溶融金属フィルム挙動と
電磁気力の効果

61470056

昭和61年～62年度科学研究費補助金（一般研究(B)）

研究成果報告書

昭和63年3月

研究代表者　浅　井　滋　生

（名古屋大学・工学部）

KAKEN
61470056

図・本館

研究組織

研究代表者

浅　井　滋　生　　名古屋大学工学部助教授

研究分担者

桑　原　　守　　名古屋大学工学部助手

研 究 経 費

昭和61年度	4,200千円
昭和62年度	600千円
計	4,800千円

名古屋大学図書
和B　51151

研究発表

学 会 誌 等

1）小塚敏之、浅井滋生、鞭巌

「溶融金属フイルムの落下挙動に及ばず電磁気力印加の影響」、鉄と鋼、73(1879) p828～835

2）小塚敏之、浅井滋生、鞭巌

「溶融金属表面波動抑制に及ぼす横断方向の直流磁場の勾配の効果」、鉄と鋼、投稿中

3）小塚敏之、浅井滋生、鞭巌

「溶融金属の波動抑制に及ぼす表面に垂直に印加された直流磁場の効果」、投稿中

4）小塚敏之、浅井滋生、鞭巌

「溶融金属の表面波動に及ぼす直流磁来勾配の効果」

日本鉄鋼協会特定基礎研究会電磁気冶金の基礎研究部会資料

（昭和61年10月）No.4-4

5）木下　誠、小塚敏之、浅井滋生、鞭巌

「波面に垂直な直流磁場による溶融金属の表面波動の抑制効果」

日本鉄鋼協会特定基礎研究会電磁気冶金の基礎研究部会資料

（昭和63年２月）No.8-6

口頭発表

1）小塚敏之、浅井滋生

「溶融金属の表面波動に及ぼす直流磁束勾配の効果」

日本鉄鋼協会第122回講演大会

名古屋、昭和61年10月、鉄と鋼、72（1986)、S1652

研　究　成　果

溶融金属フィルムの落下挙動と電磁気力の適用…… 1

溶融金属表面波動抑制に及ぼす横断方向の直流磁場の勾配の効果…… 14

溶融金属の波動抑制に及ぼす表面に垂直に印加された直流磁場の効果…… 28

溶融金属フィルムの落下挙動と電磁気力の適用

名古屋大学　大学院　小塚敏之
工学部　浅井滋生　鞭　　巌

Falling Behaviour of Molten Metal Film and Application of Electromagnetic Force

Synopsis:

The falling behaviour of liquid film shaped by a slit nozzle was observed in a water-model experiment by use of a high speed VTR. The falling liquid is classified into two regions. Namely, one is denoted as the film flowregion appearing in the middle partof the falling liquid and the other as the channel flow region appearing in both sides of the film flow region. The width of the film flow region decreased continuously with increase in the falling distance.

A mathematical model predicting the falling behaviour of the liquid film is developed on the basis of hydrodynamics and is verified by the water-model experiment.

In case of imposing high frequency magnetic field on the surface of a falling molten-metal film to make its thickness uniform and stabilize its shape, the effects of magnetic field on the falling molten-metal film are studied by the mathematical model taking into account the magnetic pressure induced by magnetic field.

概　要

スリット状ノズルにより形成された流体フィルムの落下挙動が水模型実験において高速ビデオカメラにより観察された．スリット状ノズルから落下する流れは二つの領域にわけることができる．一つは中央のフィルム状の部分であり，もう一つはその両側端に現れる管状の部分である．フィルム状の部分は落下するにつれてその幅が減少する．

スリット状ノズルからの流れを記述する数学的モデルが流体力学に基づいて展開され，水模型実験により確かめる．

溶融金属フィルム流の厚さを均一にし，その形状を安定にするために，フィルム表面に高周波磁場を印加することを想定し，高周波磁場により誘発される磁気圧力を考慮した数学的モデルによって溶融金属フィルムに及ぼす磁場の効果が検討される．

1．緒言

最近，溶融金属から直接薄板を作る直接成形プロセスが注目を集め，種々の技術開発が進められている．その中の一つである双ロール法では，表面性状のすぐれた製品が得られることが知られている[1)]．

従来，双ロール法は非晶質リボンや薄片の製造に広く活用されてきたが，双ロール法を薄板製造に適用する際には，溶融金属の供給方法が製品の品質に大きな影響を及ぼすことが認識されるようになってきた[2),3)]．特に，幅広の薄板の生産に当たっては，幅広のフィルム状の溶湯の安定供給が重要となる．しかしながら溶融金属の表面張力は大きいために，幅広のフィルム流の形成は極めて困難であると考えられる．

一方，溶融金属は電気の良導体であるから，電磁場によってその形状を制御することが可能である．特に，高周波磁場は溶融金属の表面に磁気圧力を誘発するので，これを利用することによって，厚さが均一で，かつ安定したフィルム流の形成が期待できる[4)]．

ここでは，水模型実験の結果に基づいて，スリット状ノズルから流出する液体の落下挙動を記述する数学的モデルの展開を行う．次に，溶融金属フィルム流の表面に高周波磁場を印加した場合のフィルム流の挙動について理論解析を行い，落下に伴って起こるフィルム流の幅収縮の抑制とフィルム流の温度上昇に及ぼす磁場の効果を検討する．

2．水模型実験

溶融金属フィルム流の落下挙動を把握するために，水を用いて（慣性力が支配的となる条件下で）模型実験を行った．実験装置の概要を Fig. 1 に示す．アクリル製の貯水槽の下部に設置したスリット状ノズルから水を落下させた．流体の落下挙動を調べるために，インクをトレーサーとして上流から注入して流線の写真撮影を行った．また，フィルム流の流速分布を測定するために，インクを多点にわたって等間隔に注入し，それが描く流跡を高速ビデオカメラ（500コマ/sec）により撮影した．

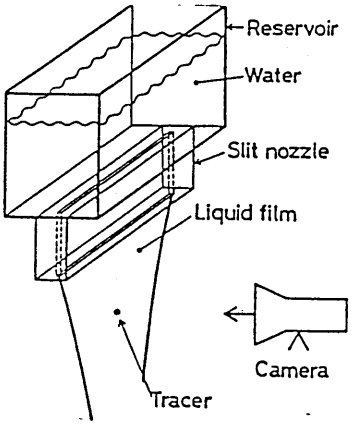
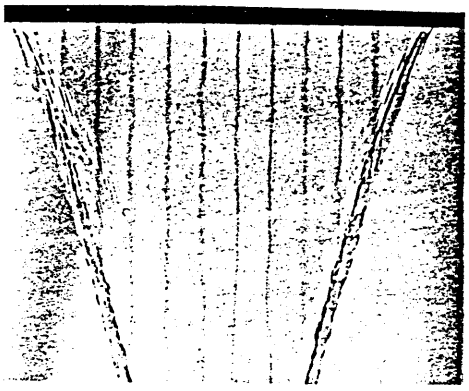


Fig. 1. Experimental apparatus.



スリット状ノズルから落下する流れ（以下，スリット流と略称する）とその流線の写真を Photo. 1 に示す．上方のスリット状ノズルの両端から下方に向かって管状の流れが形成されている．この管状の流れに挟まれた部分はフィルム状となっている．フィルム状の部分で黒く見える縦の線はトレーサーによって可視化された流線である．これらの流線が鉛直下向きに延びていることから，フィルム状の部分の流れの方向は鉛直下方で，スリット流の両側端にみられる収縮挙動とは無関係であることがわかる．Fig. 2 に，ビデオの録画の画像解析から求めたフィルム状の部分の流速を示す．横軸はスリット流がノズルを離れてからの落下時間であり，縦軸は落下に伴う速度の増分を示している．図中にはフィルム状の部分の幅方向の 4 点から得られたデータと自由落下の理論直線（実線）が示されている．ノズル出口速度が0.85m/s および1.35m/s の場合ともに，観測されたデータは幅方向の位置によらず自由落下の理論直線のまわりに分布していることから，フィルム状の部分の流速は幅方向に均一で，かつ自由落下していることがわかる．

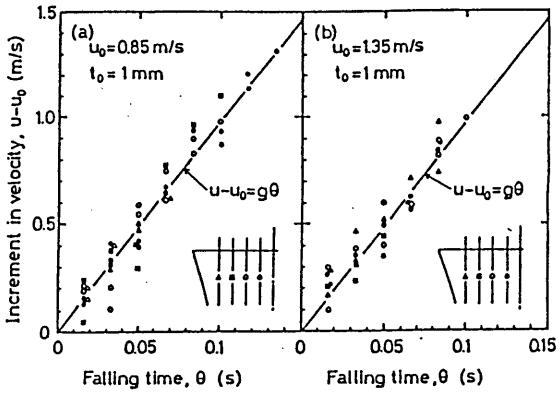


Fig. 2. Increment in falling velocity with time in film flow region.

3．理論解析

3．1　数学的モデル

ここでは，水模型実験によって得られた知見に基づいて数学的モデルを展開する．Fig. 3 に示すようにスリット流をフィルム状の部分（以下，領域（Ⅰ）とする）とその両側端の管状の部分（以下，領域（Ⅱ）とする）に分けてモデル化し，流体は，完全流体として取り扱う．領域（Ⅰ）は，その幅と厚さが落下に伴って減少するが，幅の収縮は領域（Ⅰ）の流速とは無関係であることから，その収縮は流速の増加によるものではなく表面張力によってひき起こされるものと考える．自由落下の式に従って領域（Ⅰ）の流速（u）が増加するにつれて，領域（Ⅰ）の厚さ（t）は物質収支に基づいて減少することになる．次に，u と t の関数形を決定する．まず，自由落下の式により，u は(1)式で与えられる．

$$u = (2gx + u_0^2)^{1/2} \quad \cdots\cdots (1)$$

ここで，u_0 はノズル出口速度である．また，(2)式の物質収支式により t は(3)式で与えられる．

$$d\{u(x)\,t(x)\}/dx = 0 \quad \cdots\cdots (2)$$

ここで，t0はスリット流のノズル出口での厚さ，すなわちスリット間隔である．

領域（Ⅱ）では、その断面（断面積 s）内で流速（v）は均一で，その傾き角を ψ（x 軸となす角）とすれば，v，s および ψ は x の関数となる．Fig. 4 に，領域（Ⅱ）の微小要素の模式図を示す．(a)は流体の物質収支を表しており，流体は要素の上面①と領域（Ⅰ）との接触面②から入り，要素の下面③から出てゆく．したがって，物質収支式は次式で表される．

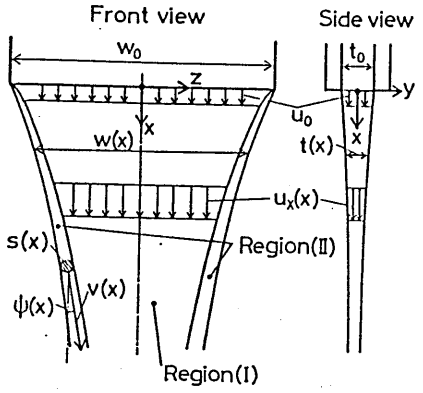


Fig. 3. Illustration of the falling liquid film.

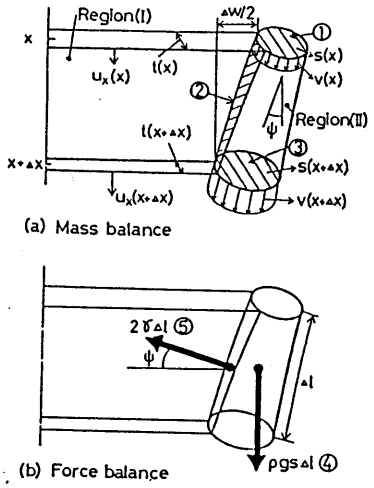


Fig. 4. Controlling volume of region(II).

$$s\,(dv/dx) + v\,(ds/dx) - u_0 t_0 \cdot \tan\psi = 0 \quad \cdots\cdots(4)$$

また，(b)は力の釣合を示すもので，重力④が鉛直下方に働き，表面張力⑤はスリット流の両表面において接触面②と垂直をなす方向に作用する．x方向と z 方向の運動量収支式は，それぞれ(5)式および(6)式となる．

$$d\,(sv^2 \cdot \cos\psi)/dx - u^2 t \cdot \tan\psi + 2\gamma \cdot \tan\psi / \rho - gs \cdot \sec\psi = 0 \quad \cdots\cdots(5)$$

$$d\,(sv^2 \cdot \sin\psi)/dx - 2\gamma / \rho = 0 \quad \cdots\cdots(6)$$

s，v および ψ の $x = 0$ における境界条件を次のように定める．

$$s = t_0^2 \quad \cdots\cdots(7)$$

$$v_0 = u_0/\cos\psi_0 \quad \cdots\cdots(8)$$

$$\tan\psi_0 = \{2/(We - 2)\}^{1/2} \quad \cdots\cdots(9)$$

ここで(9)式中の We はウェーバー数であり，次のように定義する．

$$We = \rho u_0^2 t_0 / \gamma \quad \cdots\cdots(10)$$

(7)式は，スリット状ノズルの出口での領域（Ⅱ）の形状を一辺がスリット幅の矩形と近似したものである．(8)式は，領域（Ⅱ）の出口速度の鉛直下向き成分がノズル出口速度（u_0）に等しいことを意味している．一方，スリット間隔（t_0）を無限に小さくした場

合に，$x=0$ において(4)～(6)式が成立するためには(9)式の条件が必要となる（誘導は Appendix に示す）．スリット流のモデル化により導かれた(9)式を水模型実験により検証した結果を Fig. 5 に示す．図中には(9)式を使って計算した結果を実線で示し，実測値と比較した．t_0 の値が比較的小さい場合にはよい一致がみられる．

Fig. 6 は，模型実験で用いた水の場合（$\rho=1000\mathrm{kg/m^3}$，$\gamma=0.074\mathrm{N/m}$）について，

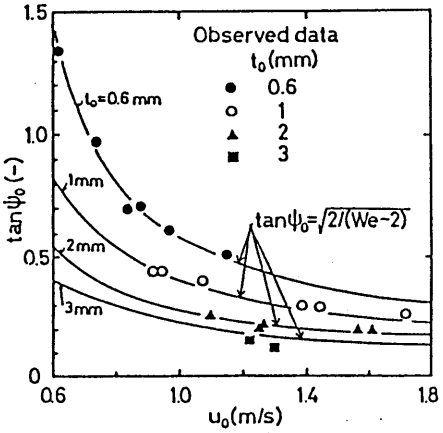


Fig. 5. Comparison of the observed data with theoretical curves.

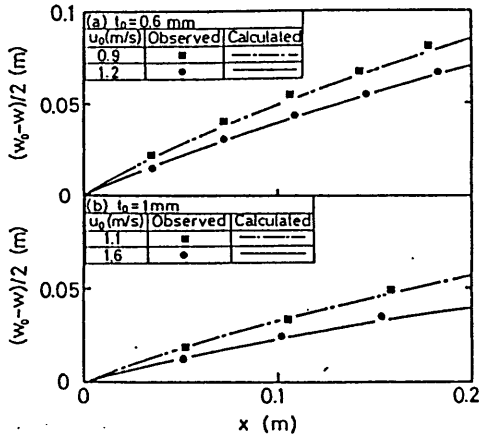


Fig. 6. Comparison of the observed data of reduction in width of water film with calculated results.

