多重ゼータ関数の解析的理論とその応用

松 本 耕 二 *)

本稿の前半では，20 世紀初頭の Barnes, Mellin の研究以来の多重ゼータ関数の理論の歴史を，その解析的側面と整数論への応用を中心にして述べる．こうした歴史の流れの中で研究されてきたのは一変数の場合がほとんどであったが，最近になって多変数の多重ゼータ関数の解析的研究が行われるようになり，一変数を扱うだけでは見えてこなかった新しい構造なども見出されつつある．本稿後半ではこうした多変数の理論を，筆者の研究を中心にして紹介したい．

1 Barnes と Mellin

多重ゼータ関数の解析的理論は，Barnes [11], [12] および Mellin [91], [92] による 20 世紀初頭の研究に端を発する．

Barnes が考えたのは，s を複素変数，$\alpha, w_1, \ldots, w_r$ を複素 parameter として，

$$\zeta_{B,r}(s;\alpha,(w_1,\ldots,w_r)) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=0}^{\infty} (\alpha + w_1 m_1 + \cdots + w_r m_r)^{-s} \tag{1.1}$$

の形の多重和である．これを今日では Barnes の r 重ゼータ関数と呼んでいる．

Barnes の研究の動機は多重ガンマ関数の理論を構築することにあった．古典的なガンマ関数 $\Gamma(s)$ の自然な一般化として二重ガンマ関数が導入されたのは 19 世紀後半のことで，Kinkelin, Hölder, Méray, Pincherle, Alexeiewsky らの先行研究の後を受けて，Barnes 自身も研究を進めていた ([9], [10])．彼は [11] において，Hurwitz ゼータ関数 $\zeta(s,\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)^{-s}$ とガンマ関数を結び付ける Lerch の公式

$$\log\Gamma(\alpha) = \zeta'(0,\alpha) + \frac{1}{2}\log 2\pi$$

に注目し，その一般化として，導関数の 0 での値が二重ガンマ関数の対数と結び付くものとして $\zeta_{B,2}$ を導入した．そして [12] においてはこれをさらに一般化した上記の $\zeta_{B,r}$ を導入し，それを用いて多重ガンマ関数の理論を展開したのである．

原点を通る直線によって複素平面を二つに分割し，それによって生じた二つの半平面のうちのどちらか片方に $w_1, \ldots, w_r$ がすべて属するとすれば，(1.1) は半平面 $\Re s > r$ で絶対収束する．しかし $s = 0$ はこの収束領域内にはないので，導関数の 0 での値を考えるにはまず $\zeta_{B,r}$ を解析接続する必要がある．そのために Barnes は，Riemann のゼータ関数 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ の解析接続を証明するために Riemann 自身が用いた contour 積分 (正の実軸の無限大方向からやってきて，原点のまわりを一周してまた無限大方向に戻る複素積分) の手法に注目し，類似の手法を用いて次の定理を証明した．

定理 1 (Barnes [12]) 関数 $\zeta_{B,r}$ は全 s 平面に有理型に解析接続され，$s = 1, 2, \ldots, r$ での 1 位

*) 2005 年度代数学賞受賞者

の極を除いては正則である．

従って特に $s=0$ で $\zeta_{B,r}$ は正則なので導関数が考えられる．Barnes は

$$\log\frac{\Gamma_r(\alpha,(w_1,\ldots,w_r))}{\rho_r(w_1,\ldots,w_r)}=\zeta'_{B,r}(0;\alpha,(w_1,\ldots,w_r)) \tag{1.2}$$

によって多重ガンマ関数 $\Gamma_r(\alpha,(w_1,\ldots,w_r))$ を定義し，その性質を研究した．ただし

$$\log\rho_r(w_1,\ldots,w_r)=-\lim_{\alpha\to 0}\left(\zeta'_{B,r}(0;\alpha,(w_1,\ldots,w_r))+\log\alpha\right) \tag{1.3}$$

である．

一方 Mellin [91], [92] が考察したのは，$P(X_1,\ldots,X_r)$ を複素数係数の r 変数多項式として，

$$\zeta_r(s;P)=\sum_{m_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=1}^{\infty}P(m_1,\ldots,m_r)^{-s} \tag{1.4}$$

の形で定義される多重級数である．

定理 2 (Mellin [91], [92]) 多項式 P の各係数の実部が正のとき，(1.4) は全平面に解析接続できる．

彼の証明は虚軸に平行な積分路に沿う，いわゆる vertical 積分によるもので，特に今日 Mellin–Barnes の積分公式といわれる

$$(1+\lambda)^{-s}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{\Gamma(s+z)\Gamma(-z)}{\Gamma(s)}\lambda^z dz \tag{1.5}$$

($\lambda,s\in\mathbb{C}$, $\lambda\neq 0$, $|\arg\lambda|<\pi$, $\Re s>0$, $-\Re s<c<0$) が用いられる．ここに積分路は $c-i\infty$ から $c+i\infty$ に至る直線である．

1920 年代になって Hardy と Littlewood は，Barnes の二重ゼータ関数を整数論の問題に応用した．彼らは [40], [41] において，ある種の三角形の中の格子点の個数を数える問題，および θ を無理数として

$$\sum_{n\le x}\left(\theta n-[\theta n]-\frac{1}{2}\right) \tag{1.6}$$

(ただし $[u]$ は u の整数部分) の x の関数としての挙動を調べる問題に $\zeta_{B,2}(s;\alpha,(w_1,w_2))$ が応用できることを発見し，またその研究の中で $\zeta_{B,2}(s;\alpha,(w_1,w_2))$ の一種の関数等式を証明している．他方 Hecke [43] は (1.6) を考察するために Dirichlet 級数

$$Z_\theta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\theta n-[\theta n]-\frac{1}{2}\right)n^{-s} \tag{1.7}$$

を導入し，彼の量指標の L 関数の理論を用いて $Z_\theta(s)$ の挙動を調べているが，Hardy–Littlewood [42] は $Z_\theta(s)$ も Barnes 二重ゼータ関数を用いて表示できることを示した．

Mahler [74] は Mellin が導入した $\zeta_r(s;P)$ を考察し，ある種の条件の下で，この多重級数の解析接続が Euler–Maclaurin の和公式によっても示せることを指摘した．また Mahler は [75] において Hecke の $Z_\theta(s)$ を彼の立場から扱っている．

こうした多重ゼータ関数の理論は，解析的な側面からはその後もいろいろと研究が進められたが (例

えばBochner [16]), 整数論の研究者からはやがて忘れ去られてしまうことになった. 整数論の立場から多重ゼータ関数に新しい光をあて, その重要性を劇的に立証したのは, 1970年代の新谷卓郎氏の一連の研究であった.

2 多項式で定義された多重ゼータ関数

新谷氏の研究のそもそもの動機付けは代数体上の類体構成の問題にあった. 彼は, 代数体 F の Hecke の L 関数 $L_F(s,\chi)$ の $s=1$ における特殊値の表示に現れる関数が, 類体構成への手がかりを与えるかもしれない, という期待を持って, F が総実代数体の場合を考察し, $L_F(1,\chi)$ が Barnes の多重ガンマ関数の対数の一次結合で表示できることを見出した ([101]–[103]). そのために新谷氏は, 新谷の多重ゼータ関数と今日では呼ばれる, 次のタイプの多重級数を導入した. 即ち多項式 P を一次形式

$$P_j(X_1,\ldots,X_r)=w_{j1}X_1+\cdots+w_{jr}X_r \qquad (1\le j\le n)$$

(ただし $w_{j1},\ldots,w_{jr}$ は正の数) の積 $P=P_1P_2\cdots P_n$, また $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ はすべてが0ではない非負実数として,

$$\begin{aligned}\zeta_{Sh,r}(s;P)&=\sum_{m_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=1}^{\infty}P(\alpha_1+m_1,\ldots,\alpha_r+m_r)^{-s} \qquad (2.1)\\ &=\sum_{m_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{n}(w_{j1}(\alpha_1+m_1)+\cdots+w_{jr}(\alpha_r+m_r))^{-s}\end{aligned}$$

とするのである. これはMellinの (1.4) の特別な場合であると同時に, $n=1$ とすると Barnes の (1.1) になるので, Barnes 多重ゼータ関数の一般化と見ることもできる. 新谷氏は, $L_F(s,\chi)$ を $\zeta_{Sh,r}(s;P)$ たちの一次結合で表示した. そして一方, $\zeta_{Sh,r}(s;P)$ を contour 積分の手法で解析接続し, その導関数の0での値を多重ガンマ関数の対数で記述し, この両者を結び付けることによって彼の定理を得たのである. 新谷氏はこの結果をもとに, 実二次体上の類体が二重ガンマ関数の特殊値の積で生成されるであろうという予想を提出し, ある種の特別な場合には実際にその予想を証明している ([104]).

Cassou–Noguès [18], [19] は新谷氏の仕事に示唆されて, (2.1) の分子に1のべき根が載った形の多重級数を考えてその解析接続を示し, 総実代数体の L 関数や p 進 L 関数への応用を与えている. 続いて彼女は, より一般の多項式を定義に用いた Mellin, Mahler の古い研究を掘り起こし, (1.4) の分子に1のべき根やある種の多項式が載った形の多重級数を考え, その解析接続や極の位置, 負の整数点での値, 付随する p 進 L 関数の性質などについて詳しく研究した ([20]–[23]). 解析接続に関して Cassou–Noguès の用いた手法は Mellin–Barnes 型の積分や Euler–Maclaurin の和公式など古典的なものであったが, Newton 多角形による極の位置の記述, b 関数との関係など, いくつかの新しい観点が導入されている.

Sargos [99], [100] は (1.4) の解析接続のために, 複素平面上, 実軸と一定の角度をなすある半直線上の積分を用いる新機軸を導入している. また [99] においては, (1.4) の右辺の P が有理式に一般化された場合も論じられている.

