基礎的及び応用的数値アルゴリズムの総合的研究

（研究課題番号　04302008）

平成４・５・６年度文部省科学研究費補助金（総合研究Ａ）
研究成果報告書

1995年３月

研究代表者　三　井　斌　友
（名古屋大学・人間情報学研究科）

KAKEN
04302008

はしがき

本報告書は平成4・5・6年度文部省科学研究費補助金

総合研究（A）「基礎的及び応用的数値アルゴリズムの総合的研究」
（研究課題番号　04302008）

の研究成果報告書である．本研究の研究組織および研究経費は次の通りであった．

研究組織

研究代表者 三井　斌友（名古屋大学大学院・人間情報学研究科・教授）

研究分担者 牛島　照夫（電気通信大学・電気通信学部・教授）
岡本　久　（京都大学・数理解析研究所・教授）
河原田秀夫（千葉大学・工学部・教授）
篠原　能材（徳島大学・工学部・教授）
田辺　國士（文部省・統計数理研究所・教授）
中尾　充宏（九州大学大学院・数理学研究科・教授）
中島　正治（鹿児島大学・理学部・教授）
名取　亮　（筑波大学・電子情報工学系・教授）
室田　一雄（京都大学・数理解析研究所・教授）
森　正武　（東京大学・工学部・教授）
山本　哲朗（愛媛大学・理学部・教授）

研究経費

平成４年度	３，４００千円
平成５年度	３，６００千円
平成６年度	２，０００千円
計	９，０００千円

本研究における成果の一部は，他の総合研究班との合同で開催された下記の研究集会において発表されている．

1. 応用数学合同研究集会

1992年12月24日（木）—26日（土）

於　京都大学数理解析研究所　115号室および420号室
京大会館212号室
京都大学理学部数学科大会議室

研究発表　54件
参加者　151名

共催研究班

総合研究（A）「組合わせ論の総合的研究」
課題番号　04302011
研究代表者　榎本　彦衛
総合研究（A）「離散的計算機数学の総合的研究」
課題番号　03302011
研究代表者　有川　節夫
総合研究（A）「プログラム基礎理論の総合的研究」
課題番号　02302009
研究代表者　佐藤　雅彦
総合研究（A）「応用解析と計算数学の総合的研究」
課題番号　03302009
研究代表者　西田　孝明
総合研究（A）「科学技術における数値的手法の総合的研究」
課題番号　02302011
研究代表者　牛島　照夫

2. 応用数学合同研究集会

1993年12月20日（月）—22日（水）
於　京都大学数理解析研究所　115号室および420号室
研究発表　66件
参加者　182名

共催研究班

総合研究（A）「計算機プログラムの理論的基礎の総合的研究」
課題番号　05302011
研究代表者　辻　尚史
総合研究（A）「組合わせ論の総合的研究」
課題番号　04302011
研究代表者　榎本　彦衛
総合研究（A）「非線形構造とその科学計算の総合的研究」
課題番号　05302013
研究代表者　池田　勉

3. 応用数学合同研究集会

1994年12月20日（火）—22日（木）
於　龍谷大学瀬田キャンパス　ＲＥＣ　ＨＡＬＬ
研究発表　81件
参加者　162名

共催研究班

総合研究（A）「アルゴリズム論に関する総合的研究」
課題番号　06302013
研究代表者　小林　孝次郎
総合研究（A）「計算機プログラムの理論的基礎の総合的研究」
課題番号　05302011
研究代表者　辻　尚史
総合研究（A）「組合わせ論の総合的研究」
課題番号　04302011
研究代表者　榎本　彦衛
総合研究（A）「大規模科学技術計算の数理に関する総合的研究」
課題番号　06302016
研究代表者　三好　哲彦
総合研究（A）「非線形構造とその科学計算の総合的研究」
課題番号　05302013
研究代表者　池田　勉

これらの研究発表の記録は，それぞれ「応用数学合同研究集会報告集」として印刷公表されている．

研究成果報告書

目次

第1部　研究分担課題別報告

第2部　研究集会の記録

第 1 部研究分担課題別報告

研究分担課題「常微分方程式系の数値解析」

研究代表者　名古屋大学大学院・人間情報学研究科　教授　三井　斌友

本研究代表者は，総合研究全般にわたる取りまとめを行いつつ，上記の研究課題とその関連事項について，研究協力者の助力をえて研究を進めてきた．以下にその概要を報告する．

1　常微分方程式系に対する並列アルゴリズム

常微分方程式系に対する離散変数法では，数値解の正確さと数値的安定性が矛盾する要求として課されることが多い．これを統一的に解決できるひとつの方法として，陰的 Runge-Kutta 法（implicit Runge-Kutta methods, IRK）がある．しかし，この場合は各ステップ毎の内部反復過程が必要になり，計算の手間，すなわち計算時間が増大する．そこで，近年発展しつつある並列アーキテクチャによる計算機の応用によって，この課題に対処することは有望であり，アルゴリズムにおける並列化が可能性を秘めている．

本研究では，3 段 4 次並列化 IRK として，すでに 92 年に後藤彰の修士学位論文においてまとめたアルゴリズム ([11]) を引き継ぎ，移流拡散型偏微分方程式の初期値・境界値問題の並列化に取り組んだ．F. OLIVEIRA (Coimbra, Portugal) との共同研究で，拡散係数が小さい場合，移流項から与えられる特性曲線に沿う空間差分を採用し，時間方向に連立常微分方程式の初期値問題を作る．このような定式化は，問題を特性曲線を解く stage，連立常微分方程式初期値問題を解く stage のおのおので並列化を可能にしている．研究協力者・中島学（名古屋大学大学院生）の協力のもとで，モデル問題を CONVEX C3840 (4 CPU) で解いた結果は，並列化効率 80 %を達成することができた ([12])．しかし，特性曲線に沿う差分法のために数値的安定性にまだ問題が残っており，引き続いて研究を行っている．

また，N.H. CONG (Hanoi, VietNam) との共同研究において，選点型 2 段階 Runge-Kutta 法 (collocation-type two-step Runge-Kutta methods) の提起をおこなった ([1])．基本的な考え方は，IRK の implicit relations を適切に分離し，前のステップの函数値を線型関係で取り入れることによって，次数と安定性を保ちながら新たなタイプの RK 法を構成したものである．この方法は並列化を導入できる構成になっているので，今後その方向での検討を共同研究者と進めることを計画している．

2　symplectic な離散変数法

Hamiltonian formalism に基づく力学系は常微分方程式系として表現されるが，それは symplectic structure を保存するという著しい特徴を有する．この構造を数値アルゴリズムとしても保存する symplectic integrator が，注目されている．代表者は研究協力者・杉浦洋および斎藤理史（ともに名古屋大学工学部）とともに，symplectic integrator となる IRK 法について研究を行ってきたが ([13], [14], [10])，そうした方法を非線型物理学でえられる，

特徴ある問題に応用することをてがけた．共同研究者である曹　策問（鄭州・中国）の提案した「非線型化法 (nonlinearization)」によれば，階層 (hierarchy) をもつ完全可積分系は involutive Hamiltonian pair を生成する．これを用いると，ソリトン方程式のソリトン解を，非経験的に，Hamilton 正準方程式の組に対する初期値問題を解くことによってえられる．まず研究協力者・二上啓一郎（名古屋大学大学院生）の協力のもとで，代表的なソリトン方程式である Korteweg-de Vries (KdV) 方程式の多ソリトン解を，対応する非可分 Hamilton 系を symplectic RK によって数値的に計算し，またその誤差の逆解析 (backward error analysis) を行って，打切り誤差を含む symplectic IRK が厳密に生成している Hamiltonian を求め，本来の Hamiltonian との関係を解析した ([2])．

また，曹　策問ならびに共同研究者・伍　詠棠（香港）と協力し，もうひとつの代表的ソリトン方程式である非線型 Schrödinger 方程式に対しても計算を実施しており，その一部は論文として投稿中である．

3　確率微分方程式の離散解法

確率的な揺らぎを含む発展過程を記述する確率微分方程式 (SDE) の時間離散近似解に関して，協力者・齊藤善弘（聖徳女子短大）および小守良雄（名古屋大学大学院生）とともに研究を進めてきた．SDE は，応用上の重要さからも，数値シミュレーションが必要であるが，その基礎は必ずしも十分解析されてこなかった．すでに strong sense での order of accuracy に関して考察 ([16], [18]) を行ってきた代表者らは，それに対する擬似正規乱数の影響を統計的に調べる試みを与えた ([19])．

また，確率振動方程式のための数値スキームの考察と，その ROW 型への発展をめざし，2 次元テスト方程式を設定し，確率解析と数値実験の両面からその有効性を確かめた ([6],[7])．

さらに，数値スキームの次数決定の条件が，常微分方程式の場合と並行になることに着目し，木解析 (rooted tree analysis) の方法を導入することによって，次数条件式群を系統的・代数的に導いた．SDE の初期値問題に関して，Wong-Zakai 近似が知られている．これは，強いスキームが収束する先として作られたものであるが，Wiener 過程の増分を線型近似しているので，常微分方程式の発展形式と扱うことができる．そこで SDE に対する Runge-Kutta スキームの次数条件の代数的取扱いが，常微分方程式の場合の木解析 (rooted tree analysis) と平行にできることに着目し，それを二色木 (bicolour rooted tree) として実現した ([21])．さらに一般の SDE に対する Runge-Kutta 型のスキ-ムでも，弱いスキームを扱えば，木解析は可能であることを明らかにし，二色木と 4 個のラベルを導入することによって，その次数条件を代数的に求めうることを導いて，ROW 型公式に対してそれを実際に示した ([8])．これはスキーム設計を易しくするという工学的な観点から見ても，重要である．

数値スキームの安定性に関しても，安定性に対する基準に関して引き続き研究を行ってきた．上述の 2 次元テスト方程式もその一環であるが，安定性概念として，まず MS安定性を導入した．これは，mean-square の意味での安定性であり，誤差の平均二乗ノルムが縮小することを要請する ([20])．さらに，数値スキームの生成する軌道毎の安定性である T安定性の概念を提起し，いくつかの具体的スキームに関してその条件を導いた ([17])．また，常微

分方程式における数値スキームの A 安定性に対応する強い安定性に関して，その領域を図式化することで安定性基準を見いだす方法を開発しつつある．

これらの成果を踏まえて，齊藤善弘は博士学位請求論文 ([15]) を作成した．

4　差分微分方程式の数値解析

代表者は，胡　広大 (名古屋大学大学院生) と協力して，差分微分方程式 (delay-differential equations, DDEs) の数値解法の研究，特にその安定性に関する考察をおこなってきた．そのためには常微分方程式の場合と同様に，DDEs の解析的な安定性の十分条件を明らかにする必要があるので，連立線型系に対する特性方程式の根の分布条件として，複素函数論における最大値原理を応用し，係数行列がもつ特性量から定まる，複素平面での或る領域の境界上のみの函数値評価を基準とできることを示した ([3])．さらに，中立型 (neutral)DDEs に Runge-Kutta あるいは線型多段階法を適用した時の，安定性の十分条件を導くことができ，これらの方法が常微分方程式に適用された場合の A 安定性との対応関係を示すことができた ([4])．

制御理論をはじめ，応用の広い差分微分方程式に対する数値アルゴリズムの特性の解明をめざし，さらに研究を進めつつある．

5　精度保証型の数値スキーム

常微分方程式，特にその初期値問題に対する数値アルゴリズムの自己検証的組み立てについては，まだ研究成果が少ない．これは境界値問題と比べて不動点定理の適用が難しいことにある．研究協力者・石原雄一 (名古屋大学大学院生) とともに，この困難を一段階法を使いながら，巧妙に克服している LOHNER のアルゴリズムを，区間演算ソフトウェア C-XSC の上に実装することを試みた ([5])．真の解を確実に包含する区間を生成することは実際に可能であることは確認できたが，その実用性を高めるためには，一層の解析が必要である．

なお代表者は，従来の研究成果全般を踏まえながら，常微分方程式の数値解析への関心に答えるべく，常微分方程式系の数値解析の入門書として，岩波講座応用数学の分冊を担当執筆した ([9])．

計算数理科学の要求に応え，複雑な現象を確実にシミュレーションしてゆくためには，常微分方程式系とそれに関連する方程式系に対するアルゴリズムの能力を，一層高めることが求められている．この3年間にこうした要求に見合った進展をある程度達成できたのではないかと自負しているが，まだまだ残された課題は多く，さらに周辺研究領域の研究者と共同しながら発展を図りたいと願っている．

発表論文等

[1] N. H. Cong & T. Mitsui, Collocation-based two-step Runge-Kutta methods, to appear in *Japan J. Industr. Appl. Math.*

[2] 二上啓一郎，ハミルトン力学系に対するシンプレクティック数値積分法とそのソリトン方程式への応用，名古屋大学大学院人間情報学研究科物質・生命情報学専攻修士論文，1995.2.

[3] G.-D. Hu & T. Mitsui, Stability analysis of discrete-delay and delay-differential equations: Boundary criteria, Preprint Series in Math. Sci., SIS & GS-HI, Nagoya Univ., No.2, July 1994.

[4] G.-D. Hu & T. Mitsui, Stability regions of numerical methods for systemns of neutral delay-differential equations, Preprint Series in Math. Sci., SIS & GS-HI, Nagoya Univ., No.8, January 1995.

[5] 石原雄一，区間演算を用いた常微分方程式初期値問題の包含的数値解法，名古屋大学大学院人間情報学研究科物質・生命情報学専攻修士論文，1995.2.

[6] 小守良雄，確率微分方程式の Runge-Kutta 型数値スキームの研究，名古屋大学大学院工学研究科情報工学専攻修士論文，1993.2.

[7] Y. Komori, Y. Saito & T. Mitsui, Some issues in discrete approximate solution for stochastic differential equations, Computers Math. Applic., **28**(1994), no.10-12, 269-278.

[8] Y. Komori, H. Sugiura & T. Mitsui, Rooted tree analysis of the order conditions of ROW-type scheme for stochastic differential equations, Preprint Series in Math. Sci., SIS & GS-HI, Nagoya Univ., No.7, November 1994.

[9] 三井斌友，微分方程式の数値解法 I，岩波講座応用数学［方法　3］，岩波書店，東京，1993（分冊責任執筆）.

[10] T. Mitsui, Symplectic numerical methods for dynamical systems and their applications, SEA Bull. Math., **19**, No. 3, (1995), 37-49.

[11] T. Mitsui & A. Goto, Parallel numerical methods for initial-value problems of ODEs, *Proceedings of the First China-Japan Seminar on Numerical Mathematics* (ed. by Z.-C. Shi and T. Ushijima), Series on Applied Mathematics Vol. 5, World Scientific Publ., 1993, pp93 - 108.

[12] 中島　学，移流拡散方程式の特性曲線に沿った差分法とその並列化の研究，名古屋大学大学院工学研究科情報工学専攻修士論文，1994.2.

[13] S. Saito, H. Sugiura & T. Mitsui, Butcher's simplifying assumption for symplectic integrators, *BIT,* **32**(1992), 345-349.

[14] S. Saito, H. Sugiura & T. Mitsui, Family of symplectic implicit Runge-Kutta formulae, *BIT,* **32**(1992), 539-543.

[15] 齊藤善弘，確率微分方程式の時間離散近似解法に関する研究，名古屋大学大学院工学研究科に提出した博士学位請求論文，1995.2.

[16] 齊藤善弘・三井斌友，確率微分方程式の離散近似，日本応用数理学会論文誌，**2**(1992), no.1, 1-16.

[17] Y. Saito & T. Mitsui, T-stability of numerical scheme for stochastic differential equations, WSSIAA **2**(1993), "Contributions in Numerical Mathematics" (ed. by R.P. Agarwal), World Scientific Publ., pp333-344.

[18] Y. Saito & T. Mitsui, Simulation of stochastic differential equations, *Ann. Inst. Statist. Math.,* **45**(1993), 419-432.

[19] 齊藤善弘・三井斌友，確率微分方程式の数値スキームの誤差における統計的部分，日本応用数理学会論文誌，**4**(1994), no.2, 127-139.