本数学的モデルに基づいた計算値と実測値を比較したものである．横軸はスリット流の落下距離であり，縦軸はスリット流の収縮量の半分の値が示されている．計算値と実測値はよく一致しており，本数学的モデルによって水のスリット流の挙動が的確に表現されていることがわかる．

次に，Fig. 7 には本数学的モデルを用いて計算した溶鋼（$\rho=7000\mathrm{kg/m^3}$，$\gamma=1.84\mathrm{N/m}$）のスリット流の収縮挙動を示す．(a)は t_0 を一定に保って u_0 の効果を，(b)は u_0 を一定に保って t_0 の効果をそれぞれ調べたものである．均一なスリット流を得るには，スリット間隔を大きくすること，また，ノズル出口速度を大きくすることが必要である．なお，溶鋼の表面張力は極めて大きい（水の約25倍）ため，Fig. 6 に示した水の場合の計算値と比較すると，溶鋼では幅の収縮がより大きくなっていることがわかる．

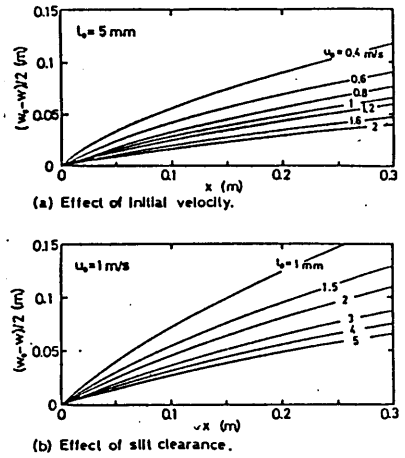


Fig. 7. Calculated results of reduction in width of molten steel film.

3．2　磁場によるスリット流の収縮の抑制

前述の水模型実験から明らかなように，スリット流の幅収縮にともなってその両側端には領域（Ⅱ）が形成され，スリット流の厚さは幅方向にわたって不均一となる．そのため，均一なスリット流を得るには幅の収縮を抑制しなければならない．

スリット流の表面に対して平行な方向（水平方向）に高周波磁場を印加する場合，スリット流内部の磁束密度の分布は次式を解くことによって得られる[6]．

$$(1/\mu_0\sigma)\nabla^2 \boldsymbol{B} = \partial \boldsymbol{B}/\partial\theta - \nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}) \quad \cdots\cdots(11)$$

ここで，対象とする溶融金属の落下速度は，数 m/s 以下であるとすると，(11)式の右辺第二項を無視することができ，次式が得られる．

$$(1/\mu_0\sigma)\nabla^2 \boldsymbol{B} = \partial \boldsymbol{B}/\partial\theta \quad \cdots\cdots(12)$$

印加する磁束密度 $\boldsymbol{B}_0$ が，水平方向（z 方向）成分のみを持ち，角周波数 ω で振動するとして，$\boldsymbol{B}_0$ を次のように表す．

$$\boldsymbol{B}_0 = \{0,\ 0,\ B_0\exp(j\omega\theta)\} \quad \cdots\cdots(13)$$

この場合，スリット流内部での磁束密度も z-成分のみとなり，同じ角周波数を持つことになるため，(12)式は(14)式となる．

$$d^2B_z/dy^2 = k^2B_z,\ \ k^2 = j\omega u_0\sigma \quad \cdots\cdots(14)$$

境界条件は次式で与えられる．

$$y = \eta/2 \quad \text{で}\ B_z = B_0 \quad \cdots\cdots(15)$$

$$y = 0 \quad \text{で}\ dB_z = dy = 0 \quad \cdots\cdots(16)$$

ここで，η はスリット流の厚さである．(14)式を(15)式，(16)式のもとで解くと，(17)式が得られる．

$$B_z = B_0\cosh(ky)/\cosh(k\eta/2) \quad \cdots\cdots(17)$$

次の(18)式（アンペールの式）に(17)式を代入することにより，電流密度の分布は(19)式で与えられる．

$$\boldsymbol{J} = (1/\mu_0)\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B}) \quad \cdots\cdots(18)$$

$$J_x = (B_0/\mu_0)\,k\,\sinh(ky)/\cosh(k\eta/2) \quad \cdots\cdots(19)$$

体積力 $\boldsymbol{F}$ は，次の(20)式を使って求めることができる．

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B} \quad \cdots\cdots(20)$$

すなわち，(17),(19)式を(20)式に代入し，一周期にわたって時間平均した体積力 $\boldsymbol{F}(0.\ f_y,\ 0)$ を求めると,(21)式が得られる．

$$f_y = -\frac{B_0^2}{2\mu_0\delta}\cdot\frac{\sinh(2y/\delta)-\sin(2y/\delta)}{\cosh(\eta/\delta)+\cos(\eta/\delta)},\quad \delta = (2/\mu_0\sigma\omega)^{1/2} \quad (21)$$

ここで，δ は電磁気的な表皮厚さ（Skin depth）を表す．

(21)式の体積力はy方向に働く力であり，負号はスリット流の両表面からスリット流を押さえつける力であることを示している．(21)式をスリット流の厚さの半分にわたって積

分することにより，磁気圧力 Pm は次式で与えられる．

$$Pm = \int_0^{\eta/2} f_y dy = -\frac{B_0^2}{4\mu_0}\cdot\left(\frac{\lambda-2}{\lambda}\right),\quad \lambda = \cosh(\eta/\delta) + \cos(\eta/\delta) \tag{22}$$

角周波数が無限大である場合や完全導体においては $\delta = 0$ と置くことができるので，$\lambda \to \infty$ となって(22)式から $Pm = -B_0^2/4\mu_0$ となる．したがって，(24)式中の $(\lambda - 2)/\lambda$ の項は，有限の導電率の金属が有限の角周波数のもとにおかれた場合の補正項と考えることができる．

領域（Ⅰ）と領域（Ⅱ）では，スリット流の厚さが異なるため，それらに働く磁気圧力も異なり，それぞれ，次のように書ける．すなわち，領域（Ⅰ）では(23)式，(24)式，領域（Ⅰ）では(25)式，(26)式となる．

$$Pm_{\mathrm{I}} = -\frac{B_0^2}{4\mu_0}\cdot\left(\frac{\lambda_{\mathrm{I}}-2}{\lambda_{\mathrm{II}}}\right) \tag{23}$$

$$\lambda_{\mathrm{I}} = \cosh(t/\delta) + \cos(t/\delta) \tag{24}$$

$$Pm_{\mathrm{II}} = -\frac{B_0^2}{4\mu_0}\cdot\left(\frac{\lambda_{\mathrm{II}}-2}{\lambda_{\mathrm{II}}}\right) \tag{25}$$

$$\lambda_{\mathrm{II}} = \cosh(\sqrt{s}/\delta) + \cos(\sqrt{s}/\delta) \tag{26}$$

ここで，領域（Ⅱ）の断面積はsであるから近似的に領域（Ⅱ）の厚さを $\sqrt{s}$ とした．磁気圧力は，スリット流内部の静圧を増加させ，スリット流の幅の収縮を抑制することができる．領域（Ⅰ）と領域（Ⅱ）の接触面には，領域（Ⅰ）の側から Pm_{I}，領域（Ⅱ）の側から Pm_{II} の静圧が働く．このように接触面において静圧に不連続が生じる理由は，モデル上で領域（Ⅰ）と領域（Ⅱ）の厚さを不連続に変化させたためである．実際には，領域（Ⅰ）から領域（Ⅱ）へ厚さは連続的に変化しているので磁気圧力は Pm_{I} と Pm_{II} の間の値となる．ここでは，それらの平均値を採用した*)．

$$\bar{P}m = (Pm_{\mathrm{I}} + Pm_{\mathrm{II}})/2 \tag{27}$$

(27)式で与えられる磁気圧力は領域（Ⅱ）に対しては静圧として表面張力が作用する方向とは逆向きに働くことになる（Fig. 8 参照）．領域（Ⅱ）の微小長さ（$\Delta\ell$）に作用する表面張力による力は（$2\gamma\cdot\Delta\ell$）であり，領域（Ⅰ）と領域（Ⅱ）の接触面の微小断面積（$\Delta\ell\cdot t$）に働く磁気力は（$\bar{P}m\cdot t\cdot\Delta\ell$）となる．したがって，磁場を印加した場合にスリット流に実質的に働く見かけの表面張力を γ' とすれば，次式が導かれる．

$$2\gamma'\Delta\ell = 2\gamma\Delta\ell - \bar{P}m\cdot\Delta\ell\cdot t \tag{28}$$

磁場を印加しない場合について展開した前述の数学的モデルで γ を(28)式より求められる $\gamma'(=\gamma - \bar{P}m\cdot t/2)$ に置き換えることにより，磁場の効果を考慮した数学的モデルに変換することができる．

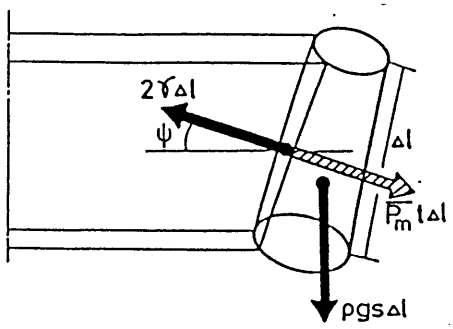
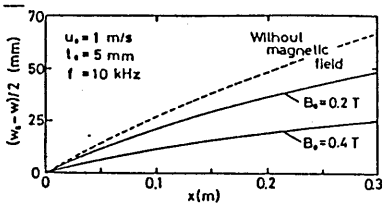


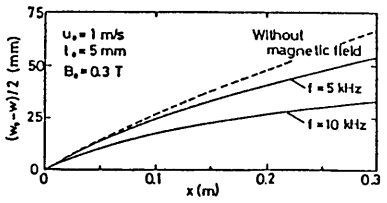
Fig. 8. Force balance taking account of magnetic pressure in region(II).

ここで述べたモデルに基づいて計算した結果を Fig. 9 に示す．図中の(a)は周波数(f)を一定にして磁束密度（B_0）がスリット流の幅収縮の抑制に及ぼす効果を示したものである．また，(b)は磁束密度を一定にした場合の周波数の効果を示している．磁束密度と周波数の増加に伴って，スリット流の収縮が抑制される状況が示されている．

(28)式は，領域（Ⅰ）の厚さ（t）に対して見かけの表面張力が 0 となる磁場の条件が存在することを示している．その条件をスリット流の厚さが 5 mmの場合について示したものが Fig. 10である．ここに示した B_0 と f の直線よりも上方の磁場の条件ではスリット流は拡大し，下方の条件では収縮する**)．



(a) Effect of intensity of magnetic field.



(b) Effect of frequency of magnetic field.

Fig. 9. Effects of electromagnetic force on reduction in width of molten steel film.

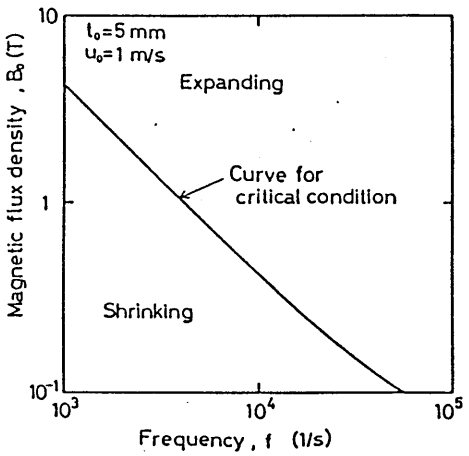


Fig. 10. Critical condition of B_0 and f for suppressing the reduction in width of molten steel film.

脚注 *）ここに採用したモデルに従えば，領域（Ⅰ）から Pm_{I}，領域（Ⅱ）から $Pm_{\mathrm{II}}\sqrt{s}$ の力が接触面に働くことになり，接触面の静圧は $\bar{P}m=(Pm_{\mathrm{I}}t+Pm_{\mathrm{II}}\sqrt{s})/(t+\sqrt{s})$ と表される．ただし，$t \fallingdotseq \sqrt{s}$ とすれば(27)式の表現を得る．

脚注**）実際のスリット流は落下に伴い厚さが減少するので，厳密には，Fig. 10に示した磁場のもとでも，多少の収縮は避けられない．

3．3　磁場による融体温度の上昇

導電性流体に高周波磁場を印加すると，流体の内部に誘導電流が生じ，ジュール効果によって流体は加熱される．ここでは，磁場の印加に伴う領域（Ⅰ）の温度の上昇について検討する．

ジュール効果による単位体積当りの発熱量 Q は，次式で与えられる．

$$Q = |J|^2/\sigma = J_x^2/\sigma \quad \cdots\cdots (29)$$

J_x^2 の一周期にわたる時間平均は次式から計算できる．

$$Q = (1/2)\,Re\,\{J_x \times J_x^*\} \quad \cdots\cdots (30)$$

ここで，J_x^* は J_x の共役複素数であり，$Re\{\}$ は $\{\}$ 内の実数部を表す．(19)式を(30)式に代入して計算すると，次式が得られる．

$$Q = \frac{B_0^2}{\sigma\,\mu_0^2\,\delta^2} \cdot \frac{\cosh(t/\delta) - \cos(2y/\delta)}{\cosh(t/\delta) + \cos(t/\delta)} \quad \cdots\cdots (31)$$

Q の y 方向の平均値（$\bar{Q}$）は次式により計算できる．

$$\bar{Q} = (2/t)\int_0^{t/2} Q \cdot dy$$

$$= \frac{B_0^2}{\sigma\,\mu_0^2\,\delta\,t} \cdot \frac{\sinh(t/\delta) - \cos(t/\delta)}{\cosh(t/\delta)\cos(t/\delta)} \quad \cdots\cdots (32)$$

したがって，スリット流の落下時間 $\Delta\theta$ における温度上昇 ΔT は，次式により計算できる．

$$\Delta T = \int_0^{\Delta\theta} (\bar{Q}/c_p)\,d\theta \quad \cdots\cdots (33)$$

$\Delta\theta$ とフィルム落下距離（Δx）の関係は(1)式で与えられるので(1)式と(33)式を用いて，スリット流の落下距離と温度上昇の関係をを計算することができる．Fig. 11に，周波数を一定にした場合の温度上昇に及ぼす磁束密度の影響を示す．磁束密度は，温度上昇（ΔT）に大きく影響することがわかる．

溶鋼のスリット流がノズルから0.2m落下したときの領域（Ⅰ）の温度上昇を Fig. 12に示した．図中の破線は，Fig. 10に実線で示したスリット流の幅収縮を抑制する磁場の条件である．この図からわかるように，領域（Ⅰ）の収縮を完全に抑制する磁場の条件下では，0.2m落下したときの温度上昇は溶鋼の場合には約5～10K となる（周波数1～100kHz）．また，アルミニウムの場合では約1～6Kであり比較的小さい値となっている．他の主要な金属について同様の計算を行った結果を Table. 1 に示す．

(21)式と(22)式からわかるように，スリット流の厚さが小さい場合には，印加する磁場の周波数を増加させることによって δ を小さくして，Pm を，$(-B_0^2/4\mu_0)$ に接近させるようにすることが望まれる．一方，周波数を増加させると，温度上昇が無視できなくなるので，スリット流の均一化を図るには，温度上昇を考慮した上で磁束密度と周波数を

決定する必要がある．

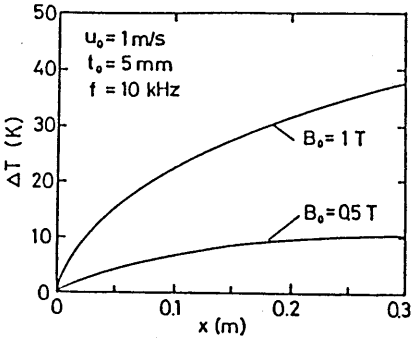


Fig. 11. Effects of magnetic field on the film temperature along the falling distance.