Cassou–Noguès や Sargos の研究においては, 多項式 P の係数の実部が正であるという, Mellin が課したものと同じ条件が仮定されている. これに対し Lichtin は, P の増大度に関する hypoellipticity

条件を仮定した状況を考えた．実係数の多項式 $P(x_1,\ldots,x_r)$ が $[b,\infty)^r$ $(b>0)$ 上で hypoelliptic とは，すべての微分作用素 $D^A=D_{x_1}^{a_1}\cdots D_{x_r}^{a_r}$ に対し，

$$\lim_{\substack{||\boldsymbol{x}||\to\infty\\ \boldsymbol{x}\in[b,\infty)^r}} \left|D^A P(x)/P(x)\right|=0 \tag{2.2}$$

となることである (Hörmander [47])．ただし $x=(x_1,\ldots,x_r)$, $||x||=\max\{|x_1|,\ldots,|x_r|\}$ である．複素係数の場合には $\Re P$ に対する同様の増大度条件を hypoellipticity の定義とする．Lichtin [67], [68] は，P が hypoelliptic であれば全平面への解析接続が示せることを，b 関数の理論を用いて証明した．

続いて Essouabri [29] は，彼が (H_0S) と呼ぶさらに弱い条件の下で，(1.4) が全平面へ解析接続できることを示した．この条件は (2.2) の右辺が有界ではあるが 0 には収束しない場合を許容する．現時点ではこの (H_0S) が，(1.4) のタイプの多重級数の全平面への解析接続が示されている最も広いクラスを与える．Essouabri の証明は Sargos の方針を基盤とし，広中氏の特異点解消定理 [45] などを用いた，相当に複雑なものである．

多項式 P に対する (1.4) の解析的な振舞いがわかると，Tauber 型の定理を経由して，P に関する格子点問題，即ち $\mathbb{N}$ を正の整数全体の集合として

$$N(x)=\{(m_1,\ldots,m_r)\in\mathbb{N}^r\mid|P(m_1,\ldots,m_r)|\leq x\}$$

の元の個数の評価をすることが可能になる．Sargos [100], Lichtin [69], [71], [72], Essouabri [29] はいずれも，応用の一つとしてこの問題を扱っている．Essouabri [30] はまた，$\mathbb{R}^r$ のある種の部分集合内に制限した場合の格子点の個数を数える問題を扱うため，そのような制限を付け加えた多重級数を考え，その解析接続に成功している．

さて今までに出てきたゼータ関数は，多重級数ではあるが，変数は一変数であった．しかし Lichtin [68] は，変数を多変数化した多重級数

$$\begin{aligned}&\zeta_r(s_1,\ldots,s_n;P_1,\ldots,P_n) \\ &=\sum_{m_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=1}^{\infty}P_1(m_1,\ldots,m_r)^{-s_1}\cdots P_n(m_1,\ldots,m_r)^{-s_n}\end{aligned} \tag{2.3}$$

($P_1,\ldots,P_n$ は多項式) を研究することを提案した．そして彼は実際，[70]–[73] において (2.3) の解析的性質を調べ，$P_1,\ldots,P_n$ の絶対値の大きさを条件に持つ格子点問題への応用を考察している．Essouabri も，[29] では一変数の場合しか述べていないが，その学位論文 [28] の中で，彼の方法が多変数にも拡張可能であることを注意している．

以上のような，主としてフランスにおける研究の流れとは別に，新谷氏の研究は日本においても多くの数学者を刺激し，Barnes の (1.1) や新谷氏の (2.1) の性質やその数論への応用について，数多くの研究が発表されている．その全体像を述べることは本稿では控えるが，多変数化という視点からは，今井秀雄氏 [50] および肥田晴三氏 [44] の仕事を挙げておく必要がある．彼らは共に (2.1) を多変数化して

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} (w_{j1}(\alpha_1+m_1)+\cdots+w_{jr}(\alpha_r+m_r))^{-s_j} \tag{2.4}$$

の形の，あるいはさらにその分子に指標が付いた形の多変数多重級数を導入し，新谷氏の contour 積分の方法を一般化した手法によってその解析接続を証明している．

以上のように，この節で解説した研究の流れの中では，多変数への一般化は (時代に先駆けた今井氏の仕事を除くと) 1990 年代になってようやく現れてきた方向である．しかしながら，ある種の特別な多変数の多重ゼータ関数は，全く異なる問題意識の下で，遥かに早くから数学の文献の中に登場してきていた．その出発点は多重級数に対する素朴な級数論的興味であって，この意味での研究史は実は L. Euler にまで遡る．次節ではこの流れを追うことにする．

3 Euler の二重和とその類似物

1775 年，Euler は二変数の二重和

$$\zeta_{EZ,2}(s_1,s_2)=\sum_{m_1=1}^{\infty}\sum_{m_2=1}^{\infty} m_1^{-s_1}(m_1+m_2)^{-s_2} \tag{3.1}$$

の絶対収束領域における整数点での値を考察した．この級数は Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ と，

$$\zeta(s_1)\zeta(s_2)=\zeta(s_1+s_2)+\zeta_{EZ,2}(s_1,s_2)+\zeta_{EZ,2}(s_2,s_1) \tag{3.2}$$

なる関係式によって自然に結び付くが，Euler はこの級数について

$$\zeta_{EZ,2}(1,2)=\zeta(3), \tag{3.3}$$

さらにはより一般に

$$\sum_{j=2}^{k-1}\zeta_{EZ,2}(k-j,j)=\zeta(k) \tag{3.4}$$

といった関係を証明している．この業績にちなんで (3.1) を Euler の二重和と呼ぶ．

その後，N. Nielsen, S. Ramanujan らもこの級数に興味を持ち，いろいろな公式を見出しているし，彼らが発見した公式のいくつかは，さらに別の数学者たちによって後日再発見されたりもしている．

また類似の級数として，Tornheim [109] は

$$\zeta_{MT,2}(s_1,s_2;s_3)=\sum_{m_1=1}^{\infty}\sum_{m_2=1}^{\infty} m_1^{-s_1}m_2^{-s_2}(m_1+m_2)^{-s_3} \tag{3.5}$$

の絶対収束域における整数点での値を調べ，独立に Mordell [94] も (3.5) で $s_1=s_2=s_3$ の場合や，多重級数

$$\sum_{m_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=1}^{\infty} m_1^{-1}\cdots m_r^{-1}(m_1+\cdots+m_r+a)^{-1} \quad (a>-r) \tag{3.6}$$

の値を考察している．また Apostol と Vu [4] は

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2>m_1} m_1^{-s_1} m_2^{-s_2} (m_1+m_2)^{-1} \tag{3.7}$$

の形の級数を扱っている.

こうした研究はすべて，整数点での値に対する級数論的な興味に基づく考察であるが，これに対して Atkinson [8] は, Euler の和 (3.1) を二変数の複素関数と見て，その解析的性質を研究した. Atkinson の目的は Riemann ゼータ関数の二乗平均値

$$\int_0^T |\zeta(1/2+it)|^2 dt \tag{3.8}$$

の研究であって，そのために彼はまず Riemann ゼータ関数二つの積 $\zeta(s_1)\zeta(s_2)$ を (3.2) によって扱うことを考え，その右辺にある Euler 和の解析接続の問題に遭遇した. Atkinson はこの問題を Poisson の和公式を用いて解き，(3.8) に対する明示公式を得ることに成功している.

解析接続が得られれば，負の整数点での値を考えることもできる. この方向は松岡楽氏 [90] によって初めて扱われ，ℓ が負の整数のときの $\zeta_{EZ,2}(1,\ell)$ の値が論じられている. 松岡氏は Atkinson とは異なり，Euler–Maclaurin の公式によって解析接続を与えている. 続いて Apostol と Vu [4] は, (3.1) の一方の変数を固定して他方についてだけ Euler–Maclaurin の公式で接続することにより，k と ℓ が整数で一方が正，一方が負のときの $\zeta_{EZ,2}(k,\ell)$ の表示式を得ている.

ゼータ関数の平均値理論における Atkinson の論文の価値は長い間見落とされていたが，1970 年代末になって，D. R. Heath–Brown の研究を契機としてその意義が再評価されるようになった. その流れの中で Meurman [93] や本橋洋一氏 [95] は Atkinson の方法を Dirichlet の L 関数へ拡張した. 特に本橋氏は二重ゼータ関数の解析接続について，Riemann 型の contour 積分による新しい手法を提示している.

桂田昌紀氏と筆者は，本橋氏の手法を発展させることにより，Dirichlet の L 関数 ([59], [61]) や Hurwitz のゼータ関数 ([60], [62]) のある種の二乗平均値の漸近展開公式を示した. Hurwitz ゼータ関数の場合に (3.2) を一般化すると，右辺の二重ゼータ関数は

$$\sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} (\alpha+m_1)^{-s_1}(\alpha+m_1+m_2)^{-s_2} \tag{3.9}$$

となるが，[62] ではこの級数に contour 積分の方法を適用して積分表示と解析接続を示している. しかしこの段階では，筆者にとって二重ゼータ関数は，古典的なゼータ関数，L 関数の平均値公式を得るための道具でしかなかった.

筆者 [76] は 1994 年頃，この (3.9) と Barnes の (1.1) の $r=2$ の場合との類似性に着目し，両者を包括する二重級数

$$\sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} (\alpha+w_1m_1)^{-s_1}(\alpha+w_1m_1+w_2m_2)^{-s_2} \tag{3.10}$$

を定義し，その解析接続と w_2 に関する漸近展開を示した. (実際に [76] で扱っているのは $w_1=1$ の場合であるが，その条件が一般性を失うものでないことは容易にわかる.) 従ってその特別な場合として Barnes の二重ゼータ関数の，さらには二重ガンマ関数の次のような漸近展開が得られる.

定理 3 ([76]) 任意の自然数 $N \geq 2$ と $\alpha > 0$, $w > 0$, $\Re s > -N+1$ に対し，漸近展開

$$\zeta_{B,2}(s;\alpha,(1,w)) = \zeta(s,\alpha) + \frac{\zeta(s-1)}{s-1}w^{1-s} \tag{3.11}$$
$$+ \sum_{n=0}^{N-1}\binom{-s}{n}\zeta(-n,\alpha)\zeta(s+n)w^{-s-n} + O(w^{-\Re s-N})$$

(ただし右辺に極が現れるような s を除く) および

$$\log\Gamma_2(\alpha,(1,w)) = -\frac{1}{2}\alpha\log w + \log\Gamma(\alpha) + \frac{1}{2}\alpha\log 2\pi \tag{3.12}$$
$$+ (\zeta(-1,\alpha)-\zeta(-1))w^{-1}\log w - (\zeta(-1,\alpha)-\zeta(-1))\gamma w^{-1}$$
$$+ \sum_{n=2}^{N-1}\frac{(-1)^n}{n}(\zeta(-n,\alpha)-\zeta(-n))\zeta(n)w^{-n} + O(w^{-N}(|\log w|+1))$$

(ただし γ は Euler 定数) が成り立つ.