[20] Y. Saito & T. Mitsui, Stability analysis of numerical schemes for stochastic differential equations, to appear in *SIAM J. Numer. Anal.*

[21] Y. Saito & T. Mitsui, S-series in the Wong-Zakai approximation for stochastic differential equations, to appear in *J. Mathematics (ViteNam).*

研究分担課題

「定常及び発展問題の数値アルゴリズム」

研究分担者　電気通信大学電気通信学部　教授　牛　島　照　夫

本研究分担者は、上記の研究課題とその関連事項につき複数の研究協力者の助力を得て研究を進行させた。その活動の要として本学情報工学科情報数理工学講座において、１９９２年度２３回、１９９３年度２１回および１９９４年度１９回にわたって電気通信大学数値解析研究会を開催した。この研究会を中心として研究活動を実施した。

研究の実際においては、水の表面波を解析するときに出会う線形問題を題材にして、モード解析手法を総合的に追究した。ポテンシャル問題の数値計算を有限要素法、境界要素法、差分法などの各種の離散化手法によって研究して、さらに無限領域問題および角のある有界領域等の特異性のある領域での有限要素近似の数学解析と数値計算に取り組んだ。近似解の真の解への収束率を数値的に測定する手法を考案し、有効性を検討した。さらに、発展問題の数値アルゴリズムの研究として、移流拡散問題の差分近似問題の安定性を研究した。以下主要発表論文につき解説する。

（１）水の波の線形発展問題の数値アルゴリズムの抽象的取扱い

容器内に閉じ込められた水の運動を無限小振幅仮定の下に解析するときに出会う水の波の線形問題は、水の流速のポテンシャル関数ｕを未知関数とする初期値境界値問題である。この問題を、静止水面上の二乗可積分関数の作るヒルベルト空間に値を取る二階線形定作用素係数発展問題として定式化し、有限要素近似問題を考察する。この発展問題の支配作用素は、いわゆる、スチェクロフ作用素である。より詳しくは、水域の内部で調和で、容器内では、斉次ノイマン条件を満たす関数ｕの静止水面上の値を、そこでの外向き法線導関数の値に対応させる作用素である。この問題はヒルベルト空間に値を取る保存型定作用素係数二階線形発展問題として取り扱える。時間方向の近似をニューマークの方法として研究し

た。支配作用素が、一階の擬微分作用素であることから、従来のエネルギー法や半群理論による近似理論の手法は水の波問題に適用するのに困難があることを付記する。

関数解析の手法を援用してこの問題の誤差評価を行うに際しての指導原理は標語的に、「近似問題における支配作用素のレゾルベントの、連続問題における支配作用素のレゾルベントに収束する速さが、対応する作用素の分数べきの収束の速さ、さらには、対応する発展問題の解の収束の速さに適切に反映される」と述べることが出来る。この抽象理論の整備の状況を報告したものが論文［a-1］、［a-2］、［a-3］である。これらの結果を踏まえて、指導した儀我美保子（旧姓、松木）は博士学位請求論文［d-2］を作成した。

（２）水の波線形固有値問題の数値アルゴリズムの誤差評価と数値計算

水の波の線形問題における定在波は、その非定常問題の非斉次項を時間に関して調和なものとして置く事から自然に導かれる。それは、静止水面上の二乗可積分関数の作るヒルベルト空間における非負値自己共役作用素として実現されるスチェクロフ作用素の固有値問題として把握出来る。ガレルキン近似の手法で導かれる近似問題の誤差評価とその数値計算の実際を追究した。

有限要素法における自己共役楕円型偏微分作用素の固有値問題を取り扱うときの、レイリー商に対するミニマックス原理にもとづく、標準的な誤差評価理論を適切に変更修正して、先験的な誤差評価をする手法を整備した。軸対称水域における水の波固有値問題に対しても理論を整備し数値計算を実行した。解くべき偏微分方程式の解の正則性が収束の速さに反映されることを観察することが出来た。この際用いた数値的な収束率の測定法は次の様に述べられる。

三角形分割の代表的長さをｈとするときの解ｕ（ｈ）と真の解ｕとの差ｕ（ｈ）－ｕのしかるべきノルムの挙動は、ｕ（ｈ）－ｕ（ｈ／２）の対応するノルムの挙動に反映されている筈であるとの見通しの下に上記の数値計算では、ｕ（ｈ）－ｕ（ｈ／２）のノルムを数値的に計算する事によってｕ（ｈ）－ｕのノルムの収束率を推定している。

これらの結果を報告したものが論文［a-4］である。指導した符儒徳はこれらの結果を踏まえて博士学位請求論文［d-1］を作成した。

（３）スチェクロフ作用素と領域分割法

有界な台を持つ関数を非斉次項とするポアッソン方程式をモデル問題として外部領域問題の有限要素近似法の数学解析と数値計算を大学院生横松大作達と共に進行させた。非斉次項の台を含む充分大きな円の境界を仮想境界として、そこでラプラス方程式の外部問題が定めるスチェクロフ作用素を用いて非局所境界条件を与えた問題を、弱定式表現し有限要素法で離散化するという考え方である。

数値的に測定した収束率を用いて計算結果の精度を向上する事、さらにはその収束率の情報を微分方程式の解の微分可能性などの定性的性質へひき移す事などを、模索しつつ研究を進めている。この結果の一部を、論文［a-5］として発表した。

研究協力者小山大介は、凹角を境界にもつ領域におけるラプラス方程式の数値解法にこの手法を適用して良好な数値結果を得、口頭発表［b-1］した。二次元水域の水底が凹角を持つときも同様な手法が適用できる。指導した大学院生谷本勝彦、及び小山大介と協力して数値計算をし口頭発表［b-3］した。二次元完全流体の物体周り流れの計算など順次に適用可能性を検討してきた。その状況は、１９９３年度及び１９９４年度の応用数学合同研究集会などで報告してきた（口頭発表［b-2］、［b-4］）。

（４）移流拡散問題の数値アルゴリズムの安定性

発展問題に関して空間一次元移流拡散差分スキームを大学院生名古屋靖一郎と共同で研究した。空間方向の差分は等間隔五点公式のある一般形である。二乗平均ノルムの意味での安定性の必要十分条件を得た。この際あるしきい値以下の低周波成分を無視して計算可能な周波数成分のなかで相対的に高周波の成分に対する安定性を意味するε－安定性という概念を提出し、この意味での必要十分条件を求めた。この研究の理論的部分は、論文［ 6］として発表した。

この理論結果を手がかりにして、三次精度上流差分において、河村型差分公式は、標準型に比して次の点で優れているとの結論に達した。「河村型は、ナビエ・ストークス方程式に代表される二次の非線形項を含む流れのシミュレーションにおいて短波長成分の数値計算が、標準型に比較してより適切に行われる。」

研究成果報告リスト

（ａ）学会誌等

1) T. Ushijima and M. Matsuki : Fully discrete approximation of a second order linear evolution equation related to the water wave problem, in: H. Komatsu, ed., Functional Analysis and Related Topics, 1991, Proceedings of International Conference in Memory of Professor Kosaku Yosida held at RIMS Kyoto Univ., Lecture Note of Mathematics, Vol.1540, Springer, pp. 361-380 (1993).

2) M. Matsuki, T. Ushijima : A note on the fractional powers of operators approximating a positive definite selfadjoint operator, Journal of the Faculty of Science, The University of Tokyo, Sec. IA, Mathematics, Vol. 40, No. 2, pp. 517-528 (1993).

3) M. Matsuki, T. Ushijima : Error estimation of Newmark's method for conservative second order linear evolution equation, the Proceedings of the Japan Academy, Vol. 69, Ser. A, No. 7, pp.219-223 (1993).

4) 符儒徳、牛島照夫　：　軸対称容器内の水の波固有値問題の有限要素計算－収束率の数値的測定－、日本応用数理学会論文誌、第３巻、第３号、pp. 257-277 (1993).

5) T. Ushijima, A. Ajiro and D. Yokomatsu : A finite element method for the Poisson equation in a planar exterior domain, pp.76-90, in: K. Feng and Z-C. Shi, eds., Proceedings of the International Conference Computation of Differential Equations and Dynamical Systems, held in Beijing, September, 1992, Series on Applied Mathematics, Vol. 4, World Scientific, Singapore-New Jersy-London-Hong Kong, 1993.

6) S. Nagoya and T. Ushijima : Stability analysis for a family of space one dimensional convection diffuusion difference schemes, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, Vol.12, No.1, pp.1-28 (1995).

（ｂ）口頭発表

1) 小山大介、加古孝、牛島照夫　：　ラプラス方程式の有限要素近似における角の取り扱いについて、日本数学会１９９３年度年会応用数学分科会講演アブストラクト、pp.147-150, １９９３年3月２８日。

2) 牛島照夫、小山大介、横松大作、谷本勝彦　：　スチェクロフ固有値問題と数値計算、１９９３年度応用数学合同研究集会報告集、pp.149-154, １９９３年１２月２１日。

3) 小山大介、谷本勝彦、牛島照夫　：　凹角のある水域における水の波線形固有値問題の有限要素解析、第２３回数値解析シンポジウム講演予稿集、pp.27-30, １９９４年6月8日。

4) 牛島照夫、小山大介、横松大作、顔立祥　：　スチェクロフ固有値問題と領域分割法、１９９４年度応用数学合同研究集会報告集、pp.65-1～65-6, １９９４年１２月２１日。

（ｃ）出版物

1) Z-C. Shi and T. Ushijima （共編）: Proceedings of the First China-Japan Joint Seminar on Numerical Mathematics, held in Beijing, August, 1992, Series on Applied Mathematics, Vol. 5, World Scientific, Singapore-New Jersy-London-Hong Kong, 1993.

（ｄ）　指導学生の博士学位論文

1) R. Fu （符儒徳）: Finite element analysis of water wave potential problems in axisymmetric domains, Thesis for Doctor of Science, The University of Electro-Communications, September 1993.

2) M. Giga （儀我美保子）: Mathematical analysis of finite element method applied to a second order linear evolution equation related to the water wave problem, Thesis for Doctor of Science, The University of Electro-Communications, March 1994.

分担課題「ポアソン方程式の高速解法」

研究分担者： 京都大学数理解析研究所・教授　　岡本 久

分担者岡本はポアソン方程式の高速解法の開発とその流体計算への応用に従事した. 昨年度に引続き研究を発展させ, この3年間では, 下の3方面で成果を得た.

1. 代用電荷法に関する数値計算アルゴリズムの開発.
2. 2次元渦無しの流れ及び渦なしおよび渦あり流れの自由表面に関する分岐の問題, いわゆる重力波・表面張力波・トロコイダル波の問題への代用電荷法の応用
3. 渦法による非粘性流体の数値計算

(1) においては代用電荷法の新しいアルゴリズムを開発した. 代用電荷法は Trefftz の方法の特殊な場合で, 微分作用素の基本解をテスト関数に用いるところがその特徴である. わが国では鹿児島大学の村島教授のグループがパイオニア的研究を続けてきたが, 実は数学的に難しい問題がいくつか残されてきた. 中でも, 電荷の位置あるいは拘束点の位置を決めることが大問題である. 本研究ではこれらを自動的に決める方法を発見し, それを数値実験で検証した. その方法はうまく FFT を使う点がこれまでにない新しい部分である. ただし, 2次元でしか使えないのが欠点ではある. そうはいうものの, 2次元問題で実験した範囲では, 我々の方法は極めて精度が高くしかも領域が少々くぼんでいても使える点で有望である.

現在これを流体の問題に応用することを実験中である.

(2) の問題では新しい解を数値計算で見い出すことに主眼がある. 我々のグループがこの1年間に新たに発見した解の1部は, 論文集 Proc. of Structure and Dynamics of Nonlinear Waves, で近日発表されるる. ここでは, 表面張力が負の場合の解を数値計算した. また, 理論を渦ありの場合にも拡張し, 現在 Gerstner の波からの分岐を計算中である. 最後に, 最近の研究のサーベイを日本流体力学会機関誌に発表した. また, 退化した分岐点を求めて, 深さのパラメーターを変えてどうなるのか, あるいは2層の問題にするとどうなるのかを理論的に解析した.

(3) の問題はポアソン方程式とは直接の関係はないものの, いわゆる particle method の一種として, 高速ソルバーの開発が待たれている分野である. 技術的には関連があるはずなので, 現在精力的に研究を進めているところである.

渦法とは非粘性流体あるいは高レイノルズ数流れの数値計算に向いている方法で, 渦度場を離散的な渦糸あるいは渦管で近似するのが特徴である. この際, ビオ＝サバールの法則を使って速度場を計算しなければならない. 同法則は合成積型の積分で表されるので, まともに計算すると膨大な計算量をこなさなければならないことになる. 例えば, 2次元渦面の計算に 100×100 個の渦点を用いた場合には, 一つ時間ステップを進めるのに最新のスーパーコンピューターでも数分かかる. 100×100 個程度では本当

に面白い渦構造はわからないが，これ以上の精度の計算はこのままでは現実的ではない．

そこで，Rokhlin や Greengard の提唱した多極展開法を持ちいることが考えられるが，この方法は実効あるプログラムを書くのが難しい．そこで，FFT などの既存のアルゴリズムとの折衷案を考えたいところである．現在 2 次元渦層の巻き上げの問題で実験を積み上げている段階である．

文献

[1] H. Okamoto, A uniqueness theorem for the unbounded classical solution of the nonstationary Navier-Stokes equations in $\mathbf{R^3}$, J. Math. Anal. Appl., vol. 181 (1994), pp. 473–482.

[2] H. Okamoto and M. Shōji, Bifurcation diagrams in Kolmogorov's problem of viscous incompressible fluid on 2-D Tori, Japan J. Indus. Appl. Math., vol. 10 (1993), pp. 191–218.

[3] H. Okamoto and M. Shōji, Numerical unfoldings of capillary gravity waves, in Proceedings of the First China-Japan Seminar on Numerical Mathematics, eds. Z.-c. Shi and T. Ushijima, World Scientific (1993), pp. 119–132.

[4] H. Okamoto, A variational problem arising in the two dimensional Navier-Stokes equations with vanishing viscosity, Appl. Math. Lett., vol. 7 (1994), pp 29–33.

[5] H. Okamoto, Remarks on the bifurcation of progressive waves of finite depth, to appear in Publ. R.I.M.S., vol 30 (1994)

[6] M. Katsurada and H. Okamoto, On the collocation points of the fundamental solution method for the potential problem, to appear in Int. J. Comp. Math. Appl.,

[7] H. Okamoto and M. Shōji, The resonance of modes in the problem of capillary gravity waves, submitted to Physica D.

[8] M. Shōji and H. Okamoto, Secondary and tertiary bifurcations of capillary gravity waves, to appear in Adv. Math. Sci. Appl.

[9] 岡本　久, 定常表面張力波について, ながれ, vol. 13 (1994), pp. 184–195.

[10] H. Okamoto, M. Shōji, and M. Katsurada A computer-assisted analysis of the two dimensional Navier-Stokes equations, in Proceedings of the Functional Analysis and Related Topics, (ed. H. Komatsu), Springer Lecture Note in Math. # 1540 (1993), pp 309–318.

[11] H. Okamoto and M. Mayumi Shōji, Two Dimensional, Periodic, Capillary Gravity Waves With Negative Surface Tension, To appear in Proc. IUTAM Conf. Structure and Dynamics of Nonlinbear Waves in Fluids, Eds. K. Kirchgössner and A. Mielke, World Scientific.

口頭発表

[1] 題目： Numerical Unfoldings of Capilary-Gravity Waves
時期： 平成4年8月24日
研究集会名： First China-Japan Seminar on Numerical Mathematics
場所： 北京大学, 中華人民共和国
[2] 題目： 定常表面張力波について
時期：平成5年10月28日
研究集会名：流体中における波動現象の数理とその応用
場所： 京都大学数理解析研究所
[3] 題目： Internal leyers in two dimensional Kolmogorov flows,
時期： 平成6年5月30日
研究集会名： Mathematical Fluid Mechanics and Modeling
場所： 京都大学数理解析研究所
[4] 題目： Two-dimensional, periodic, capillary-gravity waves with negative surface tension
時期：平成6年8月19日
研究集会名： Structure and Dynamics of Nonlinear Waves in Fluid
場所： ハノーバー大学, ドイツ連邦共和国

出版物

[11] 藤井　宏, 岡本　久, 非線型力学, 岩波書店 岩波講座「応用数学」（近日刊）.

研究分担課題

工学の諸問題のモデリングとその理論的・数値解析的研究

研究分担者　千葉大学工学部
河原田　秀夫

［A］ Variational Inequalities for Navier-Stokes Flows coupled with Potential Flow through Porous Media: Theory and Numerical Simulation

台風時に土砂上の流水の風景は良く見かける現象である．我々はこれらの現象を土砂上のNavier-Stokes 流と土砂中のDarcyの法則に基づくポテンシャル流の土砂上の表面での結合という形でモデル化する．上記の結合はSignorini型境界条件で記述される．これは表面の近傍で規則的に配列された毛細管中の流体の表面張力に基づくものである．変分不等式で表現されたモデル化方程式系の解の存在・一意性を示し，シミュレーションを行った．この研究は，藤田　宏（明治大学），川原　仁志（川鉄SD）との共同研究による成果である．

［B］ Penetration Phenomenon for Magnetic Field into Superconducting Materials: Theory and Simulation

低温時における超伝導体の外部磁場の附加中における振舞いは，マイスマー効果として知られている．この現象の数学的解釈を超伝導表面におけるSignorini条件で説明することを理論とSimulationの両面から試みる．この研究は，腰越　秀之（千葉大学），笹本　明（機械技術研究所）両氏との協力のもとで進められている．

論文リスト

(1) H.Kawarada, H.Fujita and H.Kawahara; Distribution Theoretic Approach to Fictitious Domain Method for Neumann Problems; Technical Reports of Mathematical Sciences, Chiba University, Vol.10(1994), No.8

(2) 河原田秀夫，腰越秀之，笹本明；Signorini型境界条件の超伝導現象への応用，京都大学数理解析研究所講究録，No.891, 1994.7.

