書　評

M. Ram Murty and V. Kumar Murty: Non-vanishing of L-Functions and Applications,

Progr. Math., 157, Birkhäuser, 1997年，196ページ.

松　本　耕　二

今日ゼータ関数，L 関数と総称される一群の複素有理型関数の中で，歴史上最初に発見されたのは Euler, Riemann による Riemann のゼータ関数 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ $(s \in C)$ と，それを Dirichlet 指標 $\chi(n)$ で捻った Dirichlet の L 関数 $L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{-s}$ である．これらはそれぞれ

$$\zeta(s)=\prod_p \left(1-p^{-s}\right)^{-1}, \qquad L(s,\chi)=\prod_p \left(1-\chi(p)p^{-s}\right)^{-1}$$

の形のいわゆる Euler 積表示（右辺の積は素数全体にわたる）を持つことから，素数分布論への応用を目的として導入された．続いて n^{-s} を $(n+a)^{-s}$ に変形した Hurwitz のゼータ関数や，代数体へと拡張した Dedekind のゼータ関数，Hecke の L 関数などが導入された．その後も続々と新しいタイプのゼータ関数，L 関数が定義され，現在では非常に多くのタイプのゼータ関数，L 関数が数学の諸分野で縦横に駆使されている．

これらゼータ関数，L 関数の個々のものについては，詳しい解説を与えた教科書，専門書が数多く出版されている．しかし，種々のゼータ関数，L 関数を横断的に取り上げた解説書は，岩波数学辞典

の‘ゼータ関数’の項などの僅かな例外を除くとほとんど存在しない．その理由のひとつは，ゼータ関数，L 関数の種類によってその関係する数学の分野が異なるため，多くのゼータ関数，L 関数を取り上げるためには幅広い諸分野についての深い知識が必要となり，実際にそのような本を書くことのできる研究者が極めて限定されてしまう，という点にあると思われる．

本書は，このように困難な，ゼータ関数の理論の横断的な紹介に成功している稀有な例といえる．著者の M. Ram Murty 氏と V. Kumar Murty 氏は，共にカナダ在住のインド人の兄弟で，ふたりとも整数論の権威として世界的に著名な研究者である．ふたりは共に，数多くのゼータ関数，L 関数が関係する広い範囲を研究分野としており，本書のような横断的な解説書を書くことができる，数少ない現役の研究者の中に数え上げられる．しかも，どちらかというと Ram Murty 氏は解析的，Kumar Murty 氏は代数的な傾向があり，そうしたふたりの資質の違いがうまく相補って本書の記述を作り出しているようである．

本書における横断的な構成の横糸となるのが，表題にある non-vanishing theorems，すなわちゼータ関数，L 関数の値がいつ 0 にならないか，を記述した諸定理である．そもそもゼータ関数，L 関数は複素有理型関数なのであるから，その零点分布が重要な情報を与えることは自明の理であるが，いくつかの non-vanishing theorems は整数論などへの重大な応用を持つために極めて大きい意義を持つ．例えばゼータ関数の理論における最初の non-vanishing theorem というべき，Riemann の $\zeta(s)$ が直線 $\Re s = 1$ の上で 0 にならないという定理は，x までの素数の個数が $x/\log x$ で近似できるという，いわゆる素数定理の証明の鍵となった結果である．本書の特に前半ではこの形の non-vanishing theorems が主題となっている．

素数定理の伝統的な証明においては，$3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta$ が任意の実数 θ に対して非負であるという簡単な事実が重要な鍵として用いられるが，本書第一章においてはこのアイデアを一般化した Kumar Murty の定理が証明され，それと Tauber 型の定理を結び付けることによって，上述の non-vanishing theorem および素数定理の証明が実行されている．また Dirichlet の L 関数，Dedekind のゼータ関数，Hecke の L 関数への一般化も与えられている．

第二章では Artin の L 関数が導入され，その non-vanishing theorem と，素数定理の一種の精密化としての (誤差項付き) Chebotarev 密度定理が示される．第二章はこの他にも，Artin の L 関数の正則性に関する Artin の予想，Dedekind ゼータ関数の比の正則性に関する荒又–Brauer の定理や内田–van der Waall の定理，共役類中の素イデアルの最小ノルムの評価など内容豊富である．第三章ではコンパクト位相群の複素線型表現に付随した L 関数についての Deligne の素数定理が紹介される．

極めて重要な L 関数のクラスのひとつは保型形式に付随した L 関数である．Murty 兄弟はこの方面でも多くの優れた業績をあげており，本書でもその第四章，第六章において保型 L 関数が扱われている．第四章では古典的な $SL_2(\mathbb{Z})$ とその合同部分群に関する保型形式とその L 関数が導入され，それに付随する symmetric power L 関数の Ram Murty による non-vanishing theorem が証明され，佐藤–Tate 予想や保型形式の Fourier 係数のべき和の評価が論じられている．

以上第四章までは $\Re s = 1$ 上での non-vanishing が論じられてきたが，non-vanishing を考察すべき対象はこの線上に限られるわけではない．特に近年，点 $s = 1/2$ で L 関数が 0 になるかどうか，を調べた研究が数多く現れるようになった．応用上重要な多くのゼータ関数，L 関数はその s での値と $1 - s$ での値が結び付く，という形の関数等式を持つ (あるいは少なくとも，持つと予想されている)

