W}_0\}_j$ ,  $\{\ddot{W}_0\}_j$ ,  $\{S_0\}$ を与える．以下, 添字「 $0$ 」が付くものは初期値とする．また一回の計算における補正量をそれぞれ $\{\Delta W\}_j$ ,  $\{\Delta \dot{W}\}_j$ ,  $\{\Delta \ddot{W}\}_j$ ,  $\{\Delta S\}$ とする．よって

$$\{W\}_j = \{W_0\}_j + \{\Delta W\}_j \quad (4.37)$$

$$\{\dot{W}\}_j = \{\dot{W}_0\}_j + \{\Delta \dot{W}\}_j \quad (4.38)$$

$$\{\ddot{W}\}_j = \{\ddot{W}_0\}_j + \{\Delta \ddot{W}\}_j \quad (4.39)$$

$$\{S\} = \{S_0\} + \{\Delta S\} \quad (4.40)$$

とおく． $\{q\}_j$ ,  $[A]_j$ も同様に

$$[A]_j = [A_0]_j + [\Delta A]_j \quad (4.41)$$

$$\{q\}_j = \{q_0\}_j + \{\Delta q\}_j \quad (4.42)$$

とおく. 式(4.35)に式(4.41), (4.42)を代入する.  $\{\Delta A\}_j$ ,  $\{\Delta q\}_j$ ,  $\{\Delta S\}$  の二乗以上の項を無視すると

$$[A_0]_j\{S_0\} + [A_0]_j\{\Delta S\} + [B_0]_j\{\Delta W\}_j + [C_0]_j\{\Delta \dot{W}\}_j + [D_0]_j\{\Delta \ddot{W}\}_j - \{q_0\}_j = \{0\} \quad (4.43)$$

を得る. ここに  $[B_0]_j$ ,  $[C_0]_j$ ,  $[D_0]_j$ , は式(4.36)を用いて計算される.

式(4.31), (4.32), (4.33)に式(4.26), (4.27), (4.28)を代入すると

$$\{\Delta W\}_j = [\Phi]^T[\Phi]^{-1}([\Phi]^T\{\hat{w}\}_j + \frac{1}{r_1}[B_0]^T\{\zeta\}_j) - \{W_0\}_j \quad (4.44)$$

$$\{\Delta \dot{W}\}_j = [\Phi]^T[\Phi]^{-1}([\Phi]^T\{\hat{w}\}_j + \frac{1}{r_2}[C_0]^T\{\zeta\}_j) - \{\dot{W}_0\}_j \quad (4.45)$$

$$\{\Delta \ddot{W}\}_j = [\Phi]^T[\Phi]^{-1}([\Phi]^T\{\hat{w}\}_j + \frac{1}{r_3}[D_0]^T\{\zeta\}_j) - \{\ddot{W}_0\}_j \quad (4.46)$$

となる. 式(4.44), (4.45), (4.46)を式(4.43)に代入すると

$$\left. \begin{aligned} & [A_0]_j\{\Delta S\} + [A_0]_j\{S_0\} - \{q_0\}_j + [B_0]_j\left\{[\Phi]^T[\Phi]^{-1}[\Phi]^T\{\hat{w}\}_j - \{W_0\}_j\right\} \\ & + [C_0]_j\left\{[\Phi]^T[\Phi]^{-1}[\Phi]^T\{\hat{w}\}_j - \{W_0\}_j\right\} \\ & + [D_0]_j\left\{[\Phi]^T[\Phi]^{-1}[\Phi]^T\{\hat{w}\}_j - \{\ddot{W}_0\}_j\right\} + \left[\frac{1}{r_1}[B_0]_j[\Phi]^T[\Phi]^{-1}[B_0]_j^T\right. \\ & \left. + \frac{1}{r_2}[C_0]_j[\Phi]^T[\Phi]^{-1}[C_0]_j^T + \frac{1}{r_3}[D_0]_j[\Phi]^T[\Phi]^{-1}[D_0]_j^T\right]\{\zeta\}_j = \{0\} \end{aligned} \right\} \quad (4.47)$$

となる. ここで

$$\begin{aligned} \{E\}_j &= [A_0]_j\{\Delta S\} + [A_0]_j\{S_0\} - \{q_0\}_j + [B_0]_j\left\{[\Phi]^T[\Phi]^{-1}[\Phi]^T\{\hat{w}\}_j - \{W_0\}_j\right\} \\ & + [C_0]_j\left\{[\Phi]^T[\Phi]^{-1}[\Phi]^T\{\hat{w}\}_j - \{W_0\}_j\right\} + [D_0]_j\left\{[\Phi]^T[\Phi]^{-1}[\Phi]^T\{\hat{w}\}_j - \{\ddot{W}_0\}_j\right\} \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$[F]_j = \frac{1}{r_1}[B_0]_j[\Phi]^T[\Phi]^{-1}[B_0]_j^T + \frac{1}{r_2}[C_0]_j[\Phi]^T[\Phi]^{-1}[C_0]_j^T + \frac{1}{r_3}[D_0]_j[\Phi]^T[\Phi]^{-1}[D_0]_j^T \quad (4.49)$$

とおくと, 式(4.47)は

$$\{\zeta\}_j = [F]_j^{-1}(-\{E\}_j - [A_0]_j\{\Delta S\}) \quad (4.50)$$

となる．これを式(4.34)に代入すると

$$\sum_j [A_0]_j^T [F]_j^{-1} \{ -\{E\}_j - [A_0]_j \{\Delta S\} \} = \{0\} \quad (4.51)$$

が得られるので，これを変形して

$$\{\Delta S\} = \sum_j \left[ -[A_0]_j^T [F]_j^{-1} [A_0]_j \right]^{-1} \{ [A_0]_j^T [F]_j^{-1} \{E\}_j \} \quad (4.52)$$

を得る．この式から， $\{\Delta S\}$ が求められる． $\{\Delta S\}$ を(4.50)に代入すると， $\{\zeta\}_j$ が求められる． $\{\zeta\}_j$ を用いれば式(4.44)，(4.45)，(4.46)から補正後の $\{W_0\}_j + \{\Delta W\}_j$ ， $\{\dot{W}_0\}_j + \{\Delta \dot{W}\}_j$ ， $\{\ddot{W}_0\}_j + \{\Delta \ddot{W}\}_j$ が求められる．このようにして求めた補正後の値を新たな初期値として再び計算を行い，収束するまで繰り返す．

反復計算を行う際に必要となる最初の初期値は，例えば，実験データから求めた $\{W\}_j$ ， $\{\dot{W}\}_j$ ， $\{\ddot{W}\}_j$ ， $\{q\}_j$  および前節の方法で求めた未知パラメータ $\{S\}$ を用いればよい．

## 4.4 数値シミュレーション

### 4.4.1 一様な回転軸系

はじめに式(4.3)で表される，軸長にわたって一様で断面が円である回転軸系について同定の数値シミュレーションを行った．

#### 振動データの作成

回転軸の密度 $\rho$ ，断面の半径 $r$ ，軸長 $l$ ，縦弾性係数 $E$ ，および単位長さあたりの粘性減衰係数 $c$ の値をそれぞれ

$$\begin{aligned} \rho &= 7.85 \times 10^3 & \text{kg/m}^3 \\ r &= 6.00 \times 10^{-3} & \text{m} \\ l &= 1.20 & \text{m} \\ E &= 2.058 \times 10^{11} & \text{N/m}^2 \\ c &= 10.00 & \text{Ns/m}^2 \end{aligned} \quad (4.53)$$

とした．

軸の両端は $x$ 軸， $y$ 軸方向に線形ばねにより支持されているとし，

そのばね定数  $k_x(s)$ ,  $k_y(s)$  を

$$\begin{aligned} k_x(0) &= 1.00 \times 10^8 \text{ N/m} \\ k_y(0) &= 2.00 \times 10^5 \text{ N/m} \\ k_x(l) &= 1.00 \times 10^8 \text{ N/m} \\ k_y(l) &= 2.00 \times 10^5 \text{ N/m} \end{aligned} \quad (4.54)$$

とした。

不釣合いについては、直線で分布しているものとし、 $s=0$ ,  $s=l$  の位置での値をそれぞれ

$$\begin{aligned} \epsilon(0) &= (4.80 + j0.00) \times 10^{-7} \text{ m} \\ \epsilon(l) &= (3.60 + j0.00) \times 10^{-7} \text{ m} \end{aligned} \quad (4.55)$$

とした。

初期たわみについては、

$$z_0(s) = \sum_{m=1}^4 z_{0m} \sin \frac{m\pi s}{l} \quad (4.56)$$

と  $\sin$  で級数展開できる形に仮定し、各係数を

$$\begin{aligned} z_{01} &= (0.00 + j1.80) \times 10^{-4} \text{ m} \\ z_{02} &= (0.00 + j1.80) \times 10^{-5} \text{ m} \\ z_{03} &= (0.00 + j1.80) \times 10^{-6} \text{ m} \\ z_{04} &= (0.00 + j1.80) \times 10^{-7} \text{ m} \end{aligned} \quad (4.57)$$

とした。

以上のようなパラメータを仮定し、軸を12分割の有限要素に分け、3次の内挿関数を用いて振動データを作成した。また、回転軸は一定角加速度で回転させるものとし、

$$\left. \begin{aligned} \Theta &= \frac{1}{2} \lambda t^2 + \omega_0 t \\ \dot{\Theta} &= \lambda t + \omega_0 \\ \ddot{\Theta} &= \lambda \end{aligned} \right\} \quad (4.58)$$

とする。ここで、 $\lambda, \omega_0$  は回転軸の角加速度、初角速度を表し、

$$\lambda = 10.0 \text{ rad/s}^2, \quad \omega_0 = 20.0 \text{ rad/s} \quad (4.59)$$

とする。測定は46秒行い、この間に5000点のデータを収集した。このとき測定点として、 $s = 300\text{mm}, 600\text{mm}, 900\text{mm}$  の3点を選んだ。各測定点における振動データを図4.2に示す。



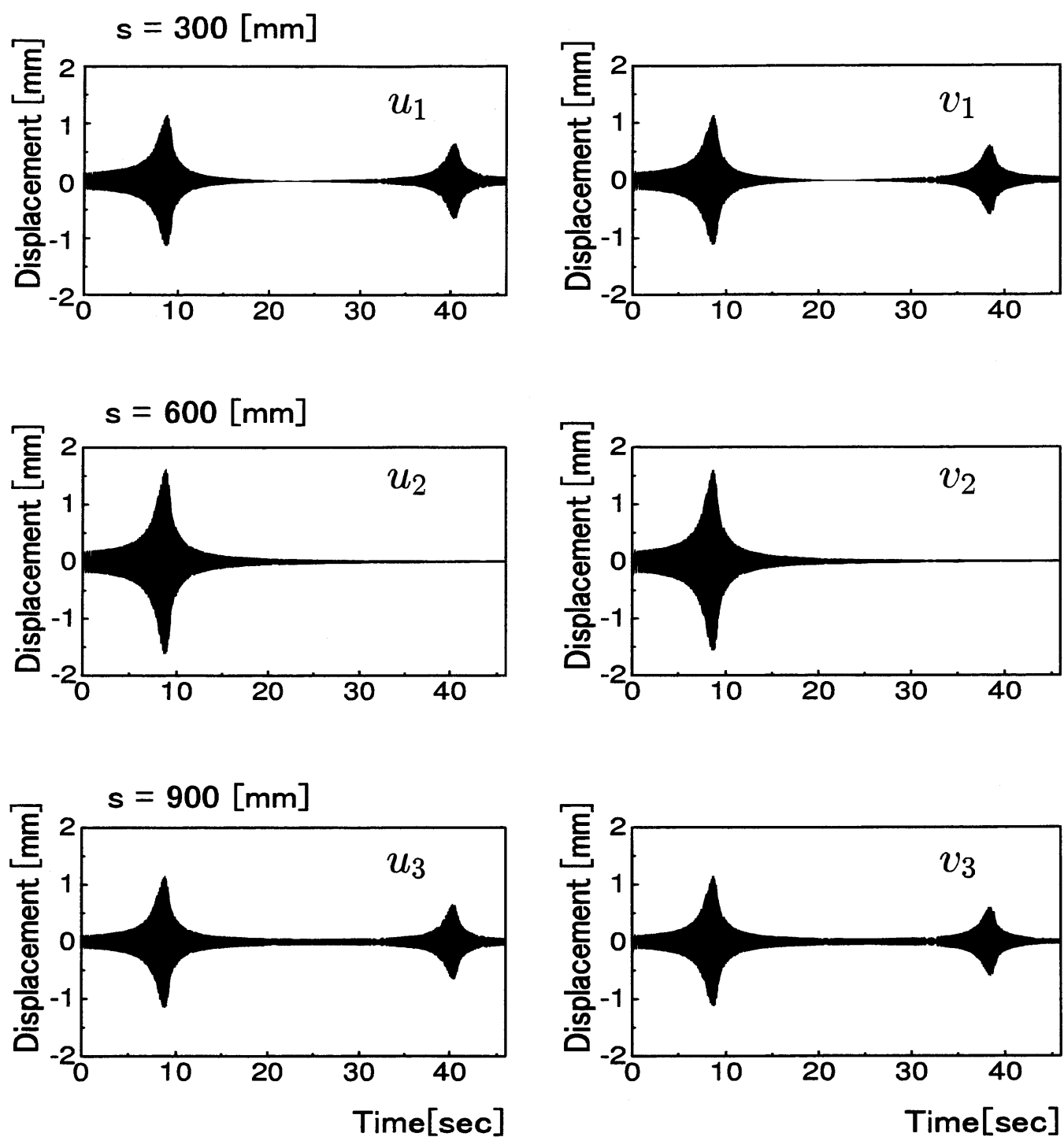


図 4.2: 応答波形の例 (一様な軸)