研究分担課題　　「常微分方程式の数値解析」

研究分担者　　徳島大学工学部教授　　篠原　能材

1．　常微分方程式 の数値解析

常微分方程式系 の数値解析の研究を，京都大学数理解析研究所の短期共同研究「常微方程式系の数値解析とその応用」（研究代表者　篠原能材）（1994年11月14日~11月16日）を通じて行なった．この研究の目的は常微分方程式系の初期値問題，境界値問題および固有値問題の数値解析とその応用について共同研究することであった．この目的を達成するため，第１日は Prof. Linda PETZOLD(ﾐﾈｿﾀ大)の講演「Computational challenge in the solution of nonlinear oscillatory multibody systems 」および 質疑応答から始めた．次に，大石進一（早稲田大・理工）は「非線形常微分方程式の２点境界値問題の精度保証つき数値解析について」，新谷尚義（広島大・学校教育）は「微分・代数方程式の準陽公式について」，柳原弘毅（九州産業大）は「予測子・修正子法の安定性について」の講演をした．第２日は柏木雅英（早稲田大・理工）は「テーラー級数法による精度保証つき数値解法」，香田温人（徳島大・工）は「非線形振動解析のためのガレルキン法について」，渡辺二太（核融合科学研）は「ＨＩＤＭによる微分・代数方程式の数値計算法」，川上　博（徳島大・工）は「電子回路に現れる常微分方程式のカオス現象について」，牛田明夫（徳島大・工）は「Analysis of nonlinear distributed circuits」，室谷義昭，石渡恵美子（早稲田大・理工）は「特異摂動問題から得られる非対称行列に対する順序付き改良SOR法について」，早川　透（早稲田大・理工）は「抵抗回路の区間解析について」講演した．第３日は小藤俊幸（電気通信大）は「Stability properties of Runge-Kutta method for delay differential equationsについて」，小野令美（千葉大・工）は「On some eight-stage explicit Runge-Kutta methods について」，小沢一文（東北大）は「 Fourth order P-stable block method for solving the differential equation $y''=f(x,y)$について」，山田　進（東北大）は「BDF型ブロツク法の並列性と計算効率の解析」，中島正治（鹿児島大・理）は「Embedded pseudo-Runge-Kutta methods について」，藤井文夫（岐阜大・工）は「 Scheme for elasticas with snap-back and loopingについて」，鈴木千里（静岡工科大）は「２点Hermite-Birkhoff型のＡ安定な数値積分公式のクラスについて」の各講演があり，実り多い研究会となった．

2.　　非線形振動の数値解析

論文［1］では準周期的外力を伴う非線形常微分方程式の準周期解の数値解析のためのUrabeの定理を一般化したものを与えた．即ち準周期関数の性質を研究するため故Urabe教授は擬周期関数の概念を導入し，この概念を経由して，解の存在と誤差評価を与えるUrabeの定理を確立し，証明したが，我々は新しい命題「準周期関数の一様極限もまた準周期関数である」を与えることによってUrabeの定理の証明を簡潔にした．

また，一般化されたExponential Dichotomyの概念を導入する事によって，この定理の応用範囲が広がり，非線形性の強弱に無関係に，この定理が適用できる事を示した．この定理の応用として van der Pol型の方程式およびDuffing型の方程式の準周期解の数値解析を行なった［1］［2］［4］．

準周期的外力を伴う非線形常微分方程式の準周期解の解析の実際的な応用として，Maas,S(1988年）はマイクロウエーブ通信回路 の解析を Harmonic balance 法で行なっているが，元の準周期的外力を伴う非線形常微分方程式の真の準周期解の存在性も，また近似解の誤差評価も行なっていない．

Chua L.O. and Ushida A.(1980) は，二つの準周期的外力を伴う非線形常微分方程式の準周期解の数値解析を，非線形回路の定常解の解析に対して行ない，算出された近似解の打ちきり誤差の評価を行なっているが，算出された近似解にたいする真の解が存在するのか否かが不明である．

論文［2］［4］ では，上記の Maas 及び Chua and Ushida の難点を補つた．即ち，ガレルキン法を用いて近似解を先ず算出し，算出された近似解を用いて元の準周期的外力を伴う非線形常微分方程式に真の準周期解が存在するのかどうかを判定し，存在する場合には算出された近似解の誤差の評価を行なう事が可能である．

なお，非線形振動の研究は，理工学の諸分野で行なわれており，個々に立派な成果をあげているが，更に一層の進展と成果をあげるために日本機械学会の「非線形振動研究会」（主査渡辺武（山梨大教育））が昭和６３年１１月から５ケ年間にわたり設置されており１９９１年5月２４日～２５日ホテルKKはかた（福岡市）でメインテーマ「非線形振動と工業問題」の研究集会が開かれ，１９９２年8月２１日～２２日東京工大で「平成４年度非線形振動研究会」がメインテーマ「自励振動－熱流体を主として」で開かれ，活発な討議が行なわれた．「ASIA-PACIFIC VIBRATION CONFERENCE'93」が１９９３年１１月１４日～１８日北九州市で開催された．

また，電子情報通信学会の「非線形総合シンポジウム特集研究会」が１９９２年1月２９日～３１日早稲田大学国際会議場で，１９９２年6月１９日同学会の非線形問題

研究会が四国電力総合研修所（高松市）で，１９９５年１月２６日「非線形理論とその応用学術研究集会」がムーンビーチ（沖縄）で開催され，共に活発な討議が行なわれた．

また，「1993 INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON NONLINEAR THEORY AND ITS APPLICATIONS」が１９９３年１２月６日～９日ハワイで開催された．「1995 INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON NONLINEAR THEORY AND ITS APPLICATIONS」が１９９５年１２月１０日～１２月１４日 Las Vegas で開催される予定である．

３． 常微分方程式 の基礎的数理の研究

常微分方程式 の基礎的数理の研究を京都大学数理解析研究所の短期共同研究「常微分方程式・関数微分方程式の解の漸近的挙動の研究」（研究代表者　原　惟行）（1990年11月13日~11月17日)および研究集会「常微分方程式および関数微分方程式の定性的研究」（研究代表者　山本　稔）（1990年10月29日~10月31日,奈良市)を通じて行なった．この研究には，加藤順二（東北大・理），吉沢太郎（岡山理科大），斎藤利弥，他２０名が参加した．これらの研究会では

外力を伴うvan der Pol 方程式：

$$d^2x/dt^2-2\lambda(1-x^2)\,dx/dt+x=a\cos\nu t$$

の概周期解 $x(t)\sim\ \Sigma a_k e^{i\lambda_k}$ の Module $\{\lambda_k\}$ は，不変閉曲線から定まるパラメータと角周波数 ν で構成されることが数値計算によって判明した．この数値結果を手がかりにModuleの一般的数理の解明が今後の課題となっている．

論文[3][5] [7]はこれに関係した研究論文である．

４．連立非線形方程式の数値解法とその応用

連立非線形方程式 $\mathbb{F}(\mathbb{X})=\{f_k(x_1,x_2,\ldots,x_m)\}=\mathbb{O}$ $(k=1,2,\ldots,m)$ のm次元Euclid空間のある有界領域 $R=\{(x_1,x_2,\ldots,x_m);a_i\leq x_i\leq b_i(i=1,2,\ldots,m)\}$ (a_i,b_iは定数)における全ての解を組織的に算出する大域的解法を篠原が論文（Publ.RIMS,Kyoto Univ.8 (1972),13-42)で報告した．この大域的解法が非線形問題の数値解法に有効である[13].

この 大域的解法とその他の数値解法の共同研究を京都大学数理解析研究所の短期共同研究「連立非線形方程式の大域における数値解法とその応用」（研究代表者篠原能材）（1990年11月13日~11月15日)を通じて行なった．この短期共同研究の第一日は宮原是中（三井東圧化学）が化学工業における連立非線形方程式の数値解法の現状報告を行ない，

藤井文夫（岐阜大・工）は土木工学の構造物系に現れる分岐現象の数値解析の報告，古川長太（九大・理）は Max型関数の最適化アルゴリズムの数理とその応用．五十嵐正夫（日大・農獣医）はニュートン法の停止則についての総合報告がなされた．

第二日は鳥居達生（名大・工）が Pade'近似による代数方程式の数値解法を紹介し，大石進一（早大・理工）は無限次元非線形システムの構成的解析法のホモトピー法や占部の定理の大域化について報告した．午後のSHORT COMMUNICATIONS においては，新谷尚義（広島大・学校教育），野田松太郎（愛媛大・工），山村清隆（群馬大・工），都田艶子（阪大・工）が研究分担課題に関連する研究活動についてその成果を報告した．

最終日の第三日は牛田明夫（徳島大・工），潮俊光（神戸女学院大・家政），水谷光（湘南工大）および田中衛（上智大・理工）が電気・電子回路に現れる非線形問題の数値解析とその応用例についての研究を報告した．詳細は，講究録748 [13]および出版物[1]を参照してほしい．なお，論文[6][12][13] は，この分野に関係した研究である．

学会誌等発表論文

[1] Y.SHINOHARA,On the quasiperiodic solutions to nonlinear quasiperiodic differential equations,Abstracts of ICM-90(1990),187.

[2] Y.SHINOHARA and A.KOHDA, Numerical analysis of the quasiperiodic solutions to Duffing type equations, 応用数学合同研究集会報告集,1991,181-189.

[3] A.KOHDA, Normalization of the conformal transformations in the unit disk, J.Math.Tokushima Univ.,26(1992).

[4] A.KOHDA and Y.SHINOHARA, Numerical analysis of the quasiperiodic solutions to Duffing type equations, Japan J.Indust.Appl.Math.,Vol.10(1993),367-378.

[5] M.FUJII, An extension of Milne's device for the Adams predictor-corrector methods, Japan J.Indust.Appl.Math.,8(1991),1-18.

[6] T.MIYAKODA, Cluster analysis for the approximate solutions of a complex polynomial and its application,学位論文（名古屋大学），１９９２.

[7] H.IMAI, Application of the fuzzy and spectral collocation methods to an ill-posed shape design problem with a free boundary,AMD,Vol.186(1994), 103-107.

[8] T.KOTO, A stability of A-stable natural Rugge-Kutta methods for systems of delay differential equations,BIT 34(1994),262-267.

[9] T.KOTO, Explicit Runge-Kutta schemes for evolutionary problems in partial differential equations, Annals of Numerical Mathematics 1(1994), 335-346.

[10] H.ONO and H.TODA, Explicit Runge-Kutta methods using second derivatives, Annals of Numerical Mathematics 1(1994), 171-182.

[11] T.WATANABE, A new numerical scheme to solve algebraic-differential equations, Annals of Numerical Mathematics 1(1994), 293-306.

[12] 五十嵐正夫，永坂秀子，Newton-Raphson 系解法の収束の次数と反復回数の関係，情報処理学会論文誌，Vol.32(1991), 1349-1353.

[13] 篠原能材，連立非線形方程式の大域における数値解法とその応用，数理解析研究所講究録748, 1991, 京都大学数理解析研究所 , 1-5.

[14] 篠原能材，誤差評価付き存在と一意性の定理について，数理解析研究所講究録787, 1992, 京都大学数理解析研究所, 113-119.

[15] 篠原能材，数値計算の誤差について．数理解析研究所講究録841, 1993, 京都大学数理解析研究所, 13-14.

口頭発表

[1] Y.SHINOHARA, On the quasiperiodic solutions to nonlinear quasiperiodic differential equations, International Congress of Mathematicians, Kyoto(Japan), Aug. 22, 1990.

[2] Y.SHINOHARA, On numerically ill conditioned solutions of ordinary differential equations, International Symposium on Computational Mathematics, Matsuyama(Japan), Sept. 3, 1990.

[3] 篠原能材，連立非線形方程式の大域における数値解法とその応用，京都大学数理解析研究所 短期共同研究会, Nov. 13, 1990.

[4] 篠原能材，香田温人．Numerical analysis of the quasiperiodic solutions to Duffing type equations, 応用数学合同研究集会（京都大学数理解析研究所）, Dec. 26, 1991.

[5] 篠原能材，香田温人．Duffing 方程式の準周期解について．日本数学会・中国・四国支部例会．Jan. 19, 1992.

[6] 篠原能材，誤差評価付き 存在と一意性の定理について．第２１回数値解析シンポジウム．宮城県鳴瀬町．Jun. 11, 1992.

〔7〕篠原能材，非線形振動解析と Urabe の定理について．電子情報通信学会
非線形問題研究会．高松市．Jun. 19, 1992.
〔8〕今井仁司．篠原能材，名取亮．河原田秀夫．時間積分におけるスペクトル法の
適応可能性について．日本数学会．Sept. 28, 1993.
〔9〕篠原能材，今井仁司．Urabe の定理と Kantorovich の定理について，日本数学会・
中国・四国支部例会．Jan. 23, 1994.

出版物

〔1〕篠原能材（研究代表者），数理解析研究所講究録748「 連立非線形方程式の大域における数値解法とその応用」．京都大学数理解析研究所．1991年4月．
〔2〕篠原能材（研究代表者），「非線形問題の数値解析の総合的研究」，平成2年度・3年度科学研究費補助金（総合研究（Ａ））研究成果報告書．1992年3月．
〔3〕T. MITUI and Y. SHINOHARA, Numerical analysis of ordinary differential equations and its applications, World Scientific Publishing Co., 1995.

研究分担課題「非線型最適化アルゴリズム」

研究分担者　統計数理研究所教授　田辺國士

本研究の目的は、相互に絡み合った複数の事象間に伏在する関係の構造を、データに基づいて同定し、対象の挙動を解析し、それを最適な状態に管理・設計をするための計算集約的方法を発展させることにあり、超高速コンピュータ時代に対応した計算集約的な推論のための計算および最適化の理論と技術、およびそれによって操作可能となる統計モデルの研究開発をめざした。

計算集約的推論法の核心をなす要素は、事象の構造や法則性を表現する数式モデルの構築、計算モデルの導出、およびそれらのモデルから導かれる帰結を導出する推論計算アルゴリズムの開発であるが、本研究においてはとりわけ超高速コンピュータによる推論処理のために特化されたモデルとアルゴリズムの研究を行った。

(a) 学会誌等

K.Tanabe and M. Sagae, An exact Cholesky decomposition and the generalized inverse of the variance-covariance matreix of the multinomial distribution, with applications. (with M. Sagae), *Journal of Royal Statistical Society B*, Vol.54, 211-219, 1992.

K.Tanabe and M. Sagae, Pivoting strategy for rank one modification of LDM ^{t} -like factorization, *Numerical Algorithms*, Vol.2, 137-154, 1992.

M. Sagae andK.Tanabe, Symbolic Cholesky decomposition of the variance-covariance matreix of the negative multinomial distribution, *Statistics and Probability Letters*, Vol.15, 103-108, 1992.

M. Sagae andK.Tanabe, Upper and lower bounds for the arithmetic-geometric-harmonic means of positive definite matrices, *Linear and Multilinear Algebra*, Vol.37, 279-282, 1994.

(b) 口頭発表

田辺国士、寒河江雅彦、How to incorporate incompatible prior infrormation safely into Bayesian linear model(ISM Research Memo), 日本統計学会、1992.7

K. Tanabe, Succesive rank-one modification method for solving a general system of linear equations, *The first China-Japan Joint Seminar on Numerical Mathematics*, Beijing, China, 1992.9

K. Tanabe, Differential geometry of a linear programming problem, *Internationnal Conference on Computation of Differtential Equations and Dynamical Systems*, Beijing, China, 1992.9

田辺国士、寒河江雅彦、Upper and lowert bounds for the arothmetic-geometric-harmonic means of positive definite metrices, 日本数学会、1993.4

田辺国士、ベイズの方法によるノンパラメトリック密度推定、京都大学数理解析研究所　研究集会「確率数値解析に於ける諸問題、1993.6

K. Tanabe, Succesive rank-one modification algorithm for solving a system of linear equations with verification, *International Meeting on "Linear/Nonlinear Iterative Methods and Verification of Solution,* 1993.7

K. Tanabe, How to cope with improper priors and ill-conditioned posterior likelihoods in numerically intensive nonparametric Bayesian methods, *International Symposium on Expoloration of Informational Aspects of Bayesian Statistics*, Fujiyoshida, 1993.12

K. Tanabe, Succesive rank-one modification algorithm for solving a system of linear equations, *Symposium PCG'94 on "Matrix Analysis and Parallel Computing"*, Yokohama,
1994.3

田辺国士、Another look at the Lagrangian function, 統計数理研究所　研究集会「最適化：モデリングとアルゴリズム」、1994.3

田辺国士、統計モデルに基づく逆問題の取り扱いと数値計算法、統計数理研究所　研究集会「逆問題とその周辺」、1994.8

田辺国士、不適切問題の統計学的取り扱いについて、核融合科学研究所　「複合複雑系」の科学研究会、1994.9

田辺国士、不適切問題の統計モデリングと数値解法、総合研究大学院大学　「非線形現象の数理科学研究会」、1994.12

(c) 出版物

藤田宏、今野浩、田辺国士：岩波講座　応用数学「最適化法」、岩波書店、１９９４

研究分担課題　「微分方程式の精度保証付き計算法」

研究分担者　九州大学大学院数理学研究科教授　　中尾　充宏

はじめに

近年、スーパー・コンピュータの目ざましい発展と相まって、大規模連立１次方程式や非線形連立方程式など、有限次元的問題の数値解を、厳密解の存在と一意性および存在範囲の保証付きで求めることが、理論的にも実用的にも高い精度で可能となりつつある。この様な計算法は数値的検証法または精度保証付き数値計算法と呼ばれ、計算の信頼性の観点から国内外で注目を集めている。これは主としてヨーロッパを中心とする区間解析法研究者の間で行われ、最近では関数方程式（無限次元の問題）を対象に同じ方向でのアプローチが始まっている。既に一部の常微分方程式や積分方程式に対しては、区間解析の直接の応用として十分な実用性を持つものも現われている。一方、偏微分方程式の場合、区間解析の適用には本質的難点があって、区間解析研究の延長上ではあまり発展を期待できず、未だ非常に研究例が少ないのが現状である。

筆者は楕円型境界値問題の有限要素近似とその誤差評価を、区間解析と有効に組み合わせることにより、厳密解が計算機上で捉えられことを初めて立証した(1988)。その後、偏微分方程式の解を対象とした、この方向での数値的検証法（精度保証付き計算法）に関する研究を進めてきた。

本総合研究では、研究協力者（土屋卓也（愛媛大理)、山本野人（九大数理)、渡部善隆（九大大型計算機センター））とともに、これまでに得られた楕円型方程式に関する結果を、より実用度の高いものに改良・拡張するための検討を行なった。また、原理的な検証定式化が行なわれている放物型および双曲型方程式に対して、その適用性を高めることを試みた。更に将来の本格的検証システム構築に向けて必要となる課題についても検討を行なった。以下にその成果の概要を述べる。

[A]楕円型問題：

(1) ニュートン的反復法による検証法

筆者が最初に提案した検証手順は、不動点定式化された楕円型方程式 $u = Fu$ の解が単純逐次反復によって解けることを前提としたものであり、これは作用素 F が解 u の近傍で retractive（引き込み的）なことを仮定するものである。したがって、検証手順としては簡単であるが、この仮定が満たされない場合には検証不能となり、それゆえ適用領域が著しく狭いものであった。これを克服するための Newton-like の方法を検討し、その有効性を実例により立証した [a1][a3] 。