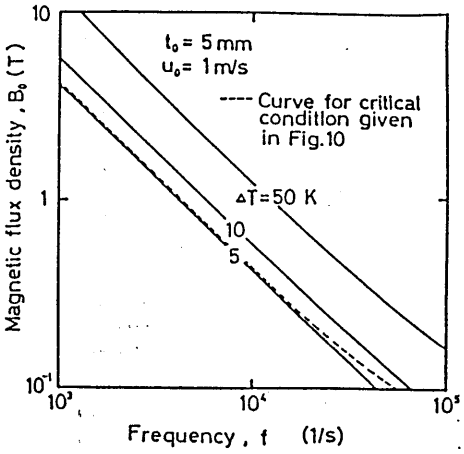


Fig. 12. Increase in the temparature of molten steel film for given magnetic field conditions.

	1 kHz	10kHz	100kHz
Fe	5.1K	5.4K	10K
Al	0.8	1.2	5.6
Cu	0.8	1.2	5.4
Hg	2.9	3.0	7.5
Ti	10	10	17

Table 1. Incrsase in the temparature of various metal films at the point of 0.2m fall from nozzle under suppressing film shrinkage.

3．4　フィルム形成条件

スリット流は落下途中において自らが持つ不安定性により領域（Ⅰ）に破断点を生ずる．Fig. 13には，破断点に作用する慣性力と表面張力を模式的に示した．破断点を下方に押し下げスリット流の破断を阻止する方向に作用する慣性力と破断点で領域（Ⅰ）を上方に向かって引き裂く方向に作用する表面張力との差を D とすると，D は(34)式で表される．

$$D = \rho u^2 t \cdot \zeta - 2\gamma \cdot \zeta \quad \cdots\cdots (34)$$

ここで，ζ は破断の長さである．$D>0$ ならば外乱によって生じた破断点はすぐに消失し，逆に $D<0$ ならば破断点は上方に移動しノズルの位置からフィルムが分断される．つまり領域（Ⅰ）が安定に保たれるためには，$D>0$ とならねばならない．したがって，フィルム形成条件として次の(35)式が得られる．

$$We = (\rho u^2 t/\gamma) > 2 \quad \cdots\cdots (35)$$

(2)式より（ut）は単位幅当りの体積流量を表し，一定となるので，落下に伴い We は

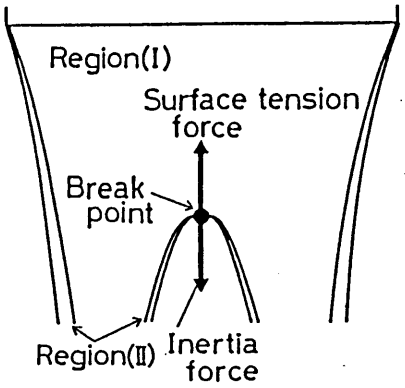


Fig. 13. Force balance at a break point.

漸次増大する．したがって，We はスリット出口で最小となり，そこでのフィルム形成条件は(36)式となる．

$$(\rho u_0^2 t_0/\gamma) > 2 \quad \cdots\cdots (36)$$

先に，領域（Ⅰ）の側端の傾きの初期値として(9)式を採用したが，(9)式は We が 2 以下では定義できないものとなっている．このことは(36)式で表されるノズル出口でのフィルム形成条件が(9)式と整合することを表している．

磁場を印加すると(28)式に見られるように，見かけの表面張力 γ' が $\gamma' = \gamma - \bar{P}mt/2$ のように表されることからも明らかなように，見かけの We の値が大きくなるため，スリット流はより安定に保たれることになる．

4．結言

水模型実験によりスリット状のノズルから落下する水の流れを観察した結果，スリット流はフィルム状の部分とその両側端に形成される管状の部分からなること，および，フィルム状の部分の流体は自由落下することを明らかにした．

この知見に基づいて，スリット流の落下挙動を表現する数学的モデルを展開した．水模型実験によって得られた観測値とモデルによる計算値の比較から，スリット流の落下挙動が本数学的モデルによってよく表現できることがわかった．さらに，フィルム領域が形成される条件は We（ウェーバー数）＞2 で表されることを理論的に示した．

次に，スリット状のノズルから落下する流体の収縮の抑制と安定化を図ることを目的として，溶融金属のスリット流に高周波磁場を印加した場合について理論展開を行った．

上述の数学的モデルに磁場の効果を加味して，磁場の強度と周波数がスリット流の幅の収縮の抑制とその温度の上昇に及ぼす効果について検討した．

Appendix

(5)式と(6)式の微分を実行し，両式から ds/dx と dv/dx を消去すると $d\psi/dx$ は次式となる．

$$\frac{d\psi}{dx} = -\frac{u^2 t}{sv^2}\cdot\frac{\tan\psi}{\cos\psi} + \frac{2\gamma}{\rho sv^2}\cdot\frac{1}{\cos\psi} - \frac{g}{v^2}\cdot\tan\psi = 0 \cdots\cdots \text{(A-1)}$$

(2)式，(7)式および(8)式を用いて上式からノズル出口における方程式を導出すると次式を得る．

$$d\psi/dx\,|_{x=0} = (\cos\psi/t_0)(2/We - \sin^2\psi) \cdots\cdots \text{(A-2)}$$

t^0 の値が小さい場合にも $d\psi/dx\,|_{x=0}$ が物理的に意味を持つ（発散しない）ためには $(2/We - \sin^2\psi)$ の値が 0 に漸近しなければならない．したがって ψ の初期値が次のように与えられることになる．

$$\sin^2\psi = 2/We \cdots\cdots \text{(A-3)}$$

(A-3) 式より(9)式が得られる．

記号

$\boldsymbol{B}, B_z$ ：溶融金属内部の磁束密度 (T)
B_0 ：外部から印加される磁束密度 (T)
c_p ：溶融金属の比熱 (J/K・m³)
D ：表面張力と慣性力の差 (N)
$\boldsymbol{F}, f_y$ ：電磁体積力 (N/m³)
g ：重力加速度 (m/s²)
$\boldsymbol{J}, J_x$ ：電流密度 (A/m²)
j ：虚数単位 (−)
k ：磁場の伝搬定数 (1/m)
$\Delta\ell$：領域(Ⅱ)の微小要素の長さ (m)
$Pm, \bar{P}m$ ：磁気圧力および平均の磁気圧力 (Pa)
Q ：単位体積当りの発熱速度 (J/m³・s)
$\bar{Q}$ ：Q の厚さ方向の平均値 (J/m³・s)
s ：領域(Ⅱ)の断面積 (m²)
t ：領域(Ⅰ)の厚さ (m)
$\boldsymbol{u}$ ：流速 (m/s)
u ：領域(Ⅰ)の流速 (m/s)
u_0 ：ノズル出口速度 (m/s)
v ：領域(Ⅰ)の流速 (m/s)
We ：ウェーバー数($=\rho u_0^2 t_0/\gamma$) (−)
γ ：表面張力 (N/m)
δ ：電磁気的表皮厚さ (m)
ζ ：破断点の長さ (m)
η ：スリット流の厚さ (m)
θ ：時間 (s)
μ_0 ：真空の透磁率 (H/m)
ρ ：密度 (kg/m³)
σ ：導電率 (1/Ω・m)
ψ ：領域(Ⅱ)の傾き角度(x 方向に対して) (−)
ψ_0 ：ノズル出口での傾き角度 (−)

t_t0：スリット間隔　　(m)　　ω：磁場の角周波数　　(1/s)

文献

1）川上 公成：鉄と鋼，70 (1984), p.1357

2）J.Etay and M.Garnier: Proceedings of IUTAM Sympo., Cambridge (1982) p. 190

3）K.Miyazawa and J.Szekely: Metall. trans., 12A, (1981) p.1047

4）M.Garnier and R.Moreau: J.Fluid. Mech., 127 (1983) p.365

5）Y.L.Yeow: J.Fluid. Mech., 66 (1974) p.613

6）M.Zahn: Electromagnetic Field Theory, John Wiley & Sons, (1979) p.437

溶融金属表面波動抑制に及ぼす横断方向の直流磁場の勾配の効果

Effect of Gradient of Transverse Direct Magnetic Field on Suppression of Wave Motion

名古屋大学大学院　小塚敏之
名古屋大学工学部　浅井滋生　鞭　　巌

Synopsis:

Molten metal being electrically conducting fluid, direct magnetic field can suppress wave motions which induce instabilities and surface defects in the several processes such as twin roll, electromagnetic casting, conventional continuous casting.

Transverse magnetic field imposed on mercury surface wave and damping behavior was measured by making use of laser beam. It was found that the suppression of wave motion did not depend on field intensity but the gradient of it. A dispersion relation of wave motion,

$\omega^2\{\varepsilon_1\coth(\varepsilon_1 h_0)+\varepsilon_2\coth(\varepsilon_2 h_0)\}=2\xi^2 g$, is derived from the theoretical analysis taking into account of the gradient of magnetic field, and is verified by the experimental results.

The effect of gradient of transverse magnetic field on suppression of wave motion is discussed on the basis of the dispersion relation derived here.

1．緒　言

鋼の鋳造分野では，薄板を直接溶湯から鋳造する直接成形プロセスや，鋳型との接触により生じる表面欠陥を一掃する電磁鋳造プロセスが注目されている．前者の直接成形プロセスには，双ロール法[1)2)]やツインベルト法[3)4)]がある．そこでは溶湯の注入流や湯溜りの表面に生じる波動が製品の品質を劣化させ，また，操業を不安定にする．後者の電磁鋳造法は，アルミニウムの分野で開発された垂直式のもの[5)6)]と著者らが提案した水平式のもの[7)8)]がある．いずれも溶湯はモールドと接触することなく保持されており，その表面の波動は，製品の表面品質を劣化させる要因となる．さらに，従来の連続鋳造法においてもメタルーフラックス界面の表面波動はオシレーションマークの乱れを誘起する[9)]．そのため，上記のプロセスでは，表面波動を抑制することが重要な技術課題となっている．

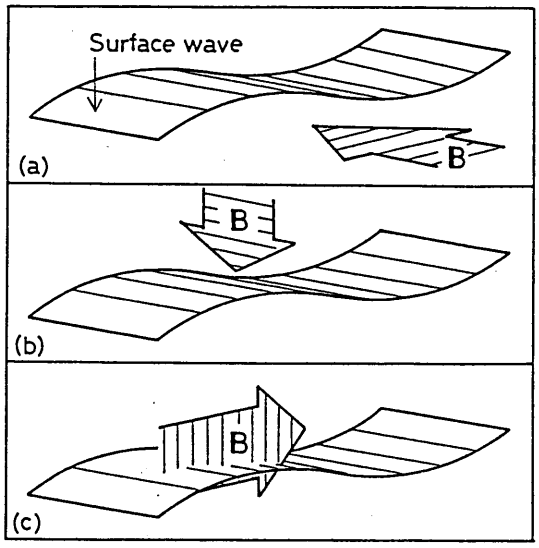
一方，溶融金属は電気伝導性を有する電磁流体であり，磁場の印加によって生じる電

磁気力は溶融金属に対して波動抑制機能を持つ[10]．交流磁場の波動抑制機能については理論的にかなり明らかにされている[11]が，交流磁場発生装置は直流磁場発生装置に較べて大規模なものとなる．最近，高磁束密度の永久磁石の開発が進み，直流磁場による波動の抑制が指向されている[12]．しかしながら，直流磁場の表面波動抑制効果は磁場の方向に大きく依存していると考えられており[13)~16)]，この点については理論的に十分に解明されていないのが現状である．

本研究では溶融金属の表面波動に対して横断方向に磁場を印加する場合について磁場の勾配が波動の分散関係に及ぼす効果を導き，水銀を用いた実験により理論解析の結果を検証し，その分散関係を用いて，溶鋼の表面波動に対する抑制効果を検討する．

2．理論解析

Fig. 1 に示すように，表面波動に対する直流磁場の印加方向については 3 通り考えられる．すなわち，溶融金属の表面波動の波数ベクトルに対して(a)横断方向に磁場を印加する場合[14)15)]，(b)鉛直方向に印加する場合[13)16)]および(c)平行方向に印加する場合[14)]である．(a)の場合は，強力な磁場の印加が可能であり，かつ操作も容易であると考えられる．したがって，ここでは(a)の横断方向に印加された磁場の波動抑制効果について，電磁流体力学に基づいた分散関係の導出を行う．



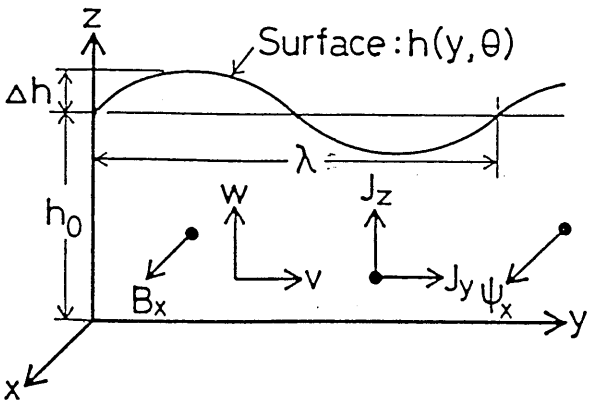
2・1　基礎方程式の導出

解析に用いる座標系と変数を Fig. 2 に示す．溶融金属の表面には波長 λ の定常波が存在し，その振動の中心力は重力であるとする．溶融金属の深さは静止状態では h_0 であり，表面 h (y, θ) は h_0 を振動の中心として振幅 Δh で振動しており，x 方向には均一であるとする．溶融金属の流速の y, z 方向の成分をそれぞれ v, w で表し，表面に対し横断方向の直流磁場は x 方向であり Bx とする．

流速に関する式は連続の式と運動の式であり，それぞれ次のように表される．

$$\nabla \cdot v = 0 \quad \cdots\cdots (1)$$

$$\rho\, \partial v / \partial \theta = -\nabla P + \rho g + F \quad \cdots\cdots (2)$$



(2)式においては，粘性項と慣性項は無視されている．F は外力項であり，波動を抑制する力を表わす．

誘導電流 J は，次ぎに示す電磁場の基礎式を連立することによって得られる．

$$\nabla \times E = -\partial B/\partial \theta \quad \cdots\cdots (3)$$

$$\nabla \cdot J = 0 \quad \cdots\cdots (4)$$

$$J = \sigma (E + v \times B) \quad \cdots\cdots (5)$$

(3)式はファラデーの法則，(4)式はキルヒホッフの法則，(5)式は運動物体中のオームの法則である．(5)式の右辺第2項は磁場中を電磁流体が流れるときに生じる起電力であり，Fig. 2 に示すように B_x と v，w との相互作用により y，z 方向の誘導電流 J_y，J_{Wz} を与える．

ここで，(4)式が成立することから，次式で定義される電流密度のベクトルポテンシャル ψ を導入する．

$$J \equiv \nabla \times \psi \quad \cdots\cdots (6),\ (7)$$

(3)〜(7)式より次式を得る．（誘導は Appendix Ⅰに示す）

$$\nabla^2 \psi = \sigma (v \cdot \nabla) B - \sigma (B \cdot \nabla) v \quad \cdots\cdots (8)$$