ので，点 $s=1/2$ は関数等式の折り返しの中心点であり，従ってそこでの L 関数の挙動が重要な意味を持つことは容易に想像がつくであろう．

この種の non-vanishing theorem として，まず第五章では Dirichlet の L 関数が取り扱われる．任意の Dirichlet L 関数について $L(1/2,\chi)\neq 0$ であろう，という予想があるが，これに関連してこの章では，指標 χ の適当な族を考え，その族のある一定の割合以上の指標については $L(1/2,\chi)\neq 0$ である，といった類の定理が紹介されている．その証明のためには L 関数の平均値の精密な計算が必要で，$L(1/2,\chi)$ をある種の Mellin 変換型の積分で表示し，それに対して Pólya–Vinogradov や Jutila による指標和の評価を用いた，かなり込み入った計算が実行されている．

第六章では保型 L 関数を二次指標で捻ったタイプの L 関数について，その $s=1$ での値の non-vanishing が考察される．この場合，関数等式は s と $2-s$ との関係を与えるので，$s=1$ が折り返しの中心点になっている．D を二次体の判別式として，法 D の二次指標で捻った L 関数の 1 での値が 0 にならないような D が無限個存在する，というこの章の主結果は Kumar Murty の 1991 年の未発表原稿に基づくもので，本書において初めて公表されたものである．

第七章では Selberg クラスが扱われる．本書の今までの章で登場したものがそうであったように，ゼータ関数，L 関数の多くのものは Euler 積や関数等式を満たす (あるいは満たすと予想されている) が，Selberg はこうしたいくつかの基本的な性質を満足する Dirichlet 級数のクラスを統一的に考察した．そしてそのクラスに属する関数が満たすであろういくつかの性質を予想した．本章では Selberg クラスの関数の持ついくつかの基本的な性質が紹介され，次いで Selberg の予想が Artin の予想やある種の non-vanishing theorem を導くことが証明されている．

本書では以上のような大変豊富な内容を，200 ページに満たない分量の中で解説しているため，どうしてもその記述はしばしばかなり凝縮されたものになっている．従って，決してすらすらと読める本ではない．例えば第二章では Artin の L 関数を，また第四章では保型形式とその L 関数の理論を，一応その定義から説き起こして紹介しているが，記述は簡潔であり，基本的な定理のいくつかはその証明が省略されている．既にある程度理論になじんでいる読者が知識を整理するには役立つ記述であるが，こうした理論を一から学習しようとする場合には十分な記述とはいえないであろう．

また本書はその題材のうちのかなりの部分を著者たちの論文からとっているが，そうした部分の記述はほとんど原論文の引写しに近い部分もあり，さらには原論文の方が記述が丁寧な場合すらある．省略が激しい個所の例を少しだけ挙げると，例えば p.13 の 3 行目と 4 行目，$\delta\to 0$ の極限を積分記号下でとって良いことは，積分を一旦，$-\infty$ から $-A$，$-A$ から A，A から ∞ と三区間に区切り，無限区間の部分の A に関する大きさを丁寧に評価しないと証明できないように思われる．あるいはまた，p.106 の 2 行目の式の証明は本書には何も書かれていないが，Jutila の原論文には証明が与えられている．

ミスプリントも散見する．例えば p.86 の下から 5 行目の式の右辺の分子は $\sin n\theta$ ではなく $\sin 2n\theta$ である．その次のページの 8 行目の式の和は 0 から ∞ までと書かれているが正しくは 0 から $2m-1$ までである．さらにその次のページの下から 7 行目の式の右辺では二項係数

$$\binom{r}{k}$$

が脱落している．Lemma 8.5 の (ii) の式の左辺においては今度は二項係数が一個余分である．

このようなスタイルの本であるため，初学者がこの本を独学で学習しようとすると，かなりの困難を伴うであろう．それよりは，大学院生数名が集まってセミナー形式で読み進む方が読み方としてふさわしい．適切な指導者の下で読めば時間の節約にはなるであろうが，本当は，院生同士で，ああでもない，こうでもないと議論を交わしながらじっくりと読むのが最も楽しい読み方ではないかと思う．また専門家にとっても，この方面の知識を整理する上では大いに役立つのではなかろうか．

ゼータ関数，L 関数の non-vanishing の理論は，本書に紹介された内容にとどまるものではもちろんない．本書においても，関連する諸結果についてのコメントが随所に見られるし，また末尾には第八章として簡単な補足と文献案内も付けられている．しかしながら本書の出版後も，non-vanishing の理論は急速に進展している．本書の出版から既に 10 年が経過しているため，いろいろと out-of-date になってしまっている部分があることは否めない．

だが，non-vanishing の理論の解説書としての本書の価値は決して失われてはいない．例えば第四章の，佐藤–Tate 予想に関連した部分の簡明でエレガントな論法は，最近のこの方面での大発展にもかかわらず，依然として興味深いものである．また第五章，第六章で展開される証明の技術的な細部は，かなり複雑で長いものであるが，解析的整数論における L 関数の扱いのひとつのスタンダードな手法の良い紹介となっている．優れた expository な書物に与えられる Catalan 研究所の Ferran Sunyer i Balaguer 賞を 1996 年に受賞していることも，この本への評価の高さをうかがわせる．

従って，上述したような細部におけるさまざまな欠点にもかかわらず，本書はゼータ関数，L 関数の理論におけるかけがえのない，大変有意義な書物である，というのが評者の結論である．

(2007 年 4 月 3 日提出)

(まつもと こうじ・名古屋大学大学院多元数理科学研究科)