(2) 残差反復法による検証の効率化

前項に述べたニュートン的方法による検証過程では、有限次元部分に関しては残差を利用した反復（残差反復）になっているが、誤差（無限次元）部分についてはそうはなっていない。したがって方程式の右辺の値が大きいと誤差も大きく、そのため有限次元部分にも影響が及び、やがて区間幅の爆発的増大が起きて検証は不能となる。このような状況を回避するには、予め初期近似解を用いて方程式自体を右辺が小さくなるように工夫し、それに関して残差反復することが有効である。この様な目的のために近似解にもとづく特殊な射影を利用して解を 0 近傍に引き戻してから検証を行なう方式を提案、その有効性を示した [a4][a9] 。なお、この場合通常の有限要素近似解 u_h が、H_0^1 の意味での弱解の近似であることから、残差 $\Delta u_h - f(u_h)$ に対する H^{-1} 型の a posteriori 誤差評価が工夫されている。更に、[a9] では、この引き戻しを高次有限要素を用いて行い、その結果に残差反復を適用することにより、検証能力が飛躍的に向上することを見い出した。

(3) 最大値ノルムの意味での誤差限界

当初、楕円型方程式の解の数値的検証では、方程式の解を区間とそれに加えるべき H_0^1 あるいは L^2 誤差の意味で包み込んだのであったが、実際には L^∞ 誤差（最大値ノルムの意味での誤差）を知りたい場合がある。ここではそれに対処する一つの方法と

して、H^2からL^∞への構成的（数値的）埋め込み定数の評価を用いて有限要素解のa priori-L^∞誤差を得る方法を与えた。この方法は基本的には2次元問題を対象とするが、3次元の場合にも評価の精度は落ちるものの同じ考え方が適用できる[a5][c1]。なお最近、高次要素を用いて、有限要素解に対する高精度のL^∞型a posteriori誤差評価を得る方法を見いだした。これとa priori-L^∞誤差評価とを組み合わせた残差反復法により、L^∞誤差の意味での解の検証精度は一層向上することが明らかになっている[b9]。

(4) 領域が凸でない場合

非線形楕円型方程式の解の数値的検証では、Poisson方程式に対する有限要素解の構成的誤差評価が本質適役割りを果たす。ところが検証の対象とする楕円型方程式の定義域が非凸領域の場合、既にPoisson方程式の解自体がH^2の滑らかさを持たず、誤差評価に現われる定数の数値的決定も通常の誤差解析の理論からは困難となる。このような点を克服するために、(2)の検討で用いたと同様な射影を用い、a-priori誤差評価定数の算定を有限次元固有値問題に帰着させ、計算機により数値的に決定する方法を見いだした。[a6]ではこの方法を用い、典型的な2次元非凸領域であるL-shape domainについて、Poisson方程式の有限要素解に対する構成的誤差評価を与えた。更にそれを用いて、同じ領域上の非線形楕円型方程式に対する検証例を示している。

(5) 特異点を持つ方程式に対する検証

パラメータに依存する非線形微分方程式系は、その値によってはturning pointやbifurcation pointにおける特異性のため、解の検証が不能になることがある。[a10][a11]ではそのような影響を克服した検証方式を定式化し、またそれらの点自体を数値的に精度保証する方法を実現した。即ち、turning pointによる特異性は、適当なbordering functionを導入し、それらの点の近傍でパラメータの交換を行うことによって除去できる。また、turning pointやbifurcation pointそれ自体の検証は、それらの点を特徴付けるための補助方程式をもとの方程式に追加し、全体を連立して（精度保証付きで）

解くことによってなされる。

(6) その他の検討

方程式の中に未知関数についてのフレッシェ微分が不能な項を含む場合にも、ニュートン的方法による検証が可能なことを、電磁流体の平衡系方程式を例にとって明らかにした。[b5]

また、非線形楕円型方程式の球対称解の漸近挙動を特徴づける積分方程式について、その解を精度保証することにより、理論的に解明困難な問題に対し数値的解決を与えた。[a12]

このほか、検証プログラムの高速化と効率化について検討し、検証手順の簡易化手法を見いだし、これによりにより検証プログラムの実行効率と検証精度の向上を計った。

[B]<u>発展問題：</u>

空間1次元の非線形放物型問題に対する数値的検証法を、空間2次元および3次元の問題に対し適用可能な形に拡張定式化し、その検証例を与えた。また、非線形双曲型方程式の初期境界値問題に対する解の検証に関しその基本的定式化を与え、プロトタイプな検証数値例を得た。[a7][a8]

[C]<u>その他の検討：</u>

2次元凸領域における、Stokes 方程式の有限要素解に対する a posteriori 誤差評価について検討した。inf-sup 条件の定数を数値評価することにより、楕円型方程式の場合と同様な方法によって、a posteriori 誤差評価する方法を見いだし、その数値例を与えた。本検討により、Navier-Stokes 方程式の解の数値的検証定式化への見通しを得た。[b10]

<u>発表論文等</u>

(a) 学会誌等

[a1] Nakao, M.T., A numerical verification method for the existence of weak solutions for nonlinear boundary value problems, Journal of Mathematical Analysis and Applications (1992), 489-507.

[a2] Nakao, M.T., Computable error estimates for FEM and numerical verification of solutions for nonlinear PDEs, Computational and Applied Mathematics, I (eds. C.Brezinski and U.Kulisch), North-Holland (1992), 357-366 .

[a3] Watanabe, Y. & Nakao, M.T., Numerical verifications of solutions for nonlinear elliptic equations, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics 10 (1993), 165-178.

[a4] Nakao, M.T., Solving nonlinear elliptic problems with result verification using an H^{-1} residual iteration, Computing, Supplementum 9 (1993), 161-173.

[a5] Nakao, M.T., Computable L^{∞} error estimates in the finite element method with application to nonlinear elliptic problems, Series in Applicable Analysis Vol.2, Contributions in Numerical Mathematics(ed. R.P. Agarwal), World Scientific (1993), 309-319.

[a6] Yamamoto, N. & Nakao, M.T., Numerical verifications of solutions for elliptic equations in nonconvex polygonal domains, Numerische Mathematik 65 (1993), 503-521.

[a7] Nakao, M.T. & Watanabe, Y., On computational proofs of the existence of solutionsto nonlinear parabolic problems, Journal of Computational and Applied Mathematics 50 (1994), 401-410.

[a8] Nakao, M.T., Numerical verifications of solutions for nonlinear hyperbolic equations, in Interval Computations (1995), to appear.

[a9] Yamamoto, N. & Nakao, M.T., Numerical verifications for solutions to elliptic equations using residual iterations with higher order finite element, Journal of Computational and Applied Mathematics, to appear.

[a10] Tsuchiya, T. & Nakao, M.T., Numerical verification of solutions of parametrized nonlinear boundary value problems with turning points, Research Report of Mathematics of Computation, Kyushu University, RMC 67-02 (1992), 17 pages.

[a11] Tsuchiya, T., Numerical verification of simple bifurcation points, 京都大学数理解析研究所講究録, 831(1993), 129-140.

[a12] 山本、四ツ谷、柳田、山辺の問題の解の漸近挙動に対する数値的検証法の応用、京都大学数理解析研究所講究録, 865(1994), 40-45.

(b) 口頭発表

[b1] Nakao, M.T., Numerical verifications of solutions of partial differential equations, Dagstuhl-International Seminar on Symbolic, algebraic and Validated Numerical Computations, Dagstuhl, Germany, August 1992.

[b2] Nakao, M.T., Solving nonlinear partial differential equations with result verification, The 1st China-Japan Joint Seminar on Numerical Mathematics, Beijing, China, August 1992.

[b3] Nakao, M.T., Finite element method for nonlinear elliptic problems with result verification, International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Validated Numerics, Wien, Austria, September 1993.

[b4] Nakao, M.T., Numerical verification methods of solutions for nonlinear elliptic problems, International Symposium on Methods and Applications of Analysis, Hong Kong, December 1994.

[b5] Watanabe, Y. & Nakao, M.T., Verified computation of solutions for nondifferentiable elliptic equations related to MHD equilibria, GAMM Annual Conference, Braunschweig, Germany, April 1994.

[b6] Yamamoto, N., Yotsutani, S. & Yanagida, E., A numerical verification for asymptotic behavior of solutions to conformal scalar curvature equations, GAMM Annual Conference, Braunschweig, Germany, April 1994.

[b7] Tsuchiya, T., Numerical verifications of singular points, GAMM Annual Conference, Braunschweig, Germany, April 1994.

[b8] Tsuchiya, T., Numerical verification of singularities, The 2nd Japan-China Joint Seminar on Numerical Mathematics, Chofu, Japan, August 1994.

[b9] 中尾、山本:非線形楕円型問題に対する有限要素解の最大値ノルムによる精度保証、京都大学数理解析研究所研究集会「数値計算アルゴリズムの現状と展望」、１９９４年１０月.

[b10] 中尾、山本、渡部:Stokes 方程式の有限要素解に対する精度保証、１９９４年度応用数学合同研究集会、１９９４年１２月.

(c) 出版物

[c1] 中尾充宏：精度保証つき数値計算、「科学計算と数値解析」第２回応用解析チュートリアル、京都大学数理解析研究所１９９２年度プロジェクト研究、1993, 107-159.

研究分担課題「常微分方程式の数値解析」

研究分担者　鹿児島大学理学部教授　中島　正治

本研究は常微分方程式の近似式についての研究である.
常微分方程式の初期値の数値解法で,困難な幾つかの問題が残されている. 本研究ではその内で (a) 遅れ関数を含む微分方程式の数値解法, (b) ｽﾃｲﾌ 問題の数値解法について研究を行つてきた.
以下それぞれについて成果の概要を述べる.

(a) Delay Differential Equations の数値解法について

遅れ関数 $x(t-h(t))$ を含むむ微分方程式:

$$x\ (t)=f(t,x(t),x(t-h(t))),\quad x(t\ )\ =\ x\ \ ,$$

ここで遅れ関数 $h(t)$、及び初期条件 $x(t)=\psi(t)(t\ -h(t\ )\leqq t\leqq t)$ とする.
一般に $f(t,x,y)$ 及び $\psi(t)$ が滑かでも解 $x(t)$ が滑かとは限らない.
数値積分ではこのような解が滑らかでない区間もしくは点では工夫を用する. 又遅れ関数の計算法も重要であり一般に補間法を用いて計算されているが,これは近似式の精度を著しく悪くしている.刻み幅の自動調整にも大きな問題点を残している. 本研究ではこのような点も考慮に入れながら連続的擬ルンゲ－クッタ法を提案し近似式の開発を行つてきた.

連続擬ルンゲ－クッタ法は次の様に表される:

$$g^{(i)}(x_n,y_n,y_{n+1};h) = (1+a_i)y_n - a_i y_{n-1} + h\sum_{j=0}^{i-1} a_{ij} f(g^{(i)}(x_n,y_n,y_{n-1}:h)),$$

(1) $$(a_0 = -1, a_1 = 0, a_{0i} = a_{1i} = 0)\ (i=0,1,...,r),$$

$$y_{n+1} = b_{-2}\ y_{n-1} + b_{-1} y_n + \sum_{i=0}^{r} b_i f(g^{(i)}(x_n,y_n,y_{n-1};h)).$$

この近似式は従来に提案されて来た近似式の遅れ関数の計算法と自動刻み幅調整の問題点を解決している. 具体的な数値実験として被食補食の問題を結果を得ている.また近似式 (1) の解の収束性及び一意性についても証明されている. これらの結果については研究発表 (Delay Differential Equation の数値解法について: 日本応用数理学会 電気通信大 1992 年 10月3日-5日) だけで論文としてはまだ発表していない.

(b) ｽﾃｲﾌ 問題の数値解法について

微分方程式系の固有値の大きさが時間と共に大きく変化する場合である，このような問題をｽﾃｨﾌ問題と称している．このような現象は化学反応系や制御問題によく現れ，この方程式系の数値解法については過去多くの研究者により研究され現在も多数の研究者が取り組んでいる．

近似式の安定性が問題になり B,J Butcherが陰的 ﾙﾝｹﾞｰｸｯﾀ 式を導入し，安定性の問題を解決した．それ以後この問題についての解法は陰的式で論ぜられる様になつた．又その研究は目ざましい発展が成し遂げられて入る．

どのような近似式にも長所，短所があるが陰的近似式の短所は陰関数を解を求めるのに多くの計算の手間を用することである．本研究ではこのような問題点を解決するために陽的で安定な近似式を開発することである．

ｽﾃｨﾌ 問題を陽的近似式で解く考えは今日まで多くの研究者により研究されてきた．その方法を大きく分けると安定領域を拡張する方向と安定な近似式を導く方法の 通りの考えで進められており，前者の方法が最とも良く議論され研究されてきている．後者については Lambert, J, D,.Shaw, B.Wanbecq, A. Vander Howen J. 等より幾つかの近似式が提案され議論されてきた．何れの式も微分方程式系の固有値の計算で精度や計算の手間等で大きな問題を残している．

本研究ではこのような問題を解決するため有理型の ﾙﾝｹﾞｰｸｯﾀ 式を提案した．具体的には陽的 ﾙﾝｹﾞｰｸｯﾀ 式でﾊﾟﾗﾒｰﾀを有理型で与えることにより近似式の安定領域の拡張の利用することであり，ﾊﾟﾗﾒｰﾀを安定領域の拡張に利用する考えは今までに多くの研究者により提案されているが，従来の考えと異なる所はﾊﾟﾗﾒｰﾀを有理型で与えることにより安定な有理型のﾙﾝｹﾞｰｸｯﾀ 式を導くことである．

現在の研究状況は次数 1 及び次数 2の近似式を導き数値実験で良い結果をえている．近似式の誤差解析，安定性の解析は一部しか解決していない．

発表論文

ステイフ 問題の数値解法について

[1] M. Nakashima: Variable-Coefficients A-stable Explicit Runge-Kutta Methods. 京都大学数理解析研究所, no 841 (1993), pp.175-182.

[2] M. Nakashima: Efficient Explicit Runge-Kutta Methods for Stiff Systems. Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ no 26 (1993), pp.11-21.

[3] M. Nakashima: Variable-Coefficients Explicit Runge-Kutta Methods 京都大学数理解析研究所, no 880 (1994), pp.159-166.

[4] M. Nakashima: Variable-Coefficients A-stable Explicit Runge-Kutta Methods. In Simeon Ola Fatunla (ed) Scientific Computing, (Ada Jane Press,1994), pp138-143.

[5] M. Nakashima: Variable-Coefficients Explicit A-stable Runge-Kutta Methods. to appear in Japan J.Appl. Math.

口頭発表

[1] M. Nakashima: Study of Variable-Coefficients Explicit Runge-Kutta Methods for stiff equations. 数値解析ｼﾝﾎﾟｼﾞｳﾑ (秋葉温泉 ﾎﾃﾙ ｸﾚｾﾝﾄ). 1994年 6月 8日 - 10日.

[2] M. Nakashima: Variable-Coefficients Explicit Runge-Kutta Methods for stiff equations. WCCM III (幕張) August 1-5 (1994).

[3] M. Nakashima: Variable-Coefficients Explicit A-stable Runge-Kutta Methods for stiff equations. 応用数学合同研究集会 (龍谷大), 1994年 12月20日-22日.

研究分担課題　「大型線形計算のアルゴリズム」

研究分担者：筑波大学電子・情報工学系 教授　名取　亮

コンピュータの進歩に伴って、益々大規模な数値シミュレーションが行われるようになった。現象の定式化によって得られた偏微分方程式は、有限差分法（Finite Difference Method、FDM）、有限要素法（Finite Element Method、FEM）、あるいはスペクトル法（Spectral Method）などにより離散化される。その結果、大型行列を係数とする連立一次方程式や大型行列の固有値問題を解くことに帰着される。本総合研究の期間に筆者の関係するグループが主として行った研究の主題は、［A］線形計算のアルゴリズム、［B］数値シミュレーション、および［C］不適切問題、であった。以下、それぞれの主題について成果の概要を述べる。

［A］線形計算のアルゴリズム

我々は、数値シミュレーションに現れる大型線形計算のプログラムを開発することを目的として、高速かつ安定なアルゴリズムについて研究を行った。すでに、固有値問題に対してはランチョス法とその再直交化についての研究を行ってきており、いくつかの成果が得られている[A1]。大型連立一次方程式についても、以前から前処理つき共役勾配法（Preconditioned Conjugate Gradient Method、PCG法）についての研究を行っており、対称正定値行列については、ある程度の結果がすでに得られている。

残る問題は非対称行列に対する解法である。この問題について、前処理の方法に関する研究と並列計算機を有効に利用するための並列アルゴリズムに関する研究を、研究協力者金成海と共に行った。現在CG法に基づく非対称行列に対して様々な種類の反復解法が開発されている。例えば、共役残差法（Conjugate Residual Method、CG法）、双共役勾配法（Biconjugate Gradient Method、BCG法）、自乗共役勾配法（CG Squared Method、CGS法）とBi-CGSTAB法などがある。その中、最も注目されている反復解法はH.A. van der Vorstが提唱し、高速性及び安定性にすぐれたBi-CGSTAB法である。

我々は、前処理つきBi-CGSTAB法とその並列化について研究した。前処理つきBi-CGSTAB法のアルゴリズムについて考察すると、その主要部である共役勾配法の部分は行列とベクトルの積またはベクトルの内積より構成されている。そのため、スーパーコンピュータによる並列計算に適しているが、前処理の計算の中には不完全LU分解によって$x=(LDU)^{-1}y$と$x=(LDU)^{-T}y$のタイプの計算が必要になる。$x=(LDU)^{-1}y$の計算は連立一次方程式$(LDU)x=y$を解くことによって行う。ところが、この計算は原理的には逐次計算であり並列計算には不向きである。我々は並列計算機向きの解法として前処理部分の行列の空間をいくつかの独立した部分に分け、行列の要素を複数の独立した部分に分けることによって、前処理部分の並列計算が可能であることを示した。さらに、数値実験によって、種々の前処理つき反復解法の並列計算機による並列化の効率を調べた。その結果、我々の提案した前処理法の有効性を確認した[A2]。

さらに、CGS法の安定化を目的として、これを一般化したModifiedCGS法の提案を行った[A3]。

［B］数値シミュレーション

自然界には、領域の境界が予め知られているのではなく、領域内の物理量と共に変化する自由境界問題が数多く存在する。我々は液体の凝固現象と熱対流の問題を例として、自由境界問題の数値シミュレーションを行った。

液体の凝固現象については、従来凝固時における体積変化を無視した解析が行われていたが、我々は体積変化を考慮したモデルを用いて数値解を求めた[B1]。

熱対流問題に対しても、固定境界についての解析はすでに行われている。我々は液面を自由境界とした場合の解析を行った[B3]。数値解法としては精度の点で優れているスペクトル選点法を用いた[B2]。解領域は、変数変換によって長方形領域にしている。さらに、線形安定性解析によって臨界レイリー数を求め、固定境界の場合との比較を行った[B4]。

［C］不適切問題

不適切問題の最適正則化法は数値解析の重要な問題である。現実的な問題として

は、断層レントゲン撮影法、遠隔測定法による大気の温度の測定などに現われる。多くの不適切問題は第1種フレドホルム積分方程式に帰着させることができる。これを離散化すると連立一次方程式が得られる。係数行列Aは、積分方程式の不適切性を受け継いでおり、標本点数を多くとってAの次数を大きくすればする程Aの条件数が急激に大きくなり解きにくくなる。逆に小さくしすぎると離散化誤差のために正確な解を求められなくなる。

このような不適切問題に対する代表的な正則化法は、制約付き最小二乗問題を解くTikhonovの正則化法である。この方法はラグランジュの未定乗数を正則化パラメータとして含んでおり、このパラメータの最適値をいかにして決定するかが重要問題となる。我々はLカーブによるパラメータの決定法を提案し[C1]、その他の方法との比較検討を行った[C2]、[C3]、[C4]。

その他の不適切問題として、最適形状設計問題を取り上げ、これにファジィ理論を適用することを試みた[C5]、[C6]。

[D] その他

以上述べたものの他に、有理式補間を用いた代数方程式の数値解法[D1]、[D2]、[D3]、[D4]、知識ベースによる数学表現の理解[D5]および意味の数学モデルに関する研究[D6]、[D7]、[D8]を行った。

発表論文

[A：線形計算のアルゴリズム]

[A1] H. Iguchi, M. Natori and H. Imai : Reorthogonalization in the Block Lanczos Algorithm. Bulletin of the Greek Mathematical Society, Vol. 33(1992), pp. 25-39.