この定理に第二節冒頭で述べた新谷氏の結果を結び付けることにより，実二次体の Hecke の L 関数の $s=1$ での値の単数に関する漸近展開表示も得られる.

この [76] は筆者が多重ゼータ関数そのものを積極的な研究対象とした最初の論文であるが，この中で既に，本来は一変数関数だった Barnes のゼータ関数を多変数化し，変形の自由度を増やすことによって新しい結果を導く，という方法が用いられる．多変数化を積極的に取り入れるというこの視点は，筆者のその後の研究においても一つの指針となっているものである．また従来は無関係に研究されてきた Barnes の二重ゼータ関数と Euler 和が (3.10) の形に統一できるという認識も，筆者にとっては，多重ゼータ関数の統一的理論への道を探るきっかけとなる貴重な発見であった.

4 Euler–Zagier の多重和とポリログ

さて前節での議論は二重和の場合にほぼ終始したが，1990 年代に入ると，より一般の多重和が注目されるようになってきた．Euler の二重和 (3.1) の素直な多重化は

$$\zeta_{EZ,r}(s_1,\ldots,s_r) = \sum_{m_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=1}^{\infty} m_1^{-s_1}(m_1+m_2)^{-s_2}\times\cdots\times(m_1+\cdots+m_r)^{-s_r} \tag{4.1}$$

であるが，これを Euler–Zagier の多重和という (Zagier [124])．この種の和が注目を集めるようになった背景には，前節で述べた展開とはまた異なるさまざまな方向からの動機付けがある．その一つがポリログ (polylogarithm, 反復対数) である．(訳語としては多重対数の語もよく用いられるが，後述の (4.4) との混乱を避けるため，本稿では使用しない.)

ポリログの定義は

$$\mathscr{L}_k(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^m}{m^k} \qquad (k\in N) \tag{4.2}$$

であるが，$k=1$ のときこれは $-\log(1-x)$ の Taylor 展開に他ならず，一般の k に対する $\mathscr{L}_k(x)$ は $-\log(1-x)$ に

$$\int_0^x \frac{dx}{x}$$

を $(k-1)$ 回施すことで得られる．これが‘反復対数’と呼ばれる由縁である．ポリログは定義そのものがある種の Dirichlet 級数の特殊値と見なせる形をしていることから考えても，整数論における有用性が期待できる量であるが，現代的な整数論におけるその意義を明らかにしたのは Bloch [14], [15] の仕事であろう．([15] の出版年は 2000 年であるが，原稿が書かれたのは 1977 年である．) 彼は，

$$D_2(x) = \Im(\mathscr{L}_2(x)) + \arg(1-x)\log|x| \tag{4.3}$$

が Borel のレギュレーター写像 [17] と密接に結び付くことを指摘した．

続いて Zagier [121], [122] は，代数体 F の Dedekind ゼータ関数 $\zeta_F(s)$ の特殊値 $\zeta_F(2)$ が $D_2(x)$ の言葉で表示できることを示した．一般の k に対しても，$\mathscr{L}_k(x)$ に付随する関数 $D_k(x)$ が構成できるが，Zagier [122], [123] は一般の $k \in \mathbb{N}$ $(k \geq 2)$ に対する $\zeta_F(k)$ の値が $D_k(x)$ で記述できるであろう，という予想を提示した．この予想は $k=3$ の場合には Goncharov [34] によって解かれたが，一般には未解決である．レギュレーター写像は Beilinson [13] によって一般的な代数多様体の枠組みで取り扱われたが，その場合にもポリログと結び付き，付随する L 関数の特殊値がポリログで記述できるであろうと予想されている．

1990 年代に入ると，ポリログを多重化した多重ポリログ (multiple polylogarithm)

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{k_1,\ldots,k_r}(x_1,\ldots,x_r) \\
&= \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=1}^{\infty} \frac{x_1^{m_1} x_2^{m_1+m_2} \cdots x_r^{m_1+\cdots+m_r}}{m_1^{k_1}(m_1+m_2)^{k_2}\cdots(m_1+\cdots+m_r)^{k_r}}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

が定義され，考察されるようになってきた (Goncharov [35], [36])．この形までくると Euler–Zagier の多重和 (4.1) との類似は明白である．実際，(4.1) の特殊値 $\zeta_{EZ,r}(k_1,\ldots,k_r)$ は (4.4) において $x_1 = \cdots = x_r = 1$ としたものに他ならない．また，最後の変数だけ複素変数と見ると，

$$\zeta_{EZ,r}(k_1,\ldots,k_{r-1},s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t-1} \mathscr{L}_{k_1,\ldots,k_{r-1}}(1,\ldots,1,e^{-t})dt \tag{4.5}$$

が成り立つ (荒川恒男・金子昌信 [5])．

しかし実は，多重化されていない本来のポリログも，Euler–Zagier の多重和と密接に結び付く．荒川氏と金子氏 [5] は，

$$\xi_k(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t-1} \mathscr{L}_k(1-e^{-t})dt \tag{4.6}$$

とおくとき，

$$\begin{aligned}
\xi_k(s) = (-1)^{k-1} &\{\zeta_{EZ,r}(2,1,\ldots,1,s) + \zeta_{EZ,r}(1,2,1,\ldots,1,s) \\
&+ \cdots + \zeta_{EZ,r}(1,1,\ldots,2,s) + s\zeta_{EZ,r}(1,\ldots,1,s+1)\} \\
&+ \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^j \zeta(k-j)\zeta_{EZ,j+1}(1,\ldots,1,s)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

と書けることを示した．

Euler–Zagier の多重和の整数点での値 (多重ゼータ値) は，こうした文脈以外でも，量子群や結び目理論など数学のさまざまな分野において現れる重要な対象であることが 1990 年代になって認識され，多くの研究がなされるようになった．具体的な表示としては例えば

$$\zeta_{EZ,r}(2,2,\ldots,2) = \frac{\pi^{2r}}{(2r+1)!}, \tag{4.8}$$

$$\zeta_{EZ,2r}(1,3,1,3,\ldots,1,3) = \frac{2\pi^{4r}}{(4r+2)!}, \tag{4.9}$$

といった式が知られている．また多重ゼータ値の間に成り立つ関係式としては，双対性，和公式 (Granville [38]，Zagier)，Hoffman の関係式 [46]，これらを統一した大野泰生氏の関係式 [97]，あるいは結び目の理論の方向から見出された Le と村上順氏の関係式 [66] など非常に多くのタイプの関係式が知られていて，本稿ではその詳細な紹介はできない．講義録 [7], [55] や論説 [56] が参考になるだろう．多重ゼータ値の間の関係式の個数に関する Zagier の予想についての Goncharov [37] や寺杣友秀氏 [106] の仕事，二重シャッフル関係式に関する Racinet [98] や井原健太郎氏，金子氏と Zagier [49] の研究については寺杣氏の論説 [107] を見られたい．

5　複素関数としての Euler–Zagier 和

前節で紹介した Euler–Zagier の多重和の研究は，その多くが特殊値についての考察であったが，その中で荒川氏と金子氏の論文 [5] だけは，最後の変数を複素変数と見ていた．彼らが複素変数を扱った目的は，ポリ Bernoulli 数の考察にあった．ポリ Bernoulli 数 $B_n^{(k)}$ とは，

$$\frac{\mathscr{L}_k(1-e^{-t})}{1-e^{-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)}\frac{t^n}{n!} \tag{5.1}$$

で定義される量であるが，$k=1$ なら $\mathscr{L}_1(1-e^{-t})=t$ だから $B_n^{(1)}$ は通常の Bernoulli 数 B_n (ただし $B_1=1/2$) に一致する．通常の Bernoulli 数は Riemann ゼータ関数の負の整数点での値に現れる量であるから，ポリ Bernoulli 数も何らかの多重化されたゼータ関数の特殊値と関係することが期待できるであろう．荒川・金子 [5] は実際，(4.6) で定義した関数 $\xi_k(s)$ の負の整数点での値でポリ Bernoulli 数を表示する式

$$B_n^{(k)} = (-1)^n\{\xi_k(-n) - \xi_{k-1}(-n+1)\} \tag{5.2}$$

を見出した．そして $\xi_k(s)$ は，(4.7) の意味で，ある種の多重ゼータ関数と見なすことができるわけである．関数 $\xi_k(s)$ の全 s 平面への解析接続を定義 (4.6) に基づいて示すことは難しくはないが，荒川・金子は $\zeta_{EZ,r}(k_1,\ldots,k_{r-1},s)$ も全平面へ解析接続できることを証明した．従って (4.7) は全 s 平面において成り立つ式である．

しかし，Euler–Zagier 和の定義 (4.1) を想起するならば，この式を r 変数の複素多変数関数と見て，その C^r への解析接続を考えるのが自然である．実際，Zhao [125] と秋山茂樹，江上繁樹，谷川好男の三氏 [1] によってそれぞれ独立に次の定理が提出された．

定理 4 ([125], [1])　多重級数 (4.1) は複素 r 変数の関数として C^r 全体へ有理型に解析接続できる．

Zhao の方法は Gel'fand–Shilov の一般関数の理論に基づくもので，秋山・江上・谷川は Euler–

Maclaurin の和公式を用いる，より初等的な証明を与えている．解析接続された (4.1) の負の整数点での値については秋山・谷川 [3]，鎌野 [54] によって詳しく調べられている．

なお第二節で述べたように Essouabri は，彼の理論 [29] が多変数の場合にも拡張できることに未公表の学位論文 [28] の中で一言触れているが，この多変数化された Essouabri の方法は (4.1) を扱える．従って (4.1) の多変数関数としての解析接続は既に Essouabri によって 1995 年に言及されていた，ということもできる．また同じ頃，Goncharov, Kontsevich, Zagier もそれぞれ独立に (4.1) の解析接続の証明を得ていた，とのことである．しかしこれらの証明はいずれも公表されていない．