## 同定法の適用

まず、モード関数  $\Phi_m$  を定める。支持条件が、近似的に単純支持であると仮定すれば境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} z|_{s=0} &= 0 \\ z|_{s=l} &= 0 \\ \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \Big|_{s=0} &= 0 \\ \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \Big|_{s=l} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.60)$$

となり、この境界条件のもとで式(4.9)を解析的に解くとモード関数  $\Phi_m$  は、

$$\Phi_m(s) = \sin \frac{m\pi s}{l} \quad (4.61)$$

と求めることができる。

次に、 $Z_m$  を定める。いま測定点が3点であることから、式(4.14)において第3次モードまでの  $Z_m$  を考えることとし、上で求めた  $\Phi_m$  を用いると、

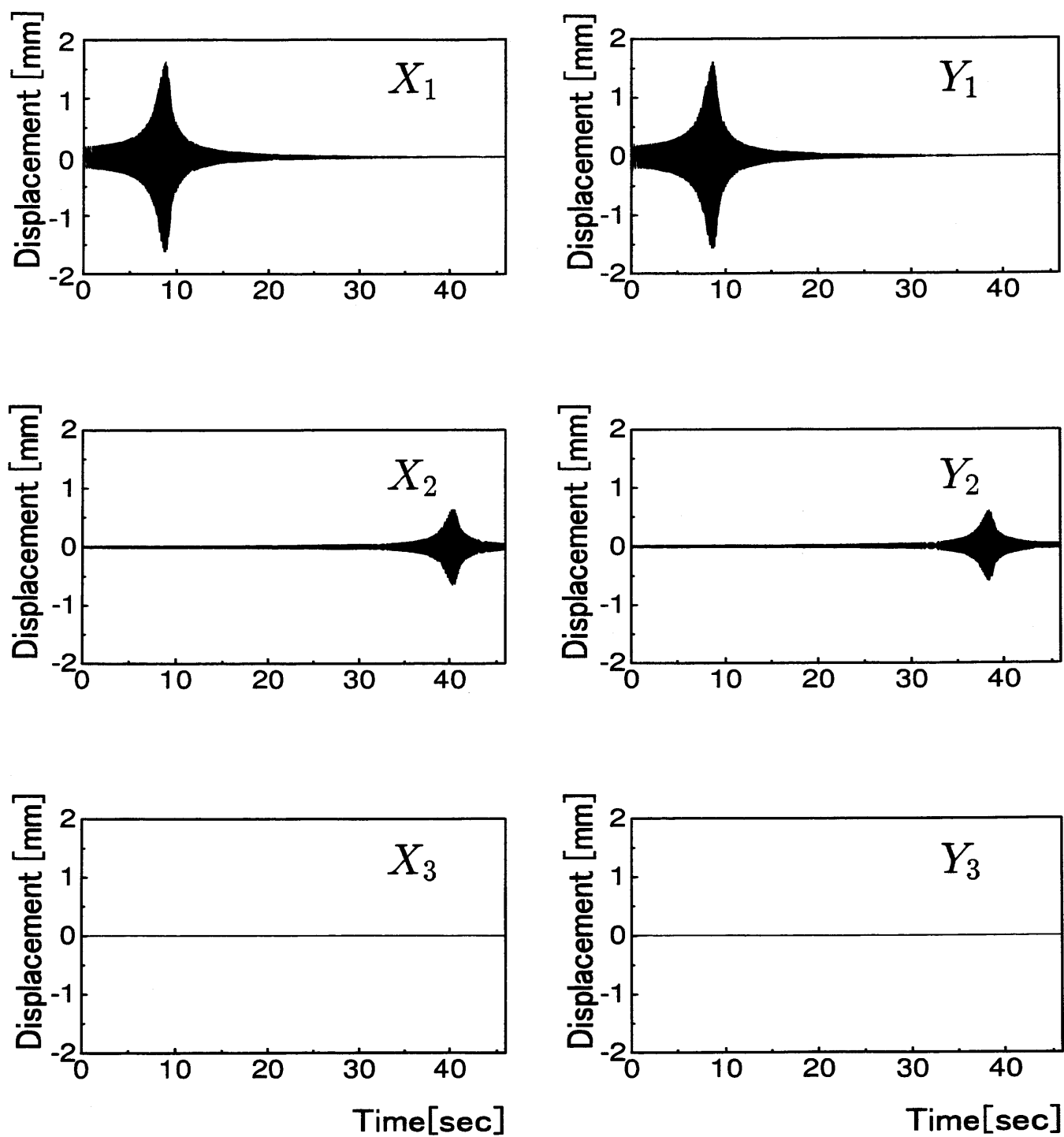
$$z(s_i, t_j) = \sum_{m=1}^3 Z_m(t_j) \sin \frac{m\pi s_i}{l} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.62)$$

となる。これは  $Z_m(t_j)$  に関する連立方程式となり、これを解くことにより  $Z_m(t_j)$  を求めた。

$Z_m(t)$  を図4.3に示す。記号  $X_m$ ,  $Y_m$  はそれぞれ  $Z_m$  の  $x$  軸方向,  $y$  軸方向の成分を表す。考えた回転速度の範囲では、第3次モードの  $Z_m$  は小さいため無視し、式(4.11)において  $n = 1, 2$ ,  $m = 1, 2$  としたとき現れるパラメータを定めることとした。

同定の結果を表4.1に示す。ここで、式(4.30)のラグランジュ関数  $U$  における重み係数  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  はすべて1とした。

同定結果の妥当性を検討するため、同定結果から求めた最大振幅と実験結果の比較を行った。まず、同定によって得られたパラメータの値を用いて各回転速度のふれまわり運動の最大振幅を求めた。次に、実際の回転軸を回転速度 50rad/s から 450rad/s 付近の間で回転させ、定常状態での最大振幅を測定した。それらを比較した結果を図4.6に示す。図の点線、実線はそれぞれ第一の方法、第二の方法によって得られた最大振幅で、 $[\bullet]$  は、実際の回転軸から測定した最大振幅である。また、ふれまわり運動の  $x$ ,  $y$  方向成分の最大振幅においても同様の方法で比較した。それを図4.5に示す。この図から、同定結果は第1の方法、第2の方法ともに実験データをよく再現していることがわかる。

図 4.3:  $Z_m(t)$

同定結果の妥当性をさらに検討するため, 構造変更のシミュレーションも行った. 100g の質量を  $s = 400\text{mm}$  の位置に取り付けた場合の最大振幅を予測し, 構造変更後に行った実験結果と比較した. 比較の結果を図4.6に示す. 図の点線, 実線はそれぞれ第一の方法, 第二の方法によって得られた最大振幅で, 「○」は, 構造変更後に実験によって得られた最大振幅である. この図から構造変更後の応答の予測も第1の方法, 第2の方法ともに実験結果とよく一致していることがわかる.

以上のようにして, 提案した同定法の妥当性が確かめられた.

表 4.1: 同定結果

Parameters		Identified(1)	Identified(2)
$c_{11}$	Ns/m	6.053	6.094
$c_{12}$	Ns/m	-0.009	-0.039
$c_{22}$	Ns/m	5.956	5.947
$k_{11}$	N/m	$0.584 \times 10^4$	$0.593 \times 10^4$
$k_{12}$	N/m	$0.001 \times 10^4$	$0.004 \times 10^4$
$k_{22}$	N/m	$9.020 \times 10^4$	$9.023 \times 10^4$
$Re(\Delta k'_{11})$	N/m	$0.000 \times 10^4$	$0.000 \times 10^4$
$Im(\Delta k'_{11})$	N/m	$-0.000 \times 10^4$	$-0.000 \times 10^4$
$Re(\Delta k'_{12})$	N/m	$0.000 \times 10^4$	$0.000 \times 10^4$
$Im(\Delta k'_{12})$	N/m	$-0.000 \times 10^4$	$-0.000 \times 10^4$
$Re(\Delta k'_{22})$	N/m	$0.000 \times 10^4$	$0.000 \times 10^4$
$Im(\Delta k'_{22})$	N/m	$0.000 \times 10^4$	$0.000 \times 10^4$
$Re(\Delta k_{11})$	N/m	$0.007 \times 10^4$	$-0.001 \times 10^3$
$Im(\Delta k_{11})$	N/m	$0.001 \times 10^4$	$0.002 \times 10^4$
$Re(\Delta k_{12})$	N/m	$-0.000 \times 10^4$	$-0.003 \times 10^4$
$Im(\Delta k_{12})$	N/m	$0.005 \times 10^4$	$0.006 \times 10^4$
$Re(\Delta k_{22})$	N/m	$0.424 \times 10^4$	$0.422 \times 10^4$
$Im(\Delta k_{22})$	N/m	$0.019 \times 10^4$	$0.021 \times 10^4$
$Re(q_1)$	Ns <sup>2</sup>	$2.549 \times 10^{-7}$	$1.853 \times 10^{-7}$
$Im(q_1)$	Ns <sup>2</sup>	$-0.617 \times 10^{-7}$	$-1.140 \times 10^{-7}$
$Re(q_2)$	Ns <sup>2</sup>	$-0.076 \times 10^{-7}$	$0.058 \times 10^{-7}$
$Im(q_2)$	Ns <sup>2</sup>	$-1.200 \times 10^{-7}$	$-1.493 \times 10^{-7}$
$Re(z_{01})$	N	0.004	0.016
$Im(z_{01})$	N	1.050	1.055
$Re(z_{02})$	N	0.005	0.009
$Im(z_{02})$	N	1.622	1.619