[A2] 金成海：前処理つきCG法とその並列化. 筑波大学大学院理工学研究科修士論文、1994年2月.

[A3] 張紹良、金成海：Modified CGS法について. 京都大学数理解析研究所研究集会、1994年10月.

[A4] 名取亮：線形計算、朝倉書店、1993.

[A5] T. Watanabe, M. Natori and T. Oguni : Mathematical Software for the P.C. and Work Stations, North-Holland, 1994.

[B：数値シミュレーション]

[B1] T. Hanada, H. Imai, H. Kawarada and M. Natori : Numerical Computations for Solidification Problems with Moving Surface. Nonlinear Mathematical Problems in Industry, Gakkotosho, 1993, PP. 17-38.

[B2] H. Imai, Zhou Weidong, M. Natori and H. Kawarada : Numerical Computations of Free Boundary Problems Using the Spectral Method. Nonlinear Mathematical Problems in Industry, Gakkotosho, 1993, pp. 39-47.

[B3] Zhou Weidong, H. Imai and M. Natori : Numerical Study of Natural Convection with a Free Surface by a Spectral Method. Nonlinear Mathematical Problems in Industry, Gakkotosho, 1993, pp. 49-60

[B4] 周偉東、今井仁司、名取亮：自由表面を有する熱対流の数値シミュレーションと線形安定性解析．日本応用数理学会論文誌、Vol. 4、No. 1(1994)、pp. 27-40.

[C：不適切問題]

[C1] 細野陽介、北川高嗣：Lカーブによる不適切問題の最適正則化について．日本応用数理学会論文誌、Vol. 2、No. 1(1992)、pp. 55-67.

[C2] T. Kitagawa and Y. Hosoda : New Approaches to the Optimal Regularization. Inverse Problems in Engineering Mechanics, Springer-Verlag, 1993, pp. 21-26.

[C3] 細田陽介、北川高嗣：不適切問題に対するMAICE-DP法による最適正則化法について．日本応用数理学会論文誌、Vol. 3、No. 2(1993)、pp. 47-58.

[C4] T. Kitagawa : A Comparison between two Classes of Methods for the Optimal Regularization. S. Kudo(ed.) : Inverse Problems, Atlanta Technology Publications, 1993, pp. 22-35.

[C5] H. Imai, A. Sasamoto, H. Kawarada and M. Natori : An Application of the Fuzzy Theory for an Ill-Posed Problem. Inverse Problems in Engineering Mechanics, Springer-Verlag, 1993, pp. 31-38.

[C6] H. Imai, H. Kawarada and M. Natori : Adaptive Fuzzy Control for an Ill-Posed Problem. Inverse Problem, Atlanta Technology Publication, 1993, pp. 51-60.

[D：その他]

[D1] T. Torii and T. Sakurai : Global Method for the Poles of Analytic Function by Rational

Inperpolant on the Unit Circle. Contributions in Numerical Mathematics WSSIAA, Vol. 2, 1993, pp. 389-398.

[D2] T. Torii, T. Sakurai and H. Sugiura : An Application of Sunzi's Theorem for Solving Algebraic Equations. Proc. 1st China-Japan Seminar on Numerical Mathematics, 1993, pp. 155-167.

[D3] 櫻井鉄也、杉浦洋、鳥居達生：Durand-Kerner型補助関数を用いた非線形方程式の多段反復解法、日本応用数理学会論文誌、Vol. 4、No. 2(1994)、pp. 67-80.

[D4] C. Carstensen and T. Sakurai : Simultaneous Factorization of a Polynomial by Rational Approxination, J. Comput. Appl. Math., 1994年5月.

[D5] E. Zhao, T. Torii, H. Sugiura and T. Sakurai : A Knowledge-based Method for Mathmatical Notations Understanding、情報処理学会論文誌、Vol. 35、No. 11 (1994)、pp. 2368-2381.

[D6] T. Kitagawa and Y. Kiyoki : A Mathematical Model of Meaning and its Application to Multidatabase Systems, Proceedings of RIDE-IMS'93 (3rd International Workshop on Research Issues on Data Engineering: Interoperability in Multidatabase Systems), IEEE, 1993, pp. 130-135.

[D7] Y. Kiyoki and T. Kitagawa : A Metadatabase System for Supporting Semantic Interoperability in Multidatabases, Proc. of The 1993 European-Japanese Seminar on Information Modelling and Knowledge Bases, Budapest, Hungury, 1993, pp. 484-495.

[D8] Y. Kiyoki and T. Kitagawa : A Semantic Associative Search Method for Knowledge Acquisition, Proc. of The 4th European-Japanese Seminar on Information Modelling and Knowledge Bases, Sweden, May 1994, (accepted).

研究分担課題「方程式系の代数的・組合せ論的構造解析」

研究分担者　京都大学数理解析研究所 教授　　室 田　一 雄

1　層混合行列の水平基本構造: 設計変数選択による離散システムの分解

連立方程式によって記述されるシステムにおいて，制約条件に較べて変数が多過ぎるために方程式の解が一意に定まらない場合，いくつかの変数の値を決めてやらなくてはならない．この変数を**設計変数**と呼ぶ．設計変数は，大雑把にいうと，システムのとり得る状態のなす多様体の局所座標系とみなすこともできる．

与えられたシステムに対して，設計変数の取り方は一般には複数あるので，設計や解析に便利なように設計変数を選ぶことができる．例えば，設計変数を選んだ後のシステムが階層的に分解されるように選んでおくと，数値計算の計算量等に関して利点がある．この観点から最適な設計変数を求めることは望むべくもないとしても，設計変数の上手な選び方によってどこまで分解できるかの限界を特徴付けることはできないだろうか？

研究分担者室田一雄は，岩田 覚 とともに，劣モジュラシステムの基本構造という概念を一般の束の上の劣モジュラ関数の基本構造へと拡張することによって，この問題を解決した [1, 2]．ここでは，その概要を報告する．

1.1　層混合行列の組合せ論的正準形

体 $\boldsymbol{F}$ とその部分体 $\boldsymbol{K}$ を考える．行集合に適当な置換を施すことによって，

$$\begin{pmatrix} Q \\ T \end{pmatrix}$$

という形に変換できる行列 A を，$\boldsymbol{F}/\boldsymbol{K}$ に関する**層混合行列**という．ここで，Q は $\boldsymbol{K}$ 上の行列，T は $\boldsymbol{F}$ 上の行列であって，T の非零要素の集合 $\mathcal{T}$ は $\boldsymbol{K}$ 上で代数的独立である．この概念は，実際のシステムを記述する方程式が，要素間の結合関係を表現する方程式と，要素の物理的な特性を表す方程式とに分類されるという観察に基づいて研究分担者室田一雄によって数年前に提案された．

層混合行列に対する

$$P_{\mathrm{r}} \begin{pmatrix} S & O \\ O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ T \end{pmatrix} P_{\mathrm{c}}$$

の形の変換を**許容変換**と呼ぶ．ここで，S は正則行列，P_{r} と P_{c} は置換行列である．許容変換の下での最も細かいブロック上三角化が本質的に一意に定まる．これを層混合行列の**組合せ論的正準形 (CCF)** と呼んでいる．

層混合行列 A の行集合を R の列集合を C とする．また，Q と T の行集合を，それぞれ，R_Q と R_T とする．劣モジュラ関数 p が，

$$p(J) = \rho(J) + \gamma(J) - |J|, \quad J \subseteq C$$

と定義される．ただし，$\rho(J)$ は $Q[R_Q, J]$ の階数であり，$\gamma(J)$ は $T[R_T, J]$ の非零行数である（一般に，行列 M の小行列で行集合 I，列集合 J を持つものを $M[I, J]$ と書く）．層混合行列 A の階数に関して，

$$\mathrm{rank} A = \min_{J \subseteq C} p(J) + |C| \tag{1}$$

が成立し，p の最小値を達成する列部分集合の族から，CCF が構成される．

1.2　劣モジュラ関数の基本構造

束 $\mathcal{L}$ 上の劣モジュラ関数 f を考える:

$$f(X) + f(Y) \geq f(X \wedge Y) + f(X \vee Y).$$

束 $\mathcal{L}$ の部分束

$$\{Y \in \mathcal{L} \mid X \preceq Y, f(Y) = \min_{X \preceq Y' \in \mathcal{L}} f(Y')\}$$

の最小元を $D(f;X)$ と表すと，

$$\mathcal{K}(f) = \{X \in \mathcal{L} \mid D(f;X) = X\}$$

は $\mathcal{L}$ の最大元を含む下半束となる．ここでは，$\mathcal{K}(f)$ を $(\mathcal{L}, f)$ の**基本構造**と呼び，$\mathcal{K}(f)$ を含む最小の部分束 $\mathcal{L}(f)$ を**基本部分束**と呼ぶ．束 $\mathcal{L}$ が Bool 束である場合には，$\mathcal{L}(f)$ は分配束なので，半順序集合のイデアルで表現できる．この半順序集合は，藤重によって提案された劣モジュラシステムの基本構造に他ならない．

劣モジュラシステム (C, p) の基本構造が，行集合を行基底に制限して得られる層混合行列の CCF によって誘導される列集合 C の分割と半順序の共通細分を与えることが，既に研究分担者室田一雄によって示されている．

1.3　層混合行列の水平基本構造

層混合行列 A において，Q は $|C|$ 次元線形空間 U から $|R_Q|$ 次元線形空間 V_Q の双対空間 ${V_Q}^*$ への線形写像を表していると解釈することができる．V_Q の部分空間と R_T の部分集合の組のなすモジュラ束を $\mathcal{L}$ とする．束の演算は

$$\begin{aligned}(W_1, I_1) \wedge (W_2, I_2) &= (W_1 \cap W_2, I_1 \cap I_2)\\ (W_1, I_1) \vee (W_2, I_2) &= (W_1 + W_2, I_1 \cup I_2)\end{aligned}$$

で定義される．束 $\mathcal{L}$ の元 $X = (W, I)$ と列部分集合 J に対して，J の部分集合

$$\{j \in J \mid Q_j \notin W^{\perp}, \text{ or } \exists i \in I \text{ s.t. } T_{ij} \neq 0\}$$

の大きさを $\kappa(X, J)$ で表す．ただし，$W^{\perp}$ は W と直交する（消し合う）${V_Q}^*$ の部分空間である．さらに，

$$q(X, J) = \kappa(X, J) - \dim W - |I|$$

とすると，q は $\mathcal{L}$ 上の**双劣モジュラ関数**になる．

$$\begin{aligned}q(X_1, J_1) + q(X_2, J_2) \geq{} & q(X_1 \wedge X_2, J_1 \cup J_2)\\ & + q(X_1 \vee X_2, J_1 \cap J_2)\end{aligned}$$

列部分集合 J に対して，$q_J(\cdot) = q(\cdot, J)$ とする．式 (1) に類似した次の定理が成立する．

定理 1: $\mathrm{rank} A = \min_{X \in \mathcal{L}} q_C(X) + |R|$.

劣モジュラ関数 q_C の最小値を達成する $\mathcal{L}$ の元の集合は $\mathcal{L}$ の部分束になる．これを $\mathcal{L}_{\mathrm{CCF}}$ と書くと，$\mathcal{L}_{\mathrm{CCF}}$ は A の CCF によって誘導される行集合の分割と半順序の構造と一致している．同様にして，任意の列部分集合 J に対して，q_J の最小値を達成する $\mathcal{L}$ の元の集合を $\mathcal{L}_{\mathrm{CCF}}(J)$ とする．この $\mathcal{L}_{\mathrm{CCF}}(J)$ は，$A[R,J]$ の CCF によって，誘導される行集合の分割と半順序の構造と一致している．

さて，層混合行列 A を係数行列とする方程式系で記述されるシステムの設計変数は，A の列基底の補集合で与えられる．列基底の族を $\mathcal{B}$ とし，$(\mathcal{L}, q_C)$ の基本構造を $\mathcal{K}_{\mathrm{PS}}$ と書くと，次の定理が成立する．

定理 2: $\mathcal{K}_{\mathrm{PS}} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \mathcal{L}_{\mathrm{CCF}}(B)$.

この定理は，劣モジュラ関数 q_C の基本構造が，設計変数の選び方によってシステムをどの程度まで分解可能になるかの限界を与えていることを示している．

定理 2 に基づいて，q_C の基本構造を層混合行列の**水平基本構造**，p の基本構造を**垂直基本構造**と呼ばれている．

2　多項式行列に対する組合せ論的緩和法

微分代数方程式（DAE）の数値計算法において，近年，その代数構造と数値計算誤差の関係が明らかにされつつあり，とくに，「指数」の重要性が認識されている．研究分担者室田一雄は，岩田 覚，作田 泉とともに，「組合せ論的緩和法 (Combinatorial Relaxation)」と称するアルゴリズム設計法に基づいてこの指数の計算を特殊ケースとして含む問題に対するアルゴリズムを構成した [3, 4, 5, 6, 7]．ここでは，その概要を報告する．

変数 x に関する有理式を要素とする $m \times n$ 行列 $A(x) = (A_{ij}(x))$ および行番号 R の部分集合 I_0, 列番号 C の部分集合 J_0, 自然数 k $(\max(|I_0|, |J_0|) \leq k \leq \min(m, n))$ が与えられたとき，$I_0 \times J_0$ を含むような k 次小行列式 (これは x の有理式である) の最大次数

$$\delta_k(A) = \max\{\deg_x \det A[I, J] \mid I \supseteq I_0,\ J \supseteq J_0, |I| = |J| = k\}$$

を求める問題を考える．ここで, $A[I, J]$ は $I \times J$ に対応する A の部分行列を表し, 有理式の次数 (deg) = 分子の次数 − 分母の次数と定義する．行列 A がペンシルの場合，そのクロネッカ正準形の指数は, $\delta_{n-1}(A) - \delta_n(A) + 1$ に等しい．

組合せ論的緩和法の大枠は, 代数的対象 δ_k をより扱い易い組合せ論的対象 $\widehat{\delta}_k$ におきかえた問題を解き, その解が運良く元の問題の解になっていればそれを採用しようとするものである．運悪く元問題の解として失格と判明すればなんらかの対策を講じて, 最終的には元問題の解が得られるようにする．本問題に対しては，「推定値」$\widehat{\delta}_k$ は 2 部グラフの最適マッチングによって定義され, $\delta_k \leq \widehat{\delta}_k$ を満たす．算法の概略は以下の通り:

第 1 段: 組合せ最適化算法により $\widehat{\delta}_k$ を求める．

第 2 段: $\widehat{\delta}_k = \delta_k$ かどうかを判定する (この際，「真値」δ_k を計算することはしない)．YES なら終了, NO なら次に進む．

第 3 段 ($\delta_k < \widehat{\delta}_k$ のとき): $\delta_k(A') = \delta_k(A)$ かつ $\widehat{\delta}_k(A') \leq \widehat{\delta}_k(A) - 1$ となるように, A を A' に変形する (「真値」を不変に保　ち「推定値」を改良する)．

上の考え方は数理計画法における緩和 (relaxation) の手法に他ならないが, 緩和問題の作り方が代数的量の組合せ論的特徴付けに基づいているので「組合せ論的緩和」と呼ばれている．

2.1 組合せ論的緩和 (算法の第 1 段)

行列 $A(x)$ の構造は, 行番号 R, 列番号 C の和集合 V を点集合とし, $E = \{(i,j) \mid i \in R, j \in C, A_{ij}(x) \neq 0\}$ を枝集合とする 2 部グラフ G で表わされる. 枝 $e = (i,j)$ にはコスト $c_e = c_{ij} = \deg_x A_{ij}(x)$ を付与する. $M \subseteq E$ に対して, その端点の集合を ∂M と表し, $c(M) = \sum_{(i,j)\in M} c_{ij}$ とする. G のマッチング M で, $|M| = k$, $\partial M \supseteq V_0$ ($\equiv I_0 \cup J_0$) を満たすものの全体を $\mathcal{M}_k(A; I_0, J_0)$ として, 「推定値」を次のように定義する:

$$\widehat{\delta}_k(A) = \max\{c(M) \mid M \in \mathcal{M}_k(A; I_0, J_0)\}.$$

定理 3: (1) $\delta_k(A) \leq \widehat{\delta}_k(A)$ $\cdots\cdots\cdots$ $(*)$
(2) 非零係数が代数的独立ならば, 上式 $(*)$ で等号が成り立つ. □

式 $(*)$ で等号が成り立つとき, $A(x)$ は upper-tight であると呼ぶ.