B は x 成分のみとしているので(8)式の右辺第2項は $\sigma B_x \partial v/\partial x$ となり，v が x に依存しないことを考慮すればこの項は零となる．したがって(8)式は x 成分のみとなり，Fig. 2 に示される ψx は x 方向に均一であるので ψ_x についての方程式は次式となる．

$$\partial^2 \psi_x/\partial y^2 + \partial^2 \psi x/\partial z^2 = \sigma (v \partial B_x/\partial y + w \partial B_x/\partial z) \quad \cdots\cdots (9)$$

流体に働く抑制力はローレンツ力であり次式で表される．

$$F = J \times B = (\nabla \times \psi) \times B \quad \cdots\cdots (10)$$

(2)式に(10)式を代入し，(1)式とともに各成分を用いて書き下すと，(11)，(12)および(13)式が得られる．

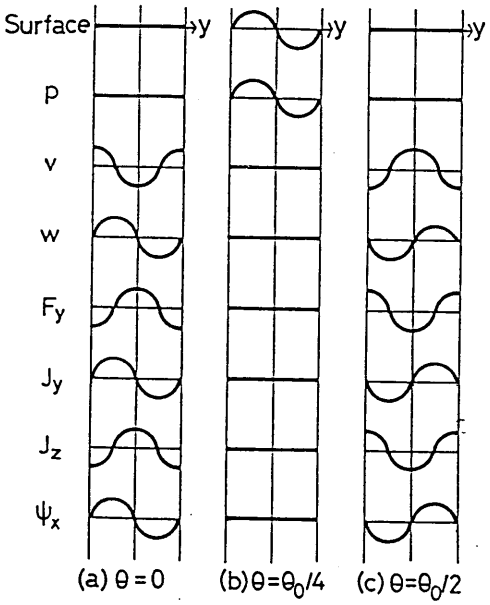
$$\partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0 \quad \cdots\cdots (11)$$

$$\rho\, \partial v/\partial \theta = -\partial p/\partial y - B_x \partial \psi_x/\partial y \quad \cdots\cdots (12)$$

$$\rho\, \partial w/\partial \theta = -\partial p/\partial z - \rho g - B_x \partial \psi_x/\partial z \quad \cdots\cdots (13)$$

2・2　定常波に対する近似解

波長 λ，周期 θ_0 の定常波における各変数の y 方向の分布は Fig. 3 に示すように(a)の状態から1/4周期，1/2周期と時間が経過するにつれてそれぞれ(b)，(c)のように変化するとする．圧力 p は表面形状と同じ位相で変化しており，表面が平坦である瞬間 {(a)，(c)} に流速は最大となり，表面が最大の位置に達した瞬間 {(b)} では流速は零である．誘導電流は(5)式から決定されるので，J_y は w に比例し，J_z は v に比例すると考えることができる．F_y は(10)式より J_z に比例する．以上の考察に基づいて各変数の関数形を次のように表す．



$$v = \hat{V}(z)\cdot\cos(\xi y)\cdot\exp(-j\omega\theta) \quad \cdots\cdots (14)$$

$$w = \hat{W}(z)\cdot\sin(\xi y)\cdot\exp(-j\omega\theta) \quad \cdots\cdots (15)$$

$$p = \rho g(h_0 - z) + j\hat{P}(z)\cdot\sin(\xi y)\cdot\exp(-j\omega\theta) \quad \cdots\cdots (16)$$

$$\psi_x = \hat{\psi}_x(z)\cdot\sin(\xi y)\cdot\exp(-j\omega\theta) \quad \cdots\cdots (17)$$

(14)，(15)式を(11)式に代入することにより(18)式を得る．

$$-\xi\hat{V} + d\hat{W}/dz = 0 \quad \cdots\cdots (18)$$

次に(14)～(17)式を(12)，(13)式に代入し $\hat{P}$ を消去することにより(19)式を得る．

$$d\hat{V}/dz - \xi\hat{W} = -(j\xi\hat{\psi}_x/\rho\omega)\cdot(\partial B_x/\partial z) \cdots\cdots (19)$$

さらに，(9)式に(14)，(15)および(17)式を代入して次式を得る．

$$-\xi^2\hat{\psi}_x + d^2{}_x/dz^2 = \sigma w(\partial B_x/\partial z) \cdots\cdots (20)$$

ここで，B_x は y 方向に均一であると仮定した．

流速の境界条件は次式で表される．

（(22)式の誘導は Appendix Ⅱに示す）

$$\hat{W} = 0 \quad \text{at} \quad z = 0 \cdots\cdots (21)$$

$$\hat{W} = \omega\Delta h \quad \text{at} \quad z = h_0 \cdots\cdots (22)$$

さらに，電流の境界条件は次のようになる．（誘導は Appendix Ⅲに示す）

$$\hat{\psi}_x = 0 \quad \text{at} \quad z = 0,\ h_0 \cdots\cdots (23)$$

2・2・1　Bx が z 方向に均一な場合

この場合には，(19)式と(20)式の右辺は零となり，方程式は次のようになる．

$$d\hat{V}/dz - \xi\hat{W} = 0 \cdots\cdots (24)$$

$$-\xi^2\psi_x + d^2\psi_x/dz^2 = 0 \cdots\cdots (25)$$

(18)式と(24)式は外力が働かない場合の定常波の流速場を与える式である[17]．(25)式を(23)式のもとで解くと ψ_x は z の全領域に対して零となり(6)式で与えられる電流もまた零となる．すなわち，均一な直流磁場を横断方向に印加した場合には抑制効果は生じないことになる．

2・2・2　Bx が z 方向に勾配を持つ場合

磁場の分布を次式のように仮定する．

$$B_x = B^0 + kz \cdots\cdots (26)$$

(19)，(20)式は次のようになる．

$$d\hat{V}/dz - \xi\hat{W} = -j\xi k\psi_x/\rho\omega \cdots\cdots (27)$$

$$-\xi^2\psi_x + d^2\psi_x/dz^2 = \sigma wk \cdots\cdots (28)$$

(18)，(27)，(28)式から $\hat{V}$，$\hat{W}$ を消去すると，ψ_x に関する4階の常微分方程式が得られる．

$$\frac{d^4\psi_x}{dz^4} - 2\xi^2\frac{d^2\psi_x}{dz^2} + \xi^4\psi_x = -j\left(\frac{\sigma k^2\xi^2}{\rho\omega}\right) \cdots\cdots (29)$$

(21)，(22)式の境界条件は(23)，(28)式より，ψ_x の条件として表すと次のように書き換えることができる．

$$d^2\psi_x/dz^2 = 0 \quad \text{at} \quad z = 0 \cdots\cdots (30)$$

$$d^2\psi_x/dz^2 = \sigma k\omega\Delta h$$

$$\text{at} \quad z = h_0 \cdots\cdots (31)$$

(29)式の一般解は次のようになる

$$\psi_x = C_1\exp(\varepsilon_1 z) + C_2\exp(\varepsilon_2 z)$$

$$+ C_3\exp(-\varepsilon_1 z) + C_4\exp(-\varepsilon_2 z) \cdots\cdots (32)$$

$$\varepsilon_1 = \{ \xi^2 + (1-j)\alpha \}^{1/2} \cdots\cdots (33)$$

$$\varepsilon_2 = \{ \xi^2 - (1-j)\alpha \}^{1/2} \cdots\cdots (34)$$

$$\alpha = \{ \sigma k^2 \xi^2 / 2\rho\omega \}^{1/2} \cdots\cdots (35)$$

(32)式の積分定数は(23), (30)および(31)式の境界条件により決定され，ψ_x, $\hat{V}$および$\hat{W}$の解はそれぞれ次のようになる．(誘導は Appendix Ⅳに示す)

$$\psi_x = \frac{\sigma k \omega \Delta h (1+j)}{4a} \left\{ \frac{\sinh(\varepsilon_1 z)}{\sinh \varepsilon_1 h_0} - \frac{\sinh(\varepsilon_2 z)}{\sinh(\varepsilon_2 h_0)} \right\} \cdots\cdots (36)$$

$$\hat{V} = \frac{\omega \Delta h}{2\xi} \left\{ \frac{\varepsilon_1 \cosh(\varepsilon_1 z)}{\sinh(\varepsilon_1 h_0)} + \frac{\varepsilon_2 \cosh(\varepsilon_2 z)}{\sinh(\varepsilon_2 h_0)} \right\} \cdots\cdots (37)$$

$$\hat{W} = \frac{\omega \Delta h}{2} \left\{ \frac{\sinh(\varepsilon_1 z)}{\sinh(\varepsilon_1 h_0)} + \frac{\sinh(\varepsilon_2 z)}{\sinh(\varepsilon_2 h_0)} \right\} \cdots\cdots (38)$$

また，(14), (16)および(17)式を(12)式に代入し，(26)式を用いると，$\hat{P}$を求めることができる．

$$\hat{P} = (\rho\omega/\xi)\hat{V} + j\psi_x (B_0 + kz) \cdots\cdots (39)$$

定常波では h は次式で表される．

$$h = h_0 + j\Delta h \cdot \sin(\xi y) \cdot \exp(-j\omega\theta) \cdots\cdots (40)$$

圧力 p が零となる z の値が表面の位置 h を与えるので，(16)式において p を零と置き，(39), (40)式を代入すると次の分散関係を得る．

$$\rho g \Delta h - (\rho\omega/\xi)\hat{V}|_{z=h} - j\psi_x|_{z=h}(B_0 + kh) = 0 \cdots\cdots (41)$$

振幅が小さいとして(41)式で $h \fallingdotseq h_0$ と置き，(23), (37)式を用いて(42)式を得る．

$$\omega^2 \{ \varepsilon_1 \coth(\varepsilon_1 h_0) + \varepsilon_2 \coth(\varepsilon_2 h_0) \} = 2\xi^2 g \cdots\cdots (42)$$

直流磁場印加の効果は(35)式の α に現れるが，そこでは α は磁束密度の勾配 k の 2 乗に依存し，k の正負にはよらないことがわかる．$k=0$ のときは，(33)～(35)式より $\varepsilon_1 = \varepsilon^2 = \xi$ となり分散関係は次式となる．

$$\omega^2 = \xi g \tanh(\xi h_0) \cdots\cdots (43)$$

(43)式は完全流体の波動の分散関係[18] と一致することから，本理論展開が従来の波動理論と整合していることがわかる．角周波数 ω は複素数であり次式で表す．

$$\omega = \omega_r + j\omega_i \cdots\cdots (44)$$

(14)～(17)式からわかるように実部ω_rは振動の角周波数を与える．また，虚部ω_iの符号が正であれば振幅は増幅され，負であれば減衰する．そこで，磁場印加による波動の減衰定数D_mとω_iの関係は次のようになる．

$$D_m = -\omega_i \cdots\cdots (45)$$

以上の理論解析は次のようにまとめられる．

磁束密度の z 方向の勾配がない場合（2・2・1）には$J=0$であるから，(5)式は電場Eを与えることになる．

$$E = -v \times B = (0,\ wB_x,\ -vB_x) \quad \cdots\cdots (46)$$

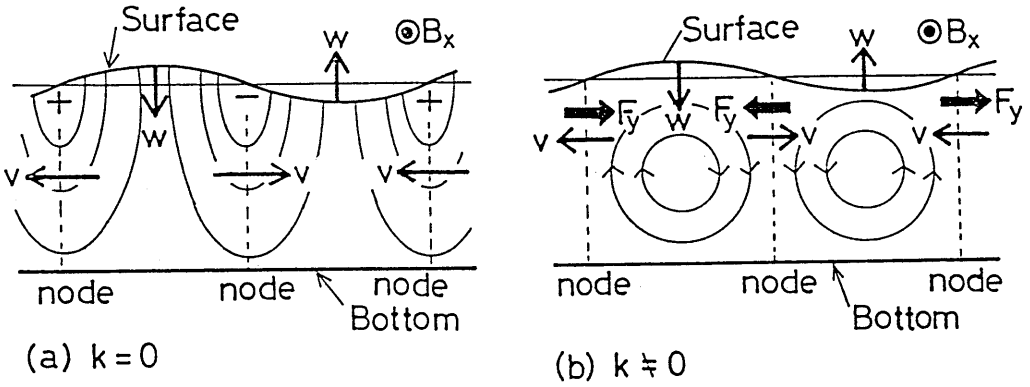
電位 V は次式で定義される

$$E = -\nabla V \quad \cdots\cdots (47)$$

(15), (46)および(47)式を用いると，V は次式となる．

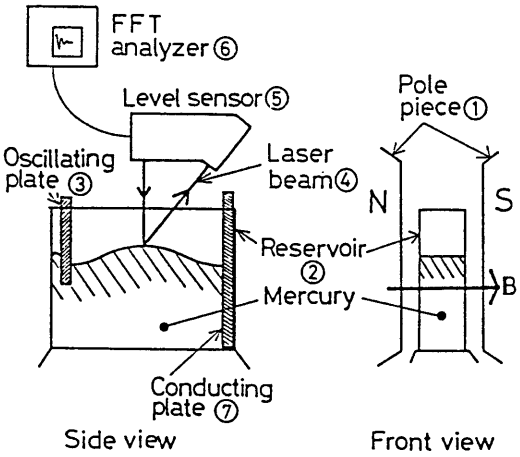
$$V = -(B_x \hat{W}/\xi)\cos(\xi y)\exp(-j\omega\theta) \quad \cdots\cdots (48)$$

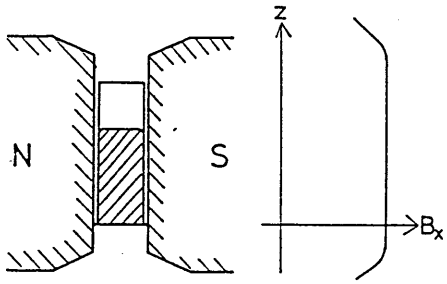
Fig. 4 (a)に(48)式に基づいた溶融金属内部の等電位線を模式的に示す．図中の細い曲線が等電位線であり，節の位置の表面に最も電位の高い所と最も低い所が交互に現れている．このように，溶融金属内に電位が現れる理由は，$E_y\ (=wB_x)$ と $E_z\ (=-vB_x)$ に駆動されるべき電流が相互に方向を逆にして釣り合い，電流の帰路を形成させないためと考える．磁場の勾配が存在する場合には，上記の釣合が崩れて電流の帰路が形成される．すなわち，E_z の寄与が E_y のそれにまさり，Fig. 4 (b)に示される節から節までを1つのセルとしたループ電流が生じる結果，波動は抑制されることになる．



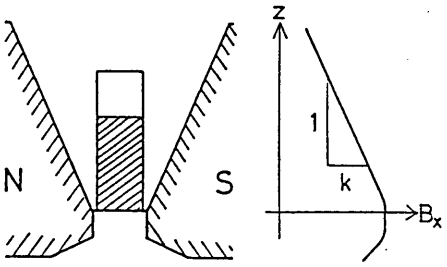
3．実　験

理論的に求められた分散関係を確かめるため ω の虚部である減衰定数を求める実験を行った．Fig. 5 に実験装置の模式図を示す．電磁石の磁極①間に水銀の入ったアクリル製容器②を置き，振動板③を介して水銀を振動させ，容器内に1波長の定常波が安定に形成されるようにした．水銀が定常的に振動している状態から，振動板を停止させ，レーザー光④を上方より照射し散乱光をレベルセンサー⑤で検出することにより湯面高さの経時変化を測定した．また，FFT アナライザ⑥により周波数を測定し，定常波が形成されるように振動条件を定めた．定常波は振動板とそれに対向する壁の位置において腹となる．Fig. 4 (b)で示したように，波動を抑制するための電流ループは腹の位置では容器の長手方向（Fig. 2 の y 方向）の成分を持っているので振動板と壁⑦を導体にして電