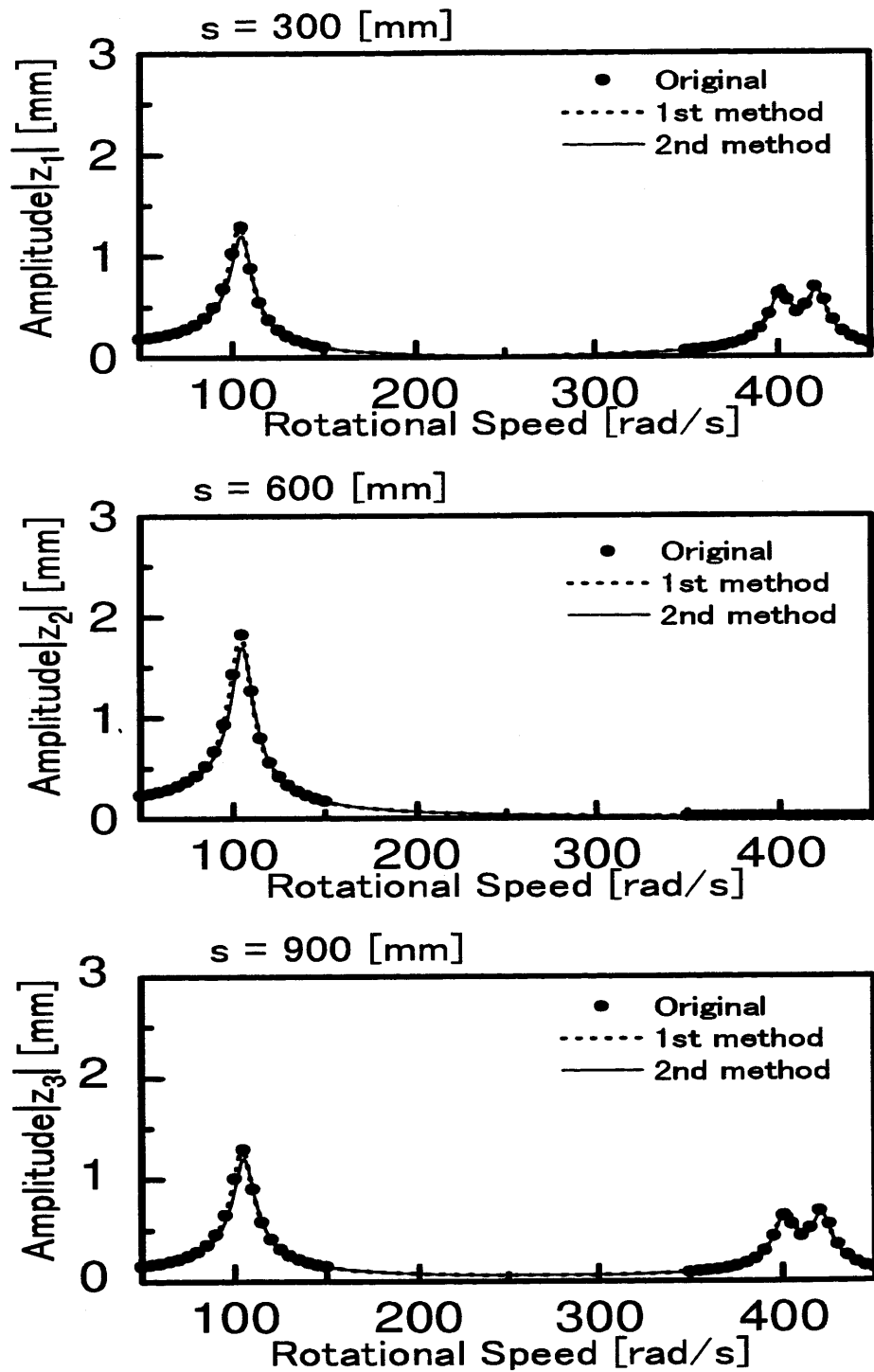


図 4.4: 最大振幅

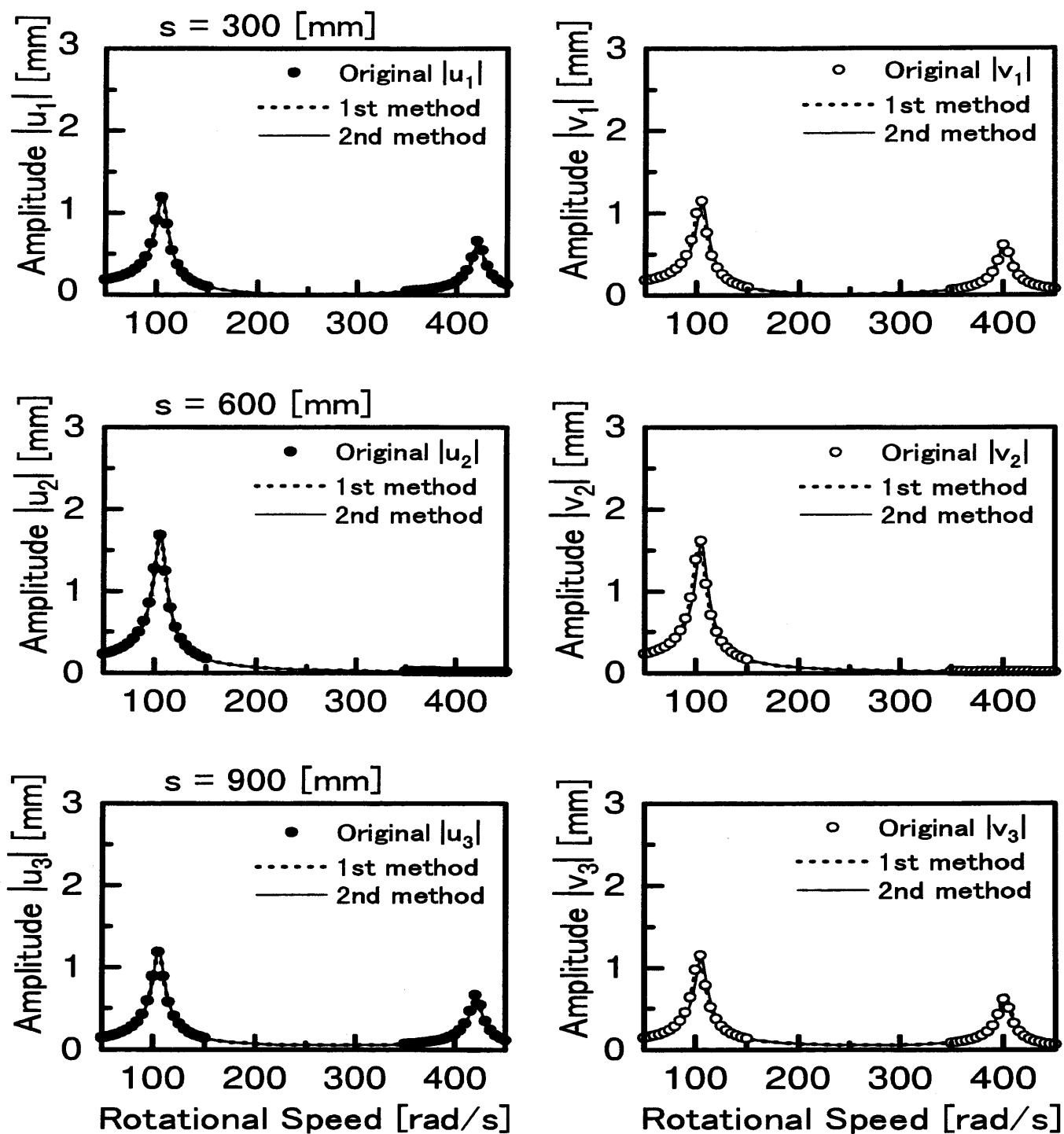


図 4.5: 最大振幅

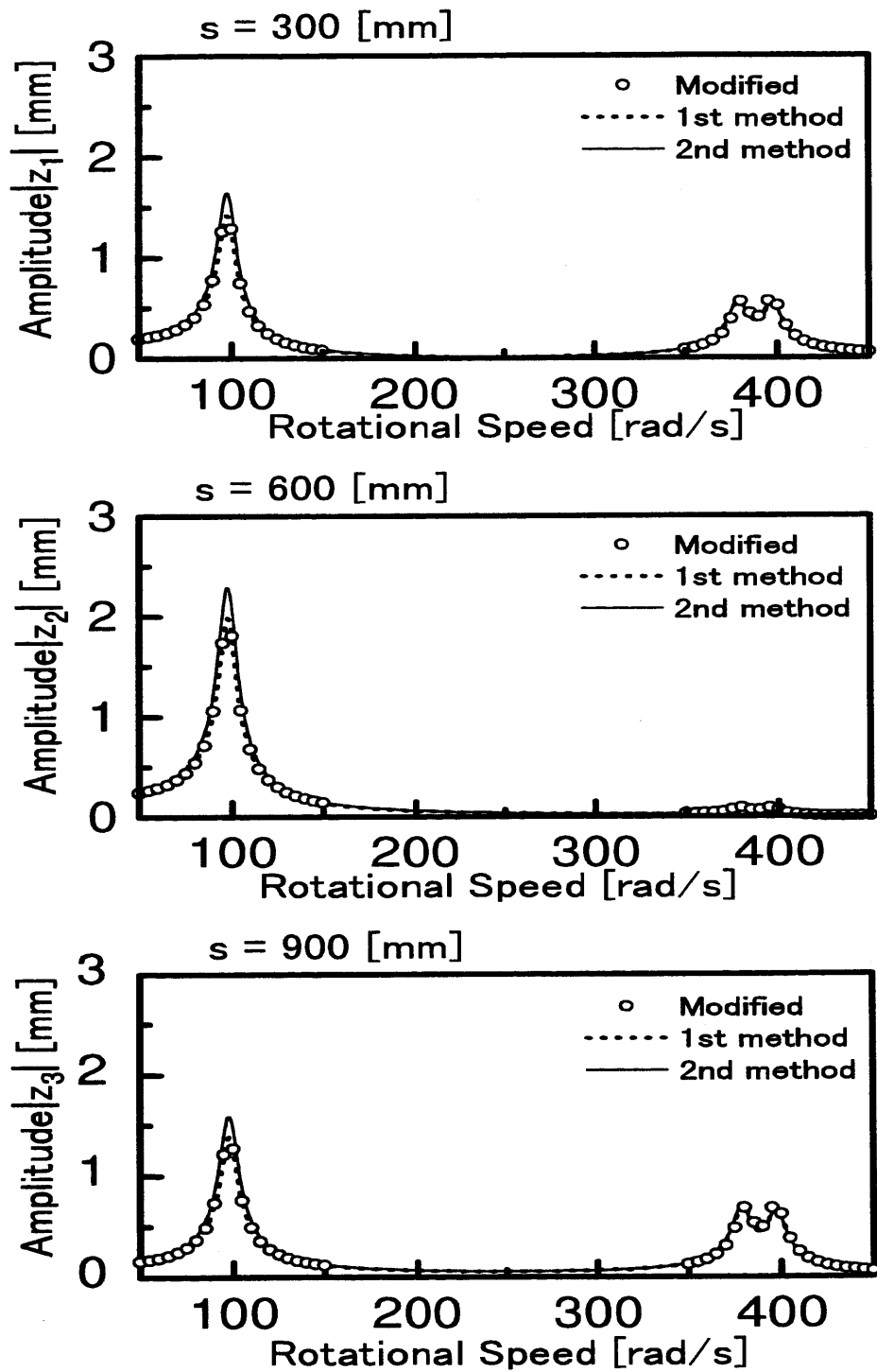


図 4.6: 構造変更後の最大振幅



### 4.4.2 非一様な回転軸系

つぎに式(4.5)で表される非一様な回転軸系について同定の数値シミュレーションを行った。取り上げる軸は断面積が段階的に変化する段付き軸とする。

#### 振動データの作成

回転軸の密度 $\rho$ 、軸長 $l$ 、縦弾性係数 $E$ 、および単位長さあたりの粘性減衰係数 $c$ の値をそれぞれ

$$\begin{aligned}\rho &= 7.85 \times 10^3 \quad \text{kg/m}^3 \\ l &= 1.20 \quad \text{m} \\ E &= 2.058 \times 10^{11} \quad \text{N/m}^2 \\ c &= 10.00 \quad \text{Ns/m}^2\end{aligned}\tag{4.63}$$

とし、回転軸の断面半径 $r$ は、

$$r = \begin{cases} 6.00 \times 10^{-3} \quad \text{m} & (0 \leq s \leq 0.800 \quad \text{m}) \\ 7.50 \times 10^{-3} \quad \text{m} & (0.800 \leq s \leq 1.200 \quad \text{m}) \end{cases}\tag{4.64}$$

と段階的に変化するものとした。

軸の両端は $x$ 軸、 $y$ 軸方向に線形ばねにより支持されているとし、そのばね定数 $k_x(s)$ 、 $k_y(s)$ を

$$\begin{aligned}k_x(0) &= 1.00 \times 10^8 \quad \text{N/m} \\ k_y(0) &= 2.00 \times 10^5 \quad \text{N/m} \\ k_x(l) &= 1.00 \times 10^8 \quad \text{N/m} \\ k_y(l) &= 2.00 \times 10^5 \quad \text{N/m}\end{aligned}\tag{4.65}$$

とした。

不釣合いについては、直線で分布しているものとし、 $s=0$ 、 $s=l$ の位置での値をそれぞれ

$$\begin{aligned}\epsilon(0) &= (4.80 + j0.00) \times 10^{-7} \quad \text{m} \\ \epsilon(l) &= (3.60 + j0.00) \times 10^{-7} \quad \text{m}\end{aligned}\tag{4.66}$$

とした。

初期たわみについては、

$$z_0(s) = \sum_{m=1}^4 z_{0m} \sin \frac{m\pi s}{l}\tag{4.67}$$

と  $\sin$  で級数展開できる形に仮定し、各係数を

$$\begin{aligned} z_{01} &= (0.00 + j1.80) \times 10^{-4} \text{ m} \\ z_{02} &= (0.00 + j1.80) \times 10^{-5} \text{ m} \\ z_{03} &= (0.00 + j1.80) \times 10^{-6} \text{ m} \\ z_{04} &= (0.00 + j1.80) \times 10^{-7} \text{ m} \end{aligned} \quad (4.68)$$

とした。

以上のようなパラメータを仮定し、軸を12分割の有限要素に分け、3次の内挿関数を用いて振動データを作成した。また、回転軸は一定角加速度で回転させるものとし、

$$\left. \begin{aligned} \Theta &= \frac{1}{2}\lambda t^2 + \omega_0 t \\ \dot{\Theta} &= \lambda t + \omega_0 \\ \ddot{\Theta} &= \lambda \end{aligned} \right\} \quad (4.69)$$

とする。ここで、 $\lambda, \omega_0$  は回転軸の角加速度、初角速度を表し、

$$\lambda = 10.0 \text{ rad/s}^2, \quad \omega_0 = 20.0 \text{ rad/s} \quad (4.70)$$

とする。測定は50秒行い、この間に5000点のデータを収集した。このとき測定点として、 $s = 300\text{mm}, 600\text{mm}, 900\text{mm}$  の3点を選んだ。各測定点における振動データを図4.7に示す。

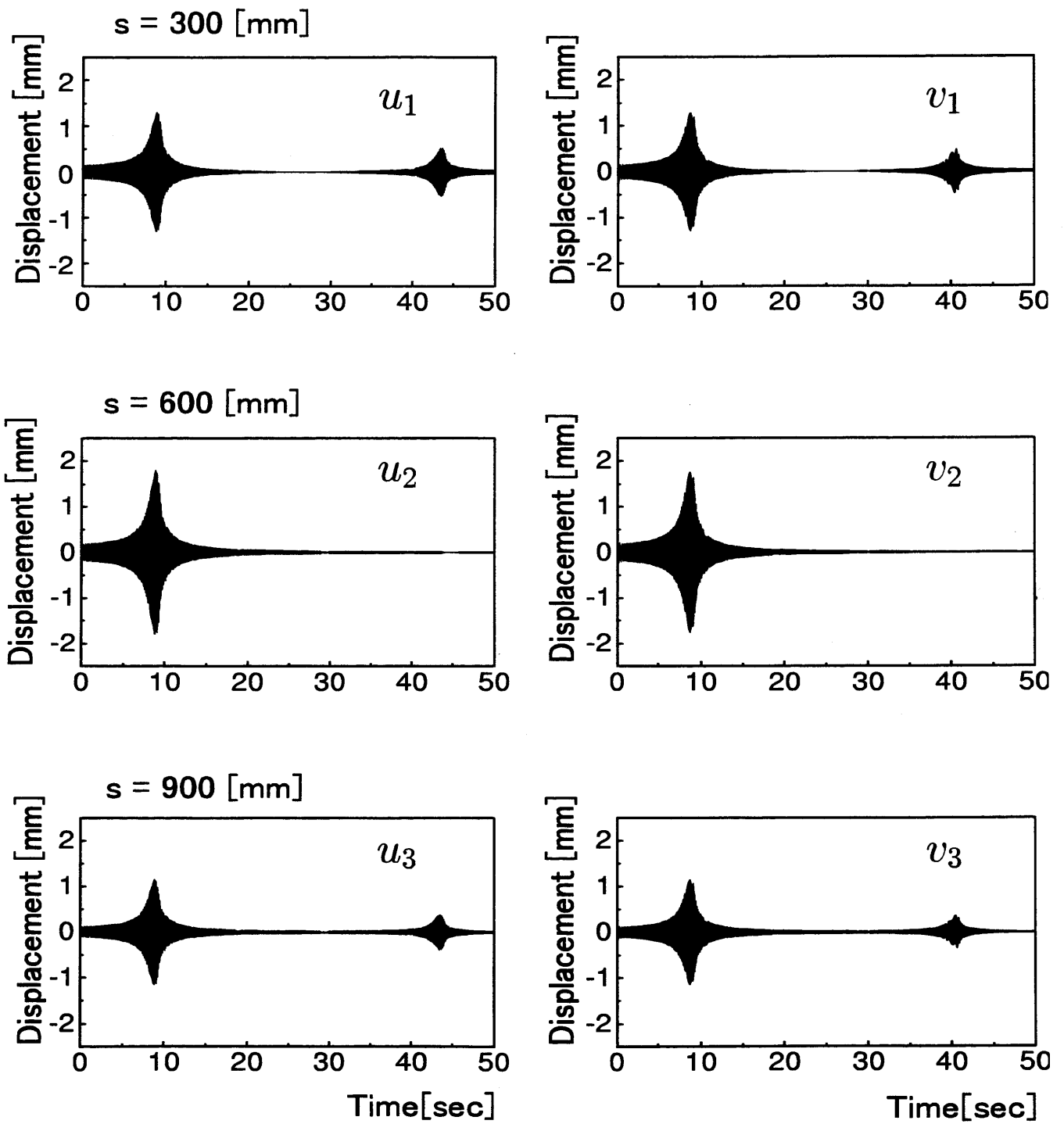


図 4.7: 応答波形の例 (非一様な軸)