第三節で，Dirichlet の L 関数や Hurwitz のゼータ関数の平均値の漸近展開に関する桂田氏と筆者の研究に言及した．そのときの手法は Riemann 型の contour 積分であったが，その後桂田氏は，Mellin–Barnes の積分公式 (1.5) を用いることで，漸近展開の明解な証明が得られることを発見した ([57], [58])．筆者はこの桂田氏の着想に示唆されて，Mellin–Barnes の積分公式を多重ゼータ関数に適用する試みを開始した．当初は Mellin–Barnes 積分の方法による [76] の再検討，という問題意識で出発したため，二重ゼータ関数のことばかり考えていたが，1999 年 11 月，全く突然，r 重ゼータ関数 $\zeta_{EZ,r}$ の積分表示

$$\zeta_{EZ,r}(s_1,\ldots,s_r)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{\Gamma(s_r+z)\Gamma(-z)}{\Gamma(s_r)} \times\zeta_{EZ,r-1}(s_1,\ldots,s_{r-2},s_{r-1}+s_r+z)\zeta(-z)dz \tag{5.3}$$

を思いついた．これは Euler–Zagier 和の定義式 (4.1) に (1.5) を適用すると直ちに得られる式だが，被積分関数は $\zeta_{EZ,r-1}$ を含むわけだから，r に関する帰納法を用い，$\zeta_{EZ,r-1}$ の C^{r-1} への解析接続を仮定すれば，(5.3) において積分路をシフトすることにより $\zeta_{EZ,r}$ の解析接続が証明できる．こうして筆者は Euler–Zagier 和の解析接続の，Mellin–Barnes 積分の方法による別証明を見出した ([79])．これが，筆者が一般の r 重ゼータ関数に踏み込んだ契機となった研究である．

上記の議論は Mellin–Barnes 型積分表示を通して，

$$\zeta_{EZ,r}\to\zeta_{EZ,r-1}\to\cdots\to\zeta_{EZ,2}\to\zeta \tag{5.4}$$

(右端は Riemann ゼータ関数) の形の帰納的関係を与えていると解釈することもできる．Mellin–Barnes 型積分表示そのものは，第一節で述べたように既に Mellin によって利用されていたが，Mellin の段階では一変数しか扱っていないので上のような帰納的関係は捉えられない．後述するように，この種の帰納的関係は多重ゼータ関数の族の中に至るところ存在していることが判明しつつあるが，それらは多変数関数を視野に入れることで初めて把握できる関係なのである．

6 種々の一般化と応用

第三節の末尾において，Barnes の二重ゼータ関数と Euler 和を包括した (3.10) を筆者が導入したことに言及したが，一般の r 重の場合にも，

$$\zeta_r(s_1,\ldots,s_r;\alpha_1,\ldots,\alpha_r;w_1,\ldots,w_r) \tag{6.1}$$

$$= \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=0}^{\infty} (\alpha_1 + w_1 m_1)^{-s_1} (\alpha_2 + w_1 m_1 + w_2 m_2)^{-s_2}$$
$$\times \cdots \times (\alpha_r + w_1 m_1 + \cdots + w_r m_r)^{-s_r}$$

とおくと，これは Barnes の (1.1) と Euler–Zagier の (4.1) を共に特殊な場合として含む多重級数となる．この形の級数は筆者が [78], [79] で導入し，[79], [81] でその解析接続と w_r に関する漸近展開を示した．二重ゼータ関数の場合の漸近展開は第三節で述べたように [76] においても得られていたが，Mellin–Barnes 積分に基づく [79], [81] の方法は，積分路のシフトだけで漸近展開が自然に出てくるという意味で議論が簡明である．実際，例えば (3.11) の右辺の各項は，Mellin–Barnes 積分の方法だと，積分路をシフトしたときに通過する極の留数として自然に現れる．また [76] における結果は $|w_2| \to \infty$ のときの展開のみであったが，Mellin–Barnes 積分の方法は $|w_r| \to \infty$ のときのみならず (シフトの方向を逆にするだけで) $|w_r| \to 0$ のときの漸近展開も得られるという利点がある．

より一般に，$A = (a_{kj})_{1 \le k \le n, 1 \le j \le r}$ を行列として，

$$\zeta(s_1, \ldots, s_n; A) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=1}^{\infty} (a_{11} m_1 + \cdots + a_{1r} m_r)^{-s_1} \times \cdots \times (a_{n1} m_1 + \cdots + a_{nr} m_r)^{-s_n} \tag{6.2}$$

の形の多重ゼータ関数にも Mellin–Barnes 積分の方法は適用できる．

定理 5 ([80]) 行列 A の各成分が非負実数で，各行および各列には少なくとも一つ，0 でない成分が存在するとする．このとき (6.2) は $\mathbf{C}^n$ 全体に有理型に解析接続できる．

ここで係数が 0 になることが許容されていることが重要な点である (新谷型の (2.4) ではすべての係数は正でなければならなかったことに注意)．係数に 0 が許容されているおかげで，この形の多重級数は，(6.1) 以外に，(2.4), (3.5), (3.6), (3.7)，そして後述の Witten 型多重ゼータ関数などの多くの重要な例を含む．

ここまで一般化された形になると，Mellin–Barnes 積分の方法とはいっても，積分路の単純なシフトだけでは十分ではなく，特異点の分布状況に応じた，少々込み入った積分路の変形が必要になる．この変形法は [80] において初めて導入されたが，この方法によれば，(6.2) の各因子を一次式から一般の複素係数の多項式に一般化しても，係数の実部が正であれば同様にして解析接続が示せる ([83])．

解析接続が証明できる多重級数の範囲という点では，上記の結果は Essouabri [28], [29] の結果になお及ばない．しかし Mellin–Barnes 積分の方法は単に解析接続を与えるだけでなく，扱いやすい形の積分表示を得ることができるので，詳しい情報が得やすく，応用上いろいろと便利なことがある．

例えば，Mellin–Barnes 型の積分表示の積分路をシフトする途上で，特異性を含む項が留数の形で明示的に現れるので，特異性の位置などの解析的な性質を見るのに都合が良い．また解析接続された領域におけるゼータ関数の絶対値の大きさについても，石川秀明氏と筆者は，$\zeta_{EZ,r}$ の場合に，積分路のシフトの仕方をうまく選ぶことにより，かなり立ち入った評価が得られることを示している ([53])．

Mellin–Barnes 型の積分表示から漸近展開が自然に得られることは既述したが，さらにその系として多重ガンマ関数の漸近展開も容易に得られ ([77], [81] の III)，[77] においては実二次体に付随するある種のゼータ関数の特殊値の漸近展開表示を，藤井昭雄氏 [32], [33] の結果と結び付けることで導

出している．この種の特殊値は，実二次体を $Q(\sqrt{d})$ と書くとき，$\{n\sqrt{d}\}_{n=1}^{\infty}$ の分布の問題と関係がある．

もう一つの漸近展開への応用例は Hurwitz ゼータ関数の離散べき平均値に関するものである．正の整数 h と q に対し，

$$U_h(s,q)=\sum_{a=1}^{q}\zeta(s,a/q)^h, \qquad V_h(s,q)=\sum_{a=1}^{q}|\zeta(s,a/q)|^{2h}$$

とおいて，これらの量の q に関する漸近挙動を考える．おおよその挙動は比較的簡単な考察で求めることができる．しかし $V_1(s,q)$ に関しては，第三節で言及した方法により，q についての漸近展開まで決定できることが知られていた ([60])．江上氏と筆者 [26] は，$U_h(s,q)$ と $V_h(s,q)$ を多変数多重ゼータ関数で記述することにより，任意の h に対し，それらの q に関する漸近展開が得られることを示した．例えば $U_h(s,q)$ については，

定理 6 ([26]) N を自然数，$h\geq 2$ とすれば，

$$U_h(s,q)=\zeta(hs)q^{hs}+\sum_{r=2}^{h}\sum_{\substack{h_1+\cdots+h_r=h\\ h_j\geq 1\ (1\leq j\leq r)}}\frac{h!}{h_1!\cdots h_r!}\Biggl\{X_r(h_1s,\ldots,h_rs)q$$
$$+\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(-1)^n}{n!}\zeta(h_1s-n)Y_{r,n}(h_2s,\ldots,h_rs)q^{h_1s-n}+O(q^{\Re s_1-N+\varepsilon})\Biggr\}$$

が成り立つ．ここに X_r, $Y_{r,n}$ は明示的に与えられる，q によらない量である．

平均値の問題は一般には高次べきになるほど急速に難しくなるので，このように任意の高次べきに対してまで正確な結果が得られるのは珍しい．

別方向への応用としては，Laplacian の計算がある．高次元球面

$$S^{g-1}=\{(x_1,\ldots,x_g)\in R^g \mid x_1^2+\cdots+x_g^2=1\}$$

上の C^{∞} 級関数の Laplacian の正規化行列式は，Dirichlet 級数

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\binom{m+g}{g}-\binom{m+g-2}{g}\right\}(m(m+g-1))^{-s} \tag{6.3}$$

(の解析接続) の導関数の 0 での値で記述でき，その明示公式は Vardi [118] など何人かの人々によって求められている．Weng 氏と筆者 [89] は，より一般に

$$\zeta(s;P,Q)=\sum_{m=1}^{\infty}P(m)Q(m)^{-s} \qquad (P,Q \text{ は多項式}) \tag{6.4}$$

の形のゼータ関数 (正確にはそれに付随する多変数ゼータ関数) を Mellin–Barnes 積分の方法で扱い，$\zeta(0;P,Q)$ と $\zeta'(0;P,Q)$ の明示的な表示を求める見通しの良い方法を提示した．従って当然，特別な場合として上記 Vardi らの結果の別証明が得られる．またこの方法は一般に負の整数点においても，また高階導関数に対しても適用可能である．

前節の末尾で Euler–Zagier 和の場合に述べたように，Mellin–Barnes 型の積分は多重ゼータ関数を‘一段階簡単’なゼータ関数を被積分関数に含む積分で表示する．従って多重ゼータ関数の族の帰納的

な構造を浮彫りにする．例えば筆者は [78], [80] において，(3.5), (3.7) をそれぞれ一般化した多重ゼータ関数

$$\zeta_{MT,r}(s_1,\ldots,s_r;s_{r+1}) = \sum_{m_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=1}^{\infty} m_1^{-s_1}\cdots m_r^{-s_r}(m_1+\cdots+m_r)^{-s_{r+1}}, \tag{6.5}$$

$$\zeta_{AV,r}(s_1,\ldots,s_r;s_{r+1}) = \sum\cdots\sum_{1\le m_1<\cdots<m_r<\infty} m_1^{-s_1}\cdots m_r^{-s_r}(m_1+\cdots+m_r)^{-s_{r+1}} \tag{6.6}$$