(a) Pole piece A



(b) Pole piece B

流の帰路を設けた．また磁束密度に勾配を与えるために鉛直上向きに磁極間距離が増加する形状の磁極を用いた．Fig. 6 にその正面図を示す．(a)は従来のテーパのない磁極（以下，磁極 A）であり磁束密度の測定の結果，図に示すように磁束密度はほとんど均一であった．(b)はテーパのある磁極（以下，磁極 B）であり，最大 22T/m の磁束密度勾配が得られた．実験条件を Table 1．に示す．測定された減衰挙動の一例を Fig. 7 に示す．これらは磁極 B を用いた結果であり，振動板を停止させた直後からの振動減衰波形である．(a)は磁場を印加しない場合，(b)，(c)，(d)はそれぞれ図中に示した平均の磁束密度 $\bar{B}_x$ と磁束密度勾配の値の場合であった．減衰定数は振動減衰挙動の包絡線の対数を時間

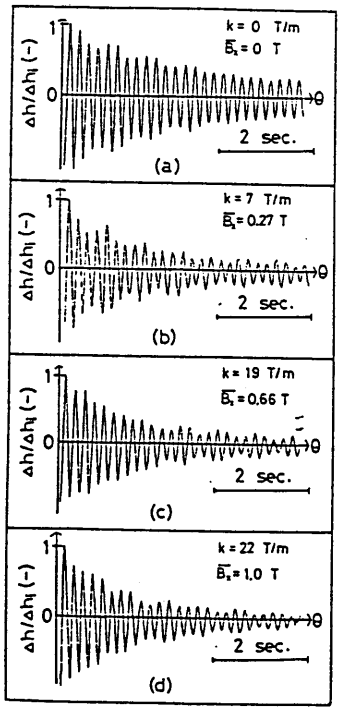
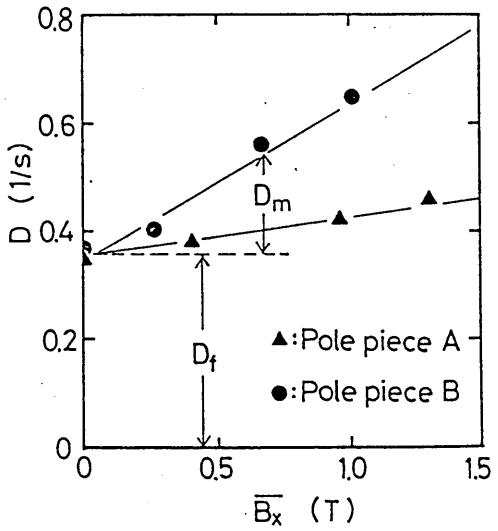
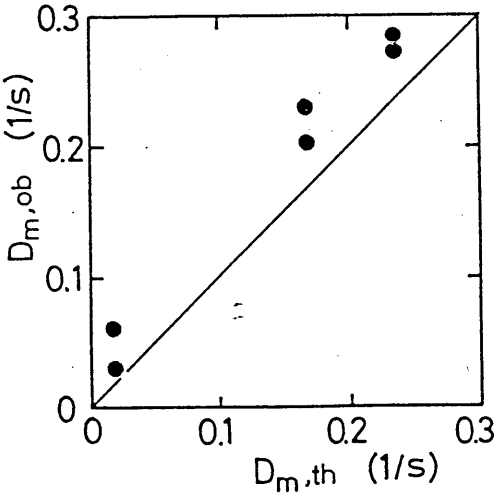


Table 1. Experimental conditions.

size of pole piece	: 70 mm x 70 mm
width of reservoir	: 20 mm
liquid depth	: 30 mm
frequency of wave motion	: 5 Hz
wave length	: 70 mm
wave amplitude	: 2 mm
imposed magnetic field	: ∿ 1.3 T (max.)
gradient of magnetic field	: ∿ 22 T/m (max.)

軸に対してプロットし，その直線の傾きから求めることができる．Fig. 8 に磁極 A の場合と磁極 B の場合について，減衰定数に及ぼす平均の磁束密度の効果を示した．磁極 A では減衰定数がほとんど増加しないが磁極 B ではかなり増加している，これは磁極 B では平均の磁束密度が増加するにつれて磁束密度の勾配も増加しているためでり，減衰定数は磁束密度の絶対値ではなくその勾配に依存することがわかった．磁極 A の場合にも僅かながら減衰定数の増加がみられるが，これは，Fig. 4 (a)に示した電場の釣合が僅かな外乱により崩れて電流が現れると，印加磁場の強さに依存して抑制力が現れるためと考えられる．また，図からわかるように磁場が印加されていない場合にも減衰定数 Df が存在する．これは容器との摩擦および液体中の粘性消散によるものと考えられる．磁場による減衰定数 D_m の見積は，測定された D の値から Df の値を差し引いたものとした．(42)，(45)式より計算される D_m（減衰定数の理論値 $D_{m,th}$）と測定値（$D_{m,ob}$）との比較を Fig. 9 に示す．測定値は理論値よりも大きな値を示した．これは Fig. 8 において磁極 A の場合にも減衰効果がみられたことからもわかるように，磁極 B の場合においても理論値よりも大きな電流が流れていたためと考えられる．





4．抑制効果の理論的検討

ここでは，(42)式の分散関係を用いて溶鋼の場合について抑制効果を検討する（摩擦および粘性消散による減衰は考慮しない）．Fig.10に波数 ξ が$10\mathrm{m}^{-1}$，$50\mathrm{m}^{-1}$，$100\mathrm{m}^{-1}$の場合についての D_m に及ぼす磁束密度の勾配 k の効果を示した．実線は浴深が0.05m のものであり，破線は0.1m のものである．いずれの場合も D_m の値は正であり制動力が

働いていることを示している．抑制効果が低いところでは，D_m は k が増加するにつれて増加しているが，抑制効果が大きくなると D_m は減少している．これは，波動が十分抑制された流体中では誘導電流も減少して抑制力 $J \times B$ の値が小さくなるためであると考えられる．また ωr を磁場が存在しない場合の角周波数 ω_{ro} で正規化した値 (ω_r/ω_{ro}) に及ぼす k の効果を Fig.10と同様の条件下で計算し Fig.11に示した．k が増加するにつれて ωr は減少する．すなわち波動の周期が増加することになり，波動が抑制されていることがわかる．そこで抑制率 S として次式で定義する量を導入する．

$$S = 1 - (\omega_r/\omega_{ro}) \cdots\cdots (49)$$

S が零になれば波動は完全に抑制されていることになる．Fig.11に示されているように波数が大きいほど抑制率は小さくなっており波長の短い波は抑制されにくいことを示している．また，浴深が大きくなるほど抑制効果が大きい．これは，Fig. 4(b)に示す電流ループが鉛直方向に伸び抑制効果を与える J_z が増大するためであると考えられる．

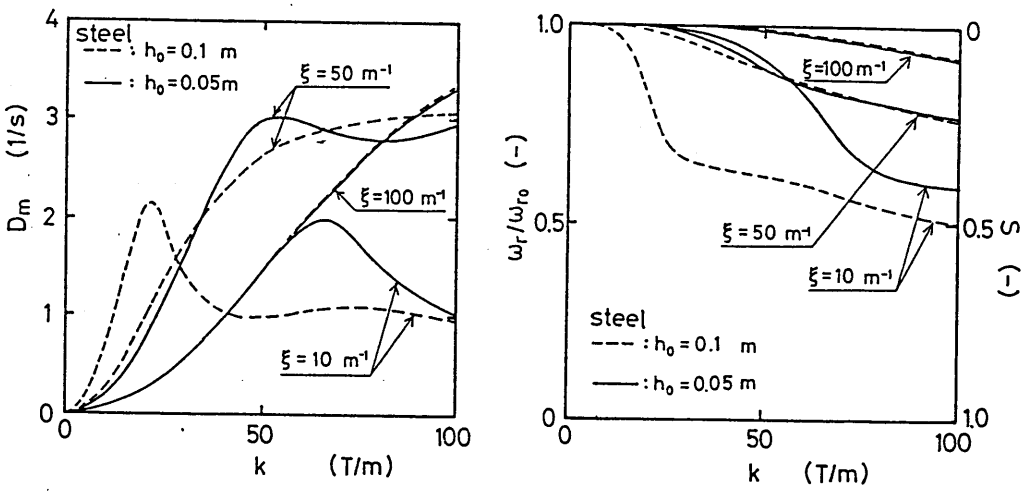
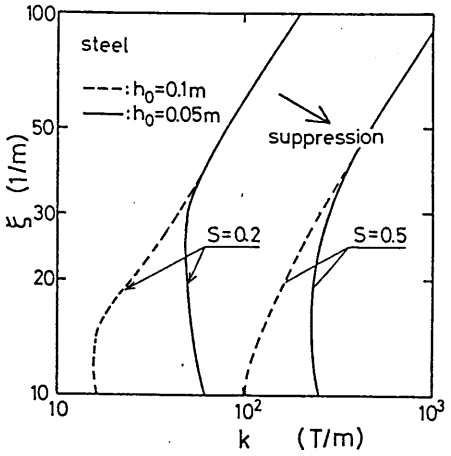


Fig.12に抑制率が0.2と0.5となるための磁束密度の勾配と波数の条件を浴深が0.05mと0.1m の場合について示した．k が大きくなるほど図に示したように S が増加し抑制効果が大きくなることがわかる．浴深は大きいほど抑制効果があるが ξ が約50m^{-1} を越えるとその影響はなくなる．また，図からわかるように ξ の変化に伴い S は極大値をとる．次にその理由について検討する．ξ が無限大の場合には(33)，(34)式の α が無視できるので，(42)式は磁場を印加しない場合の分散関係である(43)式と同一になり，抑制効果が現れないことになる．また，逆に $\xi \to 0$ とすれば，$\varepsilon_1 \to 0$，$\varepsilon_2 \to 0$ となり(42)式は

次式に漸近する．

$$\omega^2 = \xi^2 g h_0 \quad \cdots\cdots (50)$$

(50)式は(43)式において $\xi \to 0$ とおいた場合に得られる式と同一であり，ξ が小さい場合においても抑制効果は現れない．すなわち，S は ξ に対し，最大値を持つことになる．



5．結　言

双ロール法やツインベルト法における溶湯プールの表面波動，アルミニウムや銅の鋳造分野で一部実用化されている電磁鋳造プロセスにおける溶湯保持部の表面波動，さらには，鋼の連続鋳造プロセスにおける溶湯ーフラックス界面波動は安定した操業を妨害し，表面品質などを著しく劣化させる．このようなプロセスに直流磁場を作用させる場合，設備上，横断方向に印加することが最も容易であると考えられる．そこで，本研究では表面波動に対して横断方向から印加された直流磁場が波動抑制に及ぼす効果について理論解析を行い，水銀を用いた実験により解析結果の検証を行った．その結果，次のことが明らかとなった．

(1) 直流磁場を横断方向から印加する場合，波動抑制には磁場の勾配が必要となる．

(2) 磁場の勾配を考慮した分散関係は(42)式となる．

(3) 抑制率 S を導入し，鋼の場合についての横断方向の直流磁場による抑制効果を検討した．

最後に，本研究の研究費の一部は，文部省科学研究費補助金，試験研究(1)（No.61850125），一般研究(B)（No.61470056）および日本鉄鋼協会特定基礎研究会「電磁気冶金の基礎研究部会」の援助によっていることを付記して謝意を表します．

[Appendix Ⅰ]

(5)式の両辺に（$\nabla\times$）を作用させ，(3), (6)式を用いると（A-1）式が得られる．

$$\nabla\times\nabla\times\psi=-\sigma\,\partial B/\partial\theta+\sigma\,\nabla\times(v\times B)\cdots\cdots(\text{A-1})$$

（A-1）式の右辺第2項を展開し(1), （A-2）式で表される流体と磁場の連続の式を代入して（A-3）式を得る．

$$\nabla\cdot B=0\cdots\cdots(\text{A-2})$$

$$\nabla\times(v\times B)=v(\nabla\cdot B)-B(\nabla\cdot v)+(B\cdot\nabla)v-(v\cdot\nabla)B$$
$$=(B\cdot\nabla)v-(v\cdot\nabla)B\cdots\cdots(\text{A-3})$$

また，ベクトル恒等式と(7)式により次式の関係が与えられる．

$$\nabla\times\nabla\times\psi=(\nabla\cdot\psi)\psi-\nabla^2\psi=-\nabla^2\psi\cdots\cdots(\text{A-4})$$

（A-1）式の右辺第1項は誘導電流により生じる誘導磁場が印加磁場に較べて小さいことから無視し，（A-3）式と（A-4）式を（A-1）式に代入して(8)式を得る．

[Appendix Ⅱ]

定常波の腹の位置（w が最大となる位置）では(15)式は次式となる．

$$w=\hat{W}(z)\cdot\exp(-j\omega\theta)\cdots\cdots(\text{A-5})$$

波動表面の流体要素は Fig. 3 に示されるように $z=h_0$ の位置から1/4周期経過した時に最大振幅である $z=h_0+\Delta h$ の位置に到達する．したがって（A-6）式が書ける．

$$\Delta h=\int_0^{\theta_0/4}w\,d\theta\cdots\cdots(\text{A-6})$$

微小振幅であることを考慮して w を $z=h_0$ の値にとれば（A-6）式は次式のように積分できる．

$$\Delta h=-\hat{W}(h_0)\{\exp(-j\pi/2)-1\}/j\omega\cdots\cdots(\text{A-7})$$

（A-7）式の実部は(22)式の $\hat{W}$ の境界条件を与える．

[Appendix Ⅲ]

(6)式より J の z 成分は次式のようになる．

$$J_z=-\partial\psi_x/\partial y\cdots\cdots(\text{A-8})$$

(17)式を（A-8）式に代入すると次式を得る．

$$J_z=-\xi\,\psi_x(z)\cdot\cos(\xi y)\cdot\exp(-j\omega\theta)\cdots\cdots(\text{A-9})$$

$z=0$ において溶融金属が絶縁体の底に接している場合には J_z はすべての y と θ について零とならねばならないので $\psi_x(0)=0$ である．$z=h$ においても同様の理由で $\psi_x(\mathrm{h})=0$ である．微小振幅であることを考慮すれば $\psi_x(h_0)=0$ となる．

[Appendix Ⅳ]

(23), (30)式より $C_3 = -C_1$, $C_4 = -C_2$ となり，(32)式は次のように書くことができる．

$$\psi_x = C_1' \sinh(\varepsilon_1 z) + C_2' \sinh(\varepsilon_2 z) \cdots\cdots (A\text{-}10)$$

さらに，(23), (31)式より導出される C_1' と C_2' の方程式から C_2' を消去すると次式を得る．

$$C_1'(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)\sinh(\varepsilon_1 h_0) = \sigma k \omega \Delta h \cdots\cdots (A\text{-}11)$$