## 同定法の適用

まず、モード関数  $\Phi_m$  を定める。支持条件が、近似的に単純支持であると仮定し、式(4.60)の境界条件のもとで式(4.9)を有限要素法を用いてモード関数  $\Phi_m$  を求めた。

次に、 $Z_m$  を定める。いま測定点が3点であることから、式(4.14)において第3次モードまでの  $Z_m$  を考えることとし、上で求めた  $\Phi_m$  を用いると、

$$z(s_i, t_j) = \sum_{m=1}^3 Z_m(t_j) \Phi_m(s_i) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.71)$$

となる。これは  $Z_m(t_j)$  に関する連立方程式となり、これを解くことにより  $Z_m(t_j)$  を求めた。

$Z_m(t)$  を図(4.8)に示す。記号  $X_m$ ,  $Y_m$  はそれぞれ  $Z_m$  の  $x$  軸方向,  $y$  軸方向の成分を表す。考えた回転速度の範囲では、第3次モードの  $Z_m$  は小さいため無視し、式(4.11)において  $n = 1, 2$ ,  $m = 1, 2$  としたとき現れるパラメータを定めることとした。

同定の結果を表4.2に示す。ここで、式(4.30)のラグランジュ関数  $U$  における重み係数  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  はすべて1とした。

同定結果の妥当性を検討するため、同定結果から求めた最大振幅と実験結果の比較を行った。まず、同定によって得られたパラメータの値を用いて各回転速度のふれまわり運動の最大振幅を求めた。次に、実際の回転軸を回転速度 50rad/s から 500rad/s 付近の間で回転させ、定常状態での最大振幅を測定した。それらを比較した結果を図4.9に示す。図の点線、実線はそれぞれ第一の方法、第二の方法によって得られた最大振幅で、「●」は、実際の回転軸から測定した最大振幅である。また、ふれまわり運動の  $x$ ,  $y$  方向成分の最大振幅においても同様の方法で比較した。それを図4.10に示す。この図から、同定結果は第1の方法、第2の方法ともに実験データをよく再現していることがわかる。

同定結果の妥当性をさらに検討するため、構造変更のシミュレーションも行った。200g の質量を  $s = 400\text{mm}$  の位置に取り付けた場合の最大振幅を予測し、構造変更後に行った実験結果と比較した。比較の結果を図4.11に示す。図の点線、実線はそれぞれ第一の方法、第二の方法によって得られた最大振幅で、「○」は、構造変更後に実験によって得られた最大振幅である。この図から構造変更後の応答の予測も第1の方法、第2の方法ともに実験結果とよく一致していることがわかる。

以上のようにして、提案した同定法の妥当性が確かめられた。

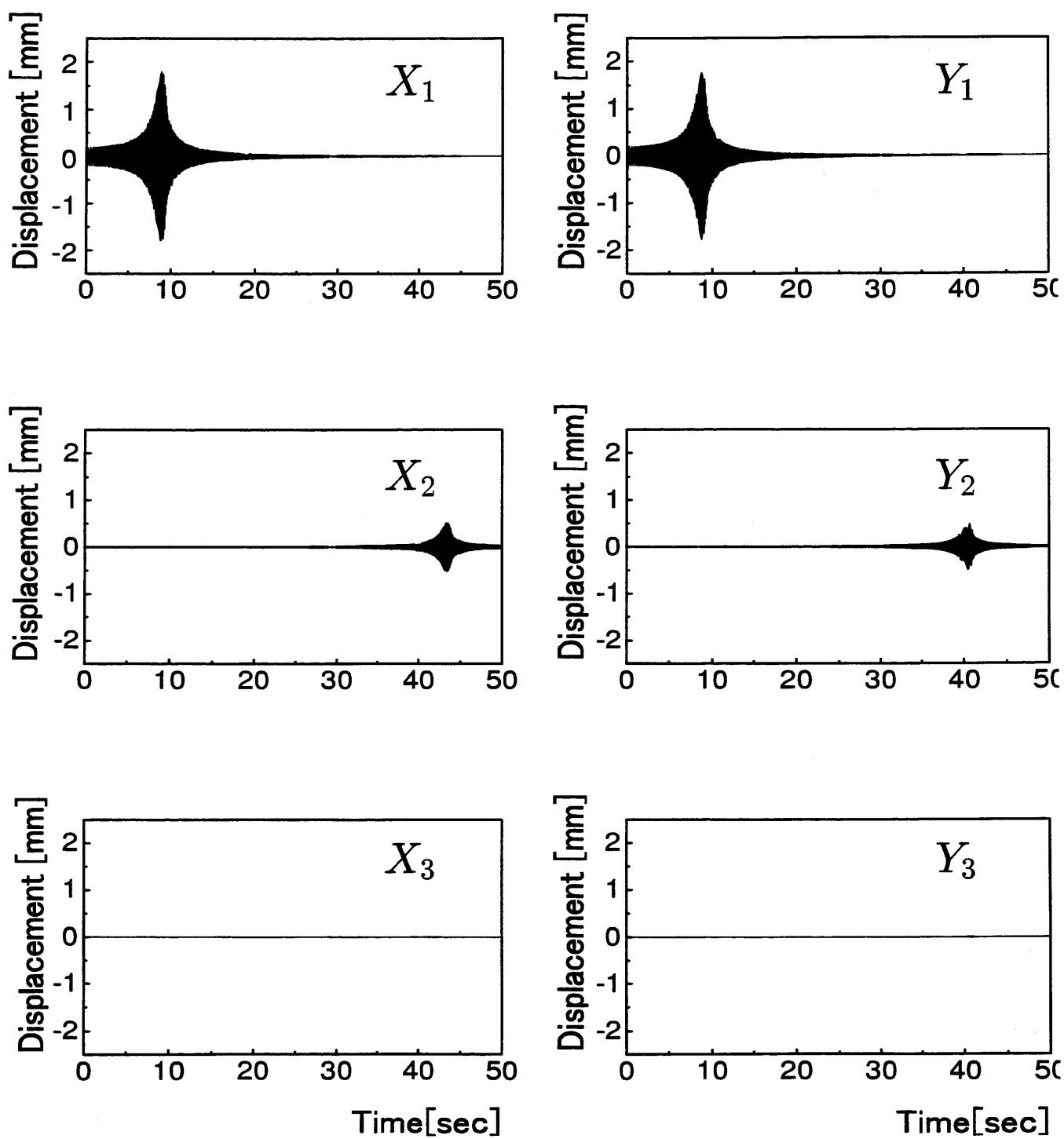
図 4.8:  $Z_m(t)$

表 4.2: 同定結果

Parameters		Identified(1)	Identified(2)
$c_{11}$	Ns/m	5.732	5.840
$c_{12}$	Ns/m	0.600	0.571
$c_{22}$	Ns/m	4.660	4.594
$k_{11}$	N/m	$0.640 \times 10^4$	$0.669 \times 10^4$
$k_{12}$	N/m	$0.012 \times 10^4$	$0.037 \times 10^4$
$k_{22}$	N/m	$9.168 \times 10^4$	$9.208 \times 10^4$
$Re(\Delta k'_{11})$	N/m	$0.000 \times 10^4$	$0.000 \times 10^4$
$Im(\Delta k'_{11})$	N/m	$-0.000 \times 10^4$	$-0.000 \times 10^4$
$Re(\Delta k'_{12})$	N/m	$0.000 \times 10^4$	$0.000 \times 10^4$
$Im(\Delta k'_{12})$	N/m	$-0.000 \times 10^4$	$-0.000 \times 10^4$
$Re(\Delta k'_{22})$	N/m	$0.000 \times 10^4$	$0.000 \times 10^4$
$Im(\Delta k'_{22})$	N/m	$0.000 \times 10^4$	$0.000 \times 10^4$
$Re(\Delta k_{11})$	N/m	$0.007 \times 10^4$	$-0.019 \times 10^4$
$Im(\Delta k_{11})$	N/m	$0.000 \times 10^4$	$0.005 \times 10^4$
$Re(\Delta k_{12})$	N/m	$-0.012 \times 10^4$	$-0.038 \times 10^4$
$Im(\Delta k_{12})$	N/m	$0.003 \times 10^4$	$0.007 \times 10^4$
$Re(\Delta k_{22})$	N/m	$0.617 \times 10^4$	$0.589 \times 10^4$
$Im(\Delta k_{22})$	N/m	$0.015 \times 10^4$	$0.037 \times 10^4$
$Re(q_1)$	Ns <sup>2</sup>	$2.778 \times 10^{-7}$	$1.149 \times 10^{-7}$
$Im(q_1)$	Ns <sup>2</sup>	$-0.274 \times 10^{-7}$	$1.352 \times 10^{-7}$
$Re(q_2)$	Ns <sup>2</sup>	$0.232 \times 10^{-7}$	$0.305 \times 10^{-7}$
$Im(q_2)$	Ns <sup>2</sup>	$1.535 \times 10^{-7}$	$-2.481 \times 10^{-7}$
$Re(z_{01})$	N	-0.000	0.034
$Im(z_{01})$	N	1.147	1.158
$Re(z_{02})$	N	-0.001	0.016
$Im(z_{02})$	N	1.060	1.145