2.2 終了判定 (算法の第 2 段)

upper-tight かどうかの判定は, 変数 x を含まない定数行列の階数の計算に帰着されることを示す (→定理 5). マッチング問題に対する主・双対線形計画問題を考える:

$$\begin{array}{rl}
\text{PLP:} & \max. \displaystyle\sum_{e\in E} c_e \xi_e, \\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{\partial e \ni i} \xi_e \leq 1 \quad (i \in V - V_0), \\
& \displaystyle\sum_{\partial e \ni i} \xi_e = 1 \quad (i \in V_0), \\
& \displaystyle\sum_{e\in E} \xi_e = k, \quad \xi_e \geq 0 \quad (e \in E); \\
\text{DLP:} & \min. \displaystyle\sum_{i\in V} p_i + kq, \\
\text{s.t.} & p_i + p_j + q \geq c_{ij} \quad ((i,j) \in E), \\
& p_i \geq 0 \quad (i \in V - V_0).
\end{array}$$

$\boldsymbol{\xi} = (\xi_e \mid e \in E)$ が主変数, $\boldsymbol{p} = (p_i \mid i \in V)$ と q が双対変数である. 周知のように, この線形計画は, 主・双対問題とも整数値最適解をもつ (c は整数である).

簡約コスト $\widetilde{c}_e = \widetilde{c}_{ij} = c_{ij} - p_i - p_j - q$ が 0 に等しい枝 $e = (i,j)$ を tight な枝と呼び, tight な枝 $E^* = \{e \in E \mid \widetilde{c}_e = 0\}$ から成る部分グラフ $G^* = (V, E^*)$ を考える. さらに,

$$\begin{aligned}
V^* &= \{i \in V - V_0 \mid p_i > 0\}, \\
I^* &= \{i \in R - I_0 \mid p_i > 0\} = V^* \cap R, \\
J^* &= \{j \in C - J_0 \mid p_j > 0\} = V^* \cap C
\end{aligned}$$

とおくと, 相補性条件は次のようになる.

補題 4: $(\boldsymbol{p}, q)$ を DLP の (整数値) 最適解とする. M が $\mathcal{M}_k(A; I_0, J_0)$ における最適マッチングであるための必要十分条件は, M が G^* のマッチングであって, $\partial M \supseteq V^* \cup V_0$, $|M| = k$ を満たすことである. □

双対可能解 $(\boldsymbol{p}, q)$ を用いて, 定数行列 A^* を

$$A(x) = x^q \cdot \mathrm{diag}\,(x; \boldsymbol{p}_{\mathrm{R}}) \cdot (A^* + \mathrm{o}(1)) \cdot \mathrm{diag}\,(x; \boldsymbol{p}_{\mathrm{C}})$$

で定義する. ただし, $\mathrm{o}(1) \to 0$ $(x \to \infty)$ で, 一般に $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, \cdots)$ に対して $\mathrm{diag}\,(x; \boldsymbol{r}) = \mathrm{diag}\,(x^{r_1}, x^{r_2}, \cdots)$ である. 相補性条件を用いて次の定理が導かれる.

定理 5: (upper-tightness の条件) $(\boldsymbol{p}, q)$ が双対最適解のとき, 次の (a)–(c) は同値である.
(a) $\delta_k(A; I_0, J_0) = \widehat{\delta}_k(A; I_0, J_0)$.
(b) ある $I \supseteq I_0 \cup I^*$, $J \supseteq J_0 \cup J^*$ が存在して $\mathrm{rank}\, A^*[I, J] = |I| = |J| = k$.
(c) 次の 4 条件が満たされる:
(r1) $\mathrm{rank}\, A^*[R, C] \geq k$,
(r2) $\mathrm{rank}\, A^*[I_0 \cup I^*, C] = |I_0 \cup I^*|$,
(r3) $\mathrm{rank}\, A^*[R, J_0 \cup J^*] = |J_0 \cup J^*|$,
(r4) $\mathrm{rank}\, A^*[I_0 \cup I^*, J_0 \cup J^*] \geq |I_0 \cup I^*| + |J_0 \cup J^*| - k$. □

2.3 行列の修正 (算法の第 3 段)

行列 A が upper-tight でない場合には, 整数値双対最適解 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_{\mathrm{R}} \oplus \boldsymbol{p}_{\mathrm{C}} = (p_{\mathrm{R}i} \mid i \in R) \oplus (p_{\mathrm{C}j} \mid j \in C)$ を用いて

$$\begin{aligned} U(x) &= \mathrm{diag}\,(x; \boldsymbol{p}_{\mathrm{R}}) \cdot U \cdot \mathrm{diag}\,(x; -\boldsymbol{p}_{\mathrm{R}}), \\ V(x) &= \mathrm{diag}\,(x; -\boldsymbol{p}_{\mathrm{C}}) \cdot V \cdot \mathrm{diag}\,(x; \boldsymbol{p}_{\mathrm{C}}) \end{aligned}$$

(U, V は正則な定数行列) とおき, $A'(x) = U(x)A(x)V(x)$ と変形する.

補題 6: 正則な定数行列 U, V が条件
- $U_{hi} \neq 0 \implies [(i \in I_0) \text{ or } (h, i \in R - I_0,\ p_{\mathrm{R}h} \leq p_{\mathrm{R}i})]$,
- $V_{jh} \neq 0 \implies [(j \in J_0) \text{ or } (h, j \in C - J_0,\ p_{\mathrm{C}h} \leq p_{\mathrm{C}j})]$

を満たすならば, $\delta_k(A') = \delta_k(A)$. □

定理 5の (r1)–(r4) における rank を term- rank に置き換えた条件を (t1)–(t4) とする.

補題 7: 行列 $(A')^* = UA^*V$ が条件 (t1)–(t4) のいずれかを満たさないならば, $\widehat{\delta}_k(A') \leq \widehat{\delta}_k(A) - 1$. □

A が upper-tight でない場合には, 補題 6, 7の両方の条件を満たすような正則行列 U, V を選ぶことができる. したがって, 有限回の反復の後に「推定値」$\widehat{\delta}_k$ が「真値」δ_k に一致して算法が終了する ($k \leq \mathrm{rank}\, A(x)$ は前提). 算法の実現の詳細, および計算効率については [6, 7] で考察されている.

3 代用電荷法におけるスキームの「不変性」

2 次元の Laplace 方程式 $\Delta u = 0$ の Dirichlet 問題に対する代用電荷法においては,

$$u^{(N)}(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N} Q_j \log \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_j\|$$

の形の近似式 (ここで $\boldsymbol{y}_j \in \mathbf{R}^2$ $(j=1,\ldots,N)$ は電荷点の座標) を用いるのが普通であるが，これは座標のスケーリングや境界条件の原点移動に対して不変でない．そこで，研究分担者室田一雄は，

$$u^{(N)}(\boldsymbol{x}) = Q_0 - \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N} Q_j \log \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_j\|$$

の形の近似式を考え，その係数 Q_j $(j=0,1,\ldots,N)$ を $\sum_{j=1}^{N} Q_j = 0$ という制約下で定めることを提案した [8, 9]．これにより，物理的に自然で，かつ，数学的にもよい性質をもった近似方式が得られる．この概要について報告する．

3.1 不変な近似式

2 次元領域 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ における Laplace 方程式 $\Delta u = 0$ の Dirichlet 問題

$$\Delta u(\boldsymbol{x}) = 0 \quad (\boldsymbol{x}\in\Omega), \quad u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \quad (\boldsymbol{x}\in\partial\Omega) \tag{2}$$

を考える．代用電荷法においては，電荷点 $\boldsymbol{y}_j \in \mathbf{R}^2 - \Omega$ $(j=1,\ldots,N)$ を適当に選んで，

$$u^{(N)}(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N} Q_j \log \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_j\| \tag{3}$$

の形の近似式を設定し，未定係数 Q_j $(j=1,\ldots,N)$ を選点法や最小 2 乗法で定めるのが普通である．例えば，選点法においては， N 個の拘束点 $\boldsymbol{x}_k \in \partial\Omega$ $(k=1,\ldots,N)$ を適当に選んで，拘束条件

$$\begin{aligned} u^{(N)}(\boldsymbol{x}_k) &= -\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N} Q_j \log \|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{y}_j\| \\ &= f(\boldsymbol{x}_k) \qquad (k=1,\ldots,N) \end{aligned} \tag{4}$$

を Q_j $(j=1,\ldots,N)$ に関する 1 次方程式系と見て解くことになる．

しかし，こうして定められる近似解 $u^{(N)}$ は，座標のスケール変換

$$\boldsymbol{x} \to \alpha\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{y}_j \to \alpha\boldsymbol{y}_j \tag{5}$$

や境界条件の原点移動

$$f(\boldsymbol{x}) \to f(\boldsymbol{x}) + c \qquad (c \text{ は定数}) \tag{6}$$

に対して「不変」でない．すなわち，変換 (5), (6) のそれぞれに伴って期待される自然な形の不変性，すなわち

$$u^{(N)}(\boldsymbol{x}) \to u^{(N)}(\alpha\boldsymbol{x}), \quad u^{(N)}(\boldsymbol{x}) \to u^{(N)}(\boldsymbol{x}) + c \tag{7}$$

の形の性質，をもっていない．物理現象の記述が (5) や (6) のような自明な座標変換に本質的に依存するはずはないので，このような「不変」でない近似解に物理的な解釈を与えることは難しいと言わざるを得ない．また，Laplace 方程式そのものは上記のような不変性を有しているのであるから，それを保った形の近似解の方が数学的にも良い性質をもっていると期待される．

そこで，

$$u^{(N)}(\boldsymbol{x}) = Q_0 - \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N} Q_j \log \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_j\| \tag{8}$$

の形の近似式を設定し，係数 Q_j $(j=0,1,\ldots,N)$ を

$$\sum_{j=1}^{N} Q_j = 0 \tag{9}$$

という制約下で定めることを提案する．例えば，選点法においては，N 個の拘束点 $\boldsymbol{x}_k \in \partial\Omega$ $(k=1,\ldots,N)$ における拘束条件

$$\begin{aligned} u^{(N)}(\boldsymbol{x}_k) &= Q_0 - \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N} Q_j \log ||\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{y}_j|| \\ &= f(\boldsymbol{x}_k) \qquad (k=1,\ldots,N) \end{aligned} \tag{10}$$

と制約条件 (9) を合わせたものを Q_j $(j=0,1,\ldots,N)$ に関する 1 次方程式系と見て解く．

こうして定められる近似解 $u^{(N)}$ は上記の自明な変換 (5), (6) に対して「不変」である．実際，(5) に対しては，制約条件 (9) によって

$$Q_0 - \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N} Q_j \log ||\alpha(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_j)|| = u^{(N)}(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N} Q_j \log |\alpha| = u^{(N)}(\boldsymbol{x})$$

が成り立つので $Q_j \to Q_j$ $(j=0,1,\ldots,N)$ となり，(6) に対しては $Q_0 \to Q_0 + c$, $Q_j \to Q_j$ $(j=1,\ldots,N)$ となるので，不変性 (7) を有している．なお，座標軸の回転と並進に対しては，通常の表式 (3) も提案する表式 (8) も不変である．

通常の表式 (3) に対する方程式系 (4) の係数行列 (N 次行列) を G，不変な表式 (8) に対する方程式系 (9), (10) の係数行列 ($N+1$ 次行列) を $\tilde{G}$ とすると，

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{1} & G \end{bmatrix} \tag{11}$$

の関係がある．ここで，$\mathbf{1}$ はすべての要素が 1 である N 次元縦ベクトルを表す．

最小 2 乗法的に係数 Q_j $(j=0,1,\ldots,N)$ を定める場合には，条件 (9) を満たす N 次元部分空間 $(\subset \mathbf{R}^{N+1})$ 上で残差の最小化を計る．

以上のように不変な表式 (8) に基づいて構成された近似解は，物理的に自然なだけでなく，数学的にもよい性質をもっている．その一つとして，(通常の状況では) 表式 (8) の基底関数 $\{1\} \cup \{\log ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_j|| \mid j=1,2,\ldots\}$ の 1 次結合の全体が $\partial\Omega$ 上の 2 乗可積分関数全体において稠密であるのに対し，これから定数関数を除くと稠密でなくなるという事実がある．以下，円板内の問題について二つの表式 (3) と (8) のより具体的な数学的性質を比較する．

3.2 円板内部領域の問題

不変な近似式 (8) が物理的に自然で，かつ，数学的にもよい性質をもつことを示す例として，2 次元円板内部領域

$$\Omega = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^2 \mid ||\boldsymbol{x}|| < \rho\}$$

における Dirichlet 問題を考える．この問題に対する (通常の) 代用電荷法の挙動については，桂田・岡本による詳細な数学的解析があるので，ここでもその枠組みに沿った取扱いをする．

電荷点を

$$y_j = \left(R\cos\frac{2\pi(j-1)}{N}, R\sin\frac{2\pi(j-1)}{N}\right) \quad (j=1,\ldots,N)$$

$(R>\rho)$ に配置し，選点法を用い，拘束点を

$$x_k = \left(\rho\cos\frac{2\pi(k-1)}{N}, \rho\sin\frac{2\pi(k-1)}{N}\right) \quad (k=1,\ldots,N)$$

とする．また，f は $\partial\Omega$ 上で実解析的と仮定する．

この問題に対する (通常の表式 (3) に基づく) 代用電荷法に関して次のことが知られている．

定理 8 (桂田・岡本): 近似式 (3) を用いるとき，

$$R^N - \rho^N \neq 1 \tag{12}$$

ならば，そしてそのときに限り，係数行列 G は正則である． □

定理 9 (桂田・岡本): 近似式 (3) を用いるとき，

$$R \neq 1 \tag{13}$$

ならば誤差 $\sup_{x\in\Omega}|u^{(N)}(x)-u(x)|$ は十分大きい N に関して指数関数的に減少する． □

上の定理にある条件 (12) や (13) は，座標のスケール変換に対して「不変」でないので物理的解釈ができない．一方，数学的には条件 (13) を取り除くことはできないという例が知られている．

提案する方式に対する解析の結果，上記の 2 定理における「但し書」 (12), (13) が不要であることが分かる． N 次行列 $W=(W_{kj}\mid k,j=1,\ldots,N)$ を

$$W_{kj} = \frac{1}{\sqrt{N}}\exp\left(\frac{2\pi\mathrm{i}(k-1)(j-1)}{N}\right)$$

と定義し，

$$\widetilde{W} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{0} & W \end{bmatrix}$$

とおくと，G が巡回行列なので

$$\widetilde{W}^{-1}\widetilde{G}\widetilde{W} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{N} & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \\ \sqrt{N} & \phi_0 & O \\ \mathbf{0} & O & \Phi \end{bmatrix} \tag{14}$$

の形になる．ただし，$\Phi = \mathrm{diag}\,[\phi_1,\cdots,\phi_{N-1}]$ で

$$\phi_0 = -\frac{1}{2\pi}\log|\rho^N - R^N|,$$

$$\phi_p = \frac{N}{4\pi}\sum_{\substack{m\equiv p\\ m\in\mathbf{Z}}}\frac{1}{|m|}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{|m|} > 0 \quad (1\leq p\leq N-1)$$

である ($m \equiv p$ は $\bmod N$ で考える). これより,

$$\det \widetilde{G} = -N \prod_{p=1}^{N-1} \phi_p < 0$$

となるので, 定理 8に対応して次の定理が導かれる.

定理 10: 近似式 (8) を用いるときの係数行列 $\widetilde{G}$ は正則である. □

さらに, (14) を用いて $u^{(N)}(\boldsymbol{x})$ を陽に求めることができ, 定理 9に対応して次の定理が導かれる.

定理 11: 近似式 (8) を用いるとき, 誤差は十分大きい N に関して指数関数的に減少する. □

発表論文

[1] 岩田 覚, 室田 一雄: 層混合行列の水平基本構造 — 設計変数選択による離散システムの分解. 日本応用数理学会平成 5 年度年会研究発表予稿集, 259–260, 1993.

[2] S. Iwata and K. Murota: Horizontal principal structure of layered mixed matrices - Decomposition of discrete systems by design-variable selections. *METR* 93-9 (1993), The University of Tokyo.

[3] K. Murota: Computing the degree of determinants via combinatorial relaxation. SIAM Journal on Computing, to appear.

[4] K. Murota: Combinatorial relaxation algorithm for the maximum degree of subdeterminants: Computing Smith-McMillan form at infinity and structural indices in Kronecker form, Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing, to appear.

[5] 室田一雄: 組合せ論的緩和法 — 組合せ最適化技法による代数計算, 日本 OR 学会春季研究発表会アブストラクト集, 1–D–10, 1994.

[6] 作田泉・室田一雄・岩田覚: 多項式行列に対する組合せ論的緩和法の実現について, 日本 OR 学会春季研究発表会アブストラクト集, 1–D–11, 1994.

[7] S. Iwata, K. Murota and I. Sakuta: Primal-dual combinatorial relaxation algorithms for the maximum degree of subdeterminants, *METR* 94-7 (1994), The University of Tokyo.

[8] 室田一雄：代用電荷法におけるスキームの「不変性」について, 情報処理学会論文誌, 34, 533-535, 1993.

[9] K. Murota: Comparison of conventional and 'invariant' schemes of fundamental solutions method for annular domains, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, to appear.