(33), (34)式より $\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 = 2(1-j)\alpha$ となり C_1' が決定される．同様にして C_2' を求め，(36)式を得る．

(36)式を(28)式に代入することにより次式を得る．

$$\hat{W} = \frac{\omega \Delta h (1+j)}{4a} \left\{ \frac{(\varepsilon_1^2 - \xi^2)\sinh(\varepsilon_1 z)}{\sinh(\varepsilon_1 h_0)} - \frac{(\varepsilon_2^2 - \xi^2)\sinh(\varepsilon_2 z)}{\sinh(\varepsilon_2 h_0)} \right\} \cdots\cdots (A\text{-}12)$$

(33), (34)式より $\varepsilon_1^2 - \xi^2 = (1-j)\alpha$, $\varepsilon_2^2 - \xi^2 = -(1-j)\alpha$ となり(38)式が得られる．

(38)式を(18)式に代入することにより(37)式を得る．

記　号

B, B_x	：磁束密度	(T)
$\bar{B}_x$	：平均磁束密度	(T)
D	：減衰定数	(1/s)
D_f	：壁との摩擦等による減衰定数	(1/s)
D_m	：磁場による減衰定数	(1/s)
E	：電場	(A/m)
f	：周波数	(Hz)
F, F_y	：電磁体積力	(N/m^3)
g, g	：重力加速度	(m/s^2)
h	：液深	(m)
h_0	：静止状態での液深	(m)
Δh, Δh_i	：波の振幅，およびその初期値	(m)
J, J_y, J_z	：誘導電流密度	(A/m^2)
j	：虚数単位	(−)
k	：磁束密度の勾配	(T/m)
p, $\hat{P}$	：溶融金属内部の静圧	(Pa)
S	：抑制率	(−)
V	：電位	(V)
v, $\hat{V}$	：流速の y 方向成分	(m/s)

w, $\hat{W}$：流速の z 方向成分 (m/s)
θ ：時間 (s)
θ_0: 波の周期 (s)
λ ：波の波長 (m)
ξ ：波の波数 (1/m)
ρ ：溶融金属の密度 (kg/m^3)
σ ：溶融金属の導電率 (1/Ω・m)
ψ, ψ_x, $\hat{\psi}_x$ ：電流密度のベクトルポテンシャル (A/m)
ω ：波の角周波数 (1/s)
ω_r, ω_i ：ω の実数部および虚数部 (1/s)
ω_{ro} ：$k=0$ の場合の角周波数の実数部 (1/s)

文　献

1）草川隆次，山本博之，田中　悟，柳　義博：鉄と鋼，70(1984)，S969
2）竹本弘郷，坂口治男，末広照善，大西邦彦，長井邦雄，橋本俊英，毛利勝一：鉄と鋼，72(1986)，S143
3）岡嵜　卓，小出優和，井上雄二，高本　勉，浅里孝志：鉄と鋼，72(1986)，S140
4）糸山誓司，中戸　参，野崎　努，垣生泰弘，別所永康：鉄と鋼，71(1985)，A249
5）D.G.Goodrich, J.L.Dassel and R.M.Shogren: J.Met., (1982) May, p,45
6）Ch.Vives and R.Ricou: Metall. Trans. B, 16 (1985), p.377
7）浅井滋生，小塚敏之，鞭　巌：鉄と鋼，72 (1986) 16，p.2218
8）小塚敏之，浅井滋生，鞭　巌：鉄と鋼，74 (1988) 掲載決定
9）松下　昭，磯上勝行，二宮健嘉，天満雅美，林田道弥，堤　一彦：鉄と鋼，73 (1987)，S200
10）浅井滋生：日本金属学会会報，22 (1983)，P.1029
11）M.Garnier and R.Moroeu: J.Fluid Mach., 127 (1983), p365
12）林田道弥，尾野　均，堤　一彦：鉄と鋼，73 (1987)，S686
13）六車俊範，小林純夫：鉄と鋼，73 (1987)，S1448
14）日本鉄鋼協会特定基礎研究会：第7電磁気冶金の基礎研究部会(1987年10月)，新日本製鉄株式会社（私信）
15）小塚敏之，浅井滋生：鉄と鋼，72 (1986)，S1652
16）小塚敏之，浅井滋生，鞭　巌：鉄と鋼，73 (1987)，S1447
17）日野幹雄：流体力学(1974)，p88［朝倉書店］
18）バーナード・ル・メオーテ／堀川清司 訳：応用流体力学入門(1979)，p212［東京大学出版会］

溶融金属の波動抑制に及ぼす表面に垂直に印加された直流磁場の効果

名古屋大学　大学院　小塚敏之
工学部　浅井滋生，鞭　　巌

1．緒言

Effect of Direct Magnetic Field Imposed Virtically to Surface on Suppression of Wave Motion

Synopsis:

The surface wave of molten metal is a triger to induce instabilities and surface defects in several processes such as twin roll, electromagnetic casting and conventional continuous casting.

Molten metal is a electrically conducting fluid. So its surface wave motion is expected to be suppressed by imposing direct magnetic field. In this work, a direct magnetic field was imposed virtically to surface of liquid mercury and damping behavior of wave motion was measured by using laser slit beam. On the other hand, a damping coefficient of wave motion, $Dm = \alpha \sigma B_z^2/2\rho$, $\alpha = 1 - \tanh(\xi \ell)/\xi \ell$, is derived on the basis of magnetohydrodynamics, and experimental data verifies the theoretical results. Magnetic field intensity to completely suppress wave motion of molten steel is evaluated by use of the dispersion relation and the damping coefficient derived here.

摘要

溶融金属の表面波動は双ロール法，電磁鋳造法あるいは従来の連続鋳造法において操業の不安定性や表面欠陥を誘発する引金となる．

溶融金属は電気伝導性流体であり，直流磁場を印加することによりその表面波動を抑制することが期待できる．

本報では，水銀表面と垂直な直流磁場を印加し，レーザースリット光を用いて波動の減衰挙動を測定した．一方，電磁流体力学に基づき波動の減衰定数，$Dm = \alpha \sigma B_z^2/2\rho$，$\alpha = 1 - \tanh(\xi \ell)/\xi \ell$，を理論的に求め，実験データにより検証する．溶鋼の波動を完全に抑制する磁場の強さを分散関係とここで導出した減衰定数を用いて検討する．

1．緒言

近年，鋼の鋳造分野では，従来の連続鋳造法に代わりうる新しい鋳造法として，薄板を直接溶湯から鋳造する直接成形プロセスが指向されている．直接成形プロセスには双ロール法[1)2)]やツインベルト法[3)4)]があるが，そこでは溶湯の注入流や湯溜りの表面に生じる波動が製品の品質を劣化させ，操業を不安定にすると考えられている．また，アルミニウムや銅の鋳造の分野では，電磁圧により溶湯を支えて固体壁との接触を断ち，鋳型内凝固に絡む表面欠陥を一掃する垂直式の電磁鋳造プロセスが欧米を中心に稼働している[5)6)]．電磁鋳造法にはこの垂直式のものの他に，著者らが提案している水平式のもの[7)8)]もあるが，いずれも電磁気力により溶湯を保持しており，溶融部の表面波動は，製品の表面品質劣化の主因となる．さらには，従来の連続鋳造法においてもメタル－フラックス界面の波動は安定操業の妨げとなり，オシレーションマークの乱れに繋がるものと考えられている[9)]．そのため，これらのプロセスにおいては，表面波動を抑制することが重要な技術課題となっている．

溶融金属は電気の良導体であり，磁場を印加することによって波動を抑制することが可能である[10)]．Garnierと Moreau[11)]は交流磁場印加によって生じる電磁圧を用いて表面波動を抑制できることを理論的に示した．一方，交流磁場は直流磁場に較べ磁場を発生させる設備が大規模になるので，林田ら[12)]は直流磁場による連続鋳造の鋳型内表面波動の抑制法を提案している．しかし，波動に対する直流磁場印加方向については理論的に十分検討がなされていない．著者ら[13)]は直流磁場を横断方向に印加する場合には抑制効果が少ないことを明らかにした．岸田と武田[14)]は表面波動の波面に垂直方向に印加された磁場と表面波動に対して横断方向に印加された磁場の場合についてそれぞれ減衰挙動を測定し，簡潔・明瞭な理論解析を行っている．また，六車と小林[15)]は波動表面に垂直に印加された磁場の抑制効果を理論的に検討している．

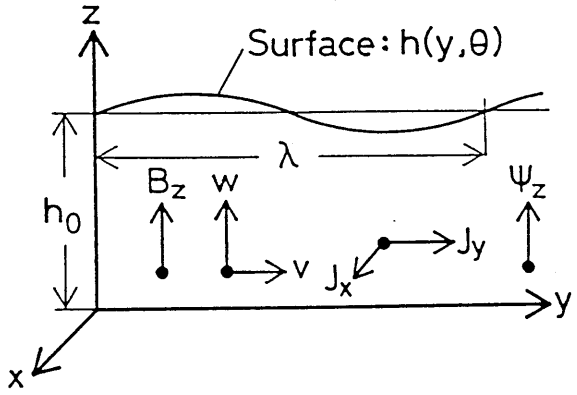
本研究では，表面に垂直な直流磁場が表面波動抑制に及ぼす効果を明らかにすることを目的として，磁場存在下での波動を電磁流体力学の理論に基づいて近似的に解析し，波動の減衰定数を導出するとともに，水銀を用いた実験により理論結果の検証を行った．

2．減衰定数の理論的導出

磁場による波動抑制の効果を定量化するためには，波動に対する制動力を正確に見積らなければならない．この制動力は流体の流速に対して逆向きに働く力であり，後述するように減衰定数を用いて評価することができる．以下では，いくつかの異なった電気的境界条件に対して減衰定数を理論的に導出する．

2．1　波動の伝播が制限されていない場合

解析に用いる座標系と変数を Fig. 1 に示す．溶融金属表面には y 方向の定常波が存在し，その波長を λ とする．表面の高さ h は y と時間 θ の関数であり，$h(y,\ \theta)$ とし，静止状態の溶融金属の深さを h_0 とする．溶融金属の流速は $\boldsymbol{v}$ とし，その y 成分および z 成分をそれぞれ v，w で表わす．直流磁場は z成分のみであり均一に印加されているとする．



誘導電流密度 $\boldsymbol{J}$ は(1)式で示されるオームの法則により与えられる．

$$\boldsymbol{J}=\sigma(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \quad \cdots\cdots(1)$$

導電性流体中では電場 $\boldsymbol{E}$ を無視することができるので，Fig. 1 に示した系における $\boldsymbol{J}$ の各成分は次式のようになる．

$$\boldsymbol{J}=(\sigma vB_z,\ 0,\ 0) \quad \cdots\cdots(2)$$

x 方向には電流に対する制約がないため，$\boldsymbol{J}$ は x 成分のみとなる．このとき，電磁体積力 $\boldsymbol{F}$ は(3)式で与えられ，その成分は(2)式を用いて(4)式のように求めることができる．

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B} \quad \cdots\cdots(3)$$

$$\boldsymbol{F}=(0,\ -\sigma vB_0^2,\ 0) \quad \cdots\cdots(4)$$

$\boldsymbol{F}$ の y 成分の大きさは流速の y 成分である v に比例し，その方向は v とは逆向きになることが(4)式に現れる負号からわかる．すなわち，y 方向の制動力が印加磁場により生じたことになる．

角周波数 ω で y 方向に振動している流体粒子の運動は次式で記述される[16]．

$$d^2\eta/d\theta^2+\omega\eta=F_v/\rho \quad \cdots\cdots(5)$$

ここで，F_y は y 方向の制動力である．η は任意の位置での y 方向の変位であり，v と η の関係は(6)式で与えられる．

$$v=d\eta/d\theta \quad \cdots\cdots(6)$$

(4)式により印加磁場による y 方向の制動力 F_y は(7)式となる．

$$F_y = -\sigma B_z^2 (d\eta/d\theta) \cdots\cdots (7)$$

(7)で表された制動力を考慮すると波動方程式は(8)式となる．

$$\rho (d^2\eta/d\theta^2) + \sigma B_z^2 (d\eta/d\theta) + \rho\omega\eta = 0 \cdots\cdots (8)$$

(6)式の各項は，体積力を表し，それぞれ，第1項は慣性力，第2項は制動力，そして第3項は中心力である．中心力として考えられるのは重力と表面張力であるが，ここでは，重力によって支配されている波，すなわち重力波を対象にする．(8)式を解くことにより(9)式が得られる．

$$\eta = \eta_0 \cdot \exp(-D_m\theta) \cdot \cos\{(\sqrt{\omega^2 - D_m^2}\,\theta\} \cdots\cdots (9)$$

ここで，D_m は減衰定数であり次式で定義される．

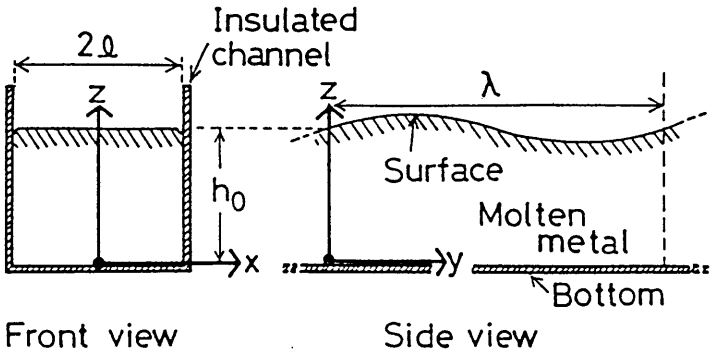
$$D_m = \sigma B_z^2 / 2\sigma \cdots\cdots (10)$$

なお，ここでは，D は ω に較べて十分小さいとして(9)式のように振動減衰解だけを求めた．また，z 方向の制動力は存在しないので w は減衰しないことになる．実際の波動は，ここでは考慮されていない粘性力等を介して y 方向の運動エネルギと z 方向の運動エネルギの交換が起こるものと考えられるため，(10)式で示される理論値ほどには減衰しないことになる．しかしながら，振幅が小さいことから z 方向の運動エネルギに比して y 方向のエネルギが大きいと考えて全体の振動運動の減衰定数を(10)式で近似する．

2．2　波動の伝播が絶縁壁で制限されている場合

(i)　x 方向に絶縁壁が存在する場合

Fig. 2 に示すように幅 2ℓ の矩形の溝の中で溶融金属が振動運動しているものとする．$x = \pm\ell$ の位置に置かれた絶縁体の壁のため，(2)式で示された x 方向の誘導電流は x 方向に直進できないことになる．この場合，電流分布を知るためには，速度場と電磁場を同時に考慮する必要がある．電磁場の解析には次の方程式が用いられる．



$$\nabla \times E = -\partial B/\partial \theta \quad \cdots\cdots (11)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad \cdots\cdots (12)$$

$$\nabla \cdot J = 0 \quad \cdots\cdots (13)$$

$$J = \sigma (E + v + B) \quad \cdots\cdots (14)$$

(11), (12)式はマクスウェルの方程式であり，(13), (14)式は，それぞれキルヒホッフの法則とオームの法則を表す式である．ここで(13)式が成立することから，Jのベクトルポテンシャルψを次式により定義することができる．

$$J \equiv \nabla \times \psi, \quad \nabla \cdot \psi = 0 \quad \cdots\cdots (15), (16)$$