を導入したが，(6.5) (Mordell–Tornheim 型) は

$$\zeta_{MT,r}\to\zeta_{MT,r-1}\to\cdots\to\zeta_{MT,2}\to\zeta \tag{6.7}$$

なる帰納的構造を持ち，この矢印を逆に辿ることによって解析接続が証明できる．また (6.6) (Apostol–Vu 型) については，補助的な関数

$$\varphi_{j,r}(s_1,\ldots,s_j;s_{j+1},\ldots,s_r;s_{r+1}) = \sum\cdots\sum_{1\le m_1<\cdots<m_r<\infty} m_1^{-s_1}\cdots m_r^{-s_r}(m_1+\cdots+m_j)^{-s_{r+1}} \tag{6.8}$$

を導入することによって

$$\zeta_{AV,r}=\varphi_{r,r}\to\varphi_{r-1,r}\to\cdots\to\varphi_{1,r}=\zeta_{EZ,r} \tag{6.9}$$

なる帰納列を示すことができ，これを用いることにより Euler–Zagier 和に帰着できる．今井・肥田の多変数新谷ゼータ関数 (2.4) を含む帰納列の存在は二重の場合に [79]，一般の場合には [81] の III で示されている．このような Mellin–Barnes の積分表示に基づく帰納的構造は多重ゼータ関数の族の中に広く行き渡っており，その帰納列を辿ることにより，多くの多重ゼータ関数の性質が，最終的に Riemann ゼータ関数や Hurwitz ゼータ関数の性質に帰着される形で帰納的に証明できることが期待される．このことは Mellin–Barnes 積分の方法による，多重ゼータ関数の統一的理論が構築できる可能性を示唆しているのかもしれない．

多重ゼータ関数の極めて重要な一般化の一つは，数論的な情報を持つ係数を付けた多重和である．例えば Euler–Zagier 和 (4.1) に Dirichlet 指標を付けた多重和は，Goncharov [36]，秋山・石川 [2]，石川 [51], [52]，荒川・金子 [6] など多くの人々によって考えられている．また呉茂香氏 [120] ([83] 参照) は (6.5), (6.6) に Dirichlet 指標を付けた多重和の解析接続を論じている．

谷川氏と筆者 [84] はより一般に，

$$\sum_{m_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=1}^{\infty}\frac{a_1(m_1)a_2(m_2)\cdots a_r(m_r)}{m_1^{s_1}(m_1+m_2)^{s_2}\cdots(m_1+\cdots+m_r)^{s_r}} \tag{6.10}$$

の形の多重 Dirichlet 級数を扱った．

定理 7 ([84]) 各 $\varphi_k(s)=\sum_{m=1}^{\infty}a_k(m)m^{-s}$ $(1\le k\le r)$ が半平面 $\Re s>\alpha_k(>0)$ で絶対収束し，全平面に有理型に接続されて $s=\alpha_k$ での極を除けば正則，かつ $|\Im s|$ に関する増大度が高々多項式の大きさならば，(6.10) も C^r 全体に有理型に解析接続され，特異性の現れる位置も記述できる．

特に各 $\varphi_k(s)$ が整関数ならば (6.10) も整関数である.

証明はやはり Mellin–Barnes 積分による. (一変数の場合には, 江上氏 [25] が既に同様の着想を述べている.) 津村博文氏と筆者 [86] はさらに一般の多重 Dirichlet 級数と付随する多重ポリログを考えている. 多重ポリログが多重ゼータ関数と密接な関係を持つことは第四節においても解説したが, 筆者にとっては [86] が, 多重ポリログにまで考察の範囲を拡げた最初の機会であった. Mellin–Barnes 積分の方法の適用範囲を多重ポリログにまで拡げておくことは, 次節で述べる関数関係式の立場からも大変重要なのである.

以上のようにさまざまな数論的な係数を持つ多重 Dirichlet 級数を扱えることは, Essouabri の代数幾何的な方法などと比べて Mellin–Barnes 積分の方法が有する大きな長所である. Essouabri 自身も最近の一論文 [31] では, 数論的関数を分子に載せた多重 Dirichlet 級数を Mellin–Barnes 積分を用いた手法で扱い, Manin の予想へ応用している.

数論的な量の多重和の性質は, 対応する多重 Dirichlet 級数の解析的挙動を考察することで調べることができる. このような研究方向は多重指標和の場合に, 石川氏 [52] によって開拓されたが, [84] の結果を用いればさらに一般の数論的多重和が扱えるはずである. 筆者は若干の結果を 2001 年 6 月の Lille (フランス) での研究集会で報告したが, まだ論文にはまとまっていない.

他方, $\sum_{m=1}^{\infty} a_k(m)m^{-s}$ が [84] で要請されている条件を満たさない場合には, (6.10) の振舞いも異なってくる. 江上氏と筆者 [27] は, そのような具体的な場合として分子に von Mangoldt の関数 $\Lambda(m)$ が載った二重級数

$$\Phi_2(s) = \sum_{m_1=1}^{\infty}\sum_{m_2=1}^{\infty} \frac{\Lambda(m_1)\Lambda(m_2)}{(m_1+m_2)^s} \tag{6.11}$$

を Mellin–Barnes 積分の方法で考察した. 結果を述べるため, Riemann のゼータ関数 $\zeta(s)$ の Riemann 予想を想起しておこう. それは $\zeta(s)$ の非自明な零点の実部がすべて 1/2 であるだろう, という予想であった. さらに零点の虚部を γ で表すことにすると, 正の γ たちは有理数体上一次独立であろう, という予想もある.

定理 8 ([27]) (i) 級数 (6.11) は, (絶対収束域は $\Re s > 2$ だが) $\zeta(s)$ の Riemann 予想を仮定すれば $\Re s > 1$ まで有理型に解析接続できる.

(ii) Riemann 予想に加えて, 零点の虚部に関する上述の予想 (を定量的にしたもの) も仮定する. そのとき $\Phi_2(s)$ は $\Re s = 1$ を自然境界として持つ.

この級数 $\Phi_2(s)$ は整数論の古典的な難問である Goldbach 予想に関係する. 上記の自然境界の存在は, Goldbach 予想の困難さの一つの現れなのかもしれない.

7 多重ゼータ関数の関数関係式

多重ゼータ関数の解析的な性質を研究していると誰でも気になる疑問の一つは, 多重ゼータ関数は何らかの関数等式を満たすのか, ということであろう. 例えば (3.10) で定義した二重ゼータ関数は, Hurwitz ゼータ関数の二重化, と考えられる. ところが Hurwitz ゼータ関数は,

$$\zeta(s,\alpha) = \frac{\Gamma(1-s)}{i(2\pi)^{1-s}} \left\{ e^{\pi i s/2}\phi(1-s,\alpha) - e^{-\pi i s/2}\phi(1-s,-\alpha) \right\} \tag{7.1}$$

の形の関数等式を満たす．ただし $\phi(s,\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\exp(2\pi in\alpha)n^{-s}$ は Lerch のゼータ関数である (Titchmarsh [108] の第二章参照)．筆者 [82] は，この式を二重化した形の関数等式が (3.10) に対して成り立たないかどうか探った．簡単のため (3.10) で $w_1=1$, $w_2=w$ とし，また指数因子を一つ付け加えて，

$$\begin{aligned}&\zeta_{HL,2}(s_1,s_2;\alpha,\beta,w)\\&=\sum_{m_1=0}^{\infty}(\alpha+m_1)^{-s_1}\sum_{m_2=1}^{\infty}e^{2\pi im_2\beta}(\alpha+m_1+wm_2)^{-s_2}\end{aligned}\tag{7.2}$$

なる二重 Hurwitz–Lerch ゼータ関数を考える．そして

$$\begin{aligned}&g(s_1,s_2;\alpha,\beta,w)=\zeta_{HL,2}(s_1,s_2;\alpha,\beta,w)\\&-\frac{\Gamma(1-s_1)}{\Gamma(s_2)}\Gamma(s_1+s_2-1)\phi(s_1+s_2-1,\beta)w^{1-s_1-s_2}\end{aligned}\tag{7.3}$$

とおく．このとき，[82] の Proposition 1 と Proposition 2 とを合わせると，次を得る：

定理 9 ([82])　関係式

$$\begin{aligned}&g(s_1,s_2;\alpha,\beta,w)=\Gamma(1-s_1)w^{1-s_1-s_2}\\&\times\{F_+(1-s_2,1-s_1;\beta,\alpha,w)+F_-(1-s_2,1-s_1;\beta,-\alpha,w)\}\end{aligned}\tag{7.4}$$

が成り立つ．ただし

$$F_\pm(s_1,s_2;\alpha,\beta,w)=\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_{s_1+s_2-1}(k;\alpha,\beta)\Psi(s_2,s_1+s_2;\pm2\pi ikw)\tag{7.5}$$

で，

$$\sigma_c(k;\alpha,\beta)=\sum_{d|k}e^{2\pi id\alpha}e^{2\pi i(k/d)\beta}d^c,\tag{7.6}$$

また Ψ は合流型超幾何関数である．

この $\Psi(s_2,s_1+s_2;\pm2\pi ikw)$ は $(\pm2\pi ikw)^{-s_2}$ を初項とする漸近展開を持つので，(7.5) を一種の一般化された Dirichlet 級数と捉えれば，(7.4) は (7.1) の二重化としての $\zeta_{HL,2}(s_1,s_2;\alpha,\beta,w)$ の関数等式と見なすことができる．この (7.4) からは (s_1,s_2) と $(1-s_2,1-s_1)$ との間の双対性のみならず，α と β に関する双対性をも見て取ることができる．論文 [82] の主定理はこの (7.4) を少し書き直した形の双対公式である．

筆者が [82] で用いた手法は [76] と同様の contour 積分に基づくものだったが，残念ながら今のところ，この方法は三重以上の場合には適用できない．そこで一般の多重ゼータ関数の関数等式を探すには，別のアプローチを考える必要がある．

第四節の末尾で言及したように，多重ゼータ関数の特殊値の間には多くの関係式が成り立つことが知られている．こうした関係式は，特殊値に対してだけ成り立っているのだろうか，それとも変数を連続的に動かしても成り立つ関数としての関係式を特殊な値のところで見ているのだろうか．例えば Euler の (3.2) は関数として成り立つ関係式であるが，他にこのような関数関係式は存在しないのだろうか．筆者は 2000 年頃から，この疑問について，研究集会などでしばしば問題提起してきた．