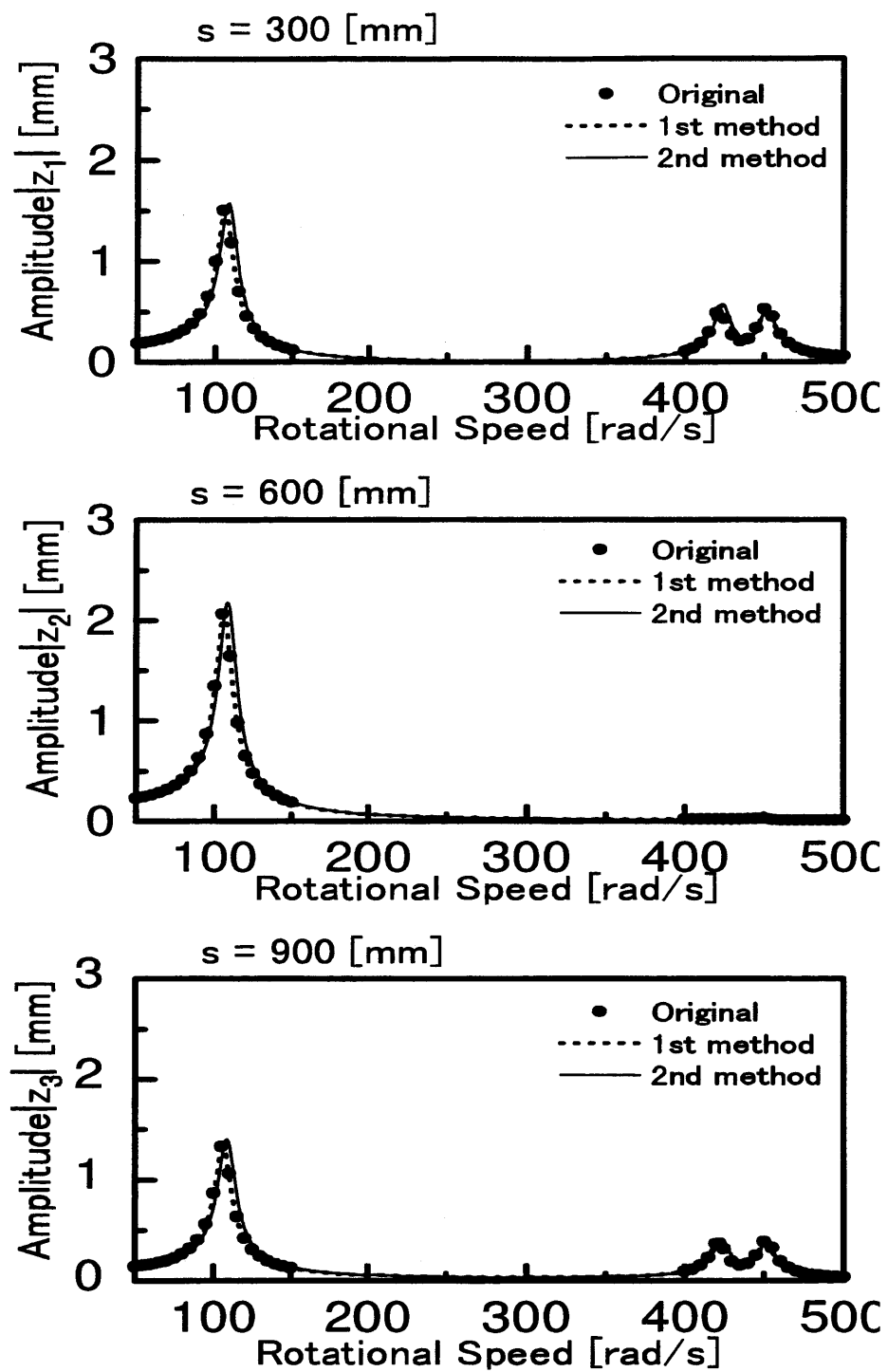


図 4.9: 最大振幅

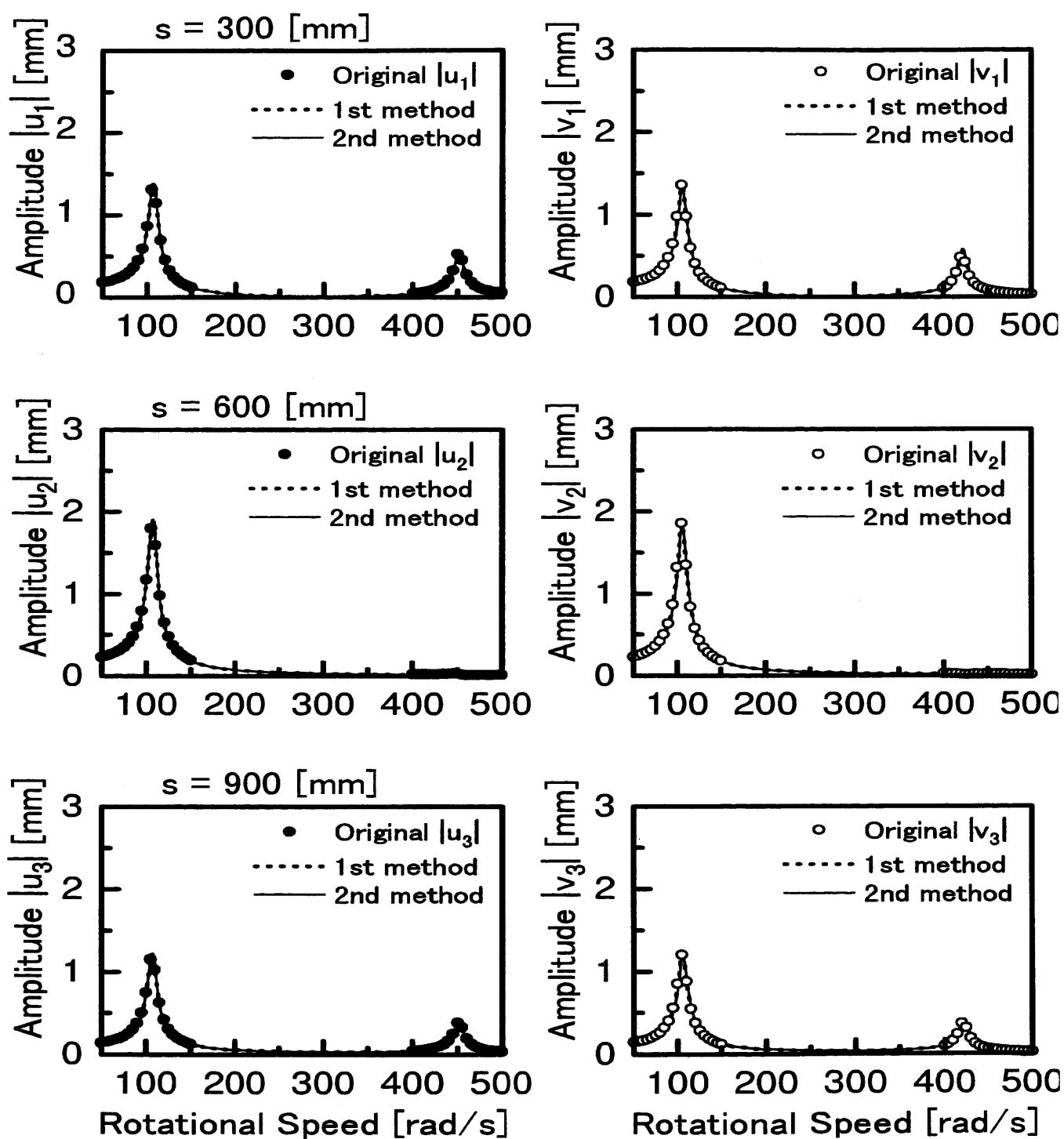


図 4.10: 最大振幅



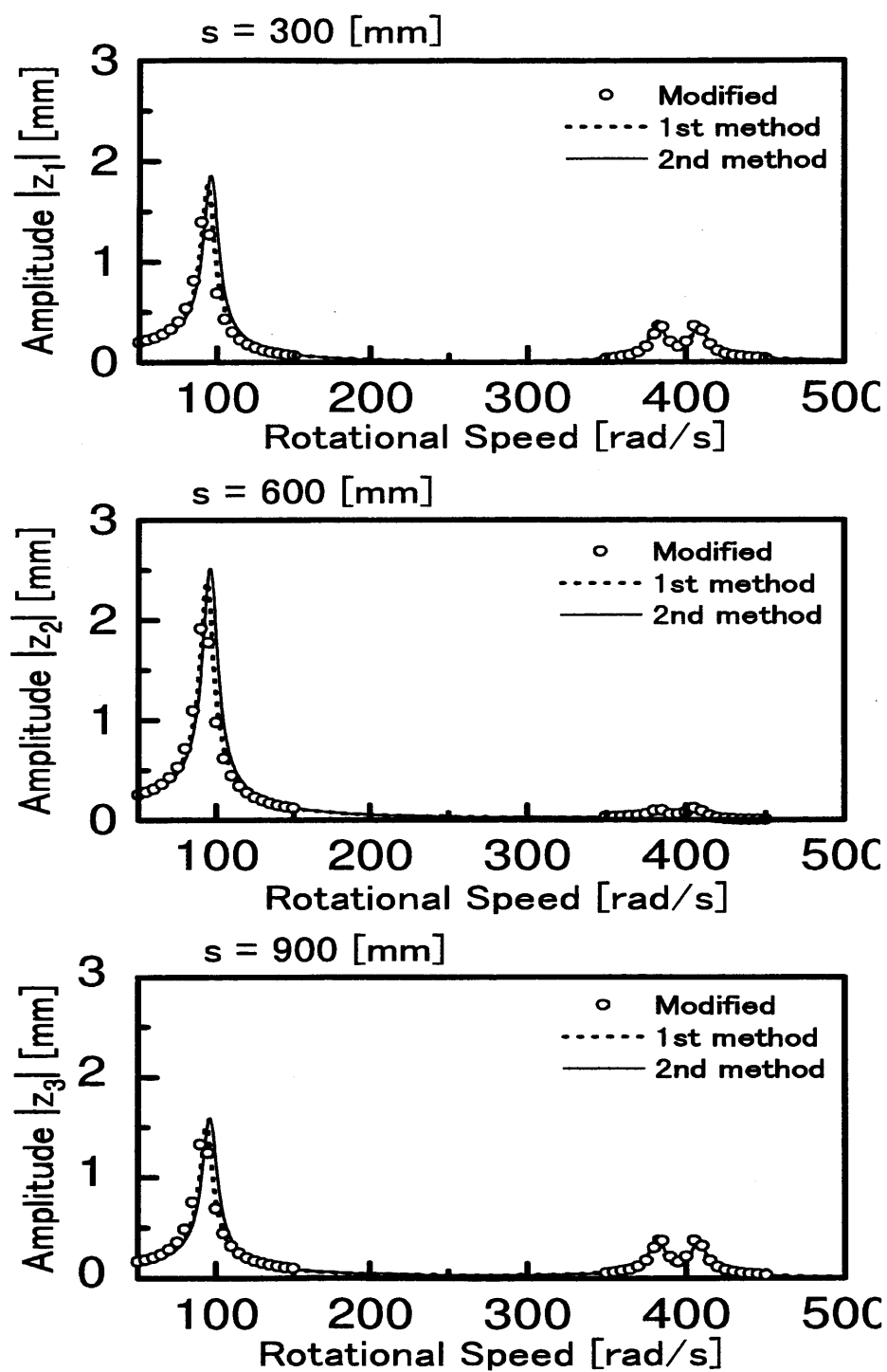


図 4.11: 構造変更後の最大振幅

## 4.5 実際の系への適用

### 4.5.1 実験装置の概略

同定の対象とした実験装置の概略を図4.12に示す. 図のSは回転軸を表し, 直径12 mmの円形断面をもち, 長さ1200 mmである. 軸の両端は玉軸受けを介して軸受台によって鉛直に支えられている. 回転軸の材質の密度は  $7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ , 縦弾性係数は  $2.058 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$  である.

軸の上端を原点  $O$  とし,  $s$  軸を鉛直下向き,  $x$  軸および  $y$  軸を, 軸受台の方向および軸受台に直角の方向に定めた.  $\xi$  軸および  $\eta$  軸を, 回転軸の上部に固定した小紙片  $P$  のある方向およびそれに直角の方向に定めた.  $x$  軸が  $\xi$  軸に平行になる瞬間から変位を測定するため, レーザー式センサ  $St$  を  $x$  軸方向に固定し, これから発するレーザーが小紙片  $P$  によって遮られる瞬間から測定を開始するように測定装置を設定した.  $x$  軸,  $y$  軸方向のそれぞれの変位  $u, v$  を,  $s = 300\text{mm}, 600\text{mm}, 900\text{mm}$  の3点で  $x$  および  $y$  軸方向に固定した計6個のセンサで測定した. また, 軸の上部  $T$  にロータリーエンコーダを取り付け, 回転角  $\theta$  を測定した.

### 4.5.2 同定実験

軸の回転速度を, 主危険速度を含むように変化させ, そのときの変位  $x, y$  と回転角  $\theta$  を測定した. 測定は16秒間行い, センサごとに16384個のデータを採取した. このデータから8192個のデータを収集し, 変位の速度と加速度, 回転角の角速度と角加速度は各データを微分して求めた. 変位の微分は周波数領域で行った. このとき400rad/s以上の周波数と定数成分は誤差とみなして無視した. また, 回転角の微分は収集したデータを5次の多項式で近似し, それを微分して求めた. その波形を図4.13, 4.14, 4.15, 4.16に示す.

まずモード関数を求める. 支持条件が近似的に単純支持であると仮定し, 式(4.60)で表される境界条件のもとで, 式(4.9)から解析的に求められ,

$$\Phi_m = \sin \frac{m\pi s}{l}$$

を得る.

測定された振動データ  $z(s_i, t_j)$  から  $Z_m(t_j)$  を求めた.  $Z_m$  を図4.17に示す. 記号  $X_m, Y_m$  はそれぞれ  $Z_m$  の  $x$  軸方向,  $y$  軸方向の成分を表す.

考えた回転速度の範囲では, 第2, 3次モードの  $Z_m$  は小さいため無視し, 第1次モードに関するパラメータのみを定めることとした.