ψと連続の式を使って(11)式～(14)式をまとめると(17)式を得る．((17)式の誘導はAppendix I参照)

$$\nabla^2 \psi = -\sigma (B \cdot \nabla) v \quad \cdots\cdots (17)$$

Fig. 1に示されているvとBの成分を用いると，(17)式のy成分とz成分はそれぞれ次のように展開できる．

$$\nabla^2 \psi_v = -\sigma B_z (\partial v/\partial z) \quad \cdots\cdots (18)$$

$$\nabla^2 \psi_z = -\sigma B_z (\partial w/\partial z) \quad \cdots\cdots (19)$$

(18)式のψ_yは$y-z$平面内をループ状に流れる電流を与える．(2), (4)式が示すように制動力はx方向の電流のみに起因するものとすれば，ψ_yについては考慮する必要がない．(19)式のψ_zは$x-y$平面内をループ状に流れる電流を与えるものであり，制動力は(15)式を用いて(3)式から次のように表される．

$$F = (-B_z (\partial \psi_z/\partial x), \ -B_z (\partial \psi_z/\partial y), \ 0) \quad \cdots\cdots (20)$$

また，連続の式および粘性項と慣性項を無視した運動の式は次のようになる．

$$\nabla \cdot v = 0 \quad \cdots\cdots (21)$$

$$\rho \partial v/\partial \theta = -\nabla p + \rho g + F \quad \cdots\cdots (22)$$

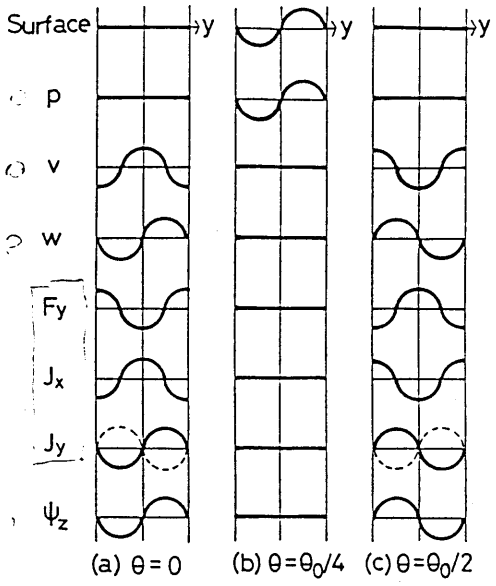
ここで，gは重力加速度であり$g = (0, \ 0, \ -g)$である．(21), (22)式も成分ごとに表示すると次のようになる．

$$\partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0 \quad \cdots\cdots (23)$$

$$\rho \partial v/\partial \theta = -\partial p/\partial y - B_z \partial \psi_z/\partial y \quad \cdots\cdots (24)$$

$$\rho \partial w/\partial \theta = -\partial p/\partial z - \rho g \quad \cdots\cdots (25)$$

Fig. 3に各変数のy方向の関数形の推移を，以下に示す推察に基づいて示す．(4)式に倣い，J_xがvに比例するとしてJ_xの変化が決定できる．電流は絶縁壁を貫いて流れないのでJ_yが生じる．(13)式とJ_xの変化からJ_yを決定できる(J_yはxが負の場合には逆向き(破線)となる)．次に，J_xとB_zよりF_yの変化を決定することができる．さらに，(15)式に従い，図に示したJ_xとJ_yの変化よりψ_zを求めることができる．一方，圧力pは表面hと一致することからその変化を決定できる．



各変数の y 方向分布を正弦波あるいは余弦波で近似することにより，Fig. 3 を参考にしてそれぞれの関数形を次のように決める．

$$v=\hat{v}(z)\cdot\cos(\xi y)\cdot\exp(-j\omega\theta) \quad \cdots\cdots(26)$$

$$w=\hat{w}(z)\cdot\sin(\xi y)\cdot\exp(-j\omega\theta) \quad \cdots\cdots(27)$$

$$p=\rho g(h_0-z)+j\hat{p}(z)\cdot\sin(\xi y)\cdot\exp(-j\omega\theta) \quad \cdots\cdots(28)$$

$$\psi_z=\hat{\psi}_z(x,\ z)\cdot\sin(\xi y)\cdot\exp(-j\omega\theta) \quad \cdots\cdots(29)$$

(26), (27)式を(23)式に代入して(30)式を，(26)～(29)式を(24), (25)式に代入し p を消去して(31)式を，(27), (29)式を(19)式に代入して(32)式を得る．

$$-\xi\hat{v}+d\hat{w}/dz=0 \quad \cdots\cdots(30)$$

$$d\hat{v}/dz-\xi\hat{w}=(-j\xi B_z/\rho\omega)(\partial\hat{\psi}_z/\partial z) \quad \cdots\cdots(31)$$

$$\partial^2\hat{\psi}_z/\partial x^2-\xi^2\hat{\psi}_z+\partial^2\hat{\psi}_2/\partial z^2=-\sigma B_z\xi\hat{v} \quad \cdots\cdots(32)$$

(30), (31), (32)式の厳密解を得ることは困難であるため(31)式を(33)式で，(32)式を(34)式で近似する．（近似の妥当性についての検討をAppendix II に示す）

$$d\hat{v}/dz-\xi\hat{w}=0 \quad \cdots\cdots(33)$$

$$\partial^2\hat{\psi}_z/\partial x^2-\xi^2\hat{\psi}_z=-\sigma B_z\xi\hat{v} \quad \cdots\cdots(34)$$

(34)式を(35), (36)式で与えられる境界条件の下で解くと(37)式が得られる

$$\hat{\psi}_z=0 \qquad \text{at } x=\pm\ell \quad \cdots\cdots(35)$$

$$d\hat{\psi}_z/dx=0 \qquad \text{at } x=0 \quad \cdots\cdots(36)$$

$$\hat{\psi}(x,\ z)=(\sigma B_z\hat{v}/\xi)\cdot\{1-\cosh(\xi x)/\cosh(\xi\ell)\} \quad \cdots\cdots(37)$$

(37)式を(20)式に代入すると F_y は次式のように求められる．

$$F_y=-\sigma B_z^2\hat{v}\{1-\cosh(\xi x)/\cosh(\xi\ell)\} \quad \cdots\cdots(38)$$

(38)式から，y 方向の制動力は x 方向に分布していることがわかる．波動抑制のための平均の制動力として，ここでは(39)式で定義される平均値をとる．

$$\bar{F}_y = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} F_y\,dx \quad \cdots\cdots (39)$$

(38)式を(39)式に代入して積分を実行すると(40)，(41)式を得る．

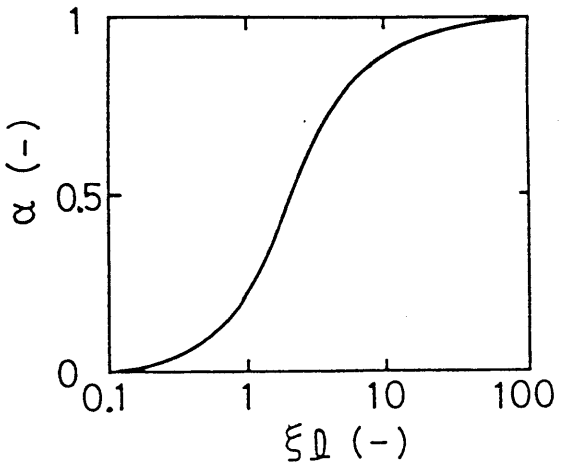
$$\bar{F}_y = -\alpha\,\sigma B_z^2 \hat{v}, \quad \alpha = 1 - \tanh(\xi\,\ell)/\xi\,\ell \quad \cdots\cdots (40),\ (41)$$

(40)式は(4)式と同様に流速と逆向きに働く力となっており，2．1の取り扱いと同様にして減衰定数が求められる．

$$D_m = \alpha\,\sigma B_z^2/2\rho \quad \cdots\cdots (42)$$

(20)式と(37)式から F_x を導出することはできるが，この解析では x 方向の波は無視しており，溶融金属の運動は y 方向と z 方向のみとしているため，ここでは考慮する必要はない．

(42)式を(10)式と比較すると，電流がループ状に流れるため(42)式の減衰定数には補正係数 α が含まれることになる．α は(41)式からわかるように容器の幅と定常波の波数の積に依存している．Fig. 4 に α の値に及ぼす $\xi\,\ell$ の依存性を示した．$\xi\,\ell = 1 \sim 10$ のところで α の値は急激に増加しており，絶縁壁の場合には，容器の幅と波数が減衰定数に大きな影響を与えることがわかる．なお，容器の幅が無限となれば $\alpha = 1$ となり(42)式は(10)式と一致する．



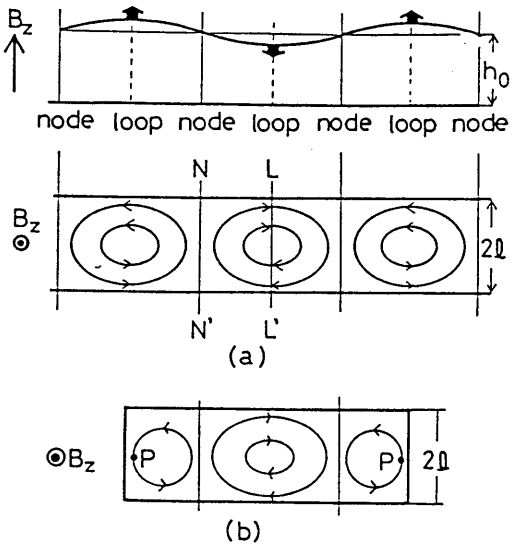
(ii) x 方向と y 方向に絶縁壁が存在する場合*

(i)で述べた解析は y 方向には無限に流体が存在していると仮定している．ここでは，

脚注* y 方向のみに絶縁壁が存在する場合も考えられるが，その絶縁壁は x 方向の電流に影響を及ぼさないため，2．1の結果と同じことになる．

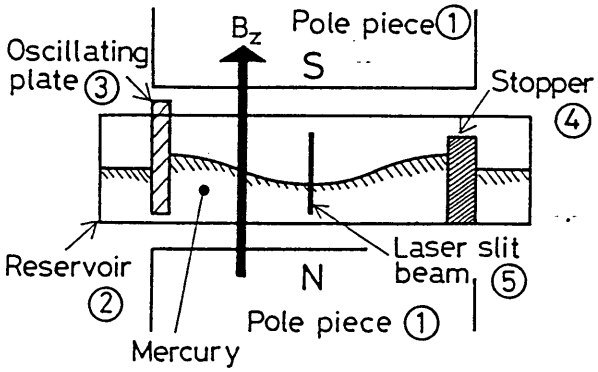
さらにy方向に絶縁体の壁が存在する場合についてその効果を定性的に述べる．

(15)，(29)，(37)式から求められる電流は，Fig. 5 (a)に示すように定常波の節から節までを一つのセルとしたループを形成する．従って，y方向に絶縁体の壁があれば電流ループは変形し(40)，(41)式は厳密には成立しなくなる．この場合，境界の位置が重要となる．図中に示す節の位置（N-N'）に絶縁壁が存在する場合には電流分布は影響を受けないことになるが，その他の位置，例えば腹の位置（L-L'）に存在する場合には，電流ループは壁によって妨害され，Fig. 5 (b)に示すように電流は(a)に示されているループよりも小さなものとなろう．さらに図中のP点においては電流と磁束の相互作用によって流体は加速される方向に力を受けることになるため減衰効果は(42)式の理論値よりも低減すると考えられる．

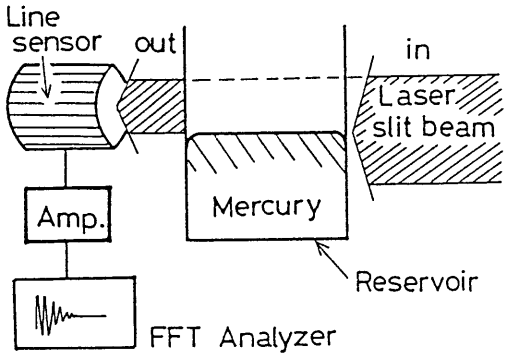


3．実験

2章で述べた理論解析の結果を検証するために，水銀を用いて減衰定数を求める実験を行った．Fig. 6に実験装置の模式図を示す．永久磁石①の磁極間に水銀の入ったアクリル製容器②を置き，振動板③を介して水銀を振動させ，振動数に応じてストッパー④の位置を調節して容器内に1波長の定常波が安定に形成されるようにした．その際，振動板とストッパーの位置は定常波の腹となることがわかった．2章で述べたように，波面の進行方向の電気的境界条件が表面波動の減衰挙動に大きく影響すると考えられるので，振動板とストッパーはアクリル製（絶縁体）のものとアルミニウム製（導電体）のものを用いて実験を行った．振動板によって定常波が形成されている状態から，振動板を停止さ



せ，レーザースリット光⑤を用いて波の腹の位置（振動板とストッパーの中心）の湯面高さの経時変化を測定した．測定系をFig. 7 に示す．容器の側面から入射されたレーザースリット光は，波高に比例して光量が減少する．これをラインセンサーにより検出し，FFT アナライザに入力する．アナライザにより周波数を測定し，定常波が形成される振動条件を定めたうえで，減衰挙動を測定した．実験条件を Table 1．に示す．磁極は80mm角であり，波長λはそれ以下に限られたのでλ＝65mmおよび70mmの条件の下で実験を行った．測定された減衰挙動の一例を Fig. 8 に示す．これらは，導体壁を用いて得られたものであり，図中の破線は振動板を止めた時刻である．(a)は磁場を印加しない場合であり，(b)，(c)はそれぞれ0.40T，0.47T印加した場合の減衰挙動を示した．減衰定数は(9)式からわかるように，振動減衰曲線の包絡線の値を対数にとり，時間軸に対してプロットした直線の傾きから求めることができる．以上の実験により求めた減衰定数の値を磁束密度の2乗に対して示したものが Fig. 9 である．(a)は振動板とストッ



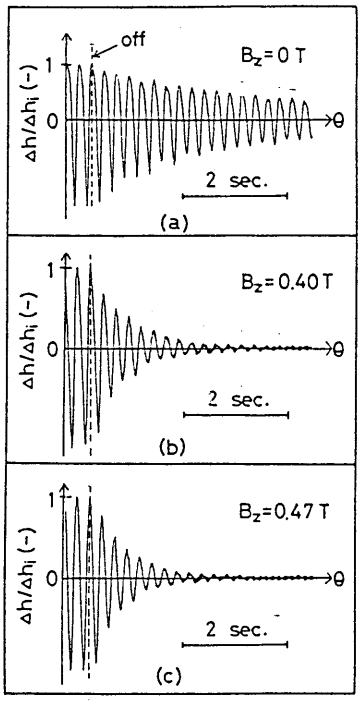
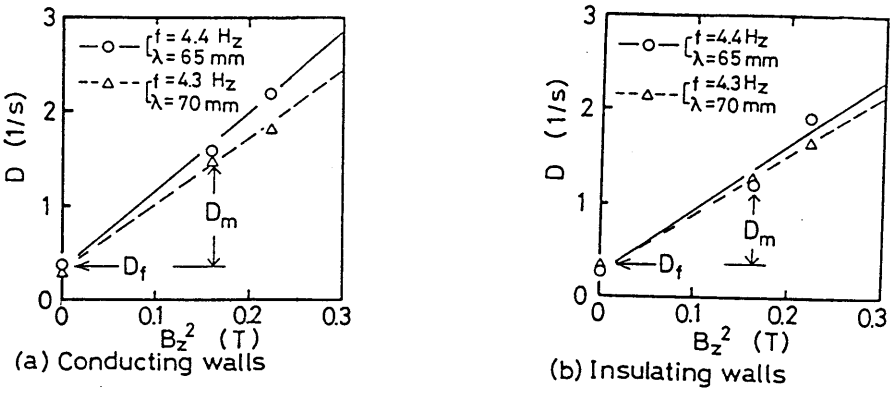
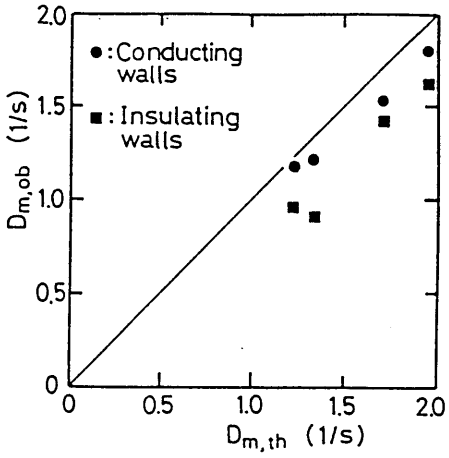