この筆者の問いかけに対して，最初の肯定的な解答を与えたのが津村氏である．津村氏は以前から，Mordell–Tornheim 型の二重級数 (3.5) に着目して研究を進めていた．この級数の特殊値については，第三節で言及した Mordell と Tornheim の研究以降もいくつかの断片的な研究が行われてきた ([48], [105]) が，津村氏は parameter u を導入して収束を良くした級数を考えることにより，Mordell–Tornheim の (3.5) やその交代級数型類似 ([110]–[112])，またより一般の (6.5) ([114]) の整数点での値に対して種々の公式を示していた．

筆者の問題提起を受けて津村氏は，氏自身が導いていたこれらの公式が関数関係式としても成立しているかどうかを考察した．多重ゼータ関数の特殊値を扱う多くの研究者がよりどころとしていた反復積分表示が整数点での値であるということに本質的に依存しているのに対して，津村氏の u-method は議論がより解析的であり，関数関係式の考察に容易に拡張することができた．その結果として津村氏は [115]–[117] において，Mordell–Tornheim の (3.5) や類似した他の二重級数に関する種々の関数関係式を証明した．その一般的な定式化は少々複雑だが，例えば

$$\zeta_{MT,2}(1,s;3)-\zeta_{MT,2}(1,3;s)+\zeta_{MT,2}(3,s;1)=4\zeta(s+4)-2\zeta(2)\zeta(s+2) \tag{7.7}$$

といった関係式を含む．この式で $s=3$ とおくと

$$\zeta_{MT,2}(3,3;1)=4\zeta(7)-2\zeta(2)\zeta(5) \tag{7.8}$$

を得るが，これは Tornheim [109] が得ていた式である．即ち (7.7) は，整数点での値の間の非自明な関係式を含む関数関係式なのである．また中村隆氏 [96] は異なる方法で，[116] の結果のより簡明な表示を得ている．

津村氏と筆者 [87] は，$\zeta(s)$ の関数等式の Hardy [39] による一証明にヒントを得て，より一般の多重ゼータ関数の関数関係式を求める新たな方法を提示した．例えば Euler の (3.4) を特別な場合として含む関数関係式がこの方法で得られる．また類似の方法で二重ポリログに対する関数関係式も得られている ([88])．

こうした関数関係式の多くは，多変数化したことで初めて捉えられるものであることを，改めて強調しておこう．また最近 de Crisenoy [24] は，ある種の一変数多重ゼータ関数の負の整数点での値を調べるにも，多変数級数を考えることが有効であることを見出している．この de Crisenoy の仕事は Essouabri の方法を土台にしているが，この方向でも多変数化が重要な意味を持ち始めているわけである．

さて上述のようにさまざまな関数関係式が見つかってくると，こうした関係式がどれほど一般的な状況で成り立っているかを探索することが重要になってくる．そのための一つの枠組みとして，Witten の多重ゼータ関数を考えよう．半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対し，その有限次元既約表現 ρ 全体にわたる和

$$\zeta_W(s;\mathfrak{g})=\sum_{\rho}(\dim\rho)^{-s} \tag{7.9}$$

を $\mathfrak{g}$ の Witten ゼータ関数という．これは量子ゲージ理論の問題に関連して Witten [119] によってその特殊値が考察されたものであり，Zagier [124] が (7.9) の形に定式化して Witten ゼータ関数と名付け，さらに正の偶数点における値が π^{ns} の有理数倍となることを指摘した．ただし n は $\mathfrak{g}$ の正のルートの個数である．

各表現の次元はWeylの次元公式によって計算できるので，$\zeta_W(s;\mathfrak{g})$ のより明示的な表示を得ることができる．即ち，$\mathfrak{g}$ の階数を r，基本ウェイトを $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ とすれば，

$$\zeta_W(s;\mathfrak{g}) = (C(\mathfrak{g}))^s \times \sum_{m_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{n} < \alpha_j^{\vee}, m_1\lambda_1+\cdots+m_r\lambda_r >^{-s} \tag{7.10}$$

と書ける．ただし積は正のコルート $\alpha_j^{\vee}$ 全体をわたり，$<,>$ はKilling形式による内積，また

$$C(\mathfrak{g}) = \prod_{j=1}^{n} < \alpha_j^{\vee}, \lambda_1+\cdots+\lambda_r > \tag{7.11}$$

である．この明示公式 (7.10) の右辺の多重級数の性質を調べるには，ここでもやはり，これを多変数化して

$$\begin{aligned}&\zeta_r(s_1,\ldots,s_n;\mathfrak{g}) \\ &= \sum_{m_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{n} < \alpha_j^{\vee}, m_1\lambda_1+\cdots+m_r\lambda_r >^{-s_j}\end{aligned} \tag{7.12}$$

を考える方が議論が柔軟に進行する．Lie環 $\mathfrak{g}$ に付随するこのような多変数ゼータ関数は，最初 $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}(5)$ の場合に筆者が [80] で導入し，次いで津村氏と筆者の共著 [85] において一般の A_r 型Lie環 $\mathfrak{sl}(r+1)$ に対して定義され，最終的に [63] において一般の $\mathfrak{g}$ に対する定義式 (7.12) が与えられたものである．A_r 型の場合，小さい r の値に対して具体的に計算すると，

$$\zeta_1(s;\mathfrak{sl}(2)) = \zeta(s), \tag{7.13}$$

$$\zeta_2(s_1,s_2,s_3;\mathfrak{sl}(3)) = \zeta_{MT,2}(s_1,s_2;s_3), \tag{7.14}$$

$$\begin{aligned}&\zeta_3(s_1,s_2,s_3,s_4,s_5,s_6;\mathfrak{sl}(4)) \\ &= \sum_{m_1=1}^{\infty}\sum_{m_2=1}^{\infty}\sum_{m_3=1}^{\infty} m_1^{-s_1}m_2^{-s_2}m_3^{-s_3}(m_1+m_2)^{-s_4}(m_2+m_3)^{-s_5} \\ &\qquad \times (m_1+m_2+m_3)^{-s_6}\end{aligned} \tag{7.15}$$

などとなる．つまり A_r 型Lie環に対する (7.12) はMordell–Tornheimの二重ゼータ関数の一種の一般化を与える多重ゼータ関数の系列になっている．この (7.12) は (6.2) の特別な場合なので，$\mathbf{C}^n$ への有理型解析接続ができ，また前節で言及したような帰納的構造が入ることもわかる．

この種の多重ゼータ関数の特殊値の関係式は，$\mathfrak{g}=\mathfrak{so}(5)$ の場合に津村氏 [113] によって調べられた．また [85] においては津村氏の u-method によって $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(4)$ の場合の関数関係式が求められている．これも一般形は複雑なのでここには述べないが，例えば

$$\begin{aligned}&\zeta_3(s_1,s_2,1,s_3,0,2;\mathfrak{sl}(4)) - \zeta_3(s_1,s_2,2,s_3,0,1;\mathfrak{sl}(4)) \\ &\quad - \zeta_3(1,0,s_2,s_1,2,s_3;\mathfrak{sl}(4)) - \zeta_3(s_1,0,2,1,s_2,s_3;\mathfrak{sl}(4)) \\ &= 3\zeta_{MT,2}(s_1,s_2;s_3+3) + \zeta_{MT,2}(s_1+1,s_2+2;s_3) \\ &\quad - 2\zeta(2)\zeta_{MT,2}(s_1,s_2;s_3+1)\end{aligned} \tag{7.16}$$

といった関係式が示される．また

$$\begin{aligned}&\zeta_3(1,1,1,2,1,2;\mathfrak{sl}(4)) &(7.17)\\&= -\frac{29}{175}\zeta(2)^4+\zeta(3)\zeta(5)-\frac{1}{2}\zeta_{EZ,2}(2,6)\end{aligned}$$

のような特殊値の表示も得られる．

上述したように $\zeta_{MT,2}$ は $\mathfrak{sl}(3)$ のゼータ関数と解釈できるが，小森靖氏はこの立場で捉えたときに，既述した $\zeta_{MT,2}$ の関数関係式が $\mathfrak{sl}(3)$ の Weyl 群の言葉で説明できることを指摘した．この種の Weyl 群による解釈は，$\zeta_W(s;\mathfrak{g})$ の偶数点での値に関する Zagier [124] の議論の中にも既に現れている．小森氏の着想はより一般の (A_r 型とは限らない) Lie 環に対する (7.12) に対しても適用でき，これについて小森氏，津村氏と筆者は現在共同研究 ([63]–[65]) を進めているところである．しかしながら現在のところ，Weyl 群の対称性に基づく説明が可能なのは，既に知られている関数関係式の中でもその一部に過ぎない．ある種の多重ポリログまで考えるとより多くの関数関係式が説明可能になるようであるが，われわれの視界は未だなお，多重ゼータ関数の関数関係式の本質的な成立理由を見通すまでには拡がっていないようである．

注意　本稿では理論の歴史についてある程度詳しく述べたが，決して理論の全貌を網羅しようとしたわけではないことを申し添えておきたい．実際，多くの重要な結果について全く触れることができなかった．Barnes や新谷の多重ゼータ関数についての荒川恒男氏，黒川信重氏，片山孝次氏，金光滋氏らの研究には言及できなかったし，Dedekind 和との関係についても一切述べられなかった．Euler–Zagier 和についての Borwein, Bradley らの研究にも触れていない．また本稿では全く扱わなかったタイプの多重ゼータ関数も，Hoffstein らが導入した多重 Dirichlet 級数や，黒川氏の絶対テンソル積の理論など，重要なものがいろいろとある．これらについてはまた別の方によって解説記事が書かれるのが望ましいであろう．

謝辞　貴重なご助言をお寄せくださった江上繁樹，小森靖，津村博文の各氏およびレフェリーの方に謝意を表しておきたい．

文　献

[1] S. Akiyama, S. Egami and Y. Tanigawa, Analytic continuation of multiple zeta functions and their values at non-positive integers, Acta Arith., **98** (2001), 107–116.

[2] S. Akiyama and H. Ishikawa, On analytic continuation of multiple L-functions and related zeta-functions, In: Analytic Number Theory, (eds. C. Jia and K. Matsumoto), Dev. Math., **6**, Kluwer, 2002, pp. 1–16.