研究分担課題「計算物理学におけるアルゴリズム」

研究分担者　東京大学工学部教授　森　正武

計算物理学において，偏微分方程式を解くことは最も中心的な課題であり，一方高精度かつ高速の数積分法の開発も重要な課題である．ここでは，この二つの課題について研究を行ったので，その結果を報告する．

1. Cahn-Hilliard方程式の差分解法とその安定性

われわれの研究対象は，スピノーダル分解と呼ぶ，合金など空間的に均一な組成 $u(x,t_0)$ が時間発展とともに空間的に不均一に変化してゆく，いわゆる異常拡散現象の数値解析である．その現象のモデルを記述する方程式として次のCahn-Hilliard方程式が知られている．

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2(pu + ru^3 + q\nabla^2 u)$$

ただし，p，q，r は，$p < 0$，$q < 0$，$r > 0$ をみたす定数である．

このように，Cahn-Hilliard方程式は非線形項をもつ拡散方程式の形をしているが，拡散項の係数が負であることおよび非線形項の非線形性がかなり強いことにより，数値計算によって正確な解を求めることがかなりむずかしい．

研究分担者森正武および研究協力者降旗大介は，数学的考察と物理的考察を同時に行うことによって，Cahn-Hilliard 方程式の数値解を求める差分スキームに対する安定性の条件を得た [1]．与えられた元の方程式を線形化した方程式の解のスペクトルに相当する量を定義し，一方数値解を求めるための差分スキームを線形化したスキームによる解の対応するスペクトルを定義する．そして，後者の値域が前者の値域に含まれるという関係によって安定性を定義し，その包含関係がみたされるときそのスキームはF-安定であるという．また，両者の値域が一致するとき，そのスキームは最適 F-安定であるという．

われわれは，F-安定および最適 F-安定の条件を満たす差分パラメータの典型的な組合せを計算によって求めた．そして，その組合せの幾組かを使って実際に数値解を求め，十分満足する結果を得た．以上の解析は空間変数２次元以上の場合にもそのまま適用でき，実際２次元問題のいくつかの例題に対しても十分安定な解を得ることができた．

次に，われわれはこの数値解の安定性をさらに詳細に調べるためにLyapunov 関数を利用することを考えた．その解析過程で，より安定な差分スキームを得るためにはむしろLyapunov関数を積極的に利用すべきであることに気付き，解析を進めた結果，次のようにして安定な新しいスキームを得た [2, 3]．

Cahn-Hilliard 方程式は考えている物理系の Ginzburg-Landau 局所自由エネルギー

$$G(u, \nabla u) = \frac{1}{2}pu^2 + \frac{1}{4}ru^4 - \frac{1}{2}q|\nabla u|^2$$

から，その変分方程式として導出することができる．一方，系の全自由エネルギー

$$\mathcal{L}(u) = \int G(u, \nabla u) d\boldsymbol{x}$$

を考えると，これは系の時間発展に対して必ず減少する性質をもつ．したがって，この $\mathcal{L}(u)$ は系の安定性を論ずるための Lyapunov 関数の役割を果たすことがわかる．

そこでわれわれは，この Lyapunov 関数を出発点にとり，それを直接離散化し，それから Cahn-Hilliard 方程式に対応する差分スキームを合理的に導出した．こうして得られた差分スキームを使えば，解はいずれの場合も安定に計算することができることが確かめられた．

ここでの解析も空間変数2次元以上の場合に拡張することは容易である．われわれは，空間1次元および2次元のCahn-Hilliard方程式に対して，前述の F-安定性を満たさないような大きな時間刻み幅を使ってLyapunov 関数に基づく差分スキームで計算を行ったが，両者で同一の結果を得た．したがって，Lyapunov 関数に基づくスキームの安定性は強く，そのスキームによる結果の信頼性は十分高いといえる．

2. Fourier 変換型積分に対する二重指数型数値積分公式

分担者らが考案した二重指数関数型数値積分公式は，端点に特異性をもつ積分や半無限区間の積分など，古くから広く使われてきた公式が苦手とする積分も問題なく計算してくれる．しかし，この公式でもうまく計算できない型の積分がある．例えばそれは半無限区間における次のような減衰の遅い Fourier 変換型の積分である．

$$I = \int_0^\infty f_1(x) \sin x dx, \quad f_1(x) = \text{減衰の遅い代数関数}$$

このような積分に対してはいろいろな方法が知られているが，DE公式と補外法を組み合わせた方法も有効な積分法の一つである．

研究分担者森正武と研究協力者大浦拓也は，二重指数関数型変換だけを直接用いる方法を考案した．本来の二重指数関数型積分公式は，与えられた積分を二重指数関数型関数によって無限区間の積分に変換し，その積分を等間隔の刻み幅をもつ台形則で積分するものである．その際，得られた公式の重みが二重指数関数的に減衰することがこの公式の特徴である．それに対して，本研究で対象とする公式は，得られた公式の重みが二重指数関数的に減衰するのではなく，公式の標本点が被積分関数の零点に二重指数関数的に近づくようにした公式である．

この公式を使うと，例えば

$$I = \int_0^\infty \sin x \log x dx = -\gamma$$

のような積分も簡単に計算することができる．この積分の被積分関数は発散する因子 $\log x$ をもち，これは本来

$$\lim_{z \to 0} \int_0^\infty e^{-zx} \sin x \log x dx$$

として定義されるものである．しかし，発散のことに気づかずに直接われわれの公式を適用しても正しい結果を得ることができる．

以上の考え方は，半無限区間の積分だけでなく，全無限区間の積分に対しても適用できる．例えば，積分

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{1+e^{-x}}dx$$

の場合，被積分関数は $x\to\infty$ のとき発散はしないが，0 に収束しない．この積分は本来は

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\varepsilon x}\frac{\sin x}{1+e^{-x}}dx$$

として定義されるべきであるが，われわれの公式を使えば，この定義を知らずに単に $f(x)=\sin x/(1+e^{-x})$ を被積分関数に与えるだけで正しい値 $\pi/\sinh\pi$ を精度良く得ることができる．

発表論文

[1] D. Furihata, T. Onda and M. Mori, A numerical analysis of some phase separation problem, to appear in Proceedings of the First Japan-China Joint Seminar on Numerical Mathematics, Aug. 1992, Beijing.

[2] 降旗大介，恩田智彦，森正武，Lyapunov 関数に基づく Cahn-Hilliard 方程式の数値解法，日本応用数理学会平成４年度年会研究発表予稿集，169-170.

[3] D. Furihata, T. Onda and M. Mori, A finite difference scheme for the Cahn-Hilliard equation based on a Lyapunov function, to appear in Proceedings of International Conference on Nonlinear Mathematical Problems in Industry, Nov. 1992, Iwaki.

[4] 大浦拓也，森正武，減衰の遅いフーリェ変換型積分に対するＤＥ公式，日本応用数理学会平成４年度年会研究発表予稿集，99-100.

[5] 森正武，室田一雄，杉原正顯，数値計算の基礎，岩波講座応用数学，岩波書店，1993 年 5 月 14 日．

[6] 森正武，杉原正顯，室田一雄，線形計算，岩波講座応用数学，岩波書店，1994 年 2 月 10 日．

研究分担課題　　　　「非線形反復解法のアルゴリズム」

研究分担者　愛媛大学理学部教授　山本哲朗

非線形反復解法の研究は数値解析研究の重要な部分を占める。本研究グループは最も基礎的な次の事項を研究した。

1．微分不可能項をもつ方程式の解法

非線形方程式

$$Ax + g(x) = 0, \quad x \in D \subseteq \mathcal{R}^n$$

（$A : n$ 次行列，$g : n$ 次元ベクトルで微分可能性を仮定しない）

は、微分方程式

$$-div(\theta(z,y))\nabla u(z,y) + q(u) = f(z,y), \quad (z,y) \in \Omega = (0,1)\times(0,1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega|_{z=0}} = 0, \qquad u(0,y) = 0$$

$$\left(q(u) = \begin{cases} 1 + e_1 u & (u \geq 0) \\ 1 + \dfrac{1}{e_2} u & (u < 0) \end{cases} \right)$$

等を離散化して得られる。このようなタイプの方程式に対して、区間 $M-$ 行列の理論を援用して、解が存在するための必要十分条件、一意性条件を与えるとともに、それを解く Broyden 型 quasi-Newton 法の収束定理を得た [A1] 。また多段簡易 Newton-like 法の収束球につき考察した [A2] 。

2．多項式の全根同時解法

Durand-Kerner 法の周辺につき総合調査を行い、数値例とともに精度保証の仕方についても考察した [B1-B4, C1-C2] 。この解法に関する深い研究は Kerner に先立ってブルガリアの著名な研究者 Dochev 教授により行われており、その流れを汲んだ論文がブルガリアには多い。そのため、文献の収集、翻訳等につきブルガリア出身の研究者 L.Atanassova 氏（ Bremen 工科大）の協力を求めてサーベィを行った。また、 D-K 列の挙動につき、興味ある事実を見い出した。さらに、山本は、 Kjurkchiev 教授（ブルガリア科学アカデミー）、菅野幸夫（愛媛大大学院生）とともに D-K 型解法の加速とみなせる SOR 型加速法の収束性を証明し、反復列の挙動、解法の効率等を調べた。また、田辺法は根と係数との関係をあらわす連立方程式系に適用された Chebyshev 法に等しいことを見い出した。この結果は D-K 法と Newton 法との関係に対比されるべきものであり、上記結果と併せて何れ何処かに論文として発表する予定である。

発表論文

[A. 学会誌等]

[A1] X.Chen and T.Yamamoto, On the convergence of some quasi-Newton methods for nonlinear equations with nondifferentiable operators, Computing **49** (1992), 87-94.

[A2] X.Chen and T.Yamamoto, A convergence ball for multistep simplified Newton-like methods, Numer. Funct. & Optimiz. **14** (1993), 15-24.

[A3] 山本哲朗・菅野幸夫, Durand-Kerner 法に関する注意, 日本応用数理学会論文誌 4(1994), 251-258.

[B. 口頭発表]

1. T.Yamamoto, Topics in the Durand-Kerner methods for the simultaneous determination of polynomial zeros (招待講演), IMACS-GAMM International Workshop on Validated Computation, Univ. of Oldenburg, 1993 年 8 月 30 日.

2. 山本哲朗, Durand-Kerner 法をめぐって, 情報処理学会関西支部「数値解析研究会講演会」, 於関西情報センター, 1993 年 7 月 1 日.

3. 菅野幸夫, Durand-Kerner 法とその加速法, 京都大学数理解析研究所共同研究集会「数値計算アルゴリズムの現状と展望 II」, 1994 年 10 月 27 日.

4. 菅野幸夫, N.Kjurkchiev, 山本哲朗, On some methods for the simultaneous determination of polynomial zeros, 情報処理学会関西支部「数値解析研究会」, 於京都大学理学部, 1994 年 12 月 19 日.

[C. 出版物]

1. T.Yamamoto, S.Kanno and L.Atanassova, Validated computation of polynomial zeros by the Durand-Kerner methods, in Topics in Validated Computations (edited by J.Herberger), pp. 27-53, North-Holland, 1994.

2. S.Kanno and T.Yamamoto, 同上 II, pp. 55-61.

第 2 部研究集会記録

応用数学合同研究集会

1992 年 12 月 24 日 (木) - 26 日 (土)

於 京都大学

目次

離散系セッション

[* 印は 20 分、** 印は 25 分、他は 30 分]

12 月 24 日 (木)　[数理解析研究所 115 号室]

14:00–15:45　　グラフ理論 1

16:00–17:30　　グラフ理論 2

12 月 25 日 (金)　[数理解析研究所 115 号室]

9:30–12:30　アルゴリズム

13:40 – 15:10　システムと論理 1

15:30 – 17:00　　システムと論理 2

On Mints' Reduction for ccc-Calculus . . . .

赤間 陽二 (東工大・理)

命題論理の含意断片の一性質 . . . .

鹿島 亮 (東工大・理)

λ-Calculi with Conditional Rules . . . .

高橋 正子 (東工大・理)

12 月 26 日 (土)　[京大会館 212 号室]

10:00–12:00　　代数と言語

3 近傍局所遷移規則を持つ有限セルオートマトンの挙動解析 I . . . .
関田 健治, 隈本 覚 (九大・理)
乃美 正哉 (九工大・情報工), 河原 康雄 (九大・理)

3 近傍局所遷移規則を持つ有限セルオートマトンの挙動解析 II . . . .
隈本 覚, 関田 健治 (九大・理)
乃美 正哉 (九工大・情報工), 河原 康雄 (九大・理)

グラフ変換系における危険対の補題について . . . .

溝口 佳寛 (九工大・情報工), 河原 康雄 (九大・理)

Factorization of Jacobi polynomial and elliptic curves over finite fields . . .

難波 完爾 (東大・数理科学)

解析系セッション

[* 印は 15 分、他は 30 分]

12 月 24 日 (木)　[数理解析研究所 411 号室]

13:00 – 15:00　分岐問題

コルモゴロフ問題に現われる特異摂動現象 . . . .

岡本久 (京大・数理解析研究所), 東海林 まゆみ (東大・数理科学)

折り返し点で作られる曲線上の結節点の効率のよい計算法 . . . .

山本 範夫 (九工大・情報工)

Numerical Verification of Bifurcation Points on
Solution Branches of Parametrized Nonlinear Equations . . . .

土屋 卓也 (愛媛大・理)

表面波を近似する Korteweg-de Vries-
Kuramoto-Sivashinsky 方程式の解の分岐 . . . .

西田 孝明 (京大・理)

15:20 – 17:20　楕円型方程式・数値的検証

高次要素を用いた残差反復法による楕円型方程式の解の数値的検証法 . . . .

山本 野人, 中尾 充宏 (九大・理)

微分不能項を持つ楕円型方程式の解の数値的検証について . . . .

渡部 善隆 (九大・大型計算機センター)
山本 野人, 中尾 充宏 (九大・理)

非線形楕円型境界値問題の不安定解の数値計算:
Nehari 原理に基づく反復列の収束について . . . .

水谷 明 (学習院大・理)

角を持つ領域におけるラプラス方程式の一数値計算法 . . . .

小山 大介, 加古 孝, 牛島 照夫 (電通大・情報工)

12 月 25 日 (金)　[数理解析研究所 411 号室]

9:30 – 12:00　積分変換・データ変換

13:00 – 15:00　反応拡散方程式

15:20 – 17:20　　パターン形成・ゆらぎ

12 月 26 日 (土)　[理学部数学教室 大会議室 (130 号室)]

9:30 – 10:45　流れ・波・シミュレーション

自由表面を有する自然対流のスペクトル解析 * . . . .
周 偉東 (筑波大・工学研究科)
今井 仁司, 名取 亮 (筑波大・電子情報工)

円柱まわり流れにおける流れの 3 次元性の確認 . . . .
藤間 昌一, 田端 正久 (電通大・情報工)

正定値自己共役作用素の近似列の分数べきについての注意 . . . .
松木 美保子, 牛島 照夫 (電通大・情報工)

10:55 – 11:55　有限差分法

局所 Crank-Nicolson 法について . . . .
榊原 道夫, 阿不都外里 - 阿不都熱西提, 仁木 滉 (岡山理科大・理)

時間方向高次精度移流拡散差分問題の誤差解析 . . . .
名古屋 靖一郎, R. Karyanada S. (電通大大学院)
小藤 俊幸, 牛島 照夫 (電通大・情報工)

13:00 – 15:00　力学系・アトラクタ・カオス

non-physical な解の挙動について〜バーガーズ方程式の差分解 . . . .
畑上 到 (熊本大・工)

Structure of magnetic field in a confined plasma . . . .
吉田 善章 (東大・工), 儀我 美一 (北大・理)

Morse decomposition of the attractor for a Ginzburg-Landau equation . . .
森田 善久 (龍谷大・理工)

A degenerate singularity generating geometric Lorenz attractors . . . . .
岡 宏枝 (龍谷大・理工)

応用数学合同研究集会
プログラム（当日版）

1993年12月20日(月) — 22日(水)
於　京都大学

[離散系セッション]　　数理解析研究所115号室

12月20日（月）

13:30 — 15:30　　代数系

三進Golay符合系について
　一松　信(東京電機大・理工)

Probabilistic polynomial time computable prime factors
　難波 完爾(東大・数理)

Complex Zeros of Flow Polynomials
　関根　京子(東大・理)

Asymptotic Results of Finite Automata with k Alphabets and n States and k-dimensional Young Tableaux of Order n.
　石上　嘉康(早大・理工), 谷　聖一(東京女子大)

15:45 — 17:15　　代数的グラフ理論

On certain distance-biregular graphs
　山崎　則男(九大・理)

On distance regular graphs whose antipodal structures are strongly regular graphs
　冨山　正人(九大・理)

位数10以下のassociation schemeの分類
　野見山　栄二(九大・理)

12月21日（火）

9:00 — 10:30　　計算の形式的概念1

Interactive性をもったMultimedia Playerのmodelとその実装
　田辺　誠, 高見沢　友伸, 神明　達哉, 古瀬　淳, 中島　玲二(京大・数理研)

Contextual Calculus, Cartesian Category and Categorical Data Types
　長谷川　真人(京大・数理研)

Algebraic Properties of Program Difference Integration
　西村　進(京大・数理研)

Monad Morphism による局所的状態の表現

香川　考司 (京大・数理研)

Sharing Analysis based on Type Inference

南出　靖彦 (京大・数理研)

10:30 — 12:30　　論理

Resolution process からの LK 証明図作成

大芝　猛 (名工大)

時間の論理の束モデル

白銀　哲也, 五十嵐　滋, 辻　尚史 (筑波大・電子情報)

時間の論理の語モデル

塩　雅之, 畑中　秀行, 五十嵐　滋, 細野　千春 (筑波大・電子情報)

ハードウェア・ソフトウェアシステムの tense arithmetic による解析

富田　康治, 辻　尚史, 五十嵐　滋 (筑波大・電子情報)