Table 1. Experimental conditions.

size of pole piece	: 80 mm x 80 mm
gap of pole pieces	: 40 mm
width of reservoir	: 20 mm
liquid depth	: 10 mm
frequency of wave motion	: 4.3 Hz ∿ 4.4 Hz
wave length	: 65 mm ∿ 70 mm
wave amplitude	: ∿ 2 mm
imposed magnetic field	: 0.4 T ∿ 0.47 T



パーが導体の場合であり，(b)は絶縁体の場合である．図からわかるように磁場が印加されていない場合（$B=0$）にも減衰定数D_fが存在するが，これは容器との摩擦および粘性消散による減衰と考えられる．減衰定数は，磁束密度の2乗に対してほぼ直線的に増加しており，(40)式の理論解析どうり磁場による減衰定数D_m（$=D-D_r$）が印加磁束密度の2乗に比例していることがわかる．(42)式との比較をFig. 10に示すが，絶縁壁の場合の減衰定数は導体壁の場合のそれよりも僅かに小さくなっており，導体壁の場合の値は理論値に近い値を示している．実験値が僅かながら理論値より小さな値となった理由の一つには理論解析で述べたように水平方向と鉛直方向の運動エネルギの交換が考えられる．



4．波動抑制効果についての検討

実際のプロセスでは種々の外乱によって波動が引き起こされる．ここでは，2章で展開した理論解析に基づいて，外乱が波動（振動）を伴うことなく減衰する過減衰抑制条

件について述べる．線形微小振幅波理論によれば，制動力が無い場合の重力波の分散関係は次式で表される．（誘導はAppendix Ⅲ 参照）

$$\omega^2 = g\,\xi \tanh(h_h 0\,\xi) \quad \cdots\cdots (43)$$

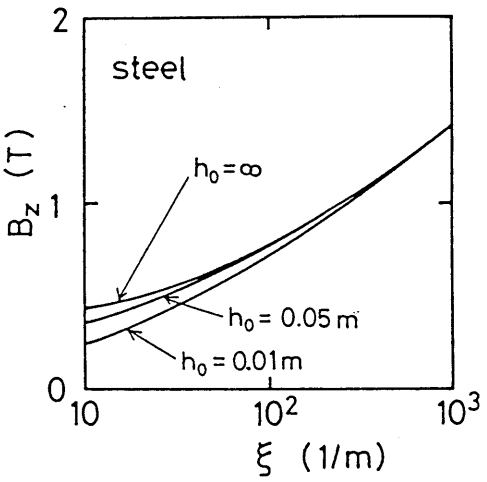
(43)式に電磁気力の効果を付け加えると次式が得られる．（誘導は Appendix Ⅲ 参照）

$$\omega^2 = -D_m^2 + g\,\xi \tanh(h_0\,\xi) \quad \cdots\cdots (44)$$

(44)式を使って，直流磁場による溶融金属の表面波動の抑制効果を見積ることができる．波動が抑制されるためには，周期が無限大になる必要がある．すなわち，ωが0となることが過減衰の条件であり，次式で表される．

$$D_m^2 = g\,\xi \tanh(h_0\,\xi) \quad \cdots\cdots (45)$$

Fig. 11に溶鋼が完全導体で囲まれた場合の直流磁場による過減衰となるための磁束密度B_zの値を波数ξに対して示す．なお，磁場による減衰定数は(10)式で表されるものとした．ξが増大するにつれてB_zの限界値は増加しており波長の短い波の抑制は困難であることがわかる．また，h_0が小さくなるにつれて，B_zの限界値が小さくなっていることがわかる．すなわち，浅水であるほどより小さな直流磁場で過減衰にできることになる．



5．結言

双ロール法やツインベルト法における溶湯プールの表面波動，アルミニウムや銅の鋳造分野で一部実用化されている電磁鋳造プロセスにおける溶湯保持部の表面波動，さらには，鋼の連続鋳造プロセスにおける溶湯－フラックス界面波動は安定した操業を妨害し，表面品質などを著しく劣化させる．本研究では上記のようなプロセスにおいて重要な課題となっている表面波動の直流磁場による抑制効果を定量化した．ここでは，溶融金属の表面波動抑制を目的として，表面に垂直に印加された直流磁場による波動の減衰

定数について理論解析を行った．また，水銀を使って表面波動の減衰挙動を調べる実験を行い，解析結果を検証した．その結果，次のことが明らかとなった．

(1) 減衰定数は(42)式で表され，磁束密度の2乗に比例する．

(2) 溶融金属の容器が絶縁壁の場合には，導電体壁の場合に比較して制動力が小さくなることを理論的に予測し，実験によって確認した．

(3) 溶融金属が導電体壁で囲まれた場合について，表面に波動を生じせしめないために必要となる最小磁束密度を線形小振幅波理論に基づいて求めた．

最後に，本研究の研究費の一部は，文部省科学研究費補助金，一般研究(B)(No.61470056)および日本鉄鋼協会特定基礎研究会「電磁気冶金の基礎研究部会」の援助によっていることを付記して謝意を表します．

[Appendix Ⅰ]

(14)式の両辺に（$\nabla\times$）を作用させ，(11)式と(15)式を用いると次式を得る．

$$\nabla\times\nabla\times\psi=-\sigma\,\partial B/\partial t+\sigma\,\nabla\times(v\times B)\cdots\cdots\text{(A-1)}$$

ベクトル演算と(16)式により左辺は次のようになる．

$$\nabla\times\nabla\times\psi=(\nabla\cdot\psi)\psi-\nabla^2\psi=-\nabla^2\psi\cdots\cdots\text{(A-2)}$$

直流磁場を印加していることと誘導電流により生じる磁場が印加磁場に較べて十分に小さいこと（磁気レイノルズ数 $R_{em}\ll 1$ による）から（A-1）式の右辺第1項は無視することができる．また，第2項はベクトル演算と(12)式と(21)式により次式のようになる．

$$\begin{aligned}\nabla\times(v\times B)&=v(\nabla\cdot B)-B(\nabla\cdot v)+(B\cdot\nabla)v-(v\cdot\nabla)B\\&=(B\cdot\nabla)v-(v\cdot\nabla)B\cdots\cdots\text{(A-3)}\end{aligned}$$

誘導電流によって生じる磁場を無視すると，$(v\cdot\nabla)B=0$ となるので，(A-1)式に(A-2)式と（A-3）式を代入することにより(17)式を得る．

[Appendix Ⅱ]

2．1の解析においては(2)式より $\hat{\psi}_z$ は次式となる．

$$\hat{\psi}_z=(\sigma B_z\hat{v}/\xi)\cdots\cdots\text{(A-4)}$$

(31)式の $\hat{\psi}_z$ を近似的に（A-4）式で評価すれば(31)式の右辺と左辺第1項との比は $2D_m/\omega$ となる．本実験系では，この値は約0.1と小さいので右辺を無視して(33)式とした．

(32)式も同様に（A-1）式を代入すると，左辺第3項の右辺に対する比は1となり，(34)式はかならずしも妥当とは言えないことになる．しかしながら，絶縁体壁により J_x は（A-4）式に示した導体壁の場合よりも減少するため，$\hat{\psi}_z$ も（A-4）式の値より小さな値であると考え，(32)式を(34)式で近似した．

[Appendix Ⅲ]

ここでは，線形微小振幅波理論[17] に基づいて分散関係の導出を行う．渦なしの流れを仮定して速度ポテンシャル ϕ を導入する．

$$v = -\nabla \phi \quad \cdots\cdots (A\text{-}5)$$

連続の式より ϕ に関してラプラスの方程式が成立する．

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \cdots\cdots (A\text{-}6)$$

FIg. 1 に示すように底（$z=0$）では w は零であるので ϕ の境界条件は次式となる．

$$\partial \phi / \partial z = 0 \qquad \text{at} \quad z = 0 \quad \cdots\cdots (A\text{-}7)$$

ϕ の解は次のようになる．

$$\phi = C\cosh(\xi z)\cos(\xi y)\exp(-j\omega\theta) \quad \cdots\cdots (A\text{-}8)$$

ここで本文中の解析と同様に，y に関しては余弦関数を仮定し θ に関しては指数関数を適用した．

(24)式の運動方程式は外力がない場合には ϕ を用いて次のように表される．

$$\rho\, \partial / \partial \theta (-\nabla \phi) = -\nabla p + \nabla(-\rho g z) \quad \cdots\cdots (A\text{-}9)$$

ここで，重力によるポテンシャルを右辺第 2 項のように表すことにする．(A-9) 式は，ベルヌーイの式を与える．

$$\rho\, \partial \phi / \partial \theta = p + \rho g z \quad \cdots\cdots (A\text{-}10)$$

自由表面では $p = 0$ であるので次式を得る．

$$\rho\, \partial \phi / \partial \theta |_{z=h} - \rho g h = 0 \quad \cdots\cdots (A\text{-}11)$$

また，表面 h の時間微分は表面での流速を与えるので次の関係が得られる．

$$\partial \phi / \partial z |_{z=h} = -\partial h / \partial \theta \quad \cdots\cdots (A\text{-}12)$$

(A-11) 式と (A-12) 式から h を消去し，振幅が小さいことを考慮して，$h = h_0$ すると次式を得る．

$$\{\partial \phi / \partial z + (1/g)(\partial^2 \phi / \partial \theta^2)\}_{z=h_0} = 0 \quad \cdots\cdots (A\text{-}13)$$

(A-13) 式は Cauchy-Poisson の条件式と呼ばれており，(A-8) 式を代入することにより(43)式の分散関係が得られる．

(40)式で与えられる制動力を次のように書き換える．

$$F = 2\rho D_m \cdot \nabla \phi \quad \cdots\cdots (A\text{-}14)$$

(A-14) 式は，厳密には y 方向のみで成立し，x，z 方向では成立しない．しかしながら，y 方向の運動エネルギが z 方向のそれに較べて大きいので近似的に (A-14) 式が成立するものと仮定する．(A-14) 式を用いれば (A-11) 式の導出と同様に次式が得られる．

$$\rho\, \partial \phi / \partial \theta |_{z=h} - \rho g h + 2\rho D_m \phi |_{z=h} = 0 \quad \cdots\cdots (A\text{-}15)$$

(A-12) 式と (A-15) 式から修正 Cauchy-Poisson の条件式として (A-16) 式が成立する．

$$\{\partial\phi/\partial z+(1/g)(\partial^2\phi/\partial\theta^2+2D_m\partial\phi/\partial\theta)\}_{z=h_0}=0 \quad \cdots\cdots(\text{A-16})$$

(A-8) 式を (A-16) 式に代入し，ω の虚部が $-D_m$ ($\omega=\omega_r-jD_m$) であることを考慮すると(44)式の分散関係を得る．

記号

$\boldsymbol{B}, B$ ：磁束密度 (T)

D ：減衰定数 (1/s)

D_f ：壁との摩擦等による減衰定数 (1/s)

D_m ：磁場による減衰定数 (1/s)

$\boldsymbol{F}$ ：電場 (A/m)

f ：周波数 (Hz)

$\boldsymbol{F}$ ：電磁体積力 (N/m^3)

$\bar{F}_y$ ：x 方向に積分平均した体積力 (N/m^3)

g, g ：重力加速度 (m/s^2)

h ：液深 (m)

h_0：静止状態での液深 (m)

$\Delta h, \Delta h_i$ ：波の振幅，およびその初期値 (m)

$\boldsymbol{J}$ ：誘導電流密度 (A/m^2)

j ：虚数単位 (−)

2ℓ：容器の幅 (m)

$p, \hat{p}$ ：溶融金属内部の静圧 (Pa)

$v, \hat{v}$ ：流速の y 方向成分 (m/s)

$w, \hat{w}$ ：流速の z 方向成分 (m/s)

α ：導体壁に対する絶縁壁の補正係数 (−)

η ：任意の位置での y 方向の変位 (m)

θ ：時間 (s)

θ_0：波の周期 (s)

λ ：波の波長 (m)

ξ ：波の波数 (1/m)

ρ ：溶融金属の密度 (kg/m^3)

σ ：溶融金属の導電率 ($1/\Omega\cdot m$)

ϕ ：速度ポテンシャル (m^2/s)

ψ, ψ_z ：電流密度のベクトルポテンシャル (A/m^3)

ω ：波の角周波数 (1/s)

ω_r ：ω の実数部 (1/s)

文献

1）草川隆次，山本博之，田中　悟，柳　義博：鉄と鋼，70 (1984)，S969

2）竹本弘郷，坂口治男，末広照善，大西邦彦，長井邦雄，橋本俊英，毛利勝一：鉄と鋼，72 (1986)，S143

3）岡嵜　卓，小出優和，井上雄二，高本　勉，浅里孝志：鉄と鋼，72 (1986)，S140

4）糸山誓司，中戸　参，野崎　努，垣生泰弘，別所永康：鉄と鋼，71 (1985)，A249

5）D.G.Goodrich, J.L.Dassel and R.M.Shogren: J.Met., (1982) May, p.45

6）Ch.Vives and R.Ricou: Metall. Trans. B, 16 (1985), p.377

7）浅井滋生，小塚敏之，鞭　巌：鉄と鋼，72 (1986) 16, p.2218

8）小塚敏之，浅井滋生，鞭　巌：鉄と鋼，74 (1988)

9）松下　昭，磯上勝行，二宮健嘉，天満雅美，林田道弥，堤　一彦：鉄と鋼，73 (1987)，

S200
10) J.A.Shercriff: A TEXTBOOK OF MAGNETOHYDRODYNAMICS (1965), p79 [PERGAMON PRESS]
11) M.Garnier and R.Moroeu: J.Fluid Mach., 127 (1983), p365
12) 林田道弥，尾野　均，堤　一彦：鉄と鋼，73 (1987)，S686
13) 小塚敏之，浅井滋生：鉄と鋼，72 (1986)，S1652
14) 日本鉄鋼協会特定基礎研究会：第7回電磁気冶金の基礎研究部会（1987年10月），新日本製鉄株式会社（私信）
15) 六車俊範，小林純夫：鉄と鋼，73 (1987)，S1448
16) 原島　鮮：力学Ⅰ(1973)，p63［裳華房］
17) バーナード・ル・メオーテ：応用流体力学入門（1979），p212［東京大学出版会］