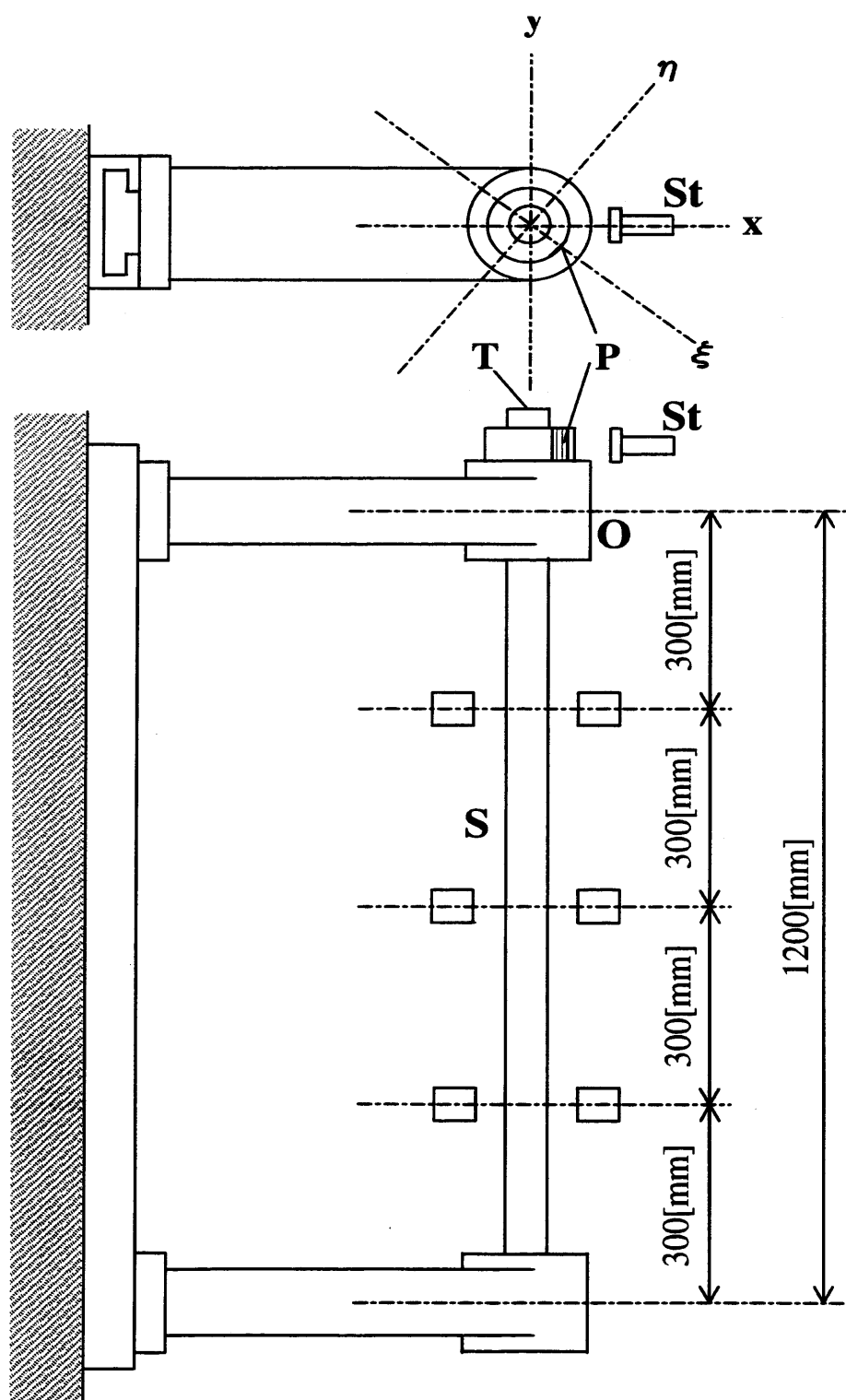


図 4.12: 実験装置

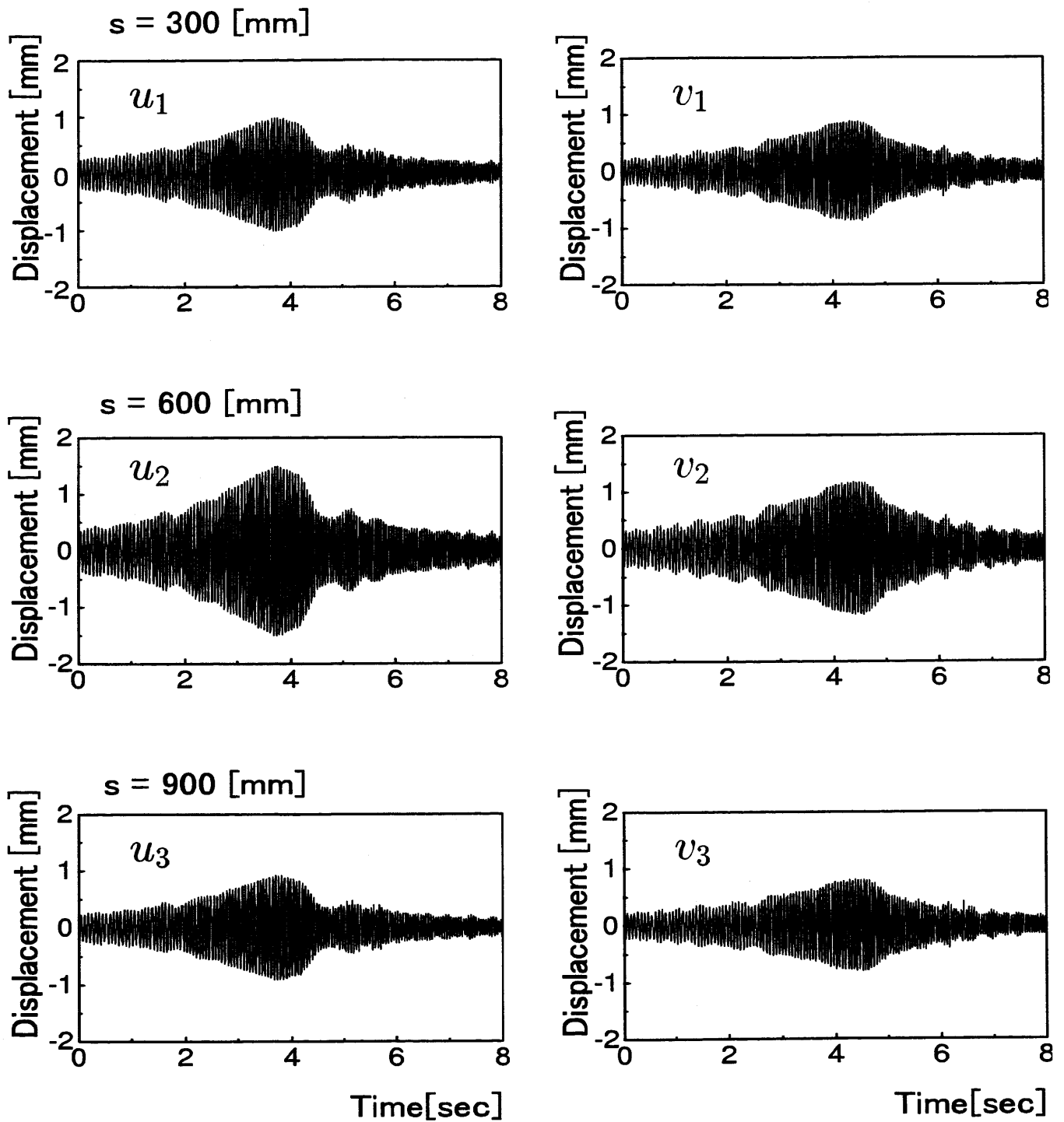


図 4.13: 実験データ (変位)

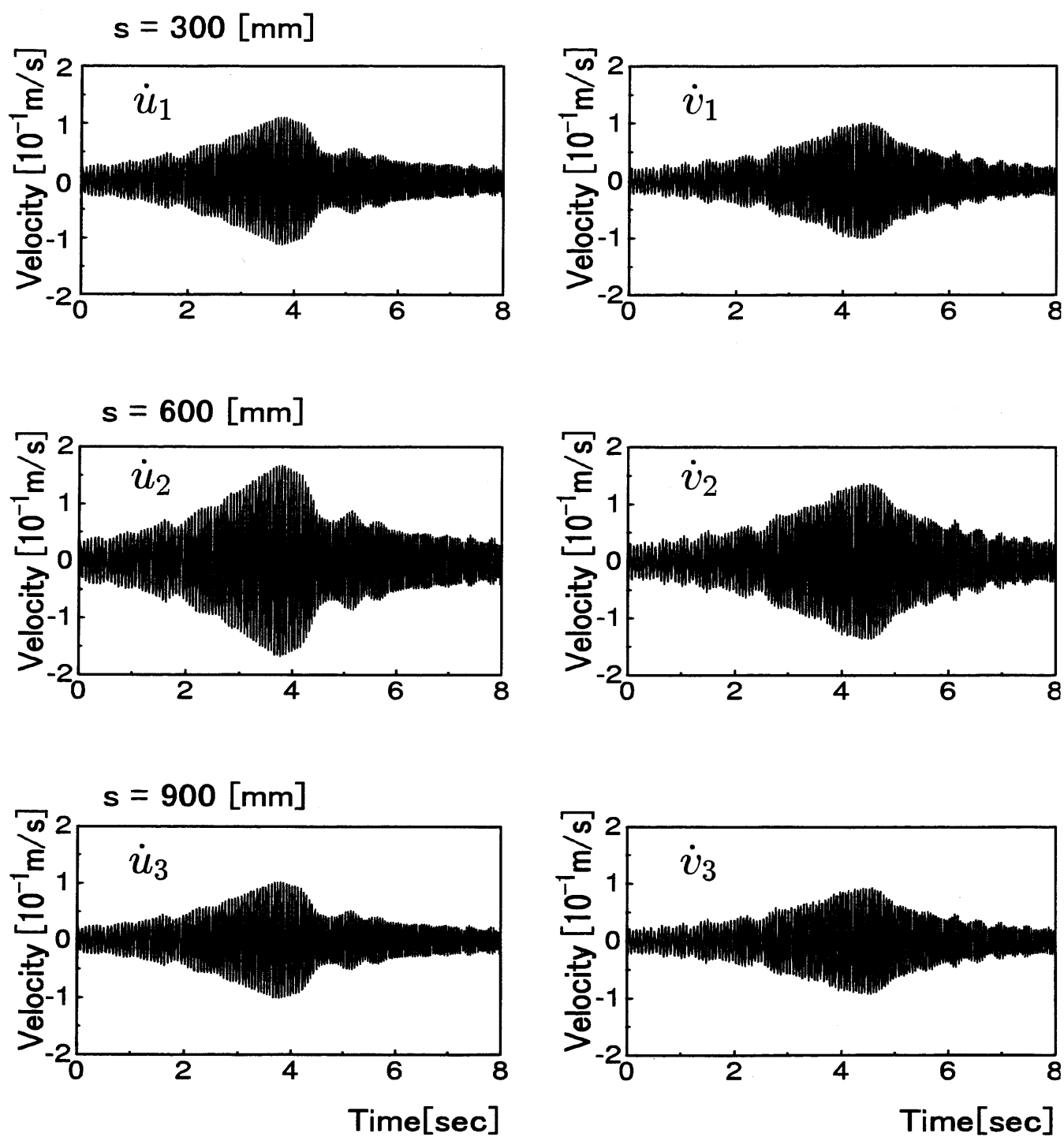


図 4.14: 実験データ (速度)

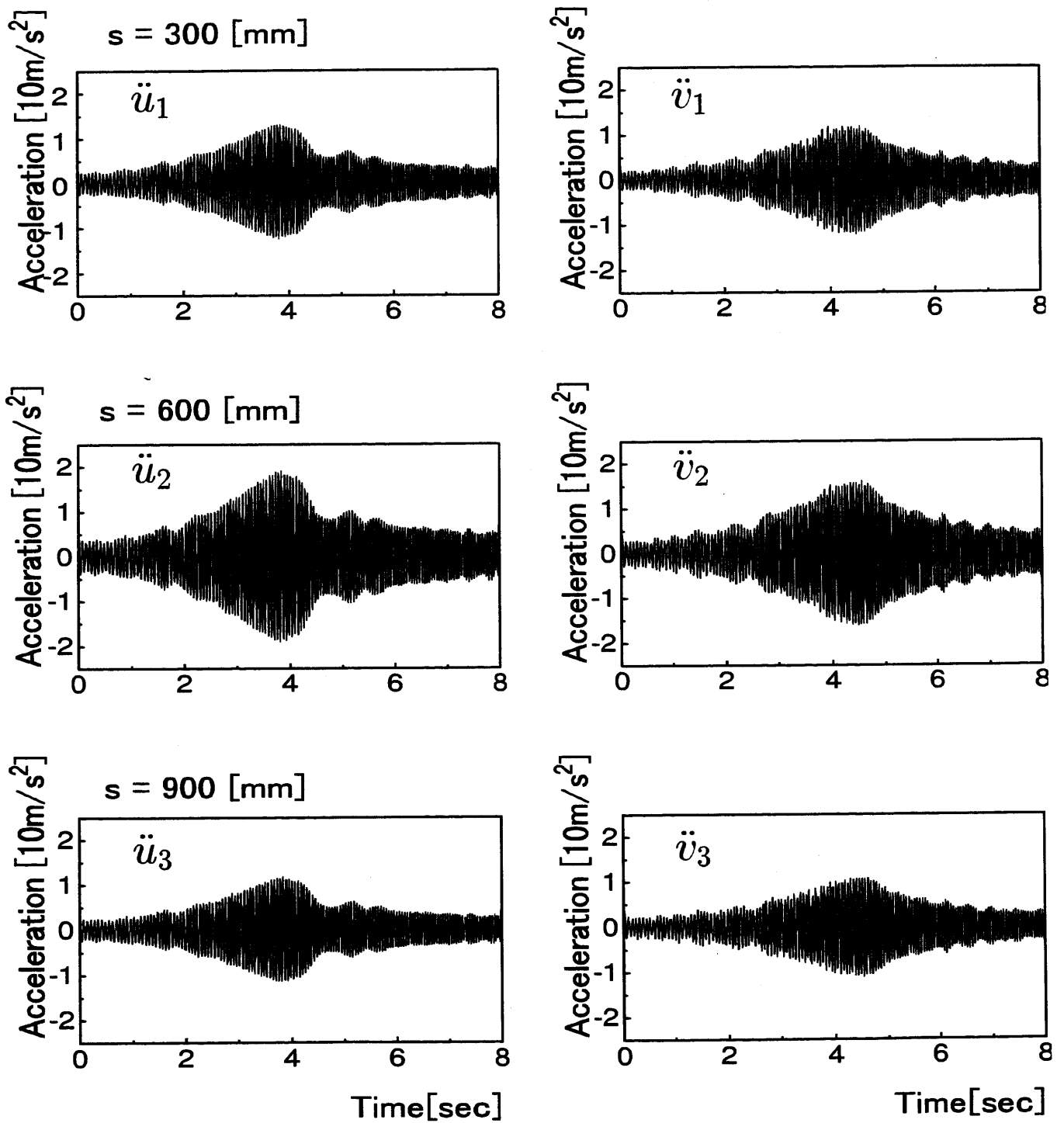


図 4.15: 実験データ (加速度)

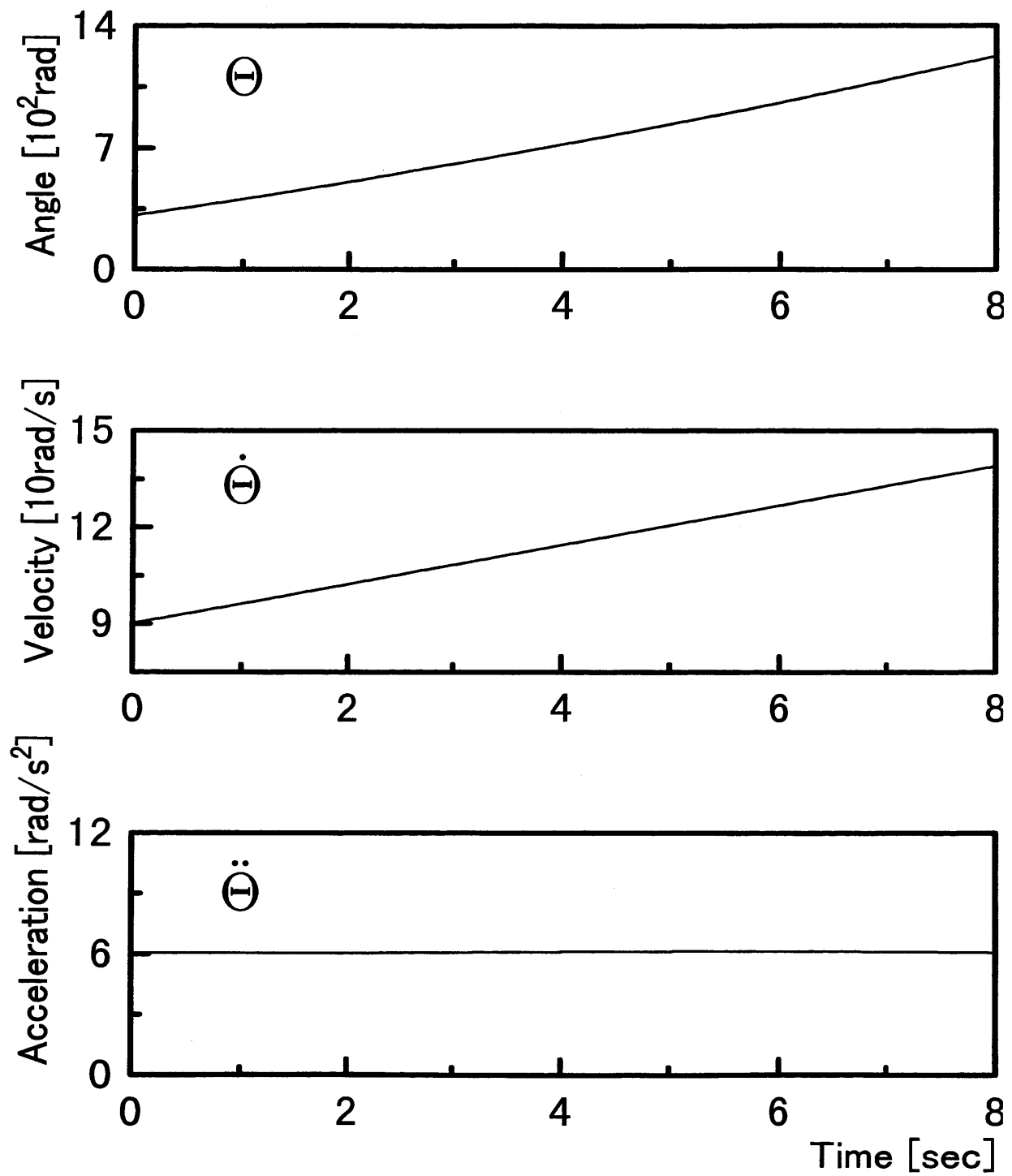
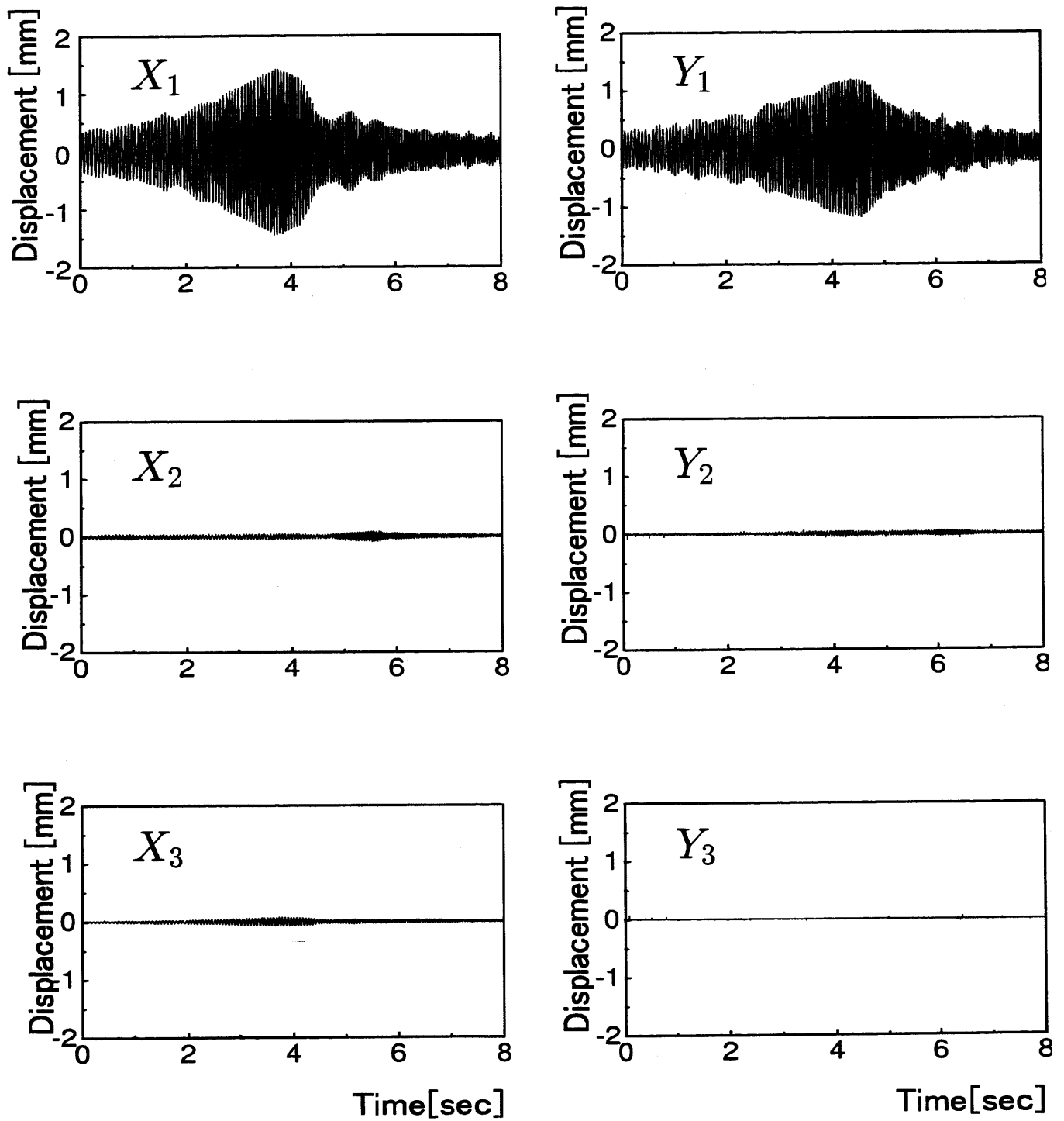


図 4.16: 実験データ (回転角, 角速度, 角加速度)

図 4.17:  $Z_m(t)$



前述した同定法に従って未知パラメータを求めた．その結果を表 4.3 に示す．ここで，ラグランジュ関数  $U$  における重み係数  $r_1, r_2, r_3$  はすべて 1 とした．

表 4.3: 同定結果

Parameters	Identified(1)	Identified(2)
$Re(\Delta m_{11})$ $\text{Ns}^2/\text{m}$	$0.017 \times 10^{-1}$	$0.005 \times 10^{-1}$
$Im(\Delta m_{11})$ $\text{Ns}^2/\text{m}$	$0.002 \times 10^{-1}$	$0.014 \times 10^{-1}$
$c_{11}$ $\text{Ns}/\text{m}$	5.254	5.221
$k_{11}$ $\text{N}/\text{m}$	$6.713 \times 10^3$	$6.773 \times 10^3$
$Re(\Delta k'_{11})$ $\text{N}/\text{m}$	$-0.015 \times 10^3$	$-0.039 \times 10^3$
$Im(\Delta k'_{11})$ $\text{N}/\text{m}$	$-0.002 \times 10^3$	$0.014 \times 10^3$
$Re(\Delta k_{11})$ $\text{N}/\text{m}$	$-0.206 \times 10^3$	$-0.211 \times 10^3$
$Im(\Delta k_{11})$ $\text{N}/\text{m}$	$0.038 \times 10^3$	$0.012 \times 10^3$
$Re(q_1)$ $\text{Ns}^2$	$1.151 \times 10^{-5}$	$0.966 \times 10^{-5}$
$Im(q_1)$ $\text{Ns}^2$	$0.817 \times 10^{-5}$	$1.431 \times 10^{-5}$
$Re(z_{01})$ $\text{N}$	$4.745 \times 10^{-1}$	$4.875 \times 10^{-1}$
$Im(z_{01})$ $\text{N}$	$-6.012 \times 10^{-1}$	$-7.039 \times 10^{-1}$

同定結果の妥当性を検討するため、同定結果から求めた最大振幅と実験結果の比較を行った。まず、同定によって得られたパラメータの値を用いて各回転速度のふれまわり運動の最大振幅を求めた。次に、実際の回転軸を回転速度  $70\text{rad/s}$  から  $160\text{rad/s}$  付近の間で回転させ、定常状態での最大振幅を測定した。それらを比較した結果を図4.18に示す。図の点線、実線はそれぞれ第一の方法、第二の方法によって得られた最大振幅で、「 $\bullet$ 」は、実際の回転軸から測定した最大振幅である。また、ふれまわり運動の  $x$ ,  $y$  方向成分の最大振幅においても同様の方法で比較した。それを図4.19に示す。この図から、同定結果は第1の方法、第2の方法ともに実験データをよく再現していることがわかる。

同定結果の妥当性をさらに検討するため、構造変更のシミュレーションも行った。100gの質量を  $s = 900\text{mm}$  の位置に取り付けた場合の最大振幅を予測し、構造変更後に行った実験結果と比較した。比較の結果を図4.20に示す。図の点線、実線はそれぞれ第一の方法、第二の方法によって得られた最大振幅で、「 $\circ$ 」は、構造変更後に実験によって得られた最大振幅である。この図から構造変更後の応答の予測も第1の方法、第2の方法ともに実験結果とよく一致していることがわかる。