13:30 — 15:30　　アルゴリズム

グラフ変換による最短経路問題の解法

溝口　佳寛, 矢島　健一（九州工大・情報工）

Algorithms for embedding graphs into a 3-page book

宮内　美樹 (NTT 基礎研)

Integral convex cone and its applications

栗原　正純 (電通大・情報工学)

無向グラフに対する効率的全域木列挙法

田村　明久 (電通大・情報工学)

16:00 — 17:00　　グラフ理論 1

Diameter critical graphs

安藤　清 (電通大・情報工学)

奇次数部分グラフについて

加納　幹雄 (茨城大・工)

12 月 22 日（水）

9:00 — 10:00　　計算の形式的概念 2

Removing Conditions in Term Rewriting Systems

Viry, Patrick(京大・数理研)

半順序優先度を用いた例と制約による編集

服部　隆志 (京大・数理研)

Typing Schemes for Objects with Locality
大堀　淳 (京大・数理研)

10:15 — 12:15　　　平面グラフ
Diagonal transformations in quadrangulations II
中本　敦浩 (慶大・理工)
Planar graphs and line segments in the plane
金子　篤司 (工学院・工)
Extended Negami polynomials of trees
根上　生也 (横浜国大・教育), 太田　克弘 (慶大・理工)
Lattice angles and lattice polyhedra
前原　潤 (琉球大・教育)

13:30 — 14:30　　　グラフ理論 2
Long cycles and independent sets
斎藤　明 (日大・文理)
Graph Decompositions with Prescribed Vertices
榎本　彦衛, 松永　信介 (慶大・理工)

15:00 — 16:00　　　グラフと言語
境界付き頂点ラベル制御型グラフ文法について
山崎　浩一 (東京電機大・理工), 夜久　竹夫 (日大・文理)
グラフ概念とその圏における終対象の存在性について
河原　康雄 (九大・理), 森　雅生 (九大・総理工)

[解析系セッション]　　　数理解析研究所 420 号室
講演時間各 25 分 (質疑討論 5 分を含む)

12 月 20 日 (月)

13:30 — 15:10　　　偏微分方程式数値解法
管内流における水撃と気化・液化の数値解析
河野　幸夫 (東北学院大・工), 渡辺　雅二 (広島大・理)
Fictitious domain method for solving the Helmholtz equation on unbounded 3-D region
KUZNETSOV, Yu. A. (Inst. Numer. Math., Russian Acad. Sci.) **(取り消し)**
Applications of fictitious domain method and domain decomposition method to PDE
河原田　秀夫 (千葉大・工)

スカラー保存則の差分近似の高精度化とエントロピー条件適合性

相曽　秀昭, 岩宮　敏幸 (航空宇宙技術研)

15:30 — 16:45　　　数理モデル

磁気カオスに関する数学的問題

吉田　善章 (東大・工)

体積変化ステファン問題の数値解析

花田　孝郎 (電気通信大), 今井　仁司 (徳島大・工)

走化性モデルに現れる 2 次元パターンについて

植村　晃 (広島大・理)

12 月 21 日（火）

9:00 — 10:15　　　流れの数値計算

Couette flow reactor における時空間パターン

坂元　国望 (広島大・理)

熱対流の方程式について

西田　孝明, 寺本　恵昭, 庵原　隆雄 (京大・理)

定常 Bénard 問題と線形固有値問題

海津　聰,　高橋　亮 (電気通信大)

10:30 — 12:10　　　有限要素法・境界要素法・スプライン補間

軸対称流れ問題の有限要素近似 — 混合法と安定化法

田端　正久 (電気通信大)

浅水長波の有限要素解析

大西　和榮 (東京理大・理)

ガウス要素を用いた高精度境界要素解について

岡本　直孝 (岡山理大・工), 澤見　英男 (岡山理大・理)

Spline-on-spline 補間とその応用

酒井　宦 (鹿児島大・理)

13:30 — 14:20　　　流体の進行波

液膜流における 1 次元周期進行波について

小川　知之 (広島大・理)

表面張力波の問題について

岡本　久 (京大・数理研)

14:25 — 16:05　　　　固有値問題

Absence of point spectrum for a class of dsicrete Schrödinger operators with quasiperiodic potential

　　神永　正博 (京大・理)

スチェクロフ固有値問題と数値計算

　　牛島　照夫, 小山　大介, 横松　大作 (電気通信大), 谷本　勝彦 (三菱重工)

構造体・音場連成系の固有値問題の有限要素法による数値計算

　　鄧　莉, 加古　孝 (電気通信大)

2 固有値問題に対するホモトピーアルゴリズム

　　島崎　眞昭 (九大・大型センター)

16:10 — 17:35　　　　偏微分方程式の解析

Homeomorphisms and the classical Dirichlet problem in potential theory

　　SHAKHMATOV, D.(35 分, 愛媛大・理)

半線形楕円型方程式の球対称解の構造について

　　森下　博, 四ッ谷　晶二 (龍谷大・理工), 柳田　英二 (東工大・理)

精度保証付計算を用いた conformal scalar curvature equation の解の漸近挙動の判定

　　山本　野人 (九大・理), 四ッ谷　晶二 (龍谷大・理工), 柳田　英二 (東工大・理)

12 月 22 日 (水)

9:15 — 10:30　　　　微分方程式の離散解法

選点法による時間積分について

　　今井　仁司, 篠原　能材 (徳島大・工), 名取　亮 (筑波大・電子情報),

　　河原田　秀夫 (千葉大・工)

確率積分過程の数値シミュレーション

　　齊藤　善弘 (聖徳女子短大), 三井　斌友 (名古屋大・人間情報)

確率微分方程式に対する weak scheme の拘束条件の導出

　　小守　良雄, 杉浦　洋 (名古屋大・工), 三井　斌友 (名古屋大・人間情報)

10:45 — 12:00　　　　反復法・収束性

ラドン逆変換の近似の収束性について

　　室屋　泰三, 花田　孝郎, 渡辺　二郎 (電気通信大)

実解析関数の極と零点の大域的探索法について

　　中村　三津明, 鳥居　達生 (名古屋大・工)

最適 SOR 法に対する収束比の優れた定常反復法の定式化

　　榊原　道夫, 仁木　滉 (岡山理大・理)

13:30 — 14:45　　　　反応拡散系

結合した反応拡散系に現れる空間パターンの安定性

　　高石　武史 (広島大・理), 三村　昌泰 (東大・数理科学), 西浦　廉政 (広島大・総合科学)

燃焼過程におけるパターン形成

　　長山　雅晴 (広島大・理)

Stability and characteristic wavelength of planar interfaces in the large diffusion limit of the inhibitor

　　谷口　雅治 (京大・数理研), 西浦　廉政 (広島大・総合科学)

15:00 — 16:15　　　　相分離・相変移

江口-沖-松村の方程式とその well-posedness について

　　中村　正彰 (日大・理工)

ポリマーの相分離における界面パターンの漸近形

　　鈴木　宏昌 (広島大・理), 西浦　廉政 (広島大・総合科学)

N-homoclinic 分岐と記号力学系

　　国分　寛司 (京大・理)

応用数学合同研究集会

１９９４年１２月２０日（火）～１２月２２日（木）
龍谷大学瀬田キャンパス　ＲＥＣ　ＨＡＬＬ

［離散系セッション］　ＲＥＣ　ＨＡＬＬ　２Ｆ　講義室

１２月２０日（火）

13:00 ~ 14:15　　グラフの閉路

The 4-cycle reversion of the directed quadrangulations of the plane
　中本敦浩（慶応大・理工）
Contractible cycles in graphs with girth at least 5
　江川嘉美（東京理科大・理）
Large Cycles in Finite Graphs
　弘畑和秀、榎本彦衛、太田克弘（慶応大・理工）

14:30 ~ 15:45　　プログラム理論１（時間の論理）

時間の論理の語モデルにおける同値性判定手続きの実現
　畑中秀行、細野千春、五十嵐滋、水谷哲也（筑波大・情報）
時間の論理の束モデルの２次元的解釈
　塩　雅之、五十嵐滋、辻　尚史、水谷哲也、白銀哲也（筑波大・情報）
時間の論理の束モデルの拡張
　白銀哲也、五十嵐滋、水谷哲也、辻　尚史、細野千春（筑波大・情報）

16:00 ~ 17:15　　音楽情報処理

音楽の演奏表情の図形的表現についての考察
　清野桂子、五十嵐滋、辻　尚史（筑波大・情報）
音楽構造を表現する言語とそのピアノ演奏の芸術的な表情付けへの応用
　彌富あかね、五十嵐滋（筑波大・情報）
ランデブーを用いた自動伴奏システムのモデル化と検証
　白銀哲也、五十嵐滋、辻　尚史、水谷哲也（筑波大・情報）

１２月２１日（水）

9:45 ~ 11:50　　グラフの構造

奇次数部分グラフの構造定理について
　加納幹雄（茨城大・工）

Diameter strongly critical graphs
　小嶋　徹、安藤　清（電気通信大）

A degree condition for the existence of regular factors in $K_{1,n}$-free graphs
　徳田太郎、太田克弘（慶応大・理工）

S_3 -factorization of complete bipartite symmetric digraphs
　潮　和彦（近畿大・理工）

Graph inference from a wark for trees of bounded degree 3
　丸山　修（九州大・総合理）、宮野　悟（九州大・理）

13:00 ~ 14:40　　関係代数・オートマトン

Mostowski's collapsing lemma in relational set theory
　河原康雄（九州大・理）

関係代数とその表現定理について
　古澤　仁（九州大・総理工）、河原康雄（九州大・理）

関係計算による非決定的プロセスの基礎理論
　堀部久寿男（九州大・総理工）、河原康雄（九州大・理）

セルオートマトンCA-27の挙動について
　佐藤達郎（大分高専）

14:50 ~ 16:05　　代数的グラフ理論

A_5 の group association scheme の intersection numbers による特徴付け
　冨山正人（九州大・数理）

11, 12 点からなる association scheme の分類
　平坂　貢（九州大・数理）

0-1 多面体の端点の隣接性とその拡張
　田村明久（電気通信大）

16:15~17:55　　代数・論理

代数曲線の標準形とその空隙値列について
　栗原正純（電気通信大）

Some conjectures on symmetric matrix determined by elliptic curves over finite fields
　難波完爾（東京大・数理科学）

４次元正多胞体の対称面について
　一松　信（東京電機大・理工）

知識命題のある種の標準形展開を用いる妥当性検証について
　大芝　猛、小橋一秀（名古屋工大・工）

１２月２２日（木）

9:30 ~ 10:45　　プログラム理論２

Towards a formal framework for multimedia data and their players with QoS

田辺　誠、中島玲二（京都大・数理解析研）

再帰的データ上でのデータ並列計算のための calculus

西村　進、大堀　淳（京都大・数理解析研）

A complete proof system for an ISOS language

Irek Ulidowski（京都大・数理解析研）

11:00 ~ 11:50　　関数型

関数型言語における可変データ構造について

香川考司（京都大・数理解析研）

二つの conjunction の概念に基づき拡張された linear λ-term の強正規性について

毛利元彦（北陸先端科技大・情報）

13:00 ~ 15:05　　曲面上のグラフ

Connected spanning subgraphs of 3-connected planar graphs

榎本彦衛、太田克弘、飯田忠司（慶応大・理工）

閉曲面の tight な三角形分割

緑川俊英（横浜国大・教育）

クラインの壷の既約三角形分割

根上生也（横浜国大・教育）

Spanning planar subgraph of graphs in the torus and Klein bottle

Richard Brunet（横浜国大・教育）

トーラス上の 3-representative graph の極小マイナー

平地　豊（横浜国大・教育）

［解析系セッション］　REC　HALL　1F　小ホール

１２月２０日（火）

13:00 ~ 14:40　　渦・保存則

せん断流中の渦層の巻き上げについて
　岡本　久、坂上貴之（京都大・数理解析研）
渦面の３次元的運動に現われる特異性の数値解析
　石原　卓（富山大・理）、金田行雄（名古屋大・工）
The initial boundary value problems for hyperbolic conservation laws with relaxation
　西畑伸也（大和証券）
各 cell 内の分布の再構成による保存側の差分近似の高精度化
- エントロピー条件への適合性の理論的考察と計算の実例 -
　相曽秀昭、岩宮敏幸（航空宇宙技術研）

14:50 ~ 16:55　　反復法・収束性

順序付き改良 SOR 法について
　石渡恵美子、室谷義昭（早稲田大・理工）
非同次三項漸化式の non-dominant 解に対するアルゴリズム
　長谷川武光（福井大・工）、鳥居達生（名古屋大・工）
CT における再構成計算法の誤差評価
　室谷泰三、花田孝郎、渡辺二郎（電気通信大）
Bernstein 多項式の収束精度の改良
　影山康夫（名古屋大・工）
Gauss-Seidel 型 Durand-Kerner 法の螺旋軌道の安定性
　山岸　義和（龍谷大・理工）

17:05 ~ 17:55　　構造力学

破壊問題における物体形状に対するＫ値の感度解析
　大塚厚二（広島電機大・工）
三次元非等方斉次線形弾性体の基本解について
　中村　玄（東京理科大・理）、田沼一実（愛媛大・教養）

18:00 ~ 18:50　　曲線・曲面

コンピュータグラフィックスにおける曲面のブレンディングの代数幾何、数式処理の応用
　島崎眞昭（九州大・大型計算機センター）
凸３次スプラインによる滑らかな凸曲線の近似
　管　輝、鳥居達生（名古屋大・工）

１２月２１日（水）

9:15 ~ 10:30　　パターン形成

双安定系に現れるスパイラル波解の考察について

絹笠直樹（広島大・理）、三村昌泰（東京大・数理科学）

管状領域における発熱反応の断面形状依存性

三村昌泰（東京大・数理科学）、坂元国望（広島大・理）、
長山雅晴（東京大・数理科学）

走化性モデルに現れる振動集合パターンについて

金築浩和（広島大・理）、三村昌泰（東京大・数理科学）

10:45 ~ 12:00　　ＦＥＭ・ＢＥＭ

Nonconforming finite element method for axisymmetric problems

田端正久（広島大・理学部）

スペクトル選点法に関する最適パラメータ前処理法

周　偉東（筑波大・電子情報）、今井仁司（徳島大・工）、
名取　亮（筑波大・電子情報）

クラスタリング法による境界要素法の高速化　- 2次元静弾性問題への適用 -

速水　謙、山田賢志（東京大・工）

13:00 ~ 14:40　　ＯＤＥの数値解法・カオス

微分方程式の差分化からでるカオスの再考

前田陽一（龍谷大・理工）

Iterated cubic splines による２点境界値問題の数値解法

酒井　宦（鹿児島大・理）

Stability analysis of θ-methods for systems of neutral delay-differential equations

胡　広大、三井　斌友（名古屋大・人間情報）

Variable coefficient explicit Runge-Kutta methods for stiff equations

中島正治（鹿児島大・理）

14:50 ~ 16:30　　数理モデルとその解析

神経線維モデルにおけるパルス相互作用について

栄伸一郎（横浜市大・総合理学）

空間的すみ分けの数理モデルについて

酒井　哲（学習院大・自然科学）

Some mathematical considerations on asymmetric transmission of heterosexual disease

小出千絵（広島大・理）

パルス的に結合された振動子系の phase lock 解の構造について

志俵淳子（広島大・理）、西浦廉政（広島大・総合科学）

16:40 ~ 17:55　　偏微分方程式の数値解法

ヘルムホルツ方程式の外部問題の数値解法

劉　小進、加古　孝（電気通信大）

ラプラス方程式の内部逆問題の数値解法

大浦洋子（麻生福岡短期大）、大西和榮（東京理科大・理）

スチェクロフ固有値問題と領域分割法

牛島照夫、小山大介、横松大作、顔　立祥（電気通信大）

１２月２２日（木）

9:15 ~ 10:05　　偏微分方程式の解析

半線形楕円型方程式の解の大域的構造と数値計算

　森下　博（龍谷大・理工）、柳田英二（東京工大・理）、四ッ谷晶二（龍谷大・理工）

空間非一様な 1 次元 Ginzburg-Landau 方程式と解の安定性

　美島秀和、森田善久（龍谷大・理工）、神保秀一（北海道大・理）

10:20 ~ 12:00　　代用電荷法

代用電荷法の電荷点・拘束点の最適配置について

　岡野　大、杉原正顕（東京大・工）、室田一雄（京都大・数理解析研）

２次元領域における代用電荷法について

　西田　詩（京都大・数理解析研）

代用電荷法による多次元ポアソン方程式の数値計算とその応用

　高市英明、小林尚弘（龍谷大・理工）、天野　要（愛媛大・工）、
　四ッ谷晶二（龍谷大・理工）

代用電荷法による数値等角写像の不変性

　天野　要（愛媛大・工）

13:00 ~ 14:15　　精度保証計算

整級数演算による常微分方程式の解の精度保証

　柏木雅英（早稲田大・理工）

楕円型方程式の解の数値的検証における簡便法について

　山本野人、中尾充宏（九州大・数理）

Stokes方程式に対する有限要素解の精度保証
- Navier-Stokes方程式の解の数値的検証に向けて -

　中尾充宏（九州大・数理）、渡部善隆（九州大・大型計算機センター）、
　山本野人（九州大・数理）

14:25 ~ 15:15　　流体の固有値問題

２層 Navier-Stokes 流の固有値問題

　幡谷泰史、寺本恵昭（京都大・理）

Benard-Marangoni 熱対流系の固有値問題

　庵原隆雄、西田孝明（京都大・理）

15:25 ~ 17:30　　進行波解

Traveling waves for a simple diffusive epidemic model

　細野雄三（京都産業大・工）、ビラール・イリアス（京都産業大・理）

２種競合系の単調な進行波の波列について

　観音幸雄（愛媛大・教育）

帯状領域におけるパルス進行波解について

　古賀　扶美子、三村昌泰（東京大・数理科学）

変形されたＫｄＶ方程式とその摂動系について

　利根　剛、小川知之（広島大・理）

反応拡散方程式の進行波解の安定性について

　新居俊作（京都大・理）