[3] S. Akiyama and Y. Tanigawa, Multiple zeta values at non-positive integers, Ramanujan J., **5** (2001), 327–351.

[4] T. M. Apostol and T. H. Vu, Dirichlet series related to the Riemann zeta function, J. Number Theory, **19** (1984), 85–102.

[5] T. Arakawa and M. Kaneko, Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions, Nagoya Math. J., **153** (1999), 189–209.

[6] T. Arakawa and M. Kaneko, On multiple L-values, J. Math. Soc. Japan, **56** (2004), 967–991.

[7] 荒川恒男・金子昌信, 多重ゼータ値および多重 L 値ノート, 立教大学, 2005.

[8] F. V. Atkinson, The mean-value of the Riemann zeta function, Acta Math., **81** (1949), 353–376.

[9] E. W. Barnes, The genesis of the double gamma functions, Proc. London Math. Soc., **31** (1899), 358–381.

[10] E. W. Barnes, The theory of the G-function, Quart. J. Pure Appl. Math., **31** (1900), 264–314.

[11] E. W. Barnes, The theory of the double gamma function, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A, **196** (1901), 265–387.

[12] E. W. Barnes, On the theory of multiple gamma function, Trans. Cambridge Phil. Soc., **19** (1904), 374–425.

[13] A. A. Beilinson, Higher regulators and values of L-functions (in Russian), Itog. Nauk. Tekhn. Ser. Sovr. Probl. Mat. (Nov. Dost.), **24** (1984), 181–238; English Transl.: J. Soviet Math., **30** (1985), 2036–2070.

[14] S. Bloch, Application of the dilogarithm func-

tion in algebraic K-theory and algebraic geometry, In: Proc. Intern. Symp. on Algebraic Geometry, Kyoto, 1977, (ed. M. Nagata), Kinokuniya, 1978, pp. 103–114.

[15] S. Bloch, Higher Regulators, Algebraic K-Theory, and Zeta Functions of Elliptic Curves, CRM Monogr. Ser., **11**, Amer. Math. Soc., 2000.

[16] S. Bochner, Zeta functions and Green's functions for linear partial differential operators of elliptic type with constant coefficients, Ann. of Math. (2), **57** (1953), 32–56.

[17] A. Borel, Cohomologie de SL_n et valeurs de fonctions zeta aux points entiers, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), **4** (1977), 613–636; Corrige, *ibid.*, **7** (1980), 373.

[18] P. Cassou-Noguès, Analogues p-adiques des fonctions Γ-multiples, In: Journées Arithmétiques de Luminy, 1978, Astérisque, **61**, Soc. Math. France, 1979, pp. 43–55.

[19] P. Cassou-Noguès, Valeurs aux entiers négatifs des fonctions zêta et fonctions zêta p-adiques, Invent. Math., **51** (1979), 29–59.

[20] P. Cassou-Noguès, Applications arithmétiques de l'étude des valeurs aux entiers négatifs des séries de Dirichlet associées a un polynôme, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **31-4** (1981), 1–35.

[21] P. Cassou-Noguès, Prolongement de certaines séries de Dirichlet, Amer. J. Math., **105** (1983), 13–58.

[22] P. Cassou-Noguès, Valeurs aux entiers négatifs des séries de Dirichlet associées a un polynôme I, J. Number Theory, **14** (1982), 32–64; II, Amer. J. Math., **106** (1984), 255–299; III, *ibid.*, **109** (1987), 71–89.

[23] P. Cassou-Noguès, Séries de Dirichlet et intégrales associées à un polynôme à deux indéterminées, J. Number Theory, **23** (1986), 1–54.

[24] M. de Crisenoy, Values at T-tuples of negative integers of twisted multivariable zeta series associated to polynomials of several variables, Compositio Math., **142** (2006), 1373–1402.

[25] S. Egami, Some curious Dirichlet series, 京都大学数理解析研究所講究録, **1091** (1999), 172–174.

[26] S. Egami and K. Matsumoto, Asymptotic expansions of multiple zeta functions and power mean values of Hurwitz zeta functions, J. London Math. Soc. (2), **66** (2002), 41–60.

[27] S. Egami and K. Matsumoto, On the double zeta-function associated with Goldbach's problem, preprint, 2005.

[28] D. Essouabri, Singularités des séries de Dirichlet associées à des polynômes de plusieurs variables et applications à la théorie analytique des nombres, Thèse, Univ. Nancy I, 1995.

[29] D. Essouabri, Singularité des séries de Dirichlet associées à des polynômes de plusieurs variables et applications en théorie analytique des nombres, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **47** (1997), 429–483.

[30] D. Essouabri, Prolongement méromorphe des séries de Dirichlet à support dans un sous-ensemble semi-algébrique de $\boldsymbol{R}^n$, Compositio Math., **114** (1998), 219–261.

[31] D. Essouabri, Fonctions zêta mixtes et applications à la conjecture de Manin sur les variétés toriques et au problème de représentation des entiers, preprint.

[32] A. Fujii, Some problems of Diophantine approximation and a Kronecker limit formula, In: Investigations in Number Theory, (ed. T. Kubota), Adv. Stud. Pure Math., **13**, Kinokuniya, 1988, pp. 215–236.

[33] A. Fujii, Diophantine approximation, Kronecker's limit formula and the Riemann hypothesis, In: Théorie des Nombres/Number Theory, (eds. J.-M. De Koninck and C. Levesque), Walter de Gruyter, 1989, pp. 240–250.

[34] A. B. Goncharov, Polylogarithms and motivic Galois groups, In: Motives, (eds. U. Jannsen *et al.*), Proc. Sympos. Pure Math., **55**, Part 2, Amer. Math. Soc., 1994, pp. 43–96.

[35] A. B. Goncharov, Polylogarithms in arithmetic and geometry, In: Proc. Intern. Congr. Math. Zürich 1994, **1**, Birkhäuser, 1995, pp. 374–387.

[36] A. B. Goncharov, Multiple polylogarithms, cyclotomy and modular complexes, Math. Res. Lett., **5** (1998), 497–516.

[37] A. B. Goncharov, Multiple ζ-values, Galois groups, and geometry of modular varieties, In: European Congr. Math. Barcelona 2000, Vol. I, (eds. C. Casacuberta *et al.*), Progr. Math., **201**, Birkhäuser, 2001, pp. 361–392.

[38] A. Granville, A decomposition of Riemann 's zeta-function, In: Analytic Number Theory, (ed. Y. Motohashi), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **247**, Cambridge Univ. Press, 1997, pp. 95–101.

[39] G. H. Hardy, Notes on some points in the integral calculus LV. On the integration of Fourier series, Messenger of Math., **51** (1922), 186–192.

[40] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Some problems of Diophantine approximation: The lattice points of a right-angled triangle, Proc. London Math. Soc. (2), **20** (1922), 15–36.

[41] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Some problems of Diophantine approximation: The lattice points of a right-angled triangle (second memoir), Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **1** (1922), 212–249.

[42] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Some problems of Diophantine approximation: The analytic character of the sum of a Dirichlet's series considered by Hecke, *ibid.*, **3** (1924), 57–68.

[43] E. Hecke, Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. Eins, *ibid.*, **1** (1921), 54–76.

[44] H. Hida, Elementary Theory of L-functions and Eisenstein Series, London Math. Soc. Stud. Texts, **26**, Cambridge, 1993.

[45] H. Hironaka, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, Ann. of Math. (2), **79** (1964), 109–326.

[46] M. Hoffman, Multiple harmonic series, Pacific J. Math., **152** (1992), 275–290.

[47] L. Hörmander, Linear Partial Differential Operators, Springer, 1976.

[48] J. G. Huard, K. S. Williams and N. Y. Zhang, On Tornheim's double series, Acta Arith., **75** (1996), 105–117.

[49] K. Ihara, M. Kaneko and D. Zagier, Derivation relations and regularized double shuffle relations of multiple zeta values, Compositio Math., to appear.

[50] H. Imai, On the construction of p-adic L-functions, Hokkaido Math. J., **10** (1981), 249–253.

[51] H. Ishikawa, On analytic properties of a multiple L-function, In: Analytic Extension Formulas and their Applications, (eds. S. Saitoh *et al.*), Int. Soc. Anal. Appl. Comput., **9**, Kluwer, 2001, pp. 105–122.

[52] H. Ishikawa, A multiple character sum and a multiple L-function, Arch. Math. (Basel), **79** (2002), 439–448.

[53] H. Ishikawa and K. Matsumoto, On the estimation of the order of Euler–Zagier multiple zeta-functions, Illinois J. Math., **47** (2003), 1151–1166.

[54] T. Kamano, The multiple Hurwitz zeta function and a generalization of Lerch's formula, Tokyo J. Math., **29** (2006), 61–73.

[55] 金子昌信, 多重ゼータ値と多重ベルヌーイ数, 都立大学数学教室セミナー報告, 1997.

[56] 金子昌信, 多重ゼータ値, 数学, **54** (2002), 404–415.

[57] M. Katsurada, An application of Mellin–Barnes' type integrals to the mean square of Lerch zeta-functions, Collect. Math., **48** (1997), 137–153.

[58] M. Katsurada, An application of Mellin–Barnes type of integrals to the mean square of L-functions, Liet. Mat. Rink., **38** (1998), 98–112 (= Lithuanian Math. J., **38** (1998), 77–88).

[59] M. Katsurada and K. Matsumoto, Asymptotic expansions of the mean values of Dirichlet L-functions, Math. Z., **208** (1991), 23–39.

[60] M. Katsurada and K. Matsumoto, Discrete mean values of Hurwitz zeta-functions, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., **69** (1993), 164–169.

[61] M. Katsurada and K. Matsumoto, The mean values of Dirichlet L-functions at integer points and class numbers of cyclotomic fields, Nagoya Math. J., **134** (1994), 151–172.

[62] M. Katsurada and K. Matsumoto, Explicit formulas and asymptotic expansions for certain mean square of Hurwitz zeta-functions I, Math. Scand., **78** (1996), 161–177; II, In: Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory, Proc. 2nd Intern. Conf. in Honour of J. Kubilius, Palanga, 1996, (eds. A. Laurinčikas *et al.*), New Trends in Probab. and Statist., **4**, VSP/TEV, 1997, pp. 119–134; III, Compositio Math., **131** (2002), 239–266.

[63] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, On Witten multiple zeta-functions associated with semisimple Lie algebras II, preprint, 2006.