以上のようにして、提案した同定法の妥当性が確かめられた。

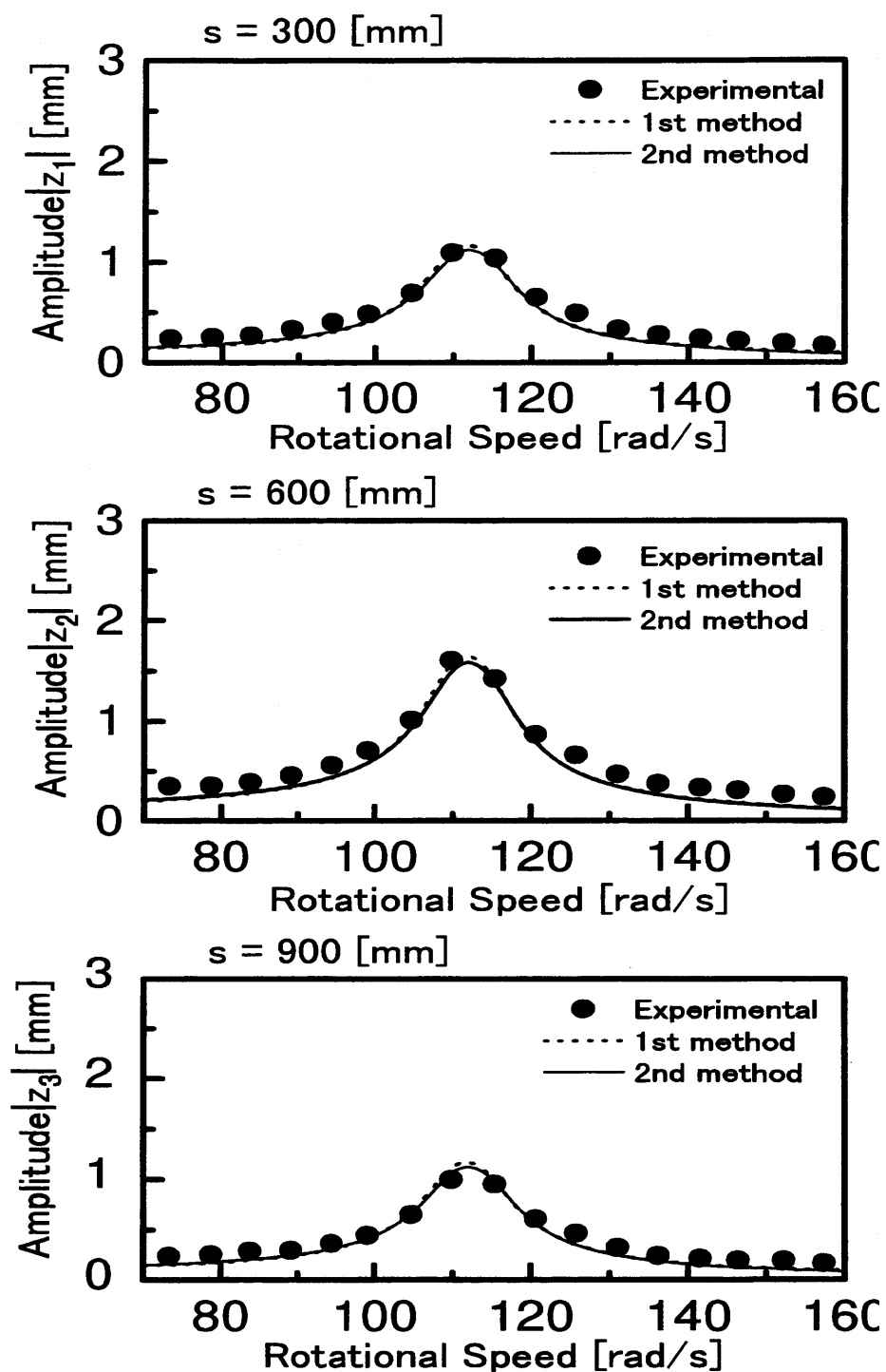


図 4.18: 最大振幅

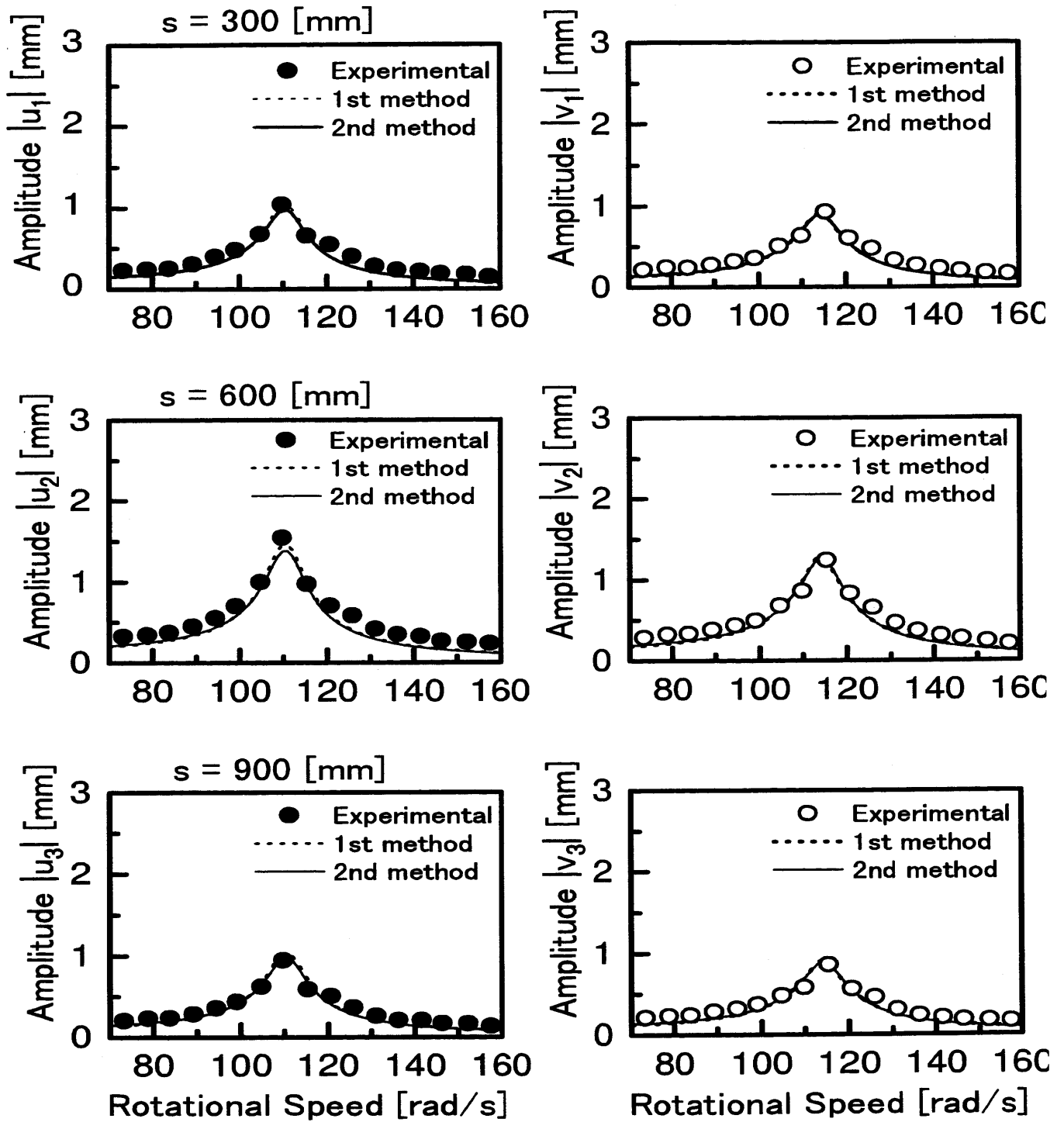


図 4.19: 最大振幅

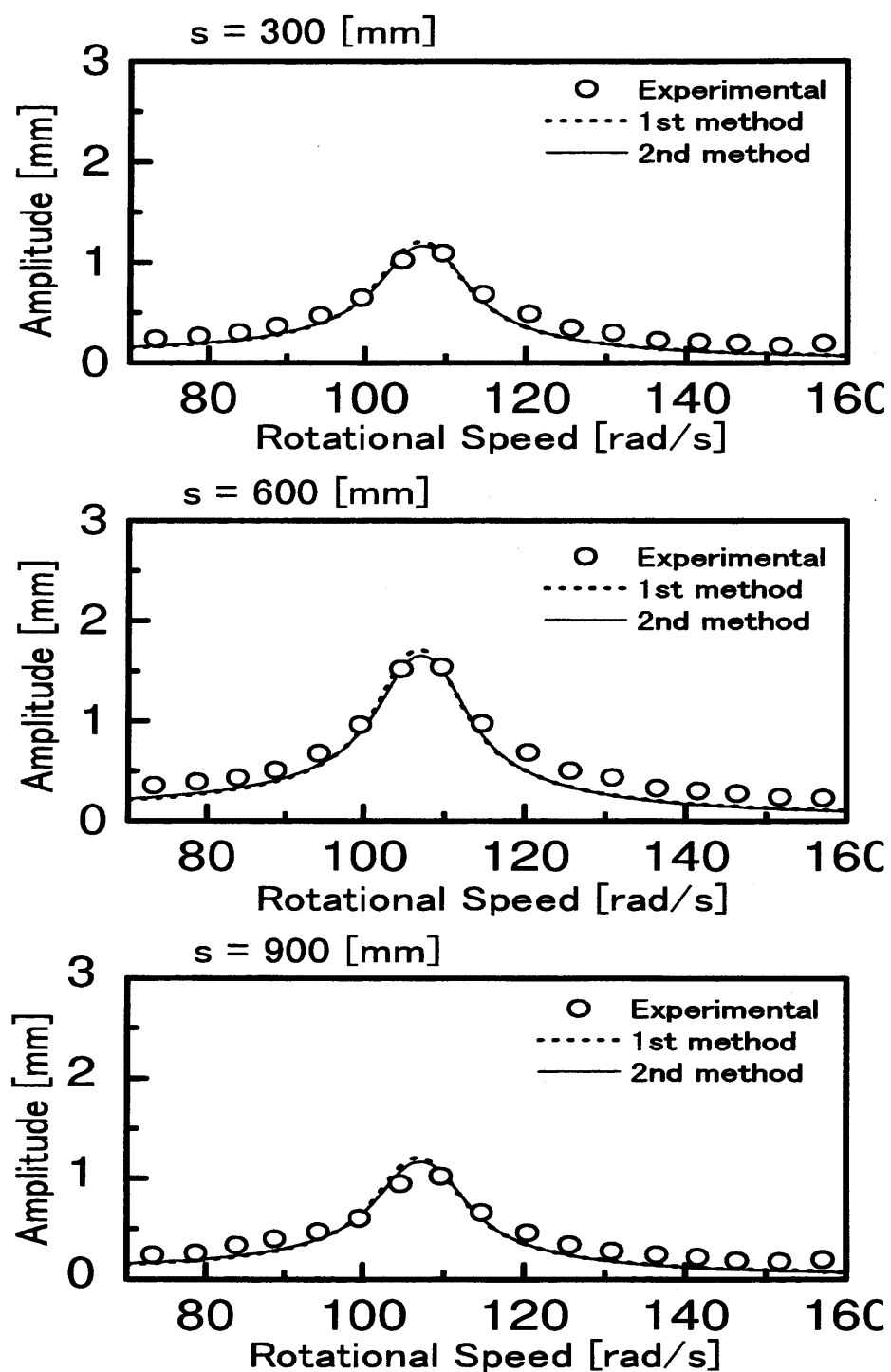


図 4.20: 構造変更後の最大振幅



## 第5章

### 結論

本研究では、回転軸機械に適した同定法の開発を目的として、回転軸系の時間領域同定法の開発を試みた。

第1章は序論であり、本研究の意義を述べた。

第2章では線形集中回転軸系を対象として取り上げた。まず系の運動を支配する運動方程式を一般性のある形で導き、次に系の不釣り合いによって生じるふれまわり運動の非定常状態の応答データを利用し、運動方程式中の未知パラメータを定める方法を二種類提案した。はじめに最小二乗法を用いた同定法を示した。これは未知パラメータに初期値を必要としない比較的簡便なものである。次に、ラグランジュ未定乗数法を用いた同定法を示した。この同定法は、未知パラメータに初期値を必要とするやや複雑なものだが、高い精度が期待できるものである。その際必要となる初期値として最小二乗法による同定法の結果を用いることができた。提案した同定法は、従来の振動数領域同定法に比べ、同定実験に要する時間を大幅に低減することを可能にするものである。提案した同定法の有効性を数値シミュレーションおよび実験によって示した。

第3章では、非線形集中回転軸系を対象として取り上げた。まず、系の運動を支配する運動方程式を一般性のある形で導き、次に運動方程式中の未知パラメータを定める方法を提案した。ここでも最小二乗法を用いた同定法とラグランジュ未定乗数法を用いた同定法の二種類を示した。提案した同定法の有効性を数値シミュレーションおよび実験によって示した。

第4章では、回転軸の質量が軸方向に分布した連続回転軸系を対象として取り上げた。まず系の運動を支配する運動方程式を一般性のある形で導いた。次に運動方程式を同定に便利な形の式に変換し、その方程式中の未知パラメータを定める方法を提案した。ここでも最小二乗法を用いた同定法とラグランジュ未定乗数法を用いた同定法の二種類を示した。

提案した同定法の有効性を数値シミュレーションおよび実験によって示した.



# Bibliography

- [1] Nordman,R.,Identification of Modal Parameters of Roters, *Dynamics of Roters (Stability and System Identification)*, (1973),371-393, Springer-Verlag.
- [2] Muszynska,A.,Modal Testing of Roter/Bearing System,*International Journal of Analytical and Experimental Model Analysis*, (1986),15-34.
- [3] Lee,C.W.,A New Modal Test Theory in Rotating Machinery,*8th International Model Analysis Conference*, (1990),148-154.
- [4] Moustafa, K.A.F., and Asfer, K.R. ,Modal Parameters Identification of a Flexible Roter-Journal Bearing Structure,*Proc.3rd International Model Analysis Conference*, (1985),601-607.
- [5] Nordmann,R.,Modal Parameter Identification and Sensitivity Analisis in Rotating Machinery ,*Proc. International Federation for Theory of Machines and Mechanisms Int. Conf. on Roterdynamic Problems in Power Plants*, (1982),95-102.
- [6] Schlegel,V.,Identification of Roter Parameters,*Dynamics of Roters(Stability and System Identification)*, (1984),353, Springer-Verlag
- [7] Nordman,R.,Identification of Modal Parameters of an Elastic Roter With Oil Film Berings, *Trans.ASME,Jornal of Vibration,Acoustics,Stress,and Reliability in Design*,**106** (1984),107-112.
- [8] Bently,D.E.,and Muszynska,A.,Modal Testing and Parameter Identification of Rotating Shaft/ Fluid Lubricated Bearing System,*Proc.4th International Modal Analisis Conference*, (1986),1393-1402.

- [9] Roger, P.J., and Ewins, D.J., Modal Testing of an Operating Rotor System Using a Structural Dynamics Approach, *Proc. 7th International Modal Analysis Conference*, (1989), 466-473
- [10] Lee, C.W. , Complex Modal Testing Methods for Rotating Machinery, *Modal Analysis, Modeling, Diagnostics, and Control-Analytical and Experimental*, **DE-Vol.38** (1991), 39-45.
- [11] Jei, Y.G., and Kim, Y.J., Modal Testing Theory of Rotor-Bearing System, *Trans. ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, (1993), 165-176
- [12] Nordmann, R., Matros, M., and Neumer, T., Parameter Identification in Rotating Machinery by means of Magnetic Bearings, *Proc. International Federation for Theory of Machines and Mechanisms 4th Int. Conf. on Rotor Dynamics*, (1994), 317-320
- [13] Lund, J.W., Application of Modal Methods in Rotor Dynamics, *Proc. International Federation for Theory of Machines and Mechanisms 4th Int. Conf. on Rotor Dynamics*, (1994), 317-320
- [14] 安田・神谷・山内, 回転軸系の実験的同定法 (同定法の提案), *機論*, **60**-574, C(1994), 1968-1974.
- [15] 安田・神谷・山内, 回転軸系の実験的同定法 (実際の系への適用), *機論*, **61**-591, C(1995), 4208-4213.
- [16] 安田・神谷・山内, 非線形回転軸系の実験的同定法, *機論*, **61**-582, C(1995), 525-531.
- [17] 安田・神谷・山内, 非線形回転軸系の実験的同定法 (実際の系への適用).
- [18] 山本・河野, 回転速度が変動する回転体の振動について, *機論*, **35**-278, C(1969), 621-25.
- [19] 山本・太田, *機械力学*, (1970), 214, 朝倉書店.
- [20] 中川・小柳, 最小二乗法による実験データ解析, (1982), 38, 東京大学出版.
- [21] 振動工学ハンドブック編集委員会, *振動工学ハンドブック*, (1976), 167, 養賢堂.