[64] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, On Witten multiple zeta-functions associated with semisimple Lie algebras III, preprint, 2006.

[65] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Zeta-functions of root systems, preprint, 2006.

[66] T. Q. T. Le and J. Murakami, Kontsevich's integral for the Homfly polynomial and relations between values of multiple zeta functions, Topology Appl., **62** (1995), 193–206.

[67] B. Lichtin, Generalized Dirichlet series and b-functions, Compositio Math., **65** (1988), 81–120; Erratum, **72** (1989), 237–239.

[68] B. Lichtin, Poles of Dirichlet series and D-modules, In: Théorie des Nombres/Number Theory, (eds. J.-M. De Koninck and C. Levesque), Walter de Gruyter, 1989, pp. 579–594.

[69] B. Lichtin, On the moderate growth of generalized Dirichlet series for hypoelliptic polynomials, Compositio Math., **80** (1991), 337–354.

[70] B. Lichtin, The asymptotics of a lattice point problem associated to a finite number of polynomials I, Duke Math. J., **63** (1991), 139–192; II, *ibid.*, **77** (1995), 699–751.

[71] B. Lichtin, The asymptotics of a lattice point problem determined by a hypoelliptic polynomial, In: $\mathscr{D}$-modules and Microlocal Geometry, Walter de Gruyter, 1993, pp. 75–106.

[72] B. Lichtin, Volumes and lattice points — proof of a conjecture of L. Ehrenpreis, In: Singularities, Lille 1991, (ed. J.-P. Brasselet), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **201**, Cambridge Univ. Press, 1994, pp. 211–250.

[73] B. Lichtin, Asymptotics determined by pairs of additive polynomials, Compositio Math., **107** (1997), 233–267.

[74] K. Mahler, Über einen Satz von Mellin, Math. Ann., **100** (1928), 384–398.

[75] K. Mahler, Zur Fortsetzbarkeit gewisser Dirichletscher Reihen, *ibid.*, **102** (1930), 30–48.

[76] K. Matsumoto, Asymptotic series for double zeta, double gamma, and Hecke L-functions, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **123** (1998), 385–405; Corrigendum and addendum, *ibid.*, **132** (2002), 377–384.

[77] K. Matsumoto, Asymptotic expansions of double gamma-functions and related remarks, In: Analytic Number Theory, (eds. C. Jia and K. Matsumoto), Dev. Math., 6, Kluwer, 2002, pp. 243–268.

[78] K. Matsumoto, On the analytic continuation of various multiple zeta-functions, In: Number Theory for the Millennium II, Proc. Millennial Conf. on Number Theory, Urbana-Champaign, 2000, (eds. M. A. Bennett *et al.*), A K Peters, 2002, pp. 417–440.

[79] K. Matsumoto, Asymptotic expansions of double zeta-functions of Barnes, of Shintani, and Eisenstein series, Nagoya Math. J., **172** (2003), 59–102.

[80] K. Matsumoto, On Mordell–Tornheim and other multiple zeta-functions, In: Proc. Session in Analytic Number Theory and Diophantine Equations, (eds. D. R. Heath-Brown and B. Z. Moroz), Bonner Math. Schriften, **360**, Bonn, 2003, n.25, 17pp.

[81] K. Matsumoto, The analytic continuation and the asymptotic behaviour of certain multiple zeta-functions I, J. Number Theory, **101** (2003), 223–243; II, In: Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory, Proc. 3rd Intern. Conf. in Honour of J. Kubilius, Palanga, 2001, (eds. A. Dubickas *et al.*), TEV, 2002, pp. 188–194; III, Comment. Math. Univ. St. Paul., **54** (2005), 163–186.

[82] K. Matsumoto, Functional equations for double zeta-functions, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **136** (2004), 1–7.

[83] K. Matsumoto, Analytic properties of multiple zeta-functions in several variables, In: Number Theory: Tradition and Modernization, Proc. 3rd China-Japan Seminar, Xi'an, 2004, (eds. W. Zhang and Y. Tanigawa), Springer, 2006, pp. 153–173.

[84] K. Matsumoto and Y. Tanigawa, The analytic continuation and the order estimate of multiple Dirichlet series, J. Théor. Nombres Bordeaux, **15** (2003), 267–274.

[85] K. Matsumoto and H. Tsumura, On Witten multiple zeta-functions associated with semisimple Lie algebras I, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **56** (2006), 1457–1504.

[86] K. Matsumoto and H. Tsumura, Generalized multiple Dirichlet series and generalized multiple polylogarithms, Acta Arith., **124** (2006), 139–158.

[87] K. Matsumoto and H. Tsumura, A new method of producing functional relations among multiple zeta-functions, preprint (Tokyo Metrop. Univ. Math. Preprint Ser. 2006 No.1).

[88] K. Matsumoto and H. Tsumura, Functional relations among certain double polylogarithms and their character analogues, preprint, 2006.

[89] K. Matsumoto and L. Weng, Zeta-functions defined by two polynomials, In: Number Theoretic Methods — Future Trends, Proc. 2nd China-Japan Seminar, Iizuka, 2002, (eds. S. Kanemitsu and C. Jia), Dev. Math., 8, Kluwer, 2002, pp. 233–262.

[90] Y. Matsuoka, On the values of a certain Dirichlet series at rational integers, Tokyo J. Math., **5** (1982), 399–403.

[91] H. Mellin, Eine Formel für den Logarithmus transcendenter Funktionen von endlichem Geschlecht, Acta Soc. Sci. Fenn., **29** (1900), no. 4.

[92] H. Mellin, Die Dirichlet'schen Reihen, die zahlentheoretischen Funktionen und die unendlichen Produkte von endlichem Geschlecht, Acta Math., **28** (1904), 37–64.

[93] T. Meurman, A generalization of Atkinson's formula to L-functions, Acta Arith, **47** (1986), 351–370.

[94] L. J. Mordell, On the evaluation of some multiple series, J. London Math. Soc., **33** (1958), 368–371.

[95] Y. Motohashi, A note on the mean value of the zeta and L-functions I, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., **61** (1985), 222–224; II, *ibid.*, 313–316.

[96] T. Nakamura, A functional relation for the Tornheim double zeta function, Acta Arith., to appear.

[97] Y. Ohno, A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values, J. Number Theory, **74** (1999), 39–43.

[98] G. Racinet, Doubles mélanges des polylogarithmes multiplés aux racines de l'unité, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., **95** (2002), 185–231.

[99] P. Sargos, Prolongement méromorphe des séries de Dirichlet associées à des fractions rationnelles de plusieurs variables, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **34-3** (1984), 83–123.

[100] P. Sargos, Croissance de certaines séries de Dirichlet et applications, J. Reine Angew. Math., **367** (1986), 139–154.

[101] T. Shintani, On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., **23** (1976), 393–417.

[102] T. Shintani, On a Kronecker limit formula for real quadratic fields, *ibid.*, **24** (1977), 167–199.

[103] T. Shintani, On values at $s = 1$ of certain L functions of totally real algebraic number fields, In: Algebraic Number Theory, (ed. S. Iyanaga), Japan Soc. Promot. Sci., 1977, pp. 201–212.

[104] T. Shintani, On certain ray class invariants of real quadratic fields, J. Math. Soc. Japan, **30** (1978), 139–167.

[105] M. V. Subbarao and R. Sitaramachandrarao, On some infinite series of L. J. Mordell and their

analogues, Pacific J. Math., **119** (1985), 245–255.

[106] T. Terasoma, Mixed Tate motives and multiple zeta values, Invent. Math., **149** (2002), 339–369.

[107] 寺杣友秀, 周期積分と多重ゼータ値, 数学, **57** (2005), 255–266.

[108] E. C. Titchmarsh, The Theory of the Riemann Zeta-function, Oxford, 1951.

[109] L. Tornheim, Harmonic double series, Amer. J. Math., **72** (1950), 303–314.

[110] H. Tsumura, On some combinatorial relations for Tornheim's double series, Acta Arith., **105** (2002), 239–252.

[111] H. Tsumura, On alternative analogues of Tornheim's double series, Proc. Amer. Math. Soc., **131** (2003), 3633–3641.

[112] H. Tsumura, Evaluation formulas for Tornheim's type of alternating double series, Math. Comp., **73** (2003), 251–258.

[113] H. Tsumura, On Witten's type of zeta values attached to $SO(5)$, Arch. Math. (Basel), **84** (2004), 147–152.

[114] H. Tsumura, On Mordell–Tornheim zeta values, Proc. Amer. Math. Soc., **133** (2005), 2387–2393.

[115] H. Tsumura, Certain functional relations for the double harmonic series related to the double Euler numbers, J. Austral. Math. Soc. Ser. A, **79** (2005), 319–333.

[116] H. Tsumura, On functional relations between the Mordell–Tornheim double zeta functions and the Riemann zeta function, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., to appear.

[117] H. Tsumura, On some functional relations between Mordell–Tornheim double L-functions and Dirichlet L-functions, J. Number Theory, **120** (2006), 161–178.

[118] I. Vardi, Determinants of Laplacians and multiple gamma functions, SIAM J. Math. Anal., **19** (1988), 493–507.

[119] E. Witten, On quantum gauge theories in two dimensions, Comm. Math. Phys., **141** (1991), 153–209.

[120] Maoxiang Wu, On analytic continuation of Mordell–Tornheim and Apostol–Vu L-functions (in Japanese), Master Thesis, Nagoya Univ., 2003.

[121] D. Zagier, Hyperbolic manifolds and special values of Dedekind zeta-functions, Invent. Math., **83** (1986), 285–301.

[122] D. Zagier, The Bloch–Wigner–Ramakrishnan polylogarithm function, Math. Ann., **286** (1990), 613–624.

[123] D. Zagier, Polylogarithms, Dedekind zeta functions, and the algebraic K-theory of fields, In: Arithmetic Algebraic Geometry, (eds. G. van der Geer *et al.*), Progr. Math., **89**, Birkhäuser, 1991, pp. 391–430.

[124] D. Zagier, Values of zeta functions and their applications, In: First European Congr. Math. Vol. II, (eds. A. Joseph *et al.*), Progr. Math., **120**, Birkhäuser, 1994, pp. 497–512.

[125] J. Zhao, Analytic continuation of multiple zeta functions, Proc. Amer. Math. Soc., **128** (2000), 1275–1283.

(2006年3月20日提出)

(まつもと こうじ・名古屋大学大学院多元数理科学